Machine Translated by Google

GLOBAL
EDICIÓN

Precálculo

Undécima edición

sullivan

Machine Translated by Google

Para el estudiante

Al comenzar, es posible que se sienta ansioso por la cantidad de teoremas, definiciones, procedimientos y ecuaciones. Quizás te preguntes si podrás aprenderlo todo a tiempo. No se preocupe, sus preocupaciones son normales. Este libro de texto fue escrito pensando en usted. Si asiste a clases, trabaja duro y lee y estudia este texto, desarrollará el conocimiento y las habilidades que necesita para tener éxito. A continuación le mostramos cómo puede utilizar el texto en su

Lea cuidadosamente

Cuando estás ocupado, es fácil saltarse la lectura e ir directamente a los problemas. No... el texto tiene una gran cantidad de ejemplos y explicaciones claras para ayudarle a dividir las matemáticas en pasos fáciles de entender. La lectura le proporcionará una comprensión más clara, más allá de la simple memorización. Lee antes de clase (no después) para que puedas hacer preguntas sobre cualquier cosa que no hayas entendido. Te sorprenderá cuánto más sacarás de clase si haces esto.

Utilice las funciones

Utilizo muchos métodos diferentes en el aula para comunicarme. Esos métodos, cuando se incorporan al texto, se denominan "características". Las funciones sirven para muchos propósitos, desde brindar una revisión oportuna del material que aprendió antes (justo cuando lo necesita) hasta brindar sesiones de revisión organizadas para ayudarlo a prepararse para pruebas y cuestionarios. Aprovecha las funciones y dominarás el material.

Para hacerlo más fácil, proporcionamos una breve guía para aprovechar al máximo este texto. Consulte "Prepararse para la clase", "Práctica" y "Repaso" al principio del texto. Dedique quince minutos a revisar la guía y familiarizarse con las funciones hojeando los números de página proporcionados. Luego, mientras lees, úsalos. Esta es la mejor manera de aprovechar al máximo tu texto.

No dude en ponerse en contacto conmigo a través de Pearson si tiene alguna pregunta, comentario o sugerencia para mejorar este texto. Espero tener noticias tuyas y buena suerte con todos tus estudios.

¡Los mejores deseos!

Machine Translated by Google

Esta página se ha dejado en blanco intencionalmente

Machine Translated by Google

Prepárese para la clase "Lea el libro"

Característica	Descripción	Beneficio	Página
Cada apertura de capítulo comienza con . . .			
Capítulo-Apertura Tema y proyecto	Cada capítulo comienza con una discusión de un tema de interés actual y termina con un proyecto relacionado.	El proyecto te permite aplicar lo aprendido para resolver un problema relacionado con el tema.	294
Basado en Internet Proyecto	Los proyectos permiten la integración de la tecnología de hojas de cálculo que necesitará para ser un miembro productivo de la fuerza laboral.	Los proyectos te dan la oportunidad de colaborar y utilizar las matemáticas para lidiar con temas de interés actual.	396
Cada sección comienza con . . .			
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE 2	Cada sección comienza con una lista de objetivos. Los objetivos también aparecen en el texto donde se cubre el objetivo.	Estos enfocan su estudio enfatizando qué es lo más importante y dónde encontrarlo.	319
Las secciones contienen. . .			
PREPARANDO PARA ESTA SECCIÓN	La mayoría de las secciones comienzan con una lista de conceptos clave para revisar con números de página.	¿Alguna vez olvidaste lo que has aprendido? Esta función destaca el material aprendido previamente que se utilizará en esta sección. Revíselo y siempre estará preparado para seguir adelante.	315
Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' Problemas	Problemas que evalúan si tiene los conocimientos previos necesarios para la siguiente sección.	¿No está seguro de necesitar la revisión de Preparación para esta sección? Trabaja el '¿Estás preparado?' problemas. Si se equivoca, sabrá exactamente qué necesita revisar y dónde hacerlo.	315, 326
Ahora trabaja problemas	Estos siguen a la mayoría de los ejemplos y le dirigen a un ejercicio relacionado.	Aprendemos mejor haciendo. Solidificará su comprensión de los ejemplos si intenta resolver un problema similar de inmediato, para asegurarse de comprender lo que acaba de leer.	322, 327
ADVERTENCIA	Las advertencias se proporcionan en el texto.	Estos señalan errores comunes y le ayudan a evitarlos.	349
Exploración y Ver el concepto	Estas actividades de utilidad gráfica presagian un concepto o solidifican un concepto recién presentado.	Obtendrá una comprensión más profunda e intuitiva de teoremas y definiciones.	310, 335
En palabras	Estos proporcionan descripciones alternativas de definiciones y teoremas seleccionados.	¿Alguna vez las matemáticas te parecen extrañas? Esta función traduce las matemáticas al inglés sencillo.	332
Cálculo	Estos aparecen junto a información esencial para el estudio del cálculo.	Preste atención: si dedica más tiempo ahora, ¡lo hará mejor más adelante!	90, 299, 322
EJEMPLOS DE MUESTRA	Estos ejemplos proporcionan instrucciones prácticas al ofrecer un enfoque guiado paso a paso para resolver un problema.	Con cada paso presentado a la izquierda y las matemáticas mostradas a la derecha, puede ver inmediatamente cómo se utiliza cada paso.	261
¡Modelalo! Ejemplos y problemas	Estos ejemplos y problemas requieren que usted construya un modelo matemático “Resuelva la siguiente ecuación”. Más bien, provienen de una descripción verbal o de datos. La ecuación debe desarrollarse con base en La tarea ¡Modelelo! Los problemas son la explicación del problema. Estos problemas están marcados con títulos morados.	Requiere que desarrolles modelos para encontrar una solución al problema.	339, 368
¡NUEVO! ¿Necesita revisar?	Estas notas al margen proporcionan un recordatorio justo a tiempo de un concepto necesario ahora, pero tratado en una sección anterior del libro. Cada nota tiene una referencia al capítulo, sección y página donde se discutió originalmente el concepto.	A veces, mientras lees, te encuentras con una palabra o concepto que sabes que has visto antes, pero no recuerdas exactamente lo que significa. Esta función le indicará dónde aprendió la palabra o concepto por primera vez. Una revisión rápida ahora le ayudará a ver la conexión con lo que está aprendiendo por primera vez y le facilitará recordar la próxima vez.	308

Machine Translated by Google

Practica “Resolver los problemas”

Característica	Descripción	Beneficio	Página
'¿Estas preparado?' Problemas	Estos evalúan su retención del material de requisitos previos que necesitará. Las respuestas se dan al final de los ejercicios de la sección. Esta función está relacionada con la función Preparación para esta sección.	¿Recuerdas siempre lo que has aprendido? Resolver estos problemas es la mejor manera de averiguarlo. Si se equivoca, sabrá exactamente qué necesita revisar y dónde hacerlo.	332, 340
Conceptos y Vocabulario	Estas preguntas de respuesta corta, principalmente preguntas de completar espacios en blanco, de opción múltiple y de verdadero/falso, evalúan su comprensión de las definiciones y conceptos clave de la sección actual.	Es difícil aprender matemáticas sin conocer el lenguaje de las matemáticas. Estos problemas ponen a prueba tu comprensión de las fórmulas y el vocabulario.	326
Desarrollo de habilidades	Estos problemas, correlacionados con los ejemplos de las secciones, proporcionan una práctica sencilla.	Es importante profundizar y desarrollar tus habilidades. Estos problemas le brindan amplias oportunidades para hacerlo.	326–328
Aplicaciones y Extensiones	Estos problemas le permiten aplicar sus habilidades a problemas del mundo real. También permiten ampliar conceptos aprendidos en la sección.	Verás que el material aprendido en la sección tiene muchos usos en la vida cotidiana.	329–331
¡NUEVO! Problemas de desafío	Estos problemas se han agregado en la mayoría de las secciones y aparecen al final de los ejercicios de Aplicación y Extensiones. Su objetivo es invitar a la reflexión y requerir algo de ingenio para resolverlos.	¿Eres un estudiante al que le gusta que le desafíen? ¡Entonces los Problemas del Desafío son para ti! Su profesor también podría optar por asignar un problema desafiante como un proyecto grupal. La capacidad de trabajar en equipo es una habilidad muy apreciada en el mundo laboral.	331
Explicando conceptos: Discusión y Escribiendo	Los problemas de “Discusión y escritura” están coloreados en rojo. Apoyan la discusión en clase, la verbalización de ideas matemáticas y la redacción y proyectos de investigación.	Verbalizar una idea o describirla claramente por escrito demuestra una comprensión real. Estos problemas alimentan esa comprensión. Muchos son desafiantes, pero obtendrás lo que pongas.	331
Conserve su Conocimiento	Estos problemas le permiten practicar el contenido aprendido anteriormente en el curso.	Es difícil recordar cómo resolver los diferentes tipos de problemas que encontrará a lo largo del curso. Esta práctica te ayuda a recordar.	331
Ahora trabaja problemas	Muchos ejemplos te remiten a un problema de tarea relacionado. Estos problemas relacionados están marcados con un lápiz y números naranjas.	Si se queda atascado mientras resuelve problemas, busque el problema Now Work más cercano y consulte el ejemplo relacionado para ver si le ayuda.	324, 325
Ejercicios de revisión	Cada capítulo concluye con una lista completa de ejercicios para practicar. Utilice la lista de objetivos para determinar el objetivo y los ejemplos que corresponden a los problemas.	Resuelva estos problemas para asegurarse de comprender todas las habilidades y conceptos del capítulo. Piense en ello como una revisión exhaustiva del capítulo.	391–394

Machine Translated by Google

Revise “Estudiar para cuestionarios y exámenes”

Característica	Descripción	Beneficio	Página
La revisión del capítulo al final de cada capítulo contiene. . .			
Cosas que saber	Una lista detallada de teoremas, fórmulas y definiciones importantes del capítulo.	¡Revíselos y conocerá el material más importante del capítulo!	389–390
Deberías ser capaz a . . .	Contiene una lista completa de objetivos por sección, ejemplos que ilustran el objetivo y ejercicios de práctica que ponen a prueba su comprensión del objetivo.	Haz los ejercicios recomendados y habrás dominado el material clave. Si se equivoca en algo, regrese y trabaje en el objetivo enumerado e inténtelo de nuevo.	390–391
Ejercicios de revisión	Estos proporcionan una revisión y práctica integral de habilidades clave, adaptadas a los objetivos de aprendizaje de cada sección.	La práctica hace la perfección. Estos problemas combinan ejercicios de todas las secciones, brindándole una revisión completa en un solo lugar.	391–394
Prueba de capítulo	Entre 15 y 20 problemas que se pueden realizar como prueba de capítulo. Asegúrese de realizar la prueba del capítulo en condiciones de prueba, ¡sin notas!	Estar preparado. Realice el examen de práctica de muestra en condiciones de prueba. Esto lo preparará para la prueba de su instructor. Si se equivoca en un problema, puede ver el vídeo de preparación para el examen del capítulo.	394
Revisión acumulativa	Estos conjuntos de problemas aparecen al final de cada capítulo, comenzando con el Capítulo 2. Combinan problemas de capítulos anteriores, proporcionando una revisión acumulativa continua. Cuando los uses junto con los problemas de Conserva tus conocimientos, estarás listo para el examen final.	Estos conjuntos de problemas son realmente importantes. Completarlos asegurará que no olvide nada a medida que avanza. Esto contribuirá en gran medida a mantenerte preparado para el examen final.	395
Proyectos del Capítulo	Los proyectos del capítulo se aplican a lo que has aprendido en el capítulo. Hay proyectos adicionales disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC).	Los Proyectos del capítulo le brindan la oportunidad de utilizar lo que ha aprendido en el capítulo en el tema inicial. Si su instructor lo permite, estas son excelentes oportunidades para trabajar en grupo, que suele ser la mejor manera de aprender matemáticas.	396
Basado en Internet Proyectos	En capítulos seleccionados, se presenta un proyecto basado en la Web.	Estos proyectos le brindan la oportunidad de colaborar y utilizar las matemáticas para abordar temas de interés actual mediante el uso de Internet para investigar y recopilar datos.	396

Machine Translated by Google

A la Memoria de
Mi madre y padre

Machine Translated by Google

Precálculo

Undécima edición

Edición global

Michael Sullivan
Universidad Estatal de Chicago

Pearson

Machine Translated by Google

Gestión de productos: Gargi Banerjee y Neelakantan KK

Estrategia de contenido: Shabnam Dohutia, Amrita Naskar, Deeptesh sen

Suplementos: Bedasree Das

Estudio Digital: Vikram Medepalli y Abhilasha Watsa

Derechos y permisos: Anjali Singh y Ashish Vyas

Crédito de la foto de portada: Raúl Jichici/Shutterstock

Comuníquese con https://support.pearson.com/getsupport/s/contactsupport si tiene alguna consulta sobre este contenido.

Pearson educación limitada

kao dos

Parque KAO

harlow

CM17 9SR

Reino Unido

y Empresas Asociadas en todo el mundo

Visítenos en la World Wide Web en: www.pearsonglobaleditions.com

© Pearson Educación Limitada 2024

Los derechos de Michael Sullivan a ser identificado como el autor de este trabajo han sido ejercidos por él de conformidad con la Ley de derechos de autor, diseños y patentes de 1988.

Adaptación autorizada de la edición de Estados Unidos, titulada © 2020. Precálculo , 11ª edición, ISBN 9780135189405, por Michael Sullivan, publicado por educación Pearson

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede reproducirse, almacenarse en un sistema de recuperación ni transmitirse de ninguna forma ni por ningún medio, electrónico, mecánico, fotocopia, grabación o de otro tipo, sin el permiso previo por escrito del editor o una licencia que permita la copia restringida. en el Reino Unido emitido por Copyright Licensing Agency Ltd, Saffron House, 6–10 Kirby Street, Londres EC 1N 8TS.

Todas las marcas comerciales utilizadas en este documento son propiedad de sus respectivos dueños. El uso de cualquier marca registrada en este texto no confiere al autor o editor ninguna marca registrada. derechos de propiedad sobre dichas marcas comerciales, ni el uso de dichas marcas comerciales implica ninguna afiliación o respaldo de este libro por parte de dichos propietarios.

Las atribuciones de contenido de terceros aparecen en la página C-1, que constituye una extensión de esta página de derechos de autor.

MICROSOFT® Y WINDOWS® SON MARCAS REGISTRADAS DE MICROSOFT CORPORATION EN EE.UU. Y OTROS PAÍSES. CAPTURAS DE PANTALLA E ICONOS REPRODUCIDAS CON EL PERMISO DE MICROSOFT CORPORATION. ESTE LIBRO NO ESTÁ PATROCINADO NI RESPALDADO NI AFILIADO CON MICROSOFT CORPORATION.

MICROSOFT Y/O SUS RESPECTIVOS PROVEEDORES NO HACEN DECLARACIONES SOBRE LA IDONEIDAD DE LA INFORMACIÓN CONTENIDOS EN LOS DOCUMENTOS Y GRÁFICOS RELACIONADOS PUBLICADOS COMO PARTE DE LOS SERVICIOS PARA CUALQUIER FINALIDAD. TODOS DICHOS DOCUMENTOS Y GRÁFICOS RELACIONADOS SE PROPORCIONAN "TAL CUAL" SIN GARANTÍA DE NINGÚN TIPO. MICROSOFT Y/O SUS RESPECTIVOS PROVEEDORES POR EL PRESENTE RENUNCIA A TODAS LAS GARANTÍAS Y CONDICIONES CON RESPECTO A ESTA INFORMACIÓN, INCLUYENDO TODAS LAS GARANTÍAS Y CONDICIONES DE COMERCIABILIDAD, YA SEA EXPRESAS, IMPLÍCITAS O LEGALES, IDONEIDAD PARA UN PROPÓSITO PARTICULAR, TÍTULO Y NO INFRACCIÓN. EN NINGÚN CASO MICROSOFT Y/O SUS RESPECTIVOS PROVEEDORES SERÁN RESPONSABLES DE NINGÚN

DAÑOS ESPECIALES, INDIRECTOS O CONSECUENCIALES O CUALQUIER DAÑO QUE RESULTE DE LA PÉRDIDA DE USO, DATOS O GANANCIAS, YA SEA EN UNA ACCIÓN CONTRACTUAL, NEGLIGENCIA U OTRA ACCIÓN TORTIOSA, QUE SURJA DE O ESTÉ RELACIONADO CON EL USO O DESEMPEÑO DE LA INFORMACIÓN DISPONIBLE A TRAVÉS DE LOS SERVICIOS . LOS DOCUMENTOS Y GRÁFICOS RELACIONADOS CONTENIDOS EN ESTE DOCUMENTO PODRÍAN INCLUIR IMPRECISIONES TÉCNICAS O ERRORES TIPOGRÁFICOS. SE AGREGAN CAMBIOS PERIÓDICAMENTE A LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN ESTE DOCUMENTO. MICROSOFT Y/O SUS RESPECTIVOS PROVEEDORES PUEDEN REALIZAR MEJORAS Y/O

CAMBIOS EN EL(LOS) PRODUCTO(S) Y/O EL(LOS) PROGRAMA(S) AQUÍ DESCRITO(S) EN CUALQUIER MOMENTO. LAS CAPTURAS PARCIALES DE PANTALLA PUEDEN VERSE COMPLETAS DENTRO DE LA VERSIÓN DE SOFTWARE ESPECIFICADA.

PEARSON, ALWAYS LEARNING y MYLAB™MATH son marcas comerciales exclusivas propiedad de Pearson Education, Inc. o sus filiales en los EE. UU. y/u otros países.

A menos que se indique lo contrario en este documento, cualquier marca comercial de terceros que pueda aparecer en este trabajo es propiedad de sus respectivos dueños y cualquier referencia a marcas comerciales, logotipos u otras marcas comerciales de terceros. La vestimenta tiene fines demostrativos o descriptivos únicamente. Tales referencias no pretenden implicar cualquier patrocinio, respaldo, autorización o promoción de los productos de Pearson por parte de los propietarios de dichas marcas, o cualquier relación entre el propietario y Pearson Education, Inc. o sus afiliados, autores, licenciatarios o distribuidores.

Este libro electrónico es un producto independiente y puede incluir o no todos los recursos que formaban parte de la versión impresa. Tampoco proporciona acceso a otros productos digitales de Pearson como MyLab y Mastering. El editor se reserva el derecho de eliminar cualquier material de este libro electrónico en cualquier momento.

ISBN-10: 1-292-44452-5
ISBN-13: 978-1-292-44452-9 Libro
electrónico ISBN-13: 978-1-292-44447-5

Datos de catalogación en publicación de la Biblioteca Británica
Un registro de catálogo de este libro está disponible en la Biblioteca Británica.

1 23

Composición tipográfica de
Straive eBook formateado por B2R Technologies Pvt. Limitado. Limitado.

Machine Translated by Google

Contenido

Tres series distintas 20

La serie insignia 21

Prefacio al instructor 22

Aproveche al máximo MyLab Math 27

Recursos para el éxito 28

Índice de aplicaciones 30

1 Gráficos 37

1.1 Las fórmulas de distancia y punto medio 38
Utilice la fórmula de distancia • Utilice la fórmula del punto medio

1.2 Gráficas de ecuaciones en dos variables; Intercepciones; Ecuaciones de gráficos de simetría 45
trazando puntos • Encontrar intersecciones en un gráfico • Encontrar intersecciones en una ecuación • Probar la simetría de una ecuación con respecto al eje x, el eje y y el origen • Saber cómo graficar ecuaciones clave

1.3 Rectas 56
Calcular e interpretar la pendiente de una recta • Graficar rectas dado un punto y la pendiente • Encontrar la ecuación de una recta vertical • Usar la forma punto-pendiente de una recta; Identificar líneas horizontales • Usar la forma pendiente-intersección de una línea • Encontrar la ecuación de una línea dados dos puntos • Graficar líneas escritas en forma general usando intersecciones • Encontrar ecuaciones de líneas paralelas • Encontrar ecuaciones de líneas perpendiculares

1.4 Círculos 71
Escribir la forma estándar de la ecuación de un círculo • Graficar un círculo • Trabajar con la forma general de la ecuación de un círculo

Revisión del capítulo 78

Prueba de capítulo 80

Proyecto del Capítulo 80

2 Funciones y sus gráficas 82

2.1 Funciones 83
Describir una relación • Determinar si una relación representa una función • Usar notación de funciones; Encuentre el valor de una función • Encuentre la diferencia Cociente de una función • Encuentre el dominio de una función definida por un Ecuación • Formar la suma, diferencia, producto y cociente de dos Funciones

2.2 La gráfica de una función 99
Identificar la gráfica de una función • Obtener información de o sobre la Gráfica de una función

2.3 Propiedades de las funciones 109
Identificar funciones pares e impares a partir de una gráfica • Identificar funciones pares e impares Funciones a partir de una ecuación • Utilice una gráfica para determinar dónde una función es creciente, decreciente o constante • Utilice una gráfica para localizar local

Machine Translated by Google

Máximos y mínimos locales • Utilice una gráfica para localizar el máximo absoluto y el mínimo absoluto • Utilice una utilidad gráfica para aproximar los valores locales Máximos y mínimos locales y para determinar dónde aumenta o disminuye una función • Encuentre la tasa de cambio promedio de una función

2.4 Biblioteca de Funciones; Funciones definidas por partes 122

Grafique las funciones enumeradas en la Biblioteca de funciones • Analice una Función definida por partes

2.5 Técnicas gráficas: transformaciones Graficar funciones 134
usando desplazamientos verticales y horizontales • Graficar funciones usando compresiones y estiramientos • Graficar funciones usando reflexiones sobre los ejes x y y

2.6 Modelos matemáticos: construcción de funciones Construcción 147
y análisis de funciones

Revisión del capítulo 153

Prueba de capítulo 157

Revisión acumulativa 158

Proyectos del Capítulo 158

3 nciones lineales y cuadráticas 160

3.1 Propiedades de funciones lineales y modelos lineales 161

Graficar funciones lineales • Utilice la tasa de cambio promedio para identificar funciones lineales. Funciones • Determinar si una función lineal es creciente, decreciente o constante • Construir modelos lineales a partir de descripciones verbales

3.2 Construir modelos lineales a partir de datos Dibujar 171
e interpretar diagramas de dispersión • Distinguir entre relaciones lineales y no lineales • Usar una utilidad gráfica para encontrar la línea de mejor ajuste

3.3 Funciones cuadráticas y sus propiedades Graficar una función 179
cuadrática usando transformaciones • Identificar el vértice y el eje de simetría de una parábola • Graficar una función cuadrática usando su vértice, eje e intersecciones • Calcular una función cuadrática dado su vértice y otro punto • Calcular el valor máximo o mínimo de una función cuadrática

3.4 Construir modelos cuadráticos a partir de descripciones verbales y datos Construir modelos 192
cuadráticos a
partir de descripciones verbales • Construir modelos cuadráticos a partir de datos

3.5 Desigualdades que involucran funciones cuadráticas Resolver 201
desigualdades que involucran una función cuadrática

Revisión del capítulo 205

Prueba de capítulo 207

Revisión acumulativa 208

Proyectos del Capítulo 209

4 nciones polinomiales y racionales 210

4.1 Funciones polinómicas 211

Identificar funciones polinomiales y su grado • Graficar polinomios Funciones que utilizan transformaciones • Identificar los ceros reales de un polinomio Función y su multiplicidad

Machine Translated by Google

4.2 Graficar funciones polinomiales; Modelos Graficar una función polinómica • Graficar una función polinómica usando una utilidad gráfica • Construir modelos cúbicos a partir de datos 226

4.3 Propiedades de funciones racionales Encuentre el dominio de una función racional • Encuentre las asíntotas verticales de una función racional • Encuentre una asíntota horizontal u oblicua de una función racional 234

4.4 La gráfica de una función racional Graficar una función racional • Resolver problemas aplicados que involucran funciones racionales 245

4.5 Desigualdades polinómicas y racionales Resolver desigualdades polinomiales • Resolver desigualdades racionales 260

4.6 Los ceros reales de una función polinómica Utilice los teoremas del resto y del factor • Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos de una función polinómica • Utilice el teorema de los ceros racionales para enumerar los ceros racionales potenciales de una función polinómica • Encontrar los ceros reales de una función polinómica • Resolver ecuaciones polinómicas • Usar el teorema de límites de ceros • Usar el teorema del valor intermedio 267

4.7 Ceros complejos; Teorema fundamental del álgebra Utilice el teorema de pares conjugados • Encuentre una función polinómica con Ceros especificados • Encuentre los ceros complejos de una función polinómica 281

Revisión del capítulo 288

Prueba de capítulo 291

Revisión acumulativa 292

Proyectos del Capítulo 293

5 unciones exponenciales y logarítmicas 294

5.1 Funciones compuestas Formar una función compuesta • Encuentre el dominio de una función compuesta 295

5.2 Funciones Uno a Uno; Funciones inversas Determinar si una función es uno a uno • Obtener la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica de una función uno a uno • Verificar una función inversa • Encontrar la inversa de una función definida por una ecuación 303

5.3 Funciones exponenciales Evaluar funciones exponenciales • Graficar funciones exponenciales • Definir el número e • Resolver ecuaciones exponenciales 315

5.4 Funciones logarítmicas Cambiar enunciados exponenciales a enunciados logarítmicos y enunciados logarítmicos a enunciados exponenciales • Evaluar expresiones logarítmicas • Determinar el dominio de una función logarítmica • Graficar funciones logarítmicas • Resolver ecuaciones logarítmicas 332

5.5 Propiedades de los logaritmos Trabajar con las propiedades de los logaritmos • Escribir una expresión logarítmica como suma o diferencia de logaritmos • Escribir una expresión logarítmica como un logaritmo único • Evaluar logaritmos cuya base no es 10 ni e 345

5.6 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales Resolver ecuaciones logarítmicas • Resolver ecuaciones exponenciales • Resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales usando una utilidad gráfica 354

Machine Translated by Google

12 contenidos

5.7 Modelos financieros 361
Determinar el valor futuro de una suma global de dinero • Calcular tasas de rendimiento efectivas • Determinar el valor presente de una suma global de dinero • Determinar la tasa de interés o el tiempo necesario para duplicar una suma global de dinero

5.8 Modelos de Crecimiento y Decaimiento Exponenciales; Ley de Newton; Modelos logísticos de crecimiento y decadencia 371
Modelar poblaciones que obedecen la ley de crecimiento desinhibido • Modelar poblaciones que obedecen la ley de decadencia desinhibida • Usar la ley de enfriamiento de Newton • Usar modelos logísticos

5.9 Construir modelos exponenciales, logarítmicos y logísticos a partir de datos 382
Construir un modelo exponencial a partir de datos • Construir un modelo logarítmico a partir de datos • Construir un modelo logístico a partir de datos

Revisión del capítulo 389

Prueba de capítulo 394

Revisión acumulativa 395

Proyectos del Capítulo 396

6 nciones trigonométricas 397

6.1 Ángulos, longitud de arco y movimiento circular 398
Ángulos y medida en grados • Convertir entre medidas decimales y grados, minutos y segundos para ángulos • Encontrar la longitud de un arco de círculo • Convertir de grados a radianes y de radianes a grados • Encontrar la Área de un sector de un círculo • Encuentre la velocidad lineal de un objeto que viaja en movimiento circular

6.2 Funciones trigonométricas: método del círculo unitario 411
Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas usando un punto en el círculo unitario • Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales • Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas Funciones de = 45° • Encuentra los valores exactos de la ecuación trigonométrica 4 p Funciones de 6 = 30° y 3 = 60° • Encuentre los valores exactos de la Funciones trigonométricas para múltiplos enteros de 6 = 30°, 4 = 45°, y = 60° • Utilice una calculadora para aproximar el valor de una ecuación trigonométrica Función • Utilice un círculo de radio r para evaluar la ecuación trigonométrica Funciones

6.3 Propiedades de las funciones trigonométricas 428
Determinar el dominio y el rango de las funciones trigonométricas • Determinar el período de las funciones trigonométricas • Determinar el Signos de las funciones trigonométricas en un cuadrante dado • Encuentre los valores de las funciones trigonométricas usando identidades fundamentales • Encuentre los Valores exactos de las funciones trigonométricas de un ángulo dado uno de los Funciones y el cuadrante del ángulo • Utilice propiedades pares-impares para Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas

6.4 Gráficas de las funciones seno y coseno 443
Grafique la función seno y = sen x y funciones de la forma y = A sin1vx2 • Grafique la función coseno y = cos x y funciones de la forma y = Acos1vx2 • Determine la amplitud y el período de Funciones sinusoidales • Graficar funciones sinusoidales usando puntos clave • Encontrar una ecuación para una gráfica sinusoidal

Machine Translated by Google

6.5 Gráficas de las funciones tangente, cotangente, cosecante y secante Graficar la función tangente y = 458
tan x y la función cotangente y = cot x • Graficar funciones de la forma y = A tan1vx2 + B e y = A cot1vx2 + B • Graficar la función cosecante y = csc x y la función secante y = sec x • Graficar funciones de la forma y = A csc1vx2 + B e y = A sec1vx2 + B

6.6 Desplazamiento de Fase; Gráfico de ajuste de curvas 465
sinusoidales Funciones sinusoidales de la forma y = A sin1vx - f2 + B • Construya modelos sinusoidales a partir de datos

Revisión del capítulo 477

Prueba de capítulo 482

Revisión acumulativa 483

Proyectos del Capítulo 484

7 rigonometría analítica 485

7.1 Funciones inversas seno, coseno y tangente 486
Definir la función seno inverso • Encontrar el valor de un seno inverso Función • Definir la función coseno inverso • Encontrar el valor de un Función Coseno Inverso • Definir la Función Tangente Inversa • Encontrar la Valor de una función tangente inversa • Utilice propiedades de funciones inversas para encontrar valores exactos de ciertas funciones compuestas • Encuentre la inversa Función de una función trigonométrica • Resolver ecuaciones que involucran inversa Funciones trigonométricas

7.2 Funciones trigonométricas inversas (continuación) 499
Definir las funciones secante, cosecante y cotangente inversa • Encuentre la Valor de las funciones secante, cosecante y cotangente inversa • Encuentre el Valor exacto de funciones compuestas que involucran la trigonometría inversa Funciones • Escribir una expresión trigonométrica como expresión algebraica

7.3 Ecuaciones trigonométricas 505
Resolver ecuaciones que involucran una sola función trigonométrica • Resolver Ecuaciones trigonométricas usando una calculadora • Resolver ecuaciones trigonométricas Forma cuadrática • Resuelva ecuaciones trigonométricas utilizando la forma fundamental Identidades • Resolver ecuaciones trigonométricas usando una utilidad gráfica

7.4 Identidades trigonométricas 515
Utilice álgebra para simplificar expresiones trigonométricas • Establezca identidades

7.5 Fórmulas de suma y diferencia 523
Utilice fórmulas de suma y diferencia para encontrar valores exactos • Utilice suma y Fórmulas de diferencia para establecer identidades • Utilice suma y diferencia Fórmulas que involucran funciones trigonométricas inversas • Resolver funciones trigonométricas Ecuaciones lineales en seno y coseno

7.6 Fórmulas de ángulo doble y medio ángulo 536
Utilice fórmulas de doble ángulo para encontrar valores exactos • Utilice fórmulas de doble ángulo para establecer identidades • Utilice fórmulas de medio ángulo para encontrar valores exactos

7.7 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto Expresar productos como sumas • Expresar sumas como productos 547

Revisión del capítulo 551

Prueba de capítulo 554

Revisión acumulativa 555

Proyectos del Capítulo 556

Machine Translated by Google

8 Aplicaciones de funciones trigonométricas 557

8.1 Trigonometría de triángulo rectángulo; Aplicaciones Encontrar el valor de funciones trigonométricas de ángulos agudos usando triángulos rectángulos • Usar el teorema de los ángulos complementarios • Resolver triángulos rectángulos • Resolver problemas aplicados 558

8.2 La ley de los senos Resolver triángulos SAA o ASA • Resolver triángulos SSA • Resolver problemas aplicados 571

8.3 La ley de los cosenos Resolver triángulos SAS • Resolver triángulos SSS • Resolver problemas aplicados 582

8.4 Área de un triángulo Calcular el área de los triángulos SAS • Calcular el área de los triángulos SSS 589

8.5 Movimiento Armónico Simple; movimiento amortiguado; Combinando ondas Construya un modelo para un objeto en movimiento armónico simple • Analice el movimiento armónico simple • Analice un objeto en movimiento amortiguado • Grafique la suma de dos funciones 595

Revisión del capítulo 605

Prueba de capítulo 608

Revisión acumulativa 609

Proyectos del Capítulo 609

9 Coordenadas polares; Vectores 611

9.1 Coordenadas polares Trazar puntos usando coordenadas polares • Convertir de coordenadas polares a coordenadas rectangulares • Convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares • Transformar ecuaciones entre polares y Formas rectangulares 612

9.2 Ecuaciones polares y gráficas Identificar y graficar ecuaciones polares convirtiéndolas a rectangulares Ecuaciones • Probar la simetría de ecuaciones polares • Graficar ecuaciones polares trazando puntos 621

9.3 El Plano Complejo; Teorema de De Moivre Trazar puntos en el plano complejo • Convertir un número complejo entre Forma rectangular y forma polar o forma exponencial • Encuentre productos y cocientes de números complejos • Utilice el teorema de De Moivre • Encuentre raíces complejas 636

9.4 Vectores Graficar vectores • Encontrar un vector de posición • Sumar y restar vectores Algebraicamente • Encontrar un múltiplo escalar y la magnitud de un vector • Encontrar un vector unitario • Encontrar un vector a partir de su dirección y magnitud • Modelar con vectores 645

9.5 El producto escalar Encontrar el producto escalar de dos vectores • Encontrar el ángulo entre dos vectores • Determinar si dos vectores son paralelos • Determinar si dos Los vectores son ortogonales • Descomponer un vector en dos vectores ortogonales • Calcular el trabajo 660

9.6 Vectores en el espacio Encuentre la distancia entre dos puntos en el espacio • Encuentre vectores de posición en el espacio • Realice operaciones con vectores • Encuentre el producto escalar • Encuentre el ángulo entre dos vectores • Encuentre los ángulos de dirección de un vector 667

Machine Translated by Google

9.7 El producto cruz Encontrar 677
el producto cruz de dos vectores • Conocer las propiedades algebraicas del producto cruz • Conocer las propiedades geométricas del producto cruz • Encontrar un vector ortogonal a dos vectores dados • Encontrar el área de un paralelogramo

Revisión del capítulo 683

Prueba de capítulo 686

Revisión acumulativa 687

Proyectos del Capítulo 687

10 eometría analítica 688

10.1 Cónicas 689
Conozca los nombres de las cónicas

10.2 La parábola Analizar 690
parábolas con vértice en el origen • Analizar parábolas con vértice en (h, k) • Resolver problemas aplicados que involucran parábolas

10.3 La elipse 699
Analizar elipses con centro en el origen • Analizar elipses con centro en (h, k) • Resolver problemas aplicados que involucran elipses

10.4 La hipérbola Analizar 709
hipérbolas con centro en el origen • Encontrar las asíntotas de una hipérbola • Analizar hipérbolas con centro en (h, k) • Resolver problemas aplicados que involucran hipérbolas

10.5 Rotación de Ejes; Forma general de una cónica 722
Identificar una cónica • Usar una rotación de ejes para transformar ecuaciones • Analizar una ecuación usando una rotación de ejes • Identificar cónicas sin Girando los ejes

10.6 Ecuaciones polares de cónicas 730
Analizar y graficar ecuaciones polares de cónicas • Convertir la ecuación polar de una cónica en una ecuación rectangular

10.7 Curvas planas y ecuaciones paramétricas Graficar 737
ecuaciones paramétricas • Encontrar una ecuación rectangular para una curva plana definida paramétricamente • Usar el tiempo como parámetro en ecuaciones paramétricas • Encontrar ecuaciones paramétricas para curvas planas definidas por ecuaciones rectangulares

Revisión del capítulo 750

Prueba de capítulo 752

Revisión acumulativa 753

Proyectos del Capítulo 753

11 stemas de ecuaciones y desigualdades 755

11.1 Sistemas de ecuaciones lineales: sustitución y eliminación 756
Resolver sistemas de ecuaciones por sustitución • Resolver sistemas de ecuaciones por eliminación • Identificar sistemas de ecuaciones inconsistentes que contienen dos variables • Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes que contienen dos variables • Resolver sistemas de tres ecuaciones que contienen tres variables • Identificar sistemas de ecuaciones inconsistentes Que Contiene Tres Variables • Expresar la Solución de un Sistema de Ecuaciones Dependientes que Contiene Tres Variables

Machine Translated by Google

11.2 Sistemas de ecuaciones lineales: matrices 770
Escribir la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales • Escribir el sistema de ecuaciones a partir de la matriz aumentada • Realizar operaciones por filas en una matriz • Resolver un sistema de ecuaciones lineales Ecuaciones que utilizan matrices

11.3 Sistemas de ecuaciones lineales: determinantes 784
Evaluar determinantes 2 por 2 • Usar la regla de Cramer para resolver un sistema de Dos ecuaciones que contienen dos variables • Evaluar determinantes de 3 por 3 • Usar la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones que contienen Tres variables • Conocer las propiedades de los determinantes

11.4 Álgebra matricial Encontrar la 795
suma y diferencia de dos matrices • Encontrar múltiplos escalares de una matriz • Encontrar el producto de dos matrices • Encontrar la inversa de una matriz • Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa

11.5 Descomposición en fracciones parciales P 812
QP Donde Q tiene sólo factores lineales no repetidos, descomponga
Descomponer QQ Donde Q tiene factores lineales repetidos • Descomponer • PAG
Donde Q tiene un factor cuadrático irreducible no repetido • Descomponga Q PAG
Donde Q tiene un factor cuadrático irreducible repetido

11.6 Sistemas de ecuaciones no lineales 821
Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante sustitución • Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación

11.7 Sistemas de desigualdades 830
Graficar una desigualdad • Graficar un sistema de desigualdades

11.8 Programación lineal Plantear un 837
problema de programación lineal • Resolver un problema de programación lineal

Revisión del capítulo 845

Prueba de capítulo 848

Revisión acumulativa 849

Proyectos del Capítulo 850

12 ecuencias; Inducción; el teorema del binomio 851

12.1 Secuencias 852
Enumerar los primeros términos de una secuencia • Enumerar los términos de una secuencia Definido por una fórmula recursiva • Usar notación sumatoria • Encontrar el Suma de una secuencia

12.2 Secuencias aritméticas 862
Determinar si una secuencia es aritmética • Encontrar una fórmula para una secuencia aritmética • Encontrar la suma de una secuencia aritmética

12.3 Secuencias Geométricas; Series geométricas Determinar 869
si una secuencia es geométrica • Encontrar una fórmula para una secuencia geométrica • Encontrar la suma de una secuencia geométrica • Determinar si una serie geométrica converge o diverge • Resolver problemas de anualidades

12.4 Inducción matemática Demuestre 881
enunciados mediante inducción matemática

Machine Translated by Google

12.5 El teorema del binomio 885

Evaluar ¢ n j ≤ • Utilice el teorema del binomio

Revisión del capítulo 891

Prueba de capítulo 894

Revisión acumulativa 894

Proyectos del Capítulo 895

13 onteo y probabilidad 896

13.1 Contando 897

Encontrar todos los subconjuntos de un conjunto • Contar el número de elementos en un conjunto • Resolver problemas de conteo usando el principio de multiplicación

13.2 Permutaciones y combinaciones 902

Resolver problemas de conteo usando permutaciones que involucran n objetos distintos • Resolver problemas de conteo usando combinaciones • Resolver problemas de conteo Uso de permutaciones que involucran n objetos no distintos

13.3 Probabilidad 911

Construir modelos de probabilidad • Calcular probabilidades de probabilidades iguales Resultados • Encuentre las probabilidades de la unión de dos eventos • Utilice el Regla de complemento para encontrar probabilidades

Revisión del capítulo 921

Prueba de capítulo 923

Revisión acumulativa 924

Proyectos del Capítulo 924

14 na vista previa del cálculo: el límite, la derivada y la integral de una función 926

14.1 Investigación de límites mediante tablas y gráficos 927

Investigar un límite usando una tabla • Investigar un límite usando una gráfica

14.2 Técnicas algebraicas para encontrar límites Encontrar el límite de una suma, una diferencia y un producto • Encontrar el límite de un polinomio • Encontrar el límite de una potencia o una raíz • Encontrar el límite de un cociente • Encontrar el límite de un promedio Tasa de cambio 932

14.3 Límites unilaterales; Continuidad 939

Encuentre los límites unilaterales de una función • Determine si una función es continuo en un número

14.4 El problema de la tangente; La derivada Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función • Encuentre la derivada de una función • Encuentre tasas de cambio instantáneas • Encuentre la velocidad instantánea de un objeto 945

14.5 El problema del área; La integral Aproximar el área bajo la gráfica de una función • Integrales aproximadas usando una utilidad gráfica 953

Revisión del capítulo 959

Prueba de capítulo 962

Proyectos del Capítulo 963

Machine Translated by Google

del Ap A1

A.1 Conceptos básicos de álgebra A1
Trabajar con conjuntos • Graficar desigualdades • Encontrar distancias en la recta numérica real • Evaluar expresiones algebraicas • Determinar el dominio de una variable • Usar las leyes de los exponentes • Evaluar raíces cuadradas • Usar una calculadora para evaluar exponentes

A.2 Conceptos básicos de geometría A14
Usar el teorema de Pitágoras y su recíproco • Conocer fórmulas de geometría • Comprender triángulos congruentes y triángulos semejantes

A.3 Polinomios Reconocer A22
monomios • Reconocer polinomios • Conocer fórmulas para productos especiales • Dividir polinomios usando división larga • Factorizar polinomios • Completar el cuadrado

A.4 División sintética Dividir A31
polinomios mediante división sintética

A.5 Expresiones racionales Reducir A35
una expresión racional a sus términos más bajos • Multiplicar y dividir expresiones racionales • Sumar y restar expresiones racionales • Usar el método del mínimo común múltiplo • Simplificar expresiones racionales complejas

A.6 Resolver ecuaciones Resolver A44
ecuaciones factorizando • Resolver ecuaciones que involucran valor absoluto • Resolver una ecuación cuadrática mediante factorización • Resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado • Resolver una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática

A.7 Números Complejos; Ecuaciones cuadráticas en el complejo Sistema de numeración A54
Sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos • Resolver cuadráticos Ecuaciones en el sistema de números complejos

A.8 Resolución de problemas: interés, mezcla, movimiento uniforme, aplicaciones de trabajo de tasa constante Traducir descripciones verbales A62
en expresiones matemáticas • Resolver problemas de interés • Resolver problemas de mezcla • Resolver problemas de movimiento uniforme • Resolver problemas de trabajo de tasa constante

A.9 Notación de intervalos; Resolver desigualdades A72
Usar notación de intervalos • Usar propiedades de desigualdades • Resolver desigualdades • Resolver desigualdades combinadas • Resolver desigualdades que involucran valor absoluto

A.10 enésimas raíces; Exponentes racionales A83
Trabajar con raíces enésimas • Simplificar radicales • Racionalizar denominadores y Numeradores • Resolver ecuaciones radicales • Simplificar expresiones con racionales Exponentes

Apéndice B dades gráficas B1

B.1 El rectángulo de visualización B1

B.2 Uso de una utilidad gráfica para representar gráficamente ecuaciones B3

B.3 Uso de una utilidad gráfica para localizar intersecciones y comprobar la simetría B5

B.4 Uso de una utilidad gráfica para resolver ecuaciones B6

B.5 Pantallas cuadradas B8

Machine Translated by Google

B.6 Usar una utilidad gráfica para representar gráficamente desigualdades B9

B.7 Usar una utilidad gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales B9

B.8 Usar una utilidad gráfica para representar gráficamente una ecuación polar B11

B.9 Usar una utilidad gráfica para representar gráficamente ecuaciones paramétricas B11

Respuestas AN1

Créditos fotográficos C1

Índice de materias I1

Machine Translated by Google

Tres series distintas

Los estudiantes tienen diferentes objetivos, estilos de aprendizaje y niveles de preparación. Los instructores tienen diferentes filosofías, estilos y técnicas de enseñanza. En lugar de escribir una serie que se adapte a todos, los Sullivan han escrito tres series distintas. Todos comparten el mismo objetivo: desarrollar un alto nivel de comprensión matemática y una apreciación de la forma en que las matemáticas pueden describir el mundo que nos rodea. La manera de alcanzar ese objetivo, sin embargo, difiere de una serie a otra.

Serie insignia, undécima edición

La serie Flagship tiene un enfoque más tradicional pero moderno en su tratamiento de las matemáticas de precálculo. En cada texto se incluye el material de revisión necesario y se hace referencia a él cuando se utiliza. La cobertura de la utilidad gráfica es opcional y puede incluirse o excluirse a discreción del instructor: Álgebra universitaria, Álgebra y trigonometría, Trigonometría: un enfoque de círculo unitario, Precálculo.

Mejorado con Graphing Utilities Series, séptima edición

Esta serie proporciona una integración completa de utilidades gráficas en temas, lo que permite a los estudiantes explorar conceptos matemáticos y encontrar ideas que normalmente se estudian en cursos posteriores. Muchos ejemplos muestran soluciones que utilizan álgebra junto con técnicas gráficas. Al utilizar la tecnología, el enfoque para resolver ciertos problemas difiere de la serie Flagship, mientras que se mantiene el énfasis en comprender conceptos y desarrollar habilidades sólidas: Álgebra universitaria, Álgebra y trigonometría, Precálculo.

Serie Conceptos a través de funciones, cuarta edición

Esta serie se diferencia de las demás en que utiliza un enfoque de funciones que sirve como principio organizador que une los conceptos. Las funciones se introducen temprano en varios formatos. El enfoque apoya la Regla de Cuatro, que establece que las funciones se pueden representar simbólica, numérica, gráfica y verbalmente.
Cada capítulo introduce un nuevo tipo de función y luego desarrolla todos los conceptos relacionados con esa función en particular. Las soluciones de ecuaciones y desigualdades, en lugar de desarrollarse como temas independientes, se desarrollan en el contexto de las funciones subyacentes. La cobertura de la utilidad gráfica es opcional y puede incluirse o excluirse a discreción del instructor: Álgebra universitaria; Precálculo, con enfoque de círculo unitario para la trigonometría; Precálculo, con un enfoque de trigonometría de triángulo rectángulo.

Machine Translated by Google

La serie insignia

Álgebra universitaria, undécima edición

Este texto proporciona un enfoque contemporáneo del álgebra universitaria, con tres capítulos de material de revisión que preceden a los capítulos sobre funciones. Se proporciona el uso de la calculadora gráfica, pero es opcional. Después de completar este libro, el estudiante estará adecuadamente preparado para trigonometría, matemáticas finitas y cálculo comercial.

Álgebra y trigonometría, undécima edición

Este texto contiene todo el material de álgebra universitaria, pero también desarrolla las funciones trigonométricas utilizando el método del triángulo rectángulo y muestra cómo se relaciona con el método del círculo unitario. Se enfatizan las técnicas gráficas, incluida una discusión exhaustiva de las coordenadas polares, ecuaciones paramétricas y cónicas que utilizan coordenadas polares. También se presentan vectores en el plano, secuencias, inducción y el teorema del binomio. Se proporciona el uso de la calculadora gráfica, pero es opcional. Después de completar este libro, el estudiante estará adecuadamente preparado para matemáticas finitas, cálculo comercial y cálculo de ingeniería.

Precálculo, undécima edición

Este texto contiene un capítulo de revisión antes de cubrir los temas tradicionales de precálculo de funciones polinomiales, racionales, exponenciales y logarítmicas y sus gráficas. Las funciones trigonométricas se presentan utilizando el método del círculo unitario y mostrando cómo se relaciona con el método del triángulo rectángulo. Se enfatizan las técnicas gráficas, incluida una discusión exhaustiva de las coordenadas polares, ecuaciones paramétricas y cónicas que utilizan coordenadas polares. También se presentan vectores en el plano y en el espacio, incluidos los productos punto y cruz, secuencias, inducción y el teorema del binomio. Se proporciona el uso de la calculadora gráfica, pero es opcional.
El último capítulo proporciona una introducción al cálculo, con una discusión del límite, la derivada y la integral de una función. Después de completar este libro, el estudiante estará adecuadamente preparado para matemáticas finitas, cálculo comercial y cálculo de ingeniería.

Trigonometría: un enfoque de círculo unitario, undécima edición

Este texto, diseñado para cursos independientes de trigonometría, desarrolla las funciones trigonométricas utilizando un método de círculo unitario y muestra cómo se relaciona con el método del triángulo rectángulo. Se presentan vectores en el plano y en el espacio, incluidos los productos punto y cruz. Se enfatizan las técnicas gráficas, incluida una discusión exhaustiva de las coordenadas polares, ecuaciones paramétricas y cónicas que utilizan coordenadas polares. Se proporciona el uso de la calculadora gráfica, pero es opcional. Después de completar este libro, el estudiante estará adecuadamente preparado para matemáticas finitas, cálculo comercial y cálculo de ingeniería.

Machine Translated by Google

Prefacio al instructor

Como profesor de matemáticas en un público urbano universidad durante 35 años, entiendo las variadas necesidades de estudiantes de precálculo. Los estudiantes van desde estar poco preparados, con poca formación matemática y miedo a las matemáticas, hasta estar muy preparados y motivados.
Para algunos, este es su último curso de matemáticas. Para otros, es una preparación para futuros cursos de matemáticas. He escrito este texto pensando en ambos grupos.

Un enorme beneficio de ser autor de una serie exitosa es la amplia retroalimentación que recibo de profesores y estudiantes que han utilizado ediciones anteriores. Estoy sinceramente agradecido por su apoyo. Prácticamente todos los cambios realizados en esta edición son el resultado de sus reflexivos comentarios y sugerencias. Espero haber podido tomar sus ideas y, basándose en una base exitosa de la décima edición, hacer de esta serie una herramienta de aprendizaje y enseñanza aún mejor para estudiantes e instructores.

Características de la undécima edición

Al principio de este texto se puede encontrar una lista descriptiva de las muchas características especiales de Precálculo . Esta lista coloca las funciones en su contexto adecuado, como componentes básicos de un sistema de aprendizaje general que ha sido cuidadosamente elaborado a lo largo de los años para ayudar a los estudiantes a aprovechar al máximo el tiempo que dedican al estudio. Tómese el tiempo para revisarlo y discutirlo con sus alumnos al comienzo de su curso. Mi experiencia ha sido que cuando los estudiantes utilizan estas funciones, tienen más éxito en el curso.

- ¡ Actualizado! Problemas de conservación de conocimientos Estos problemas, que eran nuevos en la edición anterior, se basan en el artículo “Para conservar nuevos conocimientos, haga las matemáticas”, publicado en Edurati Review. En este artículo, Kevin Washburn sugiere que “cuanto más se requiera que los estudiantes recuerden nuevos contenidos o habilidades, mejor será su memoria”. Los problemas Retain Your Knowledge fueron tan bien recibidos que se han ampliado en esta edición. Además, si bien el enfoque sigue siendo ayudar a los estudiantes a mantener sus habilidades, en la mayoría de las secciones se eligieron problemas que proporcionan una vista previa de las habilidades necesarias para tener éxito en las secciones siguientes o en cálculo. Estos se identifican fácilmente por el ícono de cálculo ( ). Todas las respuestas a los problemas de Retain Your Knowledge se encuentran al final del texto y todas se pueden asignar en MyLab Math.

- Notas de conferencias guiadas Ideal para online, emporio/ cursos de rediseño, aulas invertidas o aulas tradicionales. Estas notas de clase ayudan a los estudiantes a tomar notas exhaustivas, organizadas y comprensibles mientras ven los videos de Autor en acción. Piden a los estudiantes que Definiciones completas, procedimientos y ejemplos basados en el contenido de los videos y el texto. Además, la experiencia sugiere que los estudiantes aprenden haciendo y entendiendo el por qué/cómo del concepto o propiedad. Por lo tanto, muchos 22 Las secciones tendrán una actividad de exploración para motivar el aprendizaje de los estudiantes. Estas exploraciones introducen el tema y/o lo conectan con una aplicación del mundo real o con una sección anterior. Por ejemplo, cuando la prueba de la línea vertical se analiza en la Sección 2.2, después del enunciado del teorema, las notas piden a los estudiantes que expliquen por qué la prueba de la línea vertical funciona utilizando la definición de una función. Este desafío ayuda a los estudiantes a procesar la información a un mayor nivel de comprensión.

- Ilustraciones Muchas de las figuras tienen leyendas para ayudar a conectar las ilustraciones con las explicaciones en el cuerpo del texto.

- Capturas de pantalla de la utilidad gráfica En varios casos hemos agregado capturas de pantalla de Desmos junto con las capturas de pantalla de la TI-84 Plus C. Estas capturas de pantalla actualizadas brindan formas alternativas de visualizar conceptos y hacer conexiones entre ecuaciones, datos y gráficos a todo color.

- Los proyectos de capítulo, que aplican los conceptos de cada capítulo a una situación del mundo real, se han mejorado para brindar a los estudiantes una experiencia actualizada. Muchos de estos proyectos son nuevos y requieren que el estudiante busque información en línea para resolver problemas.

- Conjuntos de ejercicios Los ejercicios del texto han sido revisados y analizados, algunos se han eliminado y se han añadido otros nuevos. Todos los problemas urgentes se han actualizado con la información más reciente disponible. Los conjuntos de problemas permanecen clasificados según su finalidad.

  El mensaje '¿Estás preparado?' Los problemas se han mejorado para cumplir mejor su propósito como revisión justo a tiempo de los conceptos que el estudiante deberá aplicar en la siguiente sección.

  Los problemas de Conceptos y Vocabulario se han ampliado para cubrir cada objetivo de la sección. Estos ejercicios de opción múltiple, para completar espacios en blanco y de Verdadero/Falso se han escrito para que también sirvan como pruebas de lectura.

  Los problemas de desarrollo de habilidades desarrollan las habilidades computacionales del estudiante con una gran selección de ejercicios que están directamente relacionados con los objetivos de la sección.
  Los problemas de práctica mixta ofrecen una evaluación integral de habilidades que se relacionan con más de un objetivo.
  A menudo, esto requiere habilidades aprendidas anteriormente en el curso.

  Se han actualizado los problemas de aplicaciones y extensiones . Además, se han agregado muchos ejercicios nuevos de tipo aplicación, especialmente aquellos que involucran información y datos extraídos de fuentes que el estudiante reconocerá, para mejorar la relevancia y la puntualidad.

  Al final de Aplicaciones y Extensiones, tenemos una colección de uno o más Problemas de desafío.
  Estos problemas, como sugiere el título, pretenden invitar a la reflexión y requieren algo de ingenio para resolverlos. Se pueden utilizar para trabajo en grupo o para desafiar a los estudiantes.

Machine Translated by Google

Los conceptos explicativos: discusión y escritura
Los ejercicios brindan oportunidades para discusiones en el aula y proyectos grupales.

¡Actualizado! Retain Your Knowledge se ha mejorado y ampliado. Los problemas se basan en material aprendido anteriormente en el curso, especialmente material relacionado con el cálculo.
Sirven para mantener "fresca" en la mente del estudiante la información que ya se ha aprendido.

NUEVO ¿Necesita revisar? Estas notas al margen proporcionan un recordatorio justo a tiempo de un concepto necesario ahora, pero tratado en una sección anterior del libro. Cada nota incluye una referencia al capítulo, sección y página donde se discutió originalmente el concepto.

Cambios de contenido en la 11.ª edición .

- Se agregaron problemas de desafío en la mayoría de las secciones al final de los ejercicios de Aplicación y Extensiones. Los problemas de desafío pretenden ser problemas que inviten a la reflexión y que requieran algo de ingenio para resolverlos. Se pueden utilizar para desafiar a los estudiantes o para trabajar en grupo.

- ¿ Necesita revisar? Estas notas al margen proporcionan una revisión justo a tiempo de un concepto que se necesita ahora, pero que se trata en una sección anterior del libro. Cada nota tiene una referencia al capítulo, sección y página donde se discutió originalmente el concepto.

- Se han agregado a cada sección ejercicios adicionales Retenga sus conocimientos , cuyo propósito es mantener fresco el material aprendido en la mente del estudiante. Muchos de estos nuevos problemas ofrecen una vista previa de las habilidades requeridas para el cálculo o para los conceptos necesarios en las secciones posteriores.
- Se han agregado capturas de pantalla de Desmos a lo largo del texto. Esto se hace para reconocer que la tecnología gráfica se expande más allá de las calculadoras gráficas.
- Se han ampliado los ejemplos y ejercicios a lo largo del texto para reflejar una selección más amplia de aplicaciones STEM.

- Se han ampliado los ejercicios de conceptos y vocabulario para cubrir cada objetivo de una sección.
- Los ejercicios de desarrollo de habilidades se han ampliado para evaluar un rango más amplio de dificultad.
- Se han actualizado, en su caso, los problemas aplicados y los basados en datos reales.

Apéndice A

- La Sección A.10 El Objetivo 3 ahora incluye la racionalización de numerador
  - NUEVO Ejemplo 6 Racionalización de numeradores
  - Los problemas 69 a 76 proporcionan práctica.
- Los ejercicios de la Sección A.10 ahora incluyen más práctica en simplificando radicales

Capítulo 1

- NUEVO Sección 1.2 Ejemplo 9 Prueba de una ecuación para Simetría
- La sección 1.3 se ha reorganizado para tratar la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta antes de encontrar una ecuación de una recta usando dos puntos.

Capitulo 2

- NUEVO Sección 2.1 Objetivo 1 Describir una relación
- NUEVO Sección 2.2 Ejemplo 4 Gasto de energía
- NUEVO Sección 2.4 Ejemplo 4 Análisis de una función definida por partes
- NUEVO Ejemplo 1 Describir una relación demuestra el uso de la Regla de Cuatro para expresar una relación numéricamente, como un mapeo, y gráficamente dada una descripción verbal.

Capítulo 3

- La sección 3.3 introduce el concepto de concavidad para una función cuadrática
- NUEVO Sección 3.3 Ejemplo 3 Graficar una función cuadrática usando su vértice, eje e intersecciones
- Sección 3.3 Ejemplo 8 Análisis del movimiento de un proyectil (anteriormente en la Sección 3.4)
- NUEVO Sección 3.4 Ejemplo 4 Ajuste de una función cuadrática a datos

Capítulo 4

- La Sección 4.1 ha sido revisada y dividida en dos secciones:
  - 4.1 Funciones polinómicas
  - 4.2 Graficar funciones polinomiales; Modelos
- NUEVO Sección 4.2 Ejemplo 2 Graficar una función polinómica (una función polinómica de cuarto grado)

Capítulo 5

- La sección 5.2 ahora encuentra y verifica funciones inversas analítica y gráficamente.

Capítulo 6

- NUEVO Sección 6.1 Ejemplo 6 Ancho de campo de una lente de cámara réflex digital
- Las secciones 6.4 y 6.5 se reorganizaron para mayor claridad.

Capítulo 7

- Las secciones 7.1 y 7.2 se reorganizaron para aumentar claridad.

Capítulo 9

- Sección 9.3 El plano complejo; El teorema de DeMoivre fue reescrito para apoyar la forma exponencial de un número complejo.
  - Se introduce la fórmula de Euler para expresar un número complejo en forma exponencial.
  - La forma exponencial de un número complejo se utiliza para calcular productos y cocientes.
  - El teorema de DeMoivre se expresa utilizando la forma exponencial de un número complejo.
  - La forma exponencial se utiliza para encontrar raíces complejas.

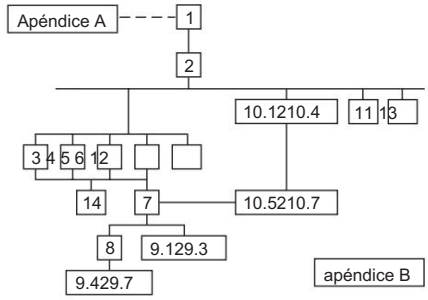
Machine Translated by Google

Capítulo 11

• NUEVO Sección 11.5 Ejemplo 1 Identificación adecuada y Expresiones racionales impropias

Uso eficaz de la undécima edición con su programa de estudios

Para satisfacer las diversas necesidades de diversos programas de estudios, este texto contiene más contenido del que probablemente se cubrirá en un Precálculo . curso. Como ilustra el cuadro, este texto se ha organizado teniendo en cuenta la flexibilidad de uso. Dentro de un capítulo determinado, ciertas secciones son opcionales (consulte los detalles que siguen a la figura siguiente) y se pueden omitir sin pérdida de continuidad.



Revisión del Apéndice A

Este capítulo consta de material de revisión. Puede utilizarse como primera parte del curso o posteriormente como revisión justo a tiempo cuando se requiera el contenido. A lo largo del texto se hacen referencias específicas a este capítulo para ayudar en el proceso de revisión.

Capítulo 1 Gráficos

Este capítulo sienta las bases de las funciones.

Capítulo 2 Funciones y sus gráficas

Quizás el capítulo más importante. La sección 2.6 es opcional.

Capítulo 3 Funciones lineales y cuadráticas

La selección del tema depende de su plan de estudios. Las secciones 3.2 y 3.4 podrán omitirse sin pérdida de continuidad.

Capítulo 4 Funciones polinomiales y racionales

La selección del tema depende de su plan de estudios.

Capítulo 5 Funciones exponenciales y logarítmicas

Las secciones 5.1 a 5.6 siguen en secuencia. Las secciones 5.7, 5.8 y 5.9 son opcionales.

Capítulo 6 Funciones trigonométricas

La sección 6.6 puede omitirse en un breve curso.

Capítulo 7 Trigonometría analítica

La sección 7.7 puede omitirse en un breve curso.

Capítulo 8 Aplicaciones de funciones trigonométricas

Las secciones 8.4 y 8.5 pueden omitirse en un curso breve.

Capítulo 9 Coordenadas Polares; Vectores

Las Secciones 9.1 a 9.3 y las Secciones 9.4 a 9.7 son independientes y pueden cubrirse por separado.

Capítulo 10 Geometría analítica

Las secciones 10.1 a 10.4 siguen en secuencia. Las Secciones 10.5, 10.6 y 10.7 son independientes entre sí, pero cada una requiere las Secciones 10.1 a 10.4.

Capítulo 11 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

Las Secciones 11.2 a 11.7 pueden cubrirse en cualquier orden, pero cada una requiere la Sección 11.1. La Sección 11.8 requiere la Sección 11.7.

Capítulo 12 Secuencias; Inducción; El teorema del binomio

Hay tres partes independientes: Secciones 12.1 a 12.3; Sección 12.4; y la Sección 12.5.

Capítulo 13 Conteo y probabilidad

Las secciones siguen en secuencia.

Capítulo 14 Una vista previa del cálculo: el límite, la derivada y la integral de una función

Si el tiempo lo permite, la cobertura de este capítulo brindará a sus estudiantes una ventaja beneficiosa en cálculo.

Expresiones de gratitud

Los libros de texto son escritos por autores, pero evolucionan desde una idea hasta su forma final gracias al esfuerzo de muchas personas. Fue Don Dellen quien me sugirió por primera vez este texto y esta serie. Don es recordado por sus amplias contribuciones a las publicaciones y las matemáticas.

Agradecemos a las siguientes personas por su ayuda y estímulo en la preparación de esta edición:

• De Pearson Education: Anne Kelly por sus importantes contribuciones, ideas y entusiasmo; Dawn Murrin, por su inigualable talento para acertar en los detalles;
Joseph Colella por hacerme llegar siempre las reseñas y las páginas a tiempo; Peggy McMahon por dirigir el siempre difícil proceso de producción; Rose Kernan por su manejo enlace entre el compositor y el autor; Peggy Lucas y Stacey Sveum por su genuino interés en comercializar este texto. Marcia Horton por su continuo apoyo y genuino interés; Paul Corey por su liderazgo y compromiso con la excelencia; y al equipo de ventas de Pearson, por su continua confianza y apoyo personal a los textos de Sullivan.

• Comprobadores de precisión: C. Brad Davis, quien leyó el manuscrito completo y verificó la precisión de las respuestas. Su atención al detalle es asombrosa; Timothy Britt, por crear los Manuales de Soluciones; y a Kathleen Miranda y Pamela Trim por verificar la precisión de las respuestas.

Finalmente, ofrezco mi agradecimiento a los dedicados usuarios y revisores de mis textos, cuyas ideas colectivas forman la columna vertebral de cada revisión de un libro de texto.

Machine Translated by Google

James Africh, Colegio de DuPage
Steve Agronsky, Universidad Estatal Cal Poly
Gererdo Aladro, Internacional de Florida
Universidad
Grant Alexander, Joliet Junior College
Dave Anderson, Colegio Suburbano del Sur
Wes Anderson, Universidad del Noroeste de Vista
Richard Andrews, Universidad Florida A&M
Joby Milo Anthony, Universidad Central
Florida
James E. Arnold, Universidad de
Wisconsin-Milwaukee
Adel Arshaghi, Centro para el Mérito Educativo Carolyn
Autray, Universidad de West Georgia Agnes Azzolino,
Middlesex County College Wilson P. Banks, Universidad
Estatal de Illinois Sudeshna Basu, Universidad
Howard Timothy Bayer, Virginia Western CC
Dale R. Bedgood, Universidad Estatal del Este
de Texas Beth Beno , South Suburban College Carolyn
Bernath, Tallahassee Community College
Rebecca Berthiaume, Edison State College William
H. Beyer,
Universidad de Akron Annette Blackwelder, Florida
State University Richelle Blair, Lakeland
Community College Kevin Bodden, Lewis and Clark College
Jeffrey Boerner, Universidad de Wisconsin- Stout Connie
Booker, Colegio Técnico y Comunitario de
Owensboro Barry Booten, Universidad Atlántica de Florida
Laurie Boudreaux, Universidad Estatal Nicholls Larry
Bouldin, Colegio
Comunitario Estatal de Roane Bob Bradshaw, Colegio
Ohlone Trudy Bratten, Colegio Grossmont Tim Bremer,
Colegio Comunitario de Broome Tim Britt,

Comunidad Estatal de Jackson College
Holly Broesamle, Oakland CC-Auburn Hills
Michael Brook, Universidad de Delaware Timothy
Brown, Universidad Central de Washington Joanne
Brunner, Joliet Junior College Warren Burch, Brevard
Community College Mary Butler, Escuelas Públicas
de Lincoln Melanie Butler, Universidad de West
Virginia Jim
Butterbach, Joliet Junior Universidad Roberto
Cabezas, Miami Dade College William J. Cable,
Universidad de Wisconsin-Stevens Point Lois
Calamia, Brookdale Community College Jim
Campbell, Escuelas Públicas de Lincoln Roger
Carlsen, Moraine Valley Community College Elena
Catoiu, Joliet Junior College Mathews
Chakkanakuzhi, Palomar
College Tim Chappell , Penn Valley Community College
John Collado, South Suburban College Amy
Collins, Northwest Vista College Alicia Collins, Mesa
Community
College Nelson Collins, Joliet Junior College
Rebecca Connell, Troy University Jim Cooper, Joliet
Junior College Denise Corbett, East Carolina
University
Carlos C. Corona , San Antonio College Theodore
C. Coskey, South Seattle Community College
Rebecca Connell, Troy University Donna Costello,
Plano Senior High School Rebecca Courter,
Pasadena City College Garrett Cox,
Universidad de Texas en San Antonio

Paul Crittenden, Universidad de Nebraska en
lincoln
John Davenport, Universidad Estatal del Este de Texas
Faye Dang, Joliet Junior College
Antonio David, Colegio Del Mar

Stephanie Deacon, Universidad Liberty Duane
E. Deal, Universidad Ball State Jerry DeGroot,
Purdue North Central Timothy Deis, Universidad
de Wisconsin-Platteville

Joanna DelMonaco, Middlesex Community College
Vivian
Dennis, Eastfield College Deborah Dillon,
RL Turner High School Guesna Dohrman, Tallahassee
Community College Cheryl Doolittle, Iowa State
University
Karen R. Dougan, Universidad de Florida Jerrett
Dumouchel, Florida Community College en
Jacksonville Louise Dyson, Clark Universidad Paul
D. East, Lexington Community
College Don Edmondson, Universidad
de Texas-Austin Erica Egizio, Joliet Junior College Jason
Eltrevoog, Joliet Junior College Christopher Ennis,
Universidad de Minnesota Kathy Eppler,
Salt Lake Community College Ralph Esparza,
Jr., Richland College Garret J. Etgen, Universidad de
Houston Scott Fallstrom, Shoreline Community College
Pete Falzone, Pensacola Junior College Arash
Farahmand, Skyline College Said Fariabli, San
Antonio College WA Ferguson, Universidad de Illinois-
Urbana/Champaign Iris B. Fetta, Clemson
University Mason Flake , estudiante de
Edison Community College Timothy W.
Flood, Pittsburg State University Robert Frank,
Westmoreland
County Community College Merle Friel,
Humboldt State University Richard A. Fritz, Moraine
Valley
Community College Dewey Furness, Ricks College Mary
Jule Gabiou, North Idaho College Randy
Gallaher , Lewis and
Clark College Tina Garn, Universidad de Arizona
Dawit Getachew, Universidad Estatal de
Chicago Wayne Gibson,
Rancho Santiago College Loran W.
Gierhart, Universidad de Texas en San Antonio y
Palo Alto College

Robert Gill, Universidad de Minnesota Duluth Nina Girard,
Universidad de Pittsburgh en Johnstown Sudhir
Kumar Goel,
Universidad Estatal de Valdosta Adrienne Goldstein, Miami
Dade College, Kendall Campus Joan Goliday, Sante
Fe Community
College Lourdes González, Miami Dade College,
Kendall Campus Frederic Gooding, Goucher College
Donald Goral,
Northern Virginia Community College Sue
Graupner, Escuelas Públicas de Lincoln Mary Beth
Grayson,
Liberty University Jennifer L. Grimsley,
Universidad de Charleston Ken Gurganus,
Universidad de Carolina del Norte Igor Halfin, Universidad
de Texas-San Antonio James E. Hall, Universidad de
Wisconsin-Madison

Judy Hall, Universidad de Virginia Occidental
Edward R. Hancock, Instituto de Tecnología DeVry
Julia Hassett,
Instituto DeVry, Dupage Christopher Hay-Jahans,
Universidad de Dakota del Sur

Michah Heibel, Escuelas Públicas de Lincoln
LaRae Helliwell, San Jose City College Celeste
Hernandez, Richland College Gloria P.
Hernandez, Universidad Estatal de Luisiana en
Eunice Brother Herron,
Escuela Secundaria Brother Rice

Robert Hoburg, Universidad Estatal de Connecticut
Occidental
Lynda Hollingsworth, Universidad Estatal del Noroeste
de Missouri Deltrye
Holt, Universidad Estatal de Augusta Charla
Holzbog, Escuela Secundaria Denison Lee
Hruby, Escuela Secundaria Naperville North Miles
Hubbard, Universidad Estatal St. Cloud Kim Hughes,
Colegio Estatal de California-San Bernardino

Stanislav, Jabuka, Universidad de Nevada, Reno Ron
Jamison, Universidad Brigham Young Richard A.
Jensen, Manatee Community College Glenn
Johnson,
Middlesex Community College Sandra G. Johnson,

Universidad Estatal St. Cloud Tuesday Johnson,
Universidad Estatal de Nuevo México Susitha Karunaratne,
Purdue Universidad North Central Moana H. Karsteter,

Tallahassee Community College Donna Katula, Joliet
Junior
College Arthur Kaufman, College of Staten
Island Thomas Kearns, North Kentucky University
Jack Keating, Massasoit Community College Shelia
Kellenbarger, Lincoln Public Schools Rachael Kenney,
North Carolina State University Penélope Kirby,
Universidad Estatal de Florida John B. Klassen,
North Idaho
College Debra Kopcso, Universidad Estatal de
Luisiana Lynne Kowski, Raritan Valley
Community College Yelena Kravchuk, Universidad de
Alabama en Birmingham Ray S. Kuan, Skyline College
Keith
Kuchar, Manatee Community College Tor Kwembe,
Universidad
Estatal de Chicago Linda J. Kyle,
Tarrant Country Jr. College HE Lacey, Universidad
Texas A & M Darren Lacoste, Valencia College-
West Campus Harriet Lamm, Coastal Bend College
James Lapp, Fort Lewis College Matt Larson,
Escuelas Públicas de Lincoln Christopher Lattin,
Oakton
Community College Julia Ledet, Universidad
Estatal de Lousiana Wayne Lee, St.
Phillips CC Adele LeGere, Oakton Community
College Kevin Leith, Universidad de Houston JoAnn Lewin,
Edison College Jeff Lewis, Johnson County
Community College Janice C.
Lyon, Tallahassee Community College Jean McArthur ,
Joliet Junior College Virginia McCarthy,
Universidad Estatal de Iowa Karla
McCavit, Albion College Michael McClendon,

Universidad de Oklahoma Central Tom McCollow,
Instituto
de Tecnología DeVry Marilyn McCollum,
Universidad Estatal de Carolina del Norte Jill
McGowan, Universidad Howard Will
McGowant, Universidad Howard Angela McNulty,
Joliet Junior
College Lisa Meads, College of the Albemarle
Laurence
Maher, Universidad Estatal del Norte de Texas Jay
A. Malmstrom,
Oklahoma City Community College Rebecca
Mann, Apollo High School Lynn Marecek,
Santa Ana College Sherry Martina, Naperville
North High School Ruby Martinez, San Antonio
College Alec Matheson, Universidad Lamar Nancy
Matthews, Universidad de Oklahoma

Machine Translated by Google

James Maxwell, Universidad Estatal de Oklahoma-Stillwater
Marsha May, Universidad Estatal del Medio Oeste
James McLaughlin, Universidad de West Chester
Judy Meckley, Joliet Junior College
David Meel, Universidad Estatal de Bowling Green
Carolyn Meitler, Universidad Concordia
Samia Metwali, Colegio Comunitario de Erie
Rico Meyers, Joliet Junior College
Eldon Miller, Universidad de Mississippi
James Miller, Universidad de Virginia Occidental
Michael Miller, Universidad Estatal de Iowa
Kathleen Miranda, SUNY en Old Westbury
Chris Mirbaha, Colegio Comunitario del Condado de Baltimore
Val Mohanakumar, Colegio Comunitario de Hillsborough

Thomas Monaghan, escuela secundaria del norte de Naperville
Miguel Montañez, Miami Dade College, Campus Wolfson
María Montoya, Universidad Nuestra Señora del Lago
Susan Moosai, Universidad Atlántica de Florida
Craig Morse, escuela secundaria del norte de Naperville
Samad Mortabit, Universidad Estatal Metropolitana
Pat Mower, Universidad de Washburn
Tammy Muhs, Universidad de Florida Central
A. Muhundan, Colegio Comunitario Manatee
Jane Murphy, Colegio Comunitario de Middlesex
Richard Nadel, Universidad Internacional de Florida
Gabriel Nagy, Universidad Estatal de Kansas
Bill Naegele, Colegio Suburbano del Sur
Karla Neal, Universidad Estatal de Luisiana
Lawrence E. Newman, Colegio Comunitario de Holyoke

Dwight Newsome, Colegio Comunitario Pasco-Hernando
Denise Nunley, Colegios Comunitarios de Maricopa
James Nymann, Universidad de Texas-El Paso
Mark Omodt, Colegio Comunitario Anoka-Ramsey

Seth F. Oppenheimer, Universidad Estatal de Mississippi
Leticia Oropesa, Universidad de Miami
Linda Padilla, Joliet Junior College
Sanja Pantic, Universidad de Illinois en Chicago
E. James Peake, Universidad Estatal de Iowa
Kelly Pearson, Universidad Estatal de Murray
Dashamir Petrela, Universidad Atlántica de Florida
Philip Pina, Universidad Atlántica de Florida
Charlotte Pisors, Universidad de Baylor
Michael Prophet, Universidad del Norte de Iowa
Laura Pyzdrowski, Universidad de Virginia Occidental
Carrie Quesnell, Universidad Estatal Weber
Neal C. Raber, Universidad de Akron
Thomas Radin, Colegio Delta de San Joaquín

Aibeng Serene Radulovic, Universidad Atlántica de Florida
Ken A. Rager, Colegio Estatal Metropolitano
Traci Reed, Universidad Estatal de St. Johns River
Kenneth D. Reeves, Universidad de San Antonio
Elsi Reinhardt, Colegio Comunitario Truckee Meadows

José Remesar, Miami Dade College, Campus Wolfson

Jane Ringwald, Universidad Estatal de Iowa
Douglas F. Robertson, Universidad de Minnesota, MPLS
Stephen Rodi, Colegio Comunitario de Austin
William Rogge, escuela secundaria del noreste de Lincoln
Howard L. Rolf, Universidad de Baylor
Mike Rosenthal, Universidad Internacional de Florida
Phoebe Rouse, Universidad Estatal de Luisiana
Edward Rozema, Universidad de Tennessee en Chattanooga
Dennis C. Runde, Colegio Comunitario Manatee
Paul Runnion, Universidad de Ciencia y Tecnología de Missouri
Amit Saini, Universidad de Nevada-Reno
Laura Salazar, Universidad del Noroeste de Vista
Alan Saleski, Universidad Loyola de Chicago
Susan Sandmeyer, Colegio Comunitario de Jamestown

Brenda Santistevan, Colegio Comunitario de Salt Lake

Linda Schmidt, Colegio Técnico de Greenville
Ingrid Scott, Universidad de Montgomery
AK Shamma, Universidad de Florida Occidental
Zachery Sharon, Universidad de Texas en San Antonio

Joshua Shelor, Virginia Occidental CC
Martin Sherry, Lower Columbia College
Carmen Shershin, Universidad Internacional de Florida
Tatrana Shubin, Universidad Estatal de San José
Anita Sikes, Colegio Comunitario Delgado
Timothy Sipka, Colegio Alma
Charlotte Smedberg, Universidad de Tampa
Lori Smellegar, Colegio Comunitario Manatee
Gayle Smith, Loyola Blakefield
Cindy Soderstrom, Colegio Comunitario de Salt Lake

Leslie Soltis, Colegio Mercyhurst
John Spellman, Universidad Estatal del Suroeste de Texas
Karen Spike, Universidad de Carolina del Norte
Rajalakshmi Sriram, Colegio Comunitario Okaloosa-Walton
Katrina Staley, Universidad Estatal Técnica y Agrícola de Carolina del Norte
Becky Stamper, Universidad de Western Kentucky
Judy Staver, Florida Community College-Sur

Robin Steinberg, Colegio Comunitario Pima
Neil Stephens, escuela secundaria Hinsdale South
Sonya Stephens, Universidad Florida A&M
Patrick Stevens, Joliet Junior College
John Sumner, Universidad de Tampa
Matthew TenHuisen, Universidad de Carolina del Norte, Wilmington
Christopher Terry, Universidad Estatal de Augusta
Diane Tesar, Colegio Suburbano del Sur
Tommy Thompson, Universidad de Brookhaven
Martha K. Tietze, Escuela Secundaria Shawnee Mission Northwest
Richard J. Tondra, Universidad Estatal de Iowa
Florentina Tone, Universidad de Florida Occidental
Suzanne Topp, Colegio Comunitario de Salt Lake
Marilyn Toscano, Universidad de Wisconsin, Superior

Marvel Townsend, Universidad de Florida
Jim Trudnowski, Colegio Carroll
David Tseng, Miami Dade College, campus Kendall

Robert Tuskey, Joliet Junior College
Mihaela Vajiac, Universidad Chapman-Orange
Julia Varbalow, Colegio Comunitario Thomas Nelson-Leesville
Richard G. Vinson, Universidad del Sur de Alabama

Jorge Viola-Prioli, Universidad Atlántica de Florida
María Voxman, Universidad de Idaho
Jennifer Walsh, Colegio Comunitario de Daytona Beach

Donna Wandke, escuela secundaria Naperville North
Timothy L. Warkentin, Colegio Comunitario del Condado de Cloud
Melissa J. Watts, Universidad Estatal de Virginia
Hayat Weiss, Colegio Comunitario de Middlesex
Kathryn Wetzel, Universidad de Amarillo
Darlene Whitkenack, Universidad del Norte de Illinois
Suzanne Williams, Colegio Comunitario Central Piedmont
Larissa Williamson, Universidad de Florida
Christine Wilson, Universidad de Virginia Occidental
Brad Wind, Universidad Internacional de Florida
Anna Wiodarczyk, Universidad Internacional de Florida
María Wolyniak, Colegio Comunitario de Broome

Canton Woods, Universidad de Auburn
Tamara S. Worner, Universidad Estatal de Wayne
Terri Wright, Colegio Técnico Comunitario de New Hampshire, Manchester
Rob Wylie, Universidad Estatal Carl Albert
Aletheia Zambesi, Universidad de Florida Occidental
George Zazi, Universidad Estatal de Chicago
Loris Zucca, Lone Star College-Kingwood
Steve Zuro, Joliet Junior College

Michael Sullivan

Pearson desea agradecer a las siguientes personas por su contribución a la Edición Global:

Colaboradores

Anuj Chatterje
Mónica Sethi
Sunila Sharma, Casa Miranda

Revisores

Kwa Kiam Heong, Universidad Malaya
Jairusha Jackson
Emrah Kiliç, Universidad TOBB de Economía y Tecnología
Ersin Özug˘ urlu, Universidad Técnica de Estambul
Mani Sankar, Facultad de Ingeniería y Tecnología de East Point

Machine Translated by Google

Pearson MyLab

Sacar el máximo provecho de

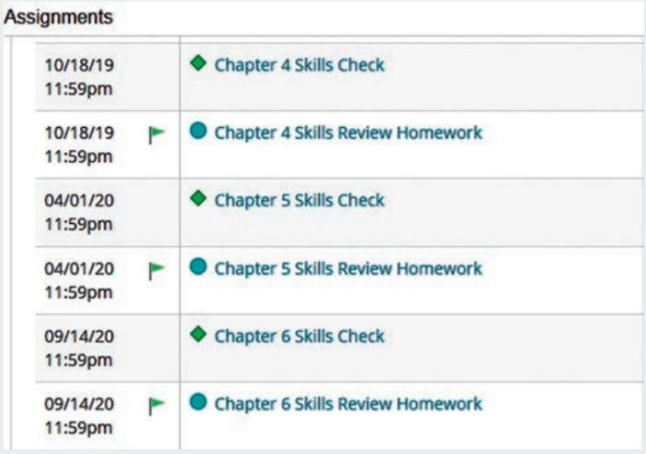
Mi laboratorio de matemáticas

Los cursos de matemáticas evolucionan continuamente para ayudar a los estudiantes de hoy a tener éxito. Es más desafiante que nunca apoyar a estudiantes con una amplia gama de orígenes, estilos de aprendizaje y ansiedades matemáticas. La flexibilidad para crear un curso que se adapte a los formatos de curso individuales de los instructores (con una variedad de opciones de contenido y recursos multimedia, todo en un solo lugar) ha convertido a MyLab Math en la solución líder del mercado para la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas desde sus inicios.

Preparación

Uno de los mayores desafíos en álgebra universitaria, trigonometría y precálculo es asegurarse de que los estudiantes estén preparados adecuadamente con los conocimientos previos. Para un estudiante, tener las habilidades esenciales de álgebra por adelantado en este curso puede aumentar drásticamente el éxito.

- MyLab Math con Revisión Integrada se puede utilizar en cursos de correquisitos o simplemente para ayudar a los estudiantes que ingresan sin una comprensión completa de las habilidades y conceptos de requisitos previos. Integrated Review proporciona videos sobre temas de revisión con una hoja de trabajo correspondiente, junto con cuestionarios de verificación de habilidades asignables y prediseñados y tareas de revisión personalizadas. Revisión integrada ahora está disponible en todos los cursos MyLab Math de la 11.ª edición de Sullivan.



Machine Translated by Google

Recursos para el éxito

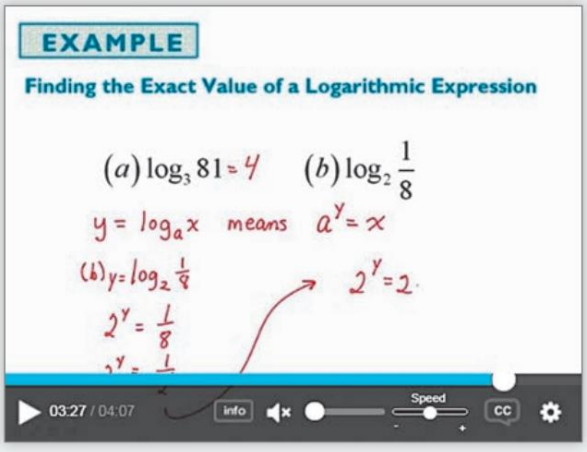
Curso en línea MyLab Math para precálculo, 11.ª edición por Michael Sullivan (se requiere código de acceso)

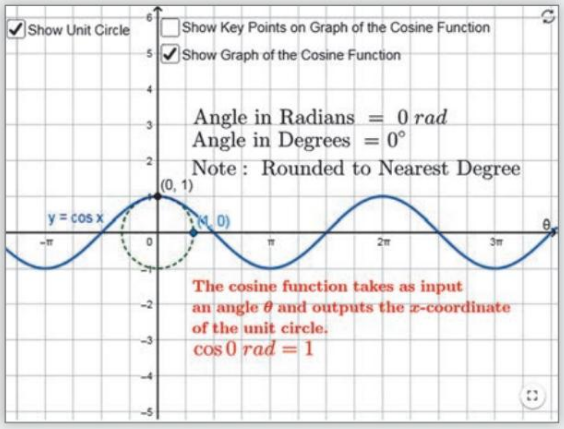
MyLab™ Math está estrechamente integrado con el estilo de cada autor y ofrece una variedad de recursos multimedia creados por el autor, para que sus estudiantes tengan una experiencia consistente.

Programa de vídeo y recursos

Los vídeos de Author in Action son conferencias reales en el aula impartidas por Michael Sullivan III con ejemplos completamente elaborados.

- Las preguntas de evaluación en video están disponibles para asignar en MyLab Math para videos clave.
- ¡ Actualizado! El Guiado correspondiente Lecture Notes ayuda a los estudiantes a tomar notas exhaustivas, organizadas y comprensibles mientras miran videos de Author in Action.



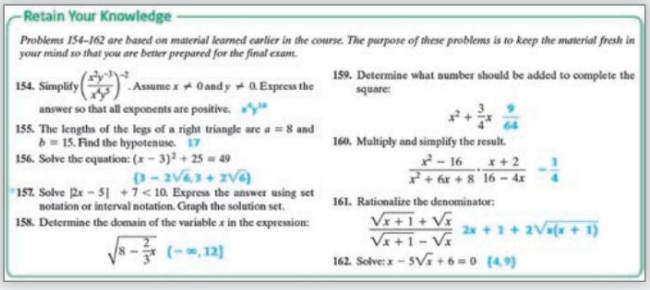


Visualizaciones guiadas

¡Nuevo! Las visualizaciones guiadas, creadas en GeoGebra por Michael Sullivan III, aportan conceptos matemáticos a la vida, ayudando Los estudiantes visualizan el concepto a través de exploración y manipulación deliberada. Asignable en MyLab Math con preguntas de evaluación para comprobar la comprensión conceptual de los estudiantes.

Mantenga sus ejercicios de conocimientos

¡Actualizado! Los ejercicios de retención de conocimientos, asignables en MyLab Math, mejoran el recuerdo de los conceptos aprendidos anteriormente en el curso. Como novedad en la 11.ª edición, se incluirán ejercicios adicionales que tendrán énfasis en el contenido que los estudiantes desarrollarán en la próxima sección.



https://mlm.pearson.com/global/

Machine Translated by Google

Recursos para el éxito

Recursos para instructores

Los recursos en línea se pueden descargar desde el Centro de recursos para instructores.

Manual de soluciones del instructor

Incluye soluciones completamente trabajadas a todos los ejercicios del texto.

Biblioteca de preguntas sobre catalizadores del aprendizaje

Las preguntas escritas por Michael Sullivan III están disponibles en MyLab Math para entregar a través de
Catalíticas de aprendizaje para involucrar a los estudiantes en su curso.

Diapositivas de conferencias en Powerpoint®

Las diapositivas totalmente editables se corresponden con el libro de texto.

Mini notas de conferencia

Incluye ejemplos adicionales y consejos didácticos útiles, por sección.

Pruebagen®

TestGen (www.pearsoned.com/testgen) permite a los instructores crear, editar, imprimir y administrar pruebas utilizando un banco computarizado de preguntas desarrollado para cubrir todos los objetivos del texto.

Proyectos de capítulos en línea

Proyectos adicionales que brindan a los estudiantes una oportunidad. para aplicar lo que aprendieron en el capítulo.

Recursos para estudiantes

Recursos adicionales para mejorar el éxito de los estudiantes.

Vídeo de la conferencia

Los videos de Author in Action son conferencias reales en el aula con ejemplos completamente elaborados presentados por Michael Sullivan, III. Todos los videos se pueden asignar dentro de MyLab Math.

Vídeos de preparación para el examen del capítulo

Los estudiantes pueden ver a los instructores trabajar en soluciones paso a paso para todos los ejercicios de prueba de capítulos del texto. Están disponibles en MyLab Math y en YouTube.

Notas de clase guiadas

Estas notas de clase ayudan a los estudiantes a tomar notas exhaustivas, organizadas y comprensibles mientras miran videos de Author in Action. Los estudiantes participan activamente en el aprendizaje del cómo y el por qué de conceptos importantes a través de exploraciones y actividades. Las notas guiadas de la conferencia están disponibles en formato PDF y en archivos Word personalizables en MyLab Math. También se pueden empaquetar con el texto y el código de acceso a MyLab Math.

Machine Translated by Google

Índice de aplicaciones

Cálculo, 428, 457, 476, 571, 589, 621, 645, 659 máximo/mínimo absoluto
en, 113 área bajo una curva, 147, 498, 722, 736, 812 tasa promedio de cambio en, 116, 233, 353, 464, 499, 504, 515, 523, 581, 667, 699, 749, 770, 862 llevando una escalera a la vuelta de una esquina, 464, 513 funciones compuestas en, 299 prueba de concavidad, 191, 844 números críticos, 862 cociente de diferencias en, 90, 97, 147, 204, 226, 331, 353, 370, 411, 442, 534, 709, 749, 829 funciones discontinuas, 259 ex in , 323, 861 factorización, 345, 498, 770, 844 funciones aproximadas por funciones polinomiales en, 233 funciones crecientes/decrecientes en, 111, 191, 226, 736, 837

Teorema del valor intermedio, 276, 837 máximos/mínimos en, 113, 171, 381, 442 maximización del alcance del proyectil, 540, 545 maximización de la construcción de canaletas de lluvia, 545 descomposición en fracciones parciales, 868, 885, 902, 911 líneas perpendiculares, 795, 820 radianes en, 400 racionalizando numeradores, 795 línea secante en, 116, 171, 370, 515 segunda derivada, 902 simplificando en, 571 regla de Simpson, 200 Ley de refracción de Snell, 514 recta tangente, 594, 595, 604, 636 expresiones y funciones trigonométricas, 502, 512, 522, 536, 538–539, 543, 546, 549, 551, 699, 722, 885

Acústica que amplifica el sonido, 392 volumen del sonido, 343, 394 altavoz, 603 boom sónico, 721 diapasón, 603, 604 galerías de susurros, 705–706

Aerodinámica modelado del movimiento de aeronaves, 687.

Diseño de avión de combate aeronáutico , 593.

Gestión de explotaciones agrícolas , 843 trabajadores agrícolas en EE. UU., 380 cercado de campo, 828 área de pastoreo para vacas, 594 producción de leche, 387 minimización de costos, 843 eliminación de tocones, 658–659

Rumbo de viaje aéreo de la aeronave, 568 distancia entre dos aviones, 149 millas de viajero frecuente, 579 patrón de espera, 456, 513 estacionamiento en O'Hare International Aeropuerto, 131 revisión de un plan de vuelo, 586 explosión sónica, 721 velocidad y dirección de la aeronave, 653, 657

Edad arqueológica de las herramientas antiguas, 373–374 edad del fósil, 379 edad del árbol, 379 fecha de la muerte del hombre prehistórico, 393

Escalera de ladrillo arquitectónico , 868, 893 Edificio Burj Khalifa, A15 Flatiron Building, 593 diseño de piso, 866, 893 asientos de estadio de fútbol, 867 diseño de mosaico, 868, 893 Ventana normanda, 198, arco parabólico A20, 198 diseño de pista de carreras, 708 ventana especial, 198, 206 construcción de estadio, 868 edificio circular vertical, 77 diseño de ventana, 198

Área. Véase también Geometría del Triángulo de las Bermudas, 593 bajo una curva, 498 del triángulo isósceles, 545 de la porción del rectángulo fuera del círculo, 410 del sector del círculo, 405, 408 del segmento del círculo, 606 para que deambule el perro atado, 410 del parabrisas barrido de limpiaparabrisas, 408

Piezas decorativas finas de arte , 426

Ángulo de elevación del Sol en astronomía , 567 distancias en, 568, 861 El cometa Halley, 736. Estación Espacial Internacional (ISS), 749 paralaje, 568

órbitas planetarias Tierra, 708 elíptica, 708 Júpiter, 708 Marte, 708 Mercurio, 736 Plutón, 708 radio de la Luna, 427

Aviación modelado del movimiento de los aviones, 687 lanzamientos orbitales, 767 velocidades del avión, A72

Biología alcohol y conducción, 339, 344 crecimiento bacteriano, 372–373, 386 E-coli, 120, 162 tipos de sangre, 901 longitud de los huesos, 206–207 frecuencia y temperatura del chirrido de los grillos, 199 curación de heridas, 329, 343 volumen pulmonar, 442 edad materna versus síndrome de Down, 177 fuerza muscular, 658 biomasa de levadura como función de tiempo, 385

Publicidad comercial , 106, 178, 207 producción de automóviles, 301, 783 mezcla de café, A70 líneas de caja, 920 tienda de ropa, 923 comisiones, 206 pedidos de galletas, 848 costo de lata, 255, 258 de productos básicos, 301 de fabricación, 266, 836 , A13, A69 marginal, 191, 206 minimización, 206, 843, 848 de impresión, 230–231 de producción, 120, 301, 810, 848 de transporte de mercancías, 132 ecuación de costos, 105 función de costos, 170 tiempos de espera del cliente, 257 ecuación de demanda, 206, 292 depreciación, 294, 344 precios de descuento, 302 tarifa de autoservicio en Burger King, 325 en Citibank, 329, 343 en McDonald's, 329–330 depreciación de equipos, 878 cálculo de gastos, A71 trabajadores agrícolas en EE. UU., 380 gestión de inventario, 152

Machine Translated by Google

Tasa de llegada de automóviles de Jiffy Lube, 329,
343 administrando un mercado de carne,
843 producción de leche, 387
mezcla de dulces, A70
mezcla de nueces, A70
producción de jugo de naranja, 783
rodamientos de bolas de precisión, A13
pedidos de preventa, 768
diseño de producto, 844
programación de producción, 843
producto promoción, 106 beneficio,
810
maximización, 841–842, 843–844 función
de beneficio, 98 tasa de
rendimiento, 368 gestión de
restaurantes, 768 ingresos, 191, 204,
207, 386, A69
publicidad, 388
aerolínea, 844
de tienda de ropa, 800 diarios,
191 de
música digital, 146 de asientos
de fútbol, 879 tasa de cambio
instantáneo de, 953, 961 maximización, 191, 197–198
mensual, 191 teatro, 769

Alquiler de vehículos
recreativos, 207
salario, 302,
868 bruto, 97 aumentos en,
878,
893 comisión de ventas, A82
de boleto de cine, 756, 761, 767 neto, 45 ganancias
de, A72
valor de rescate, 393
depreciación lineal, 165 –
166, 169 oferta y demanda, 166–167, 169 impuestos,
266 fabricación de camiones de juguete, 836
transporte
de mercancías, 837 alquiler de camiones,
105 desempleo, 923

salarios
de vendedor de coches, 105

Carpintería. Véase también Parcela de
construcción , 107.

Química
partículas alfa, 721
reacciones de descomposición, 380
concentración de fármaco, 257
pH, 342
pureza del oro, A71
desintegración radiactiva, 379, 386–387, 393, 394,
844
radiactividad de Chernobyl, 380 soluciones
salinas, A71 reacción
química autocatalítica, 191 moléculas de azúcar,
A71 volumen de gas, A82

combinatoria

códigos de aeropuerto,
903 códigos binarios,
923 permutaciones de cumpleaños, 905, 910, 917,
921, 923
combinaciones de blusas y faldas, 901 arreglos de
libros, 910 apilamiento de cajas,
909 formación de
códigos, 909 cerraduras de
combinación, 910 formación de
comités, 907, 909, 910 , 923
Comités del Senado, 910
disposición de la bandera, 908, 923
composición por género de los niños en la familia,
914 códigos
de letras, 903–904
posibilidades de matrículas, 910, 923 alinear
personas, 904, 909 formación de
números, 901, 909, 910, 923 selección de objetos ,
910 contraseñas, 910
disposición de
asientos, 923 combinaciones de
camisas y corbatas, 901 números de teléfono,
923 palabras clave de dos
símbolos, 900 formación de palabras,
908, 910, 923

Comunicaciones

plan de datos, 82, 107, 158–159
instalación de televisión por
cable, 151 cargos
telefónicos, 169 detección
de radar, 621 antena parabólica, 695–
696, 698 redes sociales, 381, 387
difusión de rumores, 329, 343 servicio de
tableta, 131 velocidad de
mensajes de texto , 258
Teléfonos de tonos, 550

Computadoras y gráficos informáticos, 659,
811 hogares que poseen
computadoras, 380 impresoras láser, regla de tres
clics A70, 811 diseño de
sitios web, 811 mapa de
sitios web, 811

Usuarios de Word, 380

Construcción

de caja, 828, A68–A69, A72 cerrado,
156 abierto,
152 de
escalera de ladrillo, 893 de
lata, 291 de
lata de café, A71 de tubo
cilíndrico, 828 de cerramientos

alrededor del jardín, A70
alrededor del estanque,
A70 maximizando el área de, 194–195, 198, 206
de cerca, 194–195, 198, 206, 828 costo mínimo
para, 257 de linterna, 698
de faro, 698 de
autopista, 568, 580, 606 instalando
TV por cable, 151 pintando una
habitación, 465 pendiente de
techo, 569 de canalón
de lluvia, 198, 419, 545, 559–560 de rampa, 579
rampa de acceso,
106 de rectangular
recinto de campo, 198 acera, 428 de estadio,
198, 868 de tambor
de acero, 258 de piscina,
A21 de columpios, 588
de carpa, 593

Antena parabólica,
698 instalación de tubería de ventilación,
708 de pasarela, 483

Matrices de criptografía
en, 811

decoracion

Árbol de Navidad, A16

Demografía tasa de
natalidad
edad de la madre y, 200 de
mujeres solteras, 191 índice de
diversidad, 342 esperanza
de vida, A81 estado civil,
902 crecimiento de
colonias de mosquitos, 379 población.
Ver Crecimiento de la población de
colonias de conejos, 860

Diseño de
toldo, 580 de box
con superficie mínima, 258 de finas piezas decorativas,
426 de Little League Field, 410 de
aspersor de agua, 408

Dirección del
avión, 653, 657 rumbo de
la brújula, 657 para cruzar un
río, 657 de fuegos artificiales, 720
de rayos, 720 de lancha motora,
657 de nadador, 686

Distancia
astronómica, 568 tasa
promedio de cambio de partícula en movimiento,
962
Triángulo de las Bermudas, A21
andar en bicicleta, 108 de
Chicago a Honolulu, 498 circunferencia de la
Tierra, 409 entre la Tierra y Mercurio,
580 entre la Tierra y Venus, 581 de la Tierra a
una estrella, 567–568

Machine Translated by Google

de explosión, 721
altura
de avión, 579, 580 de
pelota que rebota, 878, 893 de
puente, 579 de
edificio, 567, 568 de nube,
563 de Torre
Eiffel, 567 de terraplén,
568 de jinete de la noria,
513 de Gran Pirámide de Keops,
580, A21 de helicóptero, 606 de globo
aerostático,
568 de la caricatura de
Lincoln en el monte.

Rushmore, 569 de
montaña, 575–576, 579 de estatua
en un edificio, 563–564 de torre, 569 de
árbol, 427, 579
del Monumento a
Washington, 568 de la Torre Willis, 568
de casa, 108 de Honolulu
a Melbourne,

Australia, 498 de
globo aerostático al
aeropuerto, 608
desde la intersección, 44
desde la intersección, 44, 151 en
kayak, 523 de
longitud
de cable tensor, 587
de sendero de montaña, 568
de remonte, 578
de magnitud límite del telescopio, 392 a la Luna ,
579 millas náuticas,
409 cambios de péndulo,
874, 878 a meseta, 567 a través de
un estanque, 567
profundidad de piscina,
133 alcance de
avión, A71 alcance de
escalera, 567 de baliza
giratoria, 465 entre corredores,
579 en el mar, 580, 607 a la
orilla, 567, 580, 606
entre rascacielos, 569, 570
parando, 98, 191, 313 a la torre, 580
recorrido en rueda, A20
entre dos
vehículos en movimiento, 44
hacia la intersección, 151 entre dos objetos,
44, 567, 568 entre dos aviones,
149 vistas, 427 visibilidad del haz del faro
de Gibb's Hill,

564–565, A22
visual, A21
caminando, 108
ancho
del desfiladero,
566 del río Mississippi, 569 del
río, 562, 606

Ciencias económicas

Índice de Precios al Consumidor (IPC), 370
ecuaciones de demanda, 292
inflación, 369
Modelo IS-LM en, 768
propensión marginal al consumo, 879 multiplicador,
879 deuda nacional,
120 tasa de participación,
98 deuda federal per cápita,
369 tasas de pobreza, 232 umbral
de pobreza, 45 ingreso
relativo del niño, 811
desempleo, 923

Educación

distribución por edades de los colegios
comunitarios,
924 costos universitarios,
369, 878 matrículas y cuotas universitarias,
393, 810 títulos otorgados,
899 doctorados,
920 composición del cuerpo
docente, 921 financiación de una educación
universitaria, 393 cálculo de calificaciones, A82
Pruebas de
coeficiente intelectual, curva de
aprendizaje A82, 330, 343 nivel máximo
alcanzado, 850 prueba de opción
múltiple, 910 vacaciones
de primavera, 843 préstamo estudiantil
interés en, 810
prueba de verdadero/
falso, 909 videojuegos y promedio de calificaciones, 177

Electricidad

corriente alterna (ca), 482, 534 circuitos de
corriente alterna (ca), 455, 474 generadores de
corriente alterna (ca), 456 carga de un capacitor, 603
costo de, 129 corriente en circuito
RC , 330
corriente en circuito RL , 330, 343
impedancia, A62 Reglas de Kirchhoff,
769, 783 circuitos
paralelos, A62 resistencia en, 243
tasas para, 106, A82
resistencia, 243, A43
voltaje extranjero, A13
EE. UU., A13

Electrónica. Ver también Computadoras e informática

Unidad Blu-ray,
408 señal de
reloj, 604 parlantes,
603 micrófonos,
55 curva de diente de sierra, 545, 603

Energía

gastada al caminar, 102-103 central nuclear,
720
solar, 55, 666
calor solar, 698
control de termostato, 146

Puentes de
ingeniería
Golden Gate, 195–196 arco
parabólico, 206, 697–698 arco
semielíptico, 707–708, 752 suspensión,
198, 697 rueda motriz, 570
Gateway Arch (St.
Louis), 698 grado de sendero de

montaña, 829 de carretera ,
107 inclinación
de la Torre Inclinada de Pisa, 579 momento
de inercia, 550 motores de
pistón, 426 producto de
inercia, 545 sistema de
carreteras, 620 brazo
robótico, 676 varillas
y pistones, 588 reflector,
522, 698, 752 espacio libre de
túneles, 456 galerías
susurrantes , 707

Entretenimiento

Tarifa de cliente de Demon Roller Coaster , 330 salas
de cine, 497–498 ingresos de
salas, 769

Especies en peligro

de extinción, 329 especies
invasoras, 381 leyes de
control de la contaminación de lagos, 860
fugas de petróleo, 301

Entrenador

elíptico de ejercicio , 708
latidos durante, 163–164 para bajar
de peso, A82

Finanzas. Véase también Inversiones que

equilibran una cuenta corriente, comparación
de saldos bancarios A13, 369 billetes
en la billetera, 923
compras de ropa, 849
costos universitarios, 369,
878 compras de sistemas informáticos,
368 gastos de consumo anuales por edad, 196–
197
coste
del coche, 105
de alquiler de coches,
132 de electricidad, 129
de comida rápida, 768
minimizar, 206, 257 de gas
natural, 106, 132 de impresión,
230–231 de remolque, 168
de viajes transatlánticos,
98, 106 de lote triangular, 593 función de
costos, 170 minimización de
costos, 191

Machine Translated by Google

saldo de tarjetas
de crédito, 820 deuda,
860 intereses,
368 pago, 133, 860
depreciación, 329 de
automóvil, 344, 360,
396 descuentos, 302
división de dinero,
A64, A69 tasa de interés efectiva, 365
tarifas de electricidad, 106 financiera
planificación, 768, 779–780,
783,
A64, A69
divisas, 302 financiación de
una educación universitaria, 393 valor futuro
del dinero, 232 salario bruto, 97
hipótesis del ciclo de
vida, 199 préstamos, A69
automóvil, 860
intereses
sobre, 810, A64 reembolso
de, 368 estudiante, 810
hipotecas, 369
tarifas, 132 tasas de
interés, 369
segundo, 369 apreciación de
precios de
viviendas, 368 precios de comida rápida, 769
reembolsos, 768 maximización
de ingresos, 191,
193–194, 197–198 promesa del hombre rico, 879
opciones
salariales, 880 ahorro para un
coche, 368 para una casa,
878

intereses de cuentas de ahorro, 368
precio de venta de una vivienda, 80–81
fondo de amortización,
878
impuestos, 169 saldo competitivo,
169 ingresos federales, 132, 302, 314,
consumidor de
gasolina A82, 699
alquiler de camiones, 121
compra de autos usados, 368 agua billetes, A82

Alimentos y nutrición animal,
844 dulces, 176
mezclas de
colores de dulces, 923 contenido
de refrigerador, 924 tiempo
de enfriamiento de pizza, 379
comida rápida, 768, 769
contenido de grasa, A82
Galletas Girl Scout, 920 dieta
hospitalaria, 769, 782 helado,
843 número de
comidas posibles, 899–900 combinaciones de
compra de refrescos y hot dogs, 170
contenido de sodio, A82
tiempo de calentamiento de
la jarra de cerveza, 380

Ciencia forense
género de los restos, 587
relación longitud y altura de la tibia, 345

Clasificación
de productos de madera forestal , 378

Juegos
lanzamiento de
moneda, 913 lanzamiento de dado, 913,
914–915, 924 granos de trigo en un tablero de
ajedrez, 879 lotería, 924–925

Jardines y jardinería.
Ver Paisajismo

Área geográfica
del Triángulo de las Bermudas, 593 área
del lago, 593, 607 inclinación
del sendero de montaña, 562, 606

Geología
terremotos, 344
géiseres, 868

Ángulo geométrico
entre dos líneas, volumen de globo 535,
volumen de caja 301, círculo
667

área de, 593, A69
centro de, 77
circunferencia de, A12, A69 ecuación
de, 794 inscrita en
cuadrado, 150 longitud de cuerda
de, 588 radio de, 827 puntos
colineales, 794
volumen de cono, 302 cubo

longitud del borde de, 280
área de superficie de, A13
volumen de, A13
cilindro
inscrito en cono, 151 inscrito
en esfera, 151 volumen de, 302

Método de raíces iguales de Descartes, 828
dodecágono, 535, 593
ecuación de línea, 794
ángulo de escalera, 608
octágono, 544
Figuras de Pascal, 891
área de
polígono de,
794 área de cuadrilátero, 593, 608
área de
rectángulo de, 97, 148–149, 156, A12
dimensiones de, 827
inscritas en un círculo, 150
inscritas en una elipse, 708
inscritas en un semicírculo, 150, 546
perímetro de, semicírculo
A12 inscrito en, 151
área de semicírculo, 593, 608
esfera, 676
área de superficie de, A13
volumen de, A13
área
cuadrada de, A20, A69
diagonales de, 44, 45
perímetro de, sombreado
A69, 879
área de superficie
de globo, 301 de
cubo, A13 de
esfera, A13
tetraedro, volumen de, 794 área de
triángulo
de, 592–593, 594, 608, 794, A12 circunscrita,
581 equilátero, 44, 45,
A12–A13 inscrita en un círculo , 151
isósceles, 97, 608, 827

Copo de nieve de Koch, 879
medianas de, 44
Pascal, 860
perfecto, 594
perímetro de, A13
derecho, 566
lados de, 608, 609
volumen de paralelepípedo, 682 alambre
en formas geométricas, 150–151

Deuda federal del
gobierno , 120 per
cápita, 369 impuesto
federal sobre la renta, 98, 132, 302, 314, correo de
primera clase A82, 133

Salud. Véase también Ejercicio; Edad de la
medicina versus colesterol total,
388 presión arterial, 456,
513 gastos en, 98
peso corporal ideal, 313
hipótesis del ciclo de vida, 199

Mejoras para el hogar. Véase
también
Construcción pintando una casa, 769.

Vivienda en
alquiler de apartamentos, 199
revalorización de viviendas, 368

Inversión(es) 401(k),
878, 893 anualidad,
875–876, 878 en bonos, 844

Tesoros, 783, 834, 836, 838 cupón cero,
366, 369 en CD, 365, 844
interés compuesto,
361–362, 363, 364, 365, 368–369, 394 diversificados, 769
dividiendo, 134,
duplicación A69 de,
366, 369 tasa de interés
efectiva, 365

Machine Translated by Google

cargos financieros, 368 en
valores de renta fija, 369, 844 tasa de
crecimiento para, 368–369
IRA, 369, 875–876, 878
crecimiento de fondos mutuos a lo largo del tiempo,
382–383 rendimiento, 368, 843,
844 cuenta de ahorros, 361–362
en análisis
de acciones, 209
apreciación, 368 beta,
160, 209
Acciones Nasdaq, 909
Acciones de NYSE, 909
carteras de, 902 precio
de, 879 tiempo
para alcanzar la meta, 368, 370
triplicación de, 367, 369

Movimiento de
rocas en paisajismo , 659
cercado de jardín, A70 altura
del árbol, 579 cercado
de estanque, 206 borde de
estanque rectangular, 206 eliminación
de tocones, 658–659 plantación
de árboles, 783 riego
de césped, 408

Robos de vehículos motorizados por la
ley y las fuerzas del orden , 920
delitos violentos, 98

Paseo en parque de atracciones de
ocio y recreación , 408 TV por
cable, 151 pista
de patinaje comunitaria, 157
Noria, 77, 408, 456, 513, 603 montaña rusa,
476 videojuegos y
promedio de calificaciones, 177

Medición
métodos ópticos de, 522 de
lluvia, 666

Medicamento. Véase también
Edad saludable versus colesterol
total, 388 presión arterial, 513
cáncer
mama, 386
pancreático, 329
concentración de fármacos, 120, 257
medicación farmacológica, 329,
343 curación de heridas, 329, 343
litotricia, 708
propagación de enfermedades, 393–394

Meteorología altura
del globo meteorológico y presión atmosférica, 384

Varios asientos para
banquetes, 843 alambres
para doblar, 828
biorritmos, 457
desviación de la tabla, 736
llevar una escalera alrededor de una esquina,
464, 513
escaleras para cítricos,
868 contenedor de café,
396 área de la sección transversal de la viga, 98,
106 ajuste de curva, 768, 782, 847
error de dibujo, 44
Efecto Droste, 861
sombra de lámpara,
721 dimensiones del terreno, 579
Conjuntos de Mandelbrot,
644 pliegues de papel,
884 propiedad de
mascotas, 920 superficie de globo,
301 satélites de vigilancia, 570
volumen de globo, 301 área de
recinto de alambre, 150–151 trabajando
juntos en un trabajo,
A67-A68, A70

Mezclas. Ver también Química mezcla
de cafés, 836, 848, A65, A69, A70 mezcla de
tés, A70 caramelos,
A70 cemento,
A71 mezcla
de frutos secos, 767, 837, 848,
A70 soluciones,
768 agua y anticongelante, A71

Movimiento. Ver también Física
atrapando un tren, 752
en un círculo,
408 del jinete de la noria, 513
de una pelota de
golf, 106 minutero del reloj, 408,
481 objetos acercándose a una intersección,
748 de un péndulo,
604 revoluciones de un disco circular,
A20 simulando, 742 –
743 carrera de tortugas y liebres,
827 uniforme, 748, A66, A70

Alcohol y conducción
de vehículos motorizados , 339, 344
velocidad angular del auto de carreras,
481 aproximación a la intersección, 748
producción de automóviles, 301, 783
velocidad promedio del auto,
A72 reparación de frenos con puesta a
punto, 923 carga de frenado,
666, 686 cigüeñales,
580 depreciación, 294
depreciación de, 344, 360, 396 con
Posicionamiento Global
(GPS), 393 préstamos
para, 860
automóvil fuera de
control, 204 balanceo de
neumáticos, 409 distancia de frenado,
98, 191, 313
robo de, 920 costo de remolque
para automóvil, 168 compra
de automóvil usado, 368 limpiaparabrisas, 408

Música
ingresos de, 146

Navegación
evitando una tormenta tropical, 586
rumbo, 565, 586 de
avión, 568 de barco,
568, 607 trazando un
rumbo, 657 comercial, 579
rumbo de la brújula,
657 cruzando un río, 657
error en
corregir, 584–585, 607 tiempo
perdido debido a, 579
rescate en el mar, 576–577, 579
revisar un plan de vuelo, 586

Mareas oceanográficas ,
456, 475

Óptica
ángulo de refracción, 514
curvatura de la luz, 514
Ángulo de Brewster, 514
índice de refracción, 514 rayo
láser, 567 proyección
láser, 545 ecuación del
fabricante de lentes, A43 luz borrada
a través del vidrio, 329 espejos, 721, 861
telescopio reflector,
698

Pediatría
altura versus circunferencia de la cabeza, 313

Ingesta de
vitaminas en farmacia , 768, 783.

Distancia de la
cámara fotográfica , 568
ancho de campo de la lente de la cámara,
404, 408 ancho de campo, 427

Física
ángulo de elevación del Sol, 567 ángulo
de inclinación, 666 pelotas que
rebotan, 893 carga de
frenado, 666 movimiento
amortiguado, 607
Efecto Doppler, 258 efecto
de la elevación sobre el peso, 106 velocidad
de escape, 736 fuerza,
657, A69 fricción,
607 para sostener
un carro en una colina, 663–664 músculo, 658
resultante, 657
gravedad, 243,
266
en la Tierra, 97, 314
en Júpiter, 98
movimiento armónico, 597
amortiguado,
607 simple, 607

Machine Translated by Google

transferencia de calor, 513
Ley de Hooke, 170
inclinación del sendero de montaña, 562
rampa inclinada, 658
energía cinética, A69
trayectoria del misil, 209
momento de inercia, 550
movimiento del objeto, 597–598
movimiento del péndulo, 408, 604, 874
período, 146, 314
presión, A69
producto de la inercia, 545
distancia del proyectil, 427
movimiento del proyectil, 147, 187, 190–191,
425–426, 427, 513, 540, 545, 550, 652, 741–
742, 747–749, 752 artillería,
204, 504 objeto
impactado, 748
objeto arrojado, 747
simulación de movimiento, 742–743
equilibrio estático, 654–655 , 658, 659, 686 fricción
estática, 658 tensión,
654–655, 658, 686, 885 objeto lanzado,
652 bola, 199, 204, 949–
951, 952 tirones de camión, 658
movimiento uniforme,
151, 748, 752, A66 , A70 velocidad en planos
inclinados, A91 objeto propulsado verticalmente,
204 peso de un barco, 657 de un coche,
657 de
un piano, 654
trabajo, 676,
A69

Jugar
a balancearse,
608 tirar de una carreta, 657, 664–665

Fuga de agua
en fontanería , 736

Población. Véase también Demografía bacterias,
331, 379, 386 disminución,
379 crecimiento
de E-coli, 120, 162 de
especies en peligro de extinción, 380–
381 de mosca de
la fruta, 377 en función de
la edad, 98 crecimiento
de, 379, 381 insectos,
243, 379, 381
depredador-
presa, 441 de truchas, 860 de
Estados Unidos, 359, 387, 895 del mundo, 359, 387–388, 393, 851, 968

Probabilidad de
que no se elija la pelota, 257 de
cumpleaños compartido por personas en una
habitación,
380 filas para pagar, 920
composición del aula, 920 exponencial,
325, 329, 343 de encontrar pareja
ideal, 344
ingreso anual del hogar, 920
Poisson, 329-330
Juegos “El precio es correcto”, 920
función de densidad normal estándar, 147 de ganar
la lotería, 921

Fuegos artificiales
pirotécnicos , 720

Tasa. Véase también
Velocidad
del coche, 408 coger
un autobús, 747 coger
un tren, 747 corriente de
corriente, 768
de vaciar camiones
cisterna de
petróleo,
A71 una
piscina, A71 una tina,
A71 de llenar un depósito cónico,
152 para seguir el ritmo del
sol, 409 revoluciones por minuto
de ruedas de
bicicleta, 408, 410 de
poleas, 409 de dos ciclistas, A71 de uso de agua, 147

Calendario de
comisiones inmobiliarias , costo de
lote triangular A82, 593 precios
de vivienda, 291
préstamos hipotecarios, 369

Puenting
recreativo , 266
Cliente de Demon Roller Coaster
tasa, 330
juegos de azar, 920

Cámaras de
seguridad de seguridad , 567

Instrumentos de
calibración de sismología , 752.

Secuencias. Véase también Diseño de pisos de
baldosas cerámicas Combinatorics ,
866 Drury Lane Theatre, 867
asientos en estadios de fútbol, 867
asientos en anfiteatro, 867

Velocidad
de avión, 657, A72
angular, 408, 481
promedio, 472
de corriente, 409, 848, A70 en
función del tiempo, 108, 151 de
planeador, 606
instantáneo, 961 lineal,
406 en la
Tierra, 408, 409 de
Luna, 409 de
lancha motora, A70 de
pasillos rodantes, A70
revoluciones por minuto de polea, 409 de rotación
de faros, 481 de nadador, 686 de camión, 567 de
teleféricos de tracción
de ruedas, 409
de viento, 768 de aerogenerador, 408

Béisbol
deportivo , 747–748, 910, 923
diamante, 44
dimensiones del plato de home, 593
campo, 587, 588
Liga pequeña, 44, 410
porcentaje de embase, 171-172
Serie Mundial, 910
baloncesto, 910
tiros libres, 105–106, 569 granny
shots, 105 biatlón, A71
puenting, 266
ciclismo, A71 distancia entre
corredores, 579
apuestas exactas, 923 fútbol, 708, A71
equipo defensivo, 910
ingresos por asientos,
879 golf, 106, 388, 741–
742, 748 distancia al green,
586 bunkers de arena, 504
lanzamiento de martillo, 483

Héroes olímpicos, A71 tiros
de piscina, 570
carreras, 825, 827, A71
corredores de relevos,
923 fútbol,
587 natación, 608, 686
tenis, 233, 258, A70

Encuestas
de compra de electrodomésticos,
901 análisis de datos, 898,
901 carteras de acciones,
902 de asistencia a sesiones de verano, 901
de televisores en una casa, 920

Temperatura de la
parcela de aire, 868
cuerpo, A13
conversión de, 170, 302, 314 tiempo
de enfriamiento de la pizza, 379
tasa de chirrido de grillo y, 199
medición, 106
después de medianoche,
232 mensual, 456, 474–475, 482
relación entre escalas, 146 vida útil y, 121
función sinusoidal de,
470–471 de la sartén, 393 tiempo de
calentamiento de
la jarra de cerveza, 380 factor de sensación
térmica, 393

Pruebas y pruebas
CI, A82

Machine Translated by Google

Tiempo
para que la jarra de cerveza se caliente,
380 para que el bloque se deslice por un plano inclinado, 426
Altura del usuario de la noria en función de, 513 para ir de una isla
a un pueblo, 152 horas de luz del día, 293, 397, 456,
472–473, 476, 484, 497 para que la pizza se enfríe, 379 del amanecer, 409,
497 de viaje, 426, 441

Sal deshielo para
transporte , 504
Ferrocarril inclinado de las Cataratas del Niágara, 568

Viajar. Véase también Viajes aéreos;
Dirección de
navegación ,
607 conductores detenidos por la policía, 395
Aparcamiento en O'Hare International Aeropuerto, 131
de navegación,
635 de turismo, 426

Velocidad
instantánea de la
bola, 952 en
la Luna, 952–953

Volumen
de gasolina en tanque, A91
de hielo en pista de patinaje,
157 de agua en cono, 152

Armas de
artillería, 204, 504
cañones, 209.

Clima
presión atmosférica, 329, 343 evitando una
tormenta tropical, 586 aire de enfriamiento,
868 huracanes, 177,
232, 474 rayos, 717–718, 720
probabilidad de lluvia, 916 medición de lluvia,
666 humedad relativa, 330 tornados,
176 sensación térmica, 133, 393

Trabajo, 664–665
informática, 664–665, 666, 686
trabajos a ritmo constante,
848 tirando de una carreta,
664–665 ángulo de
rampa, 666 empuje de carretilla, 657

Machine Translated by Google

Graficos

1

Cómo valorar una casa

Dos cosas a considerar al valorar una casa: (1) ¿Cómo se compara con casas cercanas similares que se han vendido recientemente? (2) ¿Qué valor le da a las características y comodidades anunciadas?

El valor de la vivienda Zestimate® es un buen punto de partida para calcular el valor de una vivienda. Le muestra cómo se compara la casa con otras en el área, pero luego debe agregar todas las demás cualidades que solo conoce alguien que ha visto la casa.

Mirando "compensaciones"

Saber si el precio de venta es justo será importante cuando esté listo para hacer una oferta por una casa. Será aún más importante cuando su prestamista hipotecario contrate a un tasador para determinar si la casa vale el préstamo que busca.

Consulte Zillow para ver ventas recientes de casas similares o comparables en el área. Imprimir Saquelos y guarde estas "compensaciones". Te referirás bastante a ellos.

Tenga en cuenta que "ventas recientes" generalmente significa dentro de los últimos seis meses. Un precio de venta de hace un año probablemente tenga poca o ninguna relación con lo que está sucediendo en su área en este momento. De hecho, algunos prestamistas no aceptan compensaciones de más de tres meses.

La actividad del mercado también determina qué tan fácil o difícil es encontrar comparaciones precisas. En un mercado “caliente” u ocupado, es probable que tenga muchas composiciones para elegir. En un mercado menos activo, encontrar compensaciones razonables se vuelve más difícil. Y si la casa que está viendo tiene características de diseño especiales, encontrar una propiedad comparable es aún más difícil. También es necesario saber qué está pasando en un subsegmento determinado. Tal vez las casas grandes y de alta gama se estén vendiendo como pan caliente, pero los propietarios de casas más pequeñas se quedan donde están, o viceversa.

Fuente: http://luthersanchez.com/2016/03/09/how-to-value-a-house/

—Ver el Proyecto del Capítulo en Internet—

Una mirada atras

El Apéndice A revisa las habilidades de álgebra intermedia.

Una mirada hacia el futuro

Aquí conectamos álgebra y geometría usando el sistema de coordenadas rectangular. En el siglo XVII, el álgebra se había desarrollado hasta el punto de que René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) pudieron utilizar coordenadas rectangulares para traducir problemas de geometría en problemas de álgebra, y viceversa. Esto permitió que tanto los geómetras como los algebristas obtuvieran nuevos conocimientos sobre sus temas, que se pensaba que estaban separados pero que ahora se consideraban conectados.

Describir

1.1 La distancia y el punto medio
Fórmulas
1.2 Gráficas de ecuaciones en dos variables; Intercepciones; Simetría
1.3 Líneas
1.4 Círculos
Revisión del capítulo
Prueba de capítulo
Proyecto del Capítulo

Machine Translated by Google

1.1 Las fórmulas de distancia y punto medio

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Conceptos básicos de álgebra (Sección A.1, págs. A1–A10)
- Conceptos básicos de geometría (Sección A.2, págs. A14–A19)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 42.

OBJETIVOS 1 Usar la fórmula de la distancia (p. 39)

2 Utilice la fórmula del punto medio (p. 41)

Coordenadas rectangulares

Localizamos un punto en la recta de números reales asignándole un único número real, llamado coordenada del punto. Para trabajar en un plano bidimensional, ubicamos puntos usando dos números.

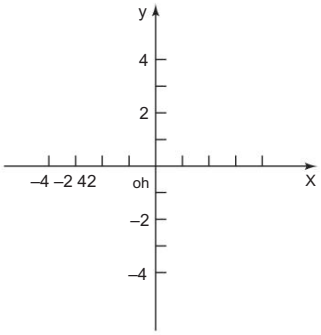


Figura 1 Plano xy

Comienza con dos rectas de números reales ubicadas en el mismo plano: una horizontal y otra vertical. La línea horizontal se llama eje x, la línea vertical eje y y el punto de intersección origen O. Consulte la Figura 1. Asigne coordenadas a cada punto de estas rectas numéricas usando una escala conveniente. En matemáticas, normalmente usamos la misma escala en cada eje, pero en aplicaciones se pueden usar diferentes escalas apropiadas para la aplicación.

El origen O tiene un valor de 0 tanto en el eje x como en el eje y. Los puntos en el eje x a la derecha de O están asociados con números reales positivos, y los que están a la izquierda de O están asociados con números reales negativos. Puntos en el eje y encima de O
están asociados con números reales positivos y los inferiores a O están asociados con números reales negativos. En la Figura 1, los ejes x e y están etiquetados como xey , respectivamente, y se usa una flecha al final de cada eje para indicar la dirección positiva.

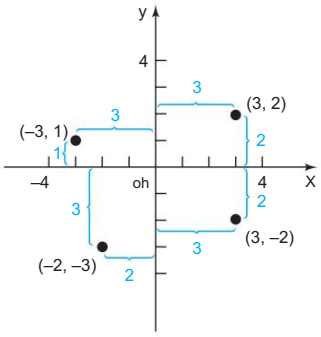


Figura 2

El sistema de coordenadas descrito aquí se denomina sistema de coordenadas rectangular o cartesiano* . Los ejes x y y se encuentran en un plano llamado plano xy, y los ejes x y y se denominan ejes de coordenadas.

Cualquier punto P en el plano xy se puede localizar utilizando un par ordenado (x, y) de números reales. Sea x la distancia con signo de P desde el eje y (con signo significa que si P está a la derecha del eje y, entonces x 7 0, y si P está a la izquierda del eje y, entonces x 6 0); y sea y la distancia con signo de P desde el eje x. El par ordenado (x, y), también llamado coordenadas de P, nos da suficiente información para localizar el punto P en el plano.

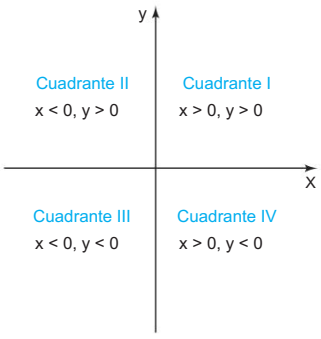


figura 3

Por ejemplo, para ubicar el punto cuyas coordenadas son 1 - 3, 12, avance 3 unidades a lo largo del eje x a la izquierda de O y luego avance 1 unidad hacia arriba. Trazamos este punto colocando un punto en esta ubicación . Consulte la Figura 2, en la que se trazan los puntos con coordenadas 1 - 3, 12, 1 - 2, - 32, 13, - 22 y (3, 2).

El origen tiene coordenadas (0, 0). Cualquier punto en el eje x tiene coordenadas de forma (x, 0), y cualquier punto en el eje y tiene coordenadas de la forma (0, y).

Si (x, y) son las coordenadas de un punto P, entonces x se llama coordenada x, o abscisa, de P, e y es la coordenada y, u ordenada, de P. Identificamos el punto P por su coordenadas (x, y) escribiendo P = 1x, y2. Por lo general, simplemente diremos "el punto (x, y)" en lugar de "el punto cuyas coordenadas son (x, y)".

Los ejes de coordenadas dividen el plano xy en cuatro secciones llamadas cuadrantes, como se muestra en la Figura 3. En el cuadrante I, tanto la coordenada x como la coordenada y de todos los puntos son positivas; en el cuadrante II, x es negativo e y es positivo; en el cuadrante III, tanto x como y son negativos; y en el cuadrante IV, x es positiva e y es negativa. Los puntos sobre los ejes de coordenadas no pertenecen a ningún cuadrante.

Ahora resuelve el problema 1 5

*Nombrado en honor a René Descartes (1596-1650), matemático, filósofo y teólogo francés.

Machine Translated by Google

COMENTARIO En una calculadora gráfica, puedes establecer la escala en cada eje. Una vez hecho esto, se obtiene el rectángulo de visualización. Consulte la Figura 4 para ver un rectángulo de visualización típico. Ahora deberías leer la Sección B.1, El rectángulo de visualización.

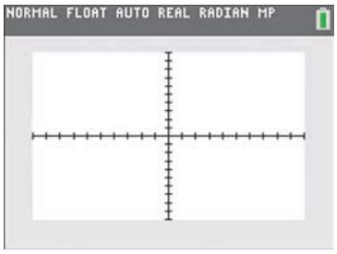


Figura 4 Rectángulo de visualización estándar TI-84 Plus C ■

1 Utilice la fórmula de distancia

Si se utilizan las mismas unidades de medida (como pulgadas, centímetros, etc.) tanto para el eje x como para el eje y, entonces todas las distancias en el plano xy se pueden medir utilizando esta unidad de medida.

EJEMPLO 1 Encontrar la distancia entre dos puntos

Encuentre la distancia d entre los puntos (1, 3) y (5, 6).

Solución

Primero traza los puntos (1, 3) y (5, 6) y conéctalos con un segmento de recta. Consulte la Figura 5(a). Para encontrar la longitud d, comience dibujando un segmento de línea horizontal de (1, 3) a (5, 3) y un segmento de línea vertical de (5, 3) a (5, 6), formando un triángulo rectángulo, como se muestra en la Figura 5(b). Un cateto del triángulo tiene una longitud de 4 (ya que 0 5 - 1 0 = 4) y el otro tiene una longitud de 3 (ya que 0 6 - 3 0 = 3). Según el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la distancia d que buscamos es

$$d2 = 42 + 32 = 16 + 9 = 25$$

$$re = 225 = 5$$

¿Necesita revisar?

El teorema de Pitágoras y su recíproco se analizan en la sección A.2, págs. A14-A15.

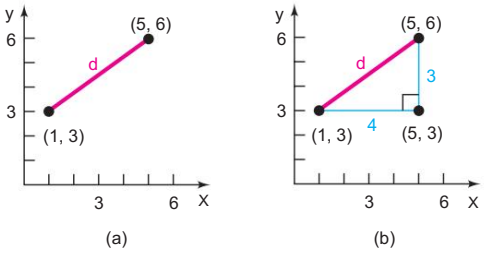


Figura 5

La fórmula de la distancia proporciona un método sencillo para calcular la distancia entre dos puntos.

TEOREMA Fórmula de distancia

La distancia entre dos puntos P1 = 1x1, y12 y P2 = 1x2, y22, denotada por d1P1, P22, es

$$d1P1, P22 = \sqrt{21x2 - x12^{2} + 1y2 - y12^{2}} \qquad (1)$$

En palabras

Para calcular la distancia entre dos puntos, encuentre la diferencia de las coordenadas x, elévela al cuadrado y súmela al cuadrado de la diferencia de las coordenadas y. La raíz cuadrada de esta suma es la distancia.

Prueba de la fórmula de la distancia Sean 1x1, y12 las coordenadas del punto P1 y sean 1x2, y22 las coordenadas del punto P2.

- Supongamos que la línea que une P1 y P2 no es ni horizontal ni vertical. Consulte la Figura 6(a) en la página siguiente. Las coordenadas de P3 son 1x2, y12. la horizontal

Machine Translated by Google

La distancia de P1 a P3 es igual al valor absoluto de la diferencia de las coordenadas x, 0 x2 - x1 0 . La distancia vertical de P3 a P2 es igual al valor absoluto de la diferencia de las coordenadas y, 0 y2 - y1 0 . Véase la Figura 6(b).
La distancia d1P1, P22 es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo, por lo que, según el teorema de Pitágoras, se sigue que

$$3d1P1, P22\ 4^2 = 0\ x2 - x1\ 0^2 + 0\ y2 - y1\ 0^2$$

$$= 1x2 - x12^2 + 1y2 - y12^2$$

$$d1P1, P22 = \sqrt{21x2 - x12^2 + 1y2 - y12^2}$$

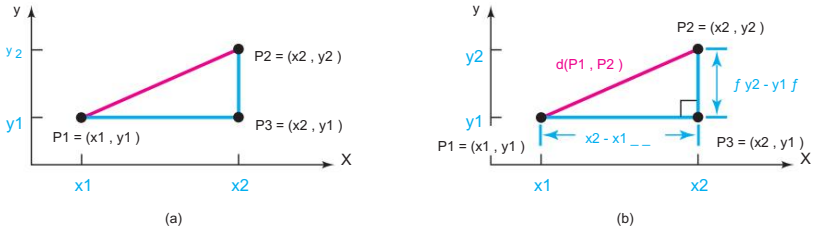


Figura 6

• Si la línea que une P1 y P2 es horizontal, entonces la coordenada y de P1 es igual a la coordenada y de P2; es decir, y1 = y2. Consulte la Figura 7(a). En este caso, la fórmula de distancia (1) todavía funciona, porque para y1 = y2, se reduce a

$$d1P1, P22 = \sqrt{21x2 - x12^2 + 02} = \sqrt{21x2 - x12^2} = 0\ x2 - x1\ 0$$

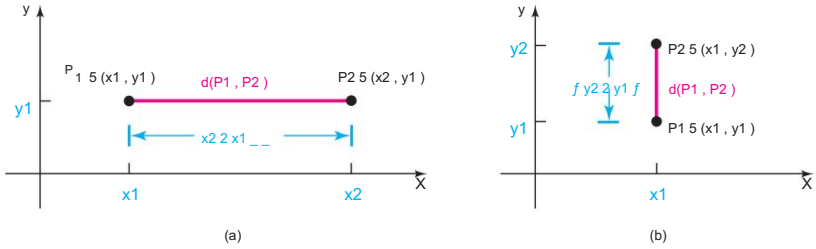


Figura 7

• Un argumento similar es válido si la línea que une P1 y P2 es vertical. Véase la Figura 7(b).

■

EJEMPLO 2 Usando la fórmula de distancia

Encuentre la distancia d entre los puntos 1 - 4, 52 y (3, 2).

Solución

Usando la fórmula de distancia, ecuación (1), revela que la distancia d es

$$re = \sqrt{233 - 1 - 42\ 4^2 + 12 - 52^2} = \sqrt{272 + 1 - 32 =^2}$$

$$\sqrt{249 + 9 = 258} \approx 7{,}62$$

Ahora resuelve los problemas 1 9 y 2 3

La distancia entre dos puntos P1 = 1x1, y12 y P2 = 1x2, y22 nunca es un número negativo. Además, la distancia entre dos puntos es 0 sólo cuando los puntos son idénticos, es decir, cuando x1 = x2 e y1 = y2. Y, debido a que 1x2 - x12 y 1y2 - y12 = 1y1 - y22 ^{2} = 1x1 - x22 no ^{2} calculados de P1 ^{2} a P2 o de P2 a ^{2}, importa si la distancia es
P1; es decir, d1P1, P22 = d1P2, P12.

La introducción a este capítulo mencionó que las coordenadas rectangulares nos permiten traducir problemas de geometría en problemas de álgebra y viceversa. El siguiente ejemplo muestra cómo se puede utilizar el álgebra (la fórmula de la distancia) para resolver problemas de geometría.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Usar álgebra para resolver un problema de geometría

Considere los tres puntos A = 1 - 2, 12, B = 12, 32 y C = 13, 12.

(a) Trace cada punto y forme el triángulo ABC.

(b) Encuentre la longitud de cada lado del triángulo.

(c) Demuestre que el triángulo es rectángulo.

(d) Encuentre el área del triángulo.

Solución

(a) La figura 8 muestra los puntos A, B, C y el triángulo ABC.

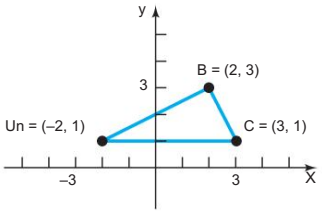


Figura 8

(b) Para encontrar la longitud de cada lado del triángulo, use la fórmula de la distancia, ecuación (1).

$$d1A, B2 = 232 - \overline{1 - 22\ 4\ d1B,\ ^{2} + 13 - 12\ ^{2}} = \overline{216 + 4} = \overline{220} = \overline{225}$$

$$C2 = 213 - 22\ d1A, C2 = \overline{^{2} + 11 - 32\ ^{2}} = \overline{21 + 4} = \overline{25}$$

$$233 - 1 - 22\ 4\ \overline{^{2} + 11 - 12\ ^{2}} = \overline{225 + 0} = 5$$

(c) Si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de los lados es igual al cuadrado de la longitud del tercer lado, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. Mirando la Figura 8, parece razonable conjeturar que el ángulo en el vértice B podría ser un ángulo recto. Comprobaremos para ver si

$$3d1A, B2\ 4\ ^{2} + 3d1B, C2\ 4\ ^{2} = 3d1A, C2\ 4\ ^{2}$$

Usando los resultados del inciso (b) se obtiene

$$3d1A, B2\ 4\ ^{2} + 3d1B, C2\ 4\ ^{2} = 12252\ \overline{2} + 1\ 252\ \overline{2}$$

$$= 20 + 5 = 25 = 3d1A, C2\ 4\ ^{2}$$

Del inverso del teorema de Pitágoras se deduce que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

(d) Como el ángulo recto está en el vértice B, los lados AB y BC forman la base y la altura del triángulo. Su área es

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \# \text{ Base } \# \text{ Altura} = \frac{1}{2} \# \overline{225} \# \overline{25} = 5 \text{ unidades cuadradas}$$

Ahora resuelve el problema 3 3

2 Utilice la fórmula del punto medio

Ahora derivamos una fórmula para las coordenadas del punto medio de un segmento de línea. Sean P1 = 1x1, y12 y P2 = 1x2, y22 los puntos finales de un segmento de línea, y sea M = 1x, y2 el punto en el segmento de línea que está a la misma distancia de P1 que de P2. Vea la Figura 9. Los triángulos P1AM y MBP2 son congruentes. [¿Ves por qué? Se da d1P1, M2 = d1M, P22 ; además, AP1M = BMP2* y P1MA = MP2B. Entonces, tenemos ángulo-lado-ángulo.] Debido a que los triángulos P1AM y MBP2 son congruentes, los lados correspondientes tienen la misma longitud. Eso es,

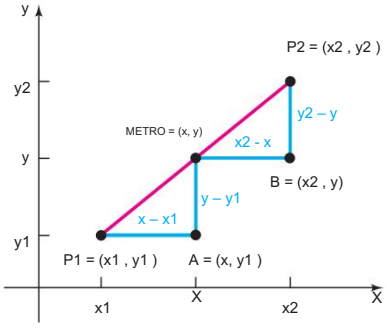


Figura 9

$$x - x1 = x2 - x \quad \text{y} \quad y - y1 = y2 - y$$

$$2x = x1 + x2 \qquad 2y = y1 + y2$$

$$x = \frac{x1 + x2}{2} \qquad y = \frac{y1 + y2}{2}$$

*Un postulado de geometría establece que la transversal P1P2 forma ángulos correspondientes congruentes con los segmentos paralelos P1A y MB.

Machine Translated by Google

En palabras

Para encontrar el punto medio de un segmento de línea, promedie las coordenadas x de los puntos finales y promedie las coordenadas y de los puntos finales.

TEOREMA Fórmula del punto medio

El punto medio M = 1x, y2 del segmento de recta desde P1 = 1x1, y12 hasta P2 = 1x2, y22 es

$$M = 1x, y2 = \text{¢}\ x1 + x2 \over 2 \text{,}\ y1 + y2 \over 2 \text{≤} \qquad (2)$$

EJEMPLO 4 Encontrar el punto medio de un segmento de línea

Encuentra el punto medio del segmento de línea desde P1 = 1 - 5, 52 hasta P2 = 13, 12. Traza los puntos P1 y P2 y su punto medio.

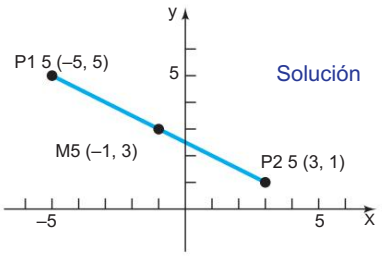


Figura 10

Solución

Utilice la fórmula del punto medio (2) con x1 = - 5, y1 = 5, x2 = 3 e y2 = 1. Las coordenadas (x, y) del punto medio M son

$$x = \frac{x1 + x2}{2} = \frac{- 5 + 3}{2} = - 1 \text{ y } y = 2 \qquad \frac{y1 + y2}{} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Es decir, M = 1 - 1, 32. Consulte la Figura 10.

Ahora resuelve el problema 3 9

1.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. En la recta de números reales, al origen se le asigna el número _____. (pág. A4)
2. Si - 3 y 5 son las coordenadas de dos puntos en la recta numérica real, la distancia entre estos puntos es _____. (págs. A5–A6)
3. Si 3 y 4 son catetos de un triángulo rectángulo, la hipotenusa es _____. (pág. A14)
4. Usa el inverso del teorema de Pitágoras para demostrar que un triángulo cuyos lados tienen longitudes 11, 60 y 61 es un triángulo rectángulo. (págs. A14–A15)
5. El área A de un triángulo cuya base es b y cuya altura es h es A = _____. (pág. A15)
6. Verdadero o Falso Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado incluido de uno son iguales a dos ángulos y el lado incluido del otro. (págs. A16-A17)

Conceptos y vocabulario

7. Si (x, y) son las coordenadas de un punto P en el plano xy, de P e y entonces x se llama _____ es el _____ de p.
8. Los ejes de coordenadas dividen el plano xy en cuatro secciones. llamado _____.
9. Si tres puntos distintos P, Q y R se encuentran todos sobre una recta, y si d1P, Q2 = d1Q, R2, entonces Q se llama segmento _____ de de recta de P a R.
10. Verdadero o Falso La distancia entre dos puntos a veces es un número negativo.
11. Verdadero o Falso El punto 1 - 1, 42 se encuentra en el cuadrante IV del plano cartesiano.
12. Verdadero o Falso El punto medio de un segmento de línea se encuentra promediando las coordenadas x y promediando las coordenadas y de los puntos finales.
13. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para un punto (x, y) que se encuentra en el cuadrante III?
    (a) Tanto x como y son positivos.
    (b) Tanto x como y son negativos.
    (c) x es positivo e y es negativo.
    (d) x es negativo e y es positivo.
14. Opción múltiple Elige la expresión que sea igual a la distancia entre dos puntos (x1, y1) y (x2, y2).
    (a) $\sqrt{21x2 - x12}$ (b) $\sqrt{21x2 - x12^2 + 1y2 - y12^2}$
    (c) $\sqrt{21x2 + x12^2 - 1y2 + y12^2}$
    (d) $\sqrt{21x2 + x12^2 - 1y2 - y12^2}$

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 15 y 16, trace cada punto en el plano xy. Indique en qué cuadrante o en qué eje de coordenadas se encuentra cada punto.

15. (a) A = 1 - 3, 22
(b) B = 16, 02
(c) C = 1 - 2, - 22
(d) D = 16, 52
(mi) mi = 10, - 32
(f) F = 16, - 32

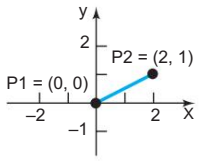
16. (a) A = 11, 42
(b) B = 1 - 3, - 42
(c) C = 1 - 3, 42
(d) D = 14, 12
(mi) mi = 10, 12
(f) F = 1 - 3, 02

17. Traza los puntos (0, 3), (1, 3), 1 - 2, 32, (5, 3) y 1 - 4, 32. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma (x, 3) , donde x es un número real.

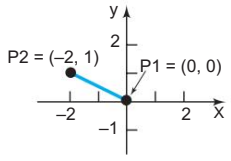
18. Grafica los puntos (2, 0), 12, - 32, (2, 4), (2, 1) y 12, - 12. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma (2, y), donde y es un número real.

En los problemas 19 a 32, encuentre la distancia d entre los puntos P1 y P2.

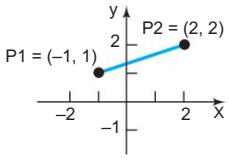
19.



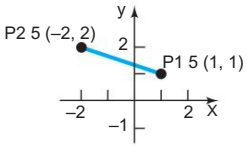
20.



21.



22.



23. P1 = 13, - 42; P2 = 15, 42 25. P1 = 12, - 32; P2 = 14, 22 27. P1 = 1 - 4, - 32; P2 = 16, 22 29. P1 = 11,2, 2,32; P2 = 1 - 0,3, 1,12 31. P1 = 1a, a2; P2 = 10, 02

24. P1 = 1 - 1, 02; P2 = 12, 42
26. P1 = 1 - 7, 32; P2 = 14, 02
28. P1 = 15, - 22; P2 = 16, 12
30. P1 = 1 - 0,2, 0,32; P2 = 12,3, 1,12
32. P1 = 1a, b2; P2 = 10, 02

En los problemas 33 a 38, traza cada punto y forma el triángulo ABC. Demuestre que el triángulo es un triángulo rectángulo. Encuentra su área.

33. A = 1 - 2, 52; B = 11, 32; C = 1 - 1, 02 35. A = 1 - 6, 32; B = 13, - 52; C = 1 - 1, 52 37. A = 14, - 32; B = 14, 12; C = 12, 12

34. A = 1 - 2, 52; B = 112, 32; C = 110,-112
36. A = 1 - 5, 32; B = 16, 02; C = 15, 52
38. A = 14, - 32; B = 10, - 32; C = 14, 22

En los problemas 39 a 46, encuentre el punto medio del segmento de recta que une los puntos P1 y P2.

39. P1 = 13, - 42; P2 = 15, 42
40. P1 = 1 - 2, 02; P2 = 12, 42
41. P1 = 12, - 32; P2 = 14, 22
42. P1 = 1 - 1, 42; P2 = 18, 02
43. P1 = 1 - 4, - 32; P2 = 12, 22
44. P1 = 17, - 52; P2 = 19, 12
45. P1 = 1a, a2; P2 = 10, 02
46. P1 = 1a, b2; P2 = 10, 02

Aplicaciones y extensiones

47. Si el punto 13, 82 se desplaza 2 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo, ¿cuáles son sus nuevas coordenadas?

48. Si el punto 1 - 1, 62 se desplaza 2 unidades hacia la izquierda y 4 unidades hacia arriba, ¿cuáles son sus nuevas coordenadas?

49. Encuentre todos los puntos que tengan una coordenada x de 4 cuya distancia desde el punto 1 - 4, 22 sea 10.
(a) Utilizando el teorema de Pitágoras.
(b) Utilizando la fórmula de la distancia.

50. Encuentre todos los puntos que tengan una coordenada y de - 6 cuya distancia desde el punto (1, 2) sea 17.
(a) Utilizando el teorema de Pitágoras.
(b) Utilizando la fórmula de la distancia.

51. Encuentra todos los puntos en el eje x que están a 12 unidades del punto 15, - 62.

52. Encuentra todos los puntos en el eje y que están a 6 unidades del punto 14, - 32.

53. Supongamos que A = 12, 52 son las coordenadas de un punto en el plano xy.
(a) Encuentre las coordenadas del punto si A se desplaza 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia abajo.
(b) Encuentre las coordenadas del punto si A se desplaza 1 unidad hacia la izquierda y 6 unidades hacia arriba.

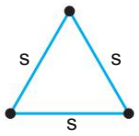
54. Traza los puntos A = 1 - 1, 82 y M = 12, 32 en el plano xy. Si M es el punto medio de un segmento AB, encuentre las coordenadas de B.

55. El punto medio del segmento de línea de P1 a P2 es 1 - 6, 52. Si P1 = 1 - 6, 32. ¿Qué es P2?

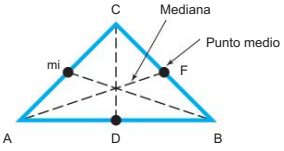
56. El punto medio del segmento de recta de P1 a P2 es 15, - 42. Si P2 = 17, - 22, ¿cuánto es P1?

Machine Translated by Google

57. Geometría Un triángulo equilátero tiene tres lados de igual longitud. Si dos vértices de un triángulo equilátero son (0, 4) y (0, 0) encuentre el tercer vértice. ¿Cuántos de estos triángulos son posibles?



58. Geometría Las medianas de un triángulo son los segmentos de recta desde cada vértice hasta el punto medio del lado opuesto (ver la figura). Encuentra las longitudes de las medianas del triángulo con vértices en A = 10, 02, B = 16, 02 y C = 14, 42.



En los problemas 59 a 62, encuentre la longitud de cada lado del triángulo determinado por los tres puntos P1, P2 y P3. Indica si el triángulo es isósceles, rectángulo, ninguno de estos o ambos. (Un triángulo isósceles es aquel en el que al menos dos de sus lados tienen la misma longitud).

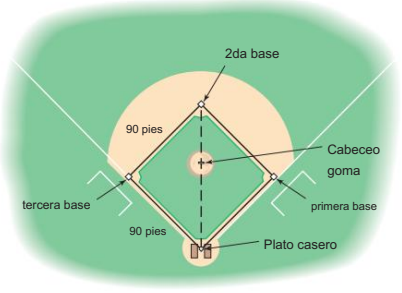
59. P1 = 1 - 1, 42; P2 = 16, 22; P3 = 14,-52

60. P1 = 14, 22; P2 = 110, 42; P3 = 16,-42

61. P1 = 17, 22; P2 = 1 - 4, 02; P3 = 14, 62

62. P1 = 1 - 8, - 32, P2 = 10, 152, P3 = 15, 22

63. Béisbol Un “diamante” de béisbol de las grandes ligas es en realidad un cuadrado de 90 pies de lado (ver la figura). ¿Cuál es la distancia directamente desde el plato de home hasta la segunda base (la diagonal del cuadrado)?



64. Béisbol de ligas menores El diseño de un campo de juego de ligas menores es un cuadrado de 60 pies de lado. ¿Qué distancia hay directamente desde el plato de home hasta la segunda base (la diagonal del cuadrado)?

Fuente: Regulaciones oficiales, reglas de juego y políticas operativas de las ligas menores de béisbol de 2018.

65. Béisbol Consulte el problema 63. Superponga un sistema de coordenadas rectangular en un diamante de béisbol de las grandes ligas de modo que el origen esté en el plato de home, el eje x positivo esté en la dirección desde el plato de home a la primera base, y el eje y positivo se encuentra en la dirección desde el plato de home hasta la tercera base.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de la primera base, la segunda base y la tercera base? Utilice los pies como unidad de medida.

(b) Si el jardinero derecho está ubicado en (310, 15), ¿a qué distancia está? ¿Del jardinero derecho a la segunda base?

(c) Si el jardinero central está ubicado en (300, 300), ¿qué distancia hay entre el jardinero central y la tercera base?

66. Ligas pequeñas de béisbol Consulte el problema 64. Superponga un sistema de coordenadas rectangular en un diamante de béisbol de las ligas menores de modo que el origen esté en el plato de home, el eje x positivo esté en la dirección desde el plato de home a la primera base y el eje y positivo -El eje se encuentra en la dirección desde el plato de home hasta la tercera base.

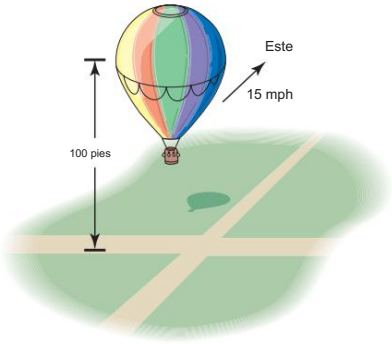
(a) ¿Cuáles son las coordenadas de la primera base, la segunda base y la tercera base? Utilice los pies como unidad de medida.

(b) Si el jardinero derecho está ubicado en (180, 20), ¿a qué distancia está de ¿El jardinero derecho a la segunda base?

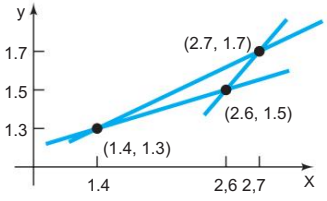
(c) Si el jardinero central está ubicado en (220, 220), ¿a qué distancia está? ¿Del jardinero central a la tercera base?

67. Distancia entre objetos en movimiento Un Ford Focus y un camión Freightliner Cascadia salen de una intersección al mismo tiempo. El Focus se dirige hacia el este a una velocidad promedio de 60 millas por hora, mientras que el Cascadia se dirige hacia el sur a una velocidad promedio de 45 millas por hora. Encuentre una expresión para la distancia entre ellos d (en millas) al final de t horas.

68. Distancia de un objeto en movimiento desde un punto fijo Un globo aerostático, que se dirige hacia el este a una velocidad promedio de 15 millas por hora y a una altitud constante de 100 pies, pasa sobre una intersección (vea la figura). Encuentre una expresión para la distancia d (medida en pies) desde el globo hasta la intersección t segundos después.



69. Error de redacción Cuando un dibujante dibuja tres líneas que deben cruzarse en un punto, es posible que las líneas no se crucen como se esperaba y posteriormente formarán un triángulo de error. Si este triángulo de error es largo y delgado, una estimación de la ubicación del punto deseado es el punto medio del lado más corto. La figura muestra uno de esos triángulos de error.



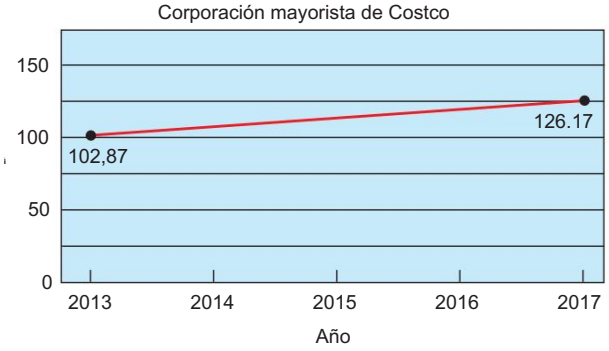
(a) Encuentre una estimación para el punto de intersección deseado.

(b) Encuentre la distancia desde (1.4, 1.3) al punto medio encontrado en parte (a).

Machine Translated by Google

70. Ventas netas La figura ilustra el crecimiento de las ventas netas de Costco Wholesale Corporation desde 2013 hasta 2017. Utilice la fórmula del punto medio para estimar las ventas netas de Costco Wholesale Corporation en 2015. ¿Cómo se compara su resultado con el valor reportado de $113,67 mil millones?

Fuente: Informe anual 2017 de Costco Wholesale Corporation



71. Umbral de pobreza Un umbral de pobreza representa el ingreso familiar anual mínimo para que una familia no sea considerada pobre. En 1995, el umbral de pobreza para una familia de cuatro personas con dos hijos menores de 18 años era de 15.598 dólares. En 2005, el umbral de pobreza para una familia de cuatro con dos hijos menores de 18 años fue de $19,508. Suponiendo que los umbrales de pobreza aumentan en línea recta, utilice la fórmula del punto medio para estimar el umbral de pobreza de una familia de cuatro personas con dos hijos menores de 18 años en 2000.

72. Problema de desafío Geometría Verificar que los puntos (0, 0), (a, 0), y ¢ a $\frac{a}{2}$, $\frac{23a}{2}$ ≤ son los vértices de un triángulo equilátero. Entonces Demuestre que los puntos medios de los tres lados son los vértices de un segundo triángulo equilátero.

73. Problema de desafío Geometría Un punto P es equidistante de 1 - 5, 12 y 14, - 42. Encuentra las coordenadas de P si su coordenada y es el doble de su coordenada x.

74. Problema de desafío Geometría Encuentra el punto medio de cada diagonal de un cuadrado con lado de longitud s. Saca la conclusión de que las diagonales de un cuadrado se cortan en sus puntos medios.

[Sugerencia: utilice (0, 0), (0, s), (s, 0) y (s, s) como vértices del cuadrado.]

75. Problema de desafío Geometría Para cualquier paralelogramo, demuestra que la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales.

[Sugerencia: utilice (0, 0), (a, 0), 1a + b, c2 y (b, c) como vértices del paralelogramo. Supongamos que a, b y c son positivos.]

Explicar conceptos: discusión y escritura

76. Escribe un párrafo que describa un plano cartesiano. Luego escribe un segundo párrafo que describa cómo trazar puntos en el plano cartesiano. Tus párrafos deben incluir los términos “ejes de coordenadas”, “par ordenado”, “coordenadas”, “trama”, “ coordenada x” y “coordenada y”.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 0 2. 8 3. 5 4. 112 + 602 = 121 + 3600 = 3721 = 612 5. $\frac{1}{2}$ bh 6. Verdadero

1.2 Gráficas de ecuaciones en dos variables; Intercepciones; Simetría

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Resolver ecuaciones lineales (Sección A.6, págs. A44–A45)
- Resolver una ecuación cuadrática factorizando (Sección A.6, págs. A47–A48)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 53.

OBJETIVOS 1 Graficar ecuaciones trazando puntos (p. 46)

2 Encuentra intersecciones en una gráfica (p. 48)

3 Encontrar intersecciones a partir de una ecuación (p. 48)

4 Pruebe una ecuación de simetría con respecto al eje x, el eje y y el origen (p. 49)

5 Sepa cómo graficar ecuaciones clave (p. 51)

Machine Translated by Google

1 Graficar ecuaciones trazando puntos

Una ecuación en dos variables, digamos x e y, es un enunciado en el que dos expresiones que involucran x e y son iguales. Las expresiones se llaman lados de la ecuación.

Dado que una ecuación es un enunciado, puede ser verdadera o falsa, dependiendo del valor de las variables. Cualquier valor de x e y que dé como resultado un enunciado verdadero se dice que satisface la ecuacion.

Por ejemplo, las siguientes son todas ecuaciones en dos variables x e y:

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad 2x - y = 6 \qquad y = 2x + 5 \qquad x^2 = y$$

El primero de ellos, $x^2 + y^2 = 5$, se satisface para $x = 1$, $y = 2$, ya que $1^2 + 2^2 = 5$. Otras opciones de xey , como $x = -1$, $y = -2$, también satisfacen esta ecuación. No se satisface para $x = 2$ e $y = 3$, ya que $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \cdot 5$.

La gráfica de una ecuación en dos variables x e y consta del conjunto de puntos en el plano xy cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación.

Los gráficos juegan un papel importante al ayudarnos a visualizar las relaciones que existen entre dos variables o cantidades. El cuadro 1 muestra el precio promedio de la gasolina en Estados Unidos para los años 1991-2017 (ajustado por inflación). Si trazamos estos datos usando el año como coordenada x y el precio como coordenada y, y luego conectamos los puntos (año, precio), obtenemos la Figura 11.

Cuadro 1 Precio Promedio de la Gasolina

Año	Precio	Año	Precio	Año	Precio
1991	1,98	2000	2.11	2009	2,68
1992	1,90	2001	1,97	2010	3.12
1993	1.81	2002	1,83	2011	3.84
1994	1,78	2003	2.07	2012	3.87
1995	1,78	2004	2.40	2013	3.68
1996	1,87	2005	2,85	2014	3.48
1997	1,83	2006	3.13	2015	2.51
1998	1,55	2007	3.31	2016	2.19
1999	1,67	2008	3.70	2017	2.38

Fuente: Administración de Información Energética de EE. UU. (https://www.eia.gov/dnav/pet/pet_pri_gnd_dcus_nus_a.htm)

Figura 11

EJEMPLO 1 Determinar si un punto está en la gráfica de una ecuación

Determina si los puntos están en la gráfica de la ecuación $2x - y = 6$.

(a) (2, 3) (b) 12, - 22

Solución

(a) Para el punto (2, 3), verifique si $x = 2$, $y = 3$ satisface la ecuación $2x - y = 6$.

$$2x - y = 2 \# 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \cdot 6$$

La ecuación no se satisface, por lo que el punto (2, 3) no está en la gráfica de $2x - y = 6$.

b) Para el punto 12, - 22,

$$2x - y = 2 \# 2 - 1 - 22 = 4 + 2 = 6$$

La ecuación se satisface, por lo que el punto 12, - 22 está en la gráfica de $2x - y = 6$.

Ahora resuelve el problema 1 3

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Graficar una ecuación trazando puntos

Grafique la ecuación: y = 2x + 5

Solución

La gráfica consta de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación. Para localizar algunos de estos puntos (y tener una idea del patrón de la gráfica), asigna algunos números a x y encuentra los valores correspondientes para y.

Si	Entonces	Punto en el gráfico
x = 0	y = 2 # 0 + 5 = 5	(0, 5)
x = 1	y = 2 # 1 + 5 = 7	(1, 7)
x = -5	y = 2 # 1 -52 + 5 = -5	1 -5, -52
x = 10	y = 2 # 10 + 5 = 25	(10, 25)

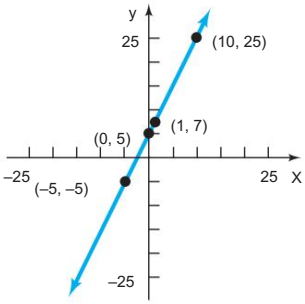


Figura 12 y = 2x + 5

Al trazar estos puntos y luego conectarlos, obtenemos la gráfica (una recta) de la ecuación y = 2x + 5, como se muestra en la Figura 12.

EJEMPLO 3 Graficar una ecuación trazando puntos

Grafique la ecuación: y = x2

Solución

La Tabla 2 proporciona varios puntos en la gráfica de y = x2 . Al trazar estos puntos y conectarlos con una curva suave se obtiene la gráfica (una parábola) que se muestra en la Figura 13.

Tabla 2

X	y = x2	(x,y)
-4	dieciséis	1-4, 162
-3	9	1-3, 92
-2	4	1-2, 42
-1	1	1-1, 12
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	9	(3, 9)
4	dieciséis	(4, 16)

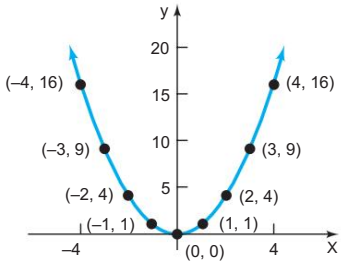


Figura 13 y = x2

Las gráficas de las ecuaciones que se muestran en las Figuras 12 y 13 no muestran todos los puntos. Por ejemplo, en la Figura 12, el punto (20, 45) es parte de la gráfica de y = 2x + 5, pero no se muestra. Dado que la gráfica de y = 2x + 5 se puede extender indefinidamente, usamos flechas para indicar que el patrón mostrado continúa. Es importante, al mostrar un gráfico, presentar una cantidad suficiente del mismo para que cualquier espectador de la ilustración "vea" el resto como una continuación obvia de lo que realmente está allí. Esto se conoce como gráfico completo.

COMENTARIO Otra forma de obtener la gráfica de una ecuación es utilizar una utilidad gráfica. Lea la Sección B.2, Uso de una utilidad gráfica para representar gráficamente ecuaciones. ■

Una forma de obtener la gráfica completa de una ecuación es trazar suficientes puntos en la gráfica para que un patrón se vuelva evidente. Luego estos puntos se conectan con una curva suave siguiendo el patrón sugerido. ¿Pero cuántos puntos son suficientes?
A veces el conocimiento sobre la ecuación nos lo dice. Por ejemplo, aprenderemos en la siguiente sección que si una ecuación tiene la forma y = mx + b, entonces su gráfica es una recta.
En este caso sólo se necesitan dos puntos para obtener la gráfica completa.

Uno de los propósitos de este texto es investigar las propiedades de las ecuaciones para poder decidir si una gráfica es completa. A veces graficaremos ecuaciones trazando puntos. En breve, investigaremos varias técnicas que nos permitirán graficar una ecuación sin trazar tantos puntos.

Dos técnicas que a veces reducen el número de puntos necesarios para graficar una ecuación implica encontrar intersecciones y verificar la simetría.

Machine Translated by Google

2 Encontrar intersecciones a partir de un gráfico

Los puntos, si los hay, en los que una gráfica cruza o toca los ejes de coordenadas se denominan intersecciones de la gráfica. Consulte la Figura 14. La coordenada x de un punto en el que la gráfica cruza o toca el eje x es una intersección con el eje x, y la coordenada y de un punto en el que la gráfica cruza o toca el eje y es una y -interceptar.

En palabras
Las intersecciones son puntos (pares ordenados). Una intersección con el eje x o con el eje y es un número. Por ejemplo, el punto (3, 0) es una intersección; el número 3 es una intersección con el eje x.

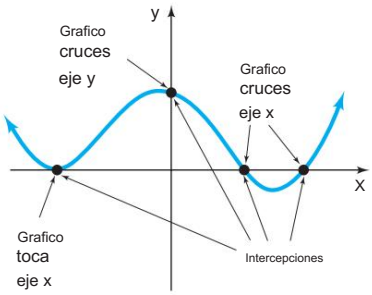


Figura 14

EJEMPLO 4 Encontrar intersecciones a partir de un gráfico

Encuentra las intersecciones de la gráfica en la Figura 15. ¿Cuáles son sus intersecciones en x? ¿Cuáles son sus intersecciones en y?

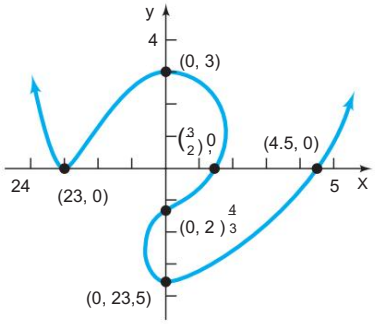


Figura 15

Solución Las intersecciones de la gráfica son los puntos.

$$1 - 3, 02, 10, 32, \not\in 3 \qquad \frac{}{2}, 0\leq, \not\in 0, - 3 \leq, \qquad \frac{4}{} \qquad 10, - 3{,}52, 14{,}5, 02$$

Las intersecciones en x son $- 3, \frac{3}{2}$, y 4,5; las intersecciones en y son - 3,5, $- 3 \quad \frac{4}{}$, y 3.

En el ejemplo 4, observe que las intersecciones se enumeran como pares ordenados, y las intersecciones en x y en y se enumeran como números. Usamos esta distinción a lo largo del texto.

Ahora resuelve el problema 4 1 (a)

3 Encontrar intersecciones a partir de una ecuación

Las intersecciones de una gráfica se pueden encontrar a partir de su ecuación utilizando el hecho de que los puntos en el eje x tienen coordenadas y iguales a 0, y los puntos en el eje y tienen coordenadas x iguales a 0.

COMENTARIO Para muchas ecuaciones, encontrar las intersecciones puede no ser tan fácil. En tales casos, se puede utilizar una utilidad gráfica. Lea la primera parte de la Sección B.3, Uso de una utilidad gráfica para localizar intersecciones y verificar la simetría, para descubrir cómo ubicar intersecciones usando una utilidad gráfica. ■

Procedimiento para encontrar intercepciones

- Para encontrar la (s) intersección(es) con el eje x, si las hay, de la gráfica de una ecuación, sea y = 0 en la ecuación y resuelva para x, donde x es un número real.
- Para encontrar la (s) intersección(es) y, si las hay, de la gráfica de una ecuación, sea x = 0 en la ecuación y resuelva para y, donde y es un número real.

EJEMPLO 5 Encontrar intersecciones a partir de una ecuación

Encuentre la (s) intersección(es) con el eje x y la (s) intersección(es) con el eje y de la gráfica de y = x2 - 4. Luego grafique y = x2 - 4 trazando puntos.

Machine Translated by Google

Solución Para encontrar la (s) intersección(es) con el eje x, sea y = 0 y obtenga la ecuación

$$x2 - 4 = 0 \qquad y \cdot x2 \cdot 4 \text{ con } y \cdot 0$$

$$1x + 22\ 1x - 2) = 0 \qquad \text{Factor.}$$

$$x + 2 = 0 \quad \text{o } x - 2 = 0 \qquad \text{Utilice la propiedad de producto cero.}$$

$$x = - 2 \text{ o } \quad x = 2 \qquad \text{Resolver.}$$

La ecuación tiene dos soluciones, - 2 y 2. Las intersecciones con el eje x son - 2 y 2.

Para encontrar la (s) intersección(es) en y, sea x = 0 en la ecuación.

$$y = x2 - 4$$
$$= 02 - 4 = - 4$$

La intersección con el eje y es - 4.

Como x2 Ú 0 para todo x, deducimos de la ecuación y = x2 - 4 que y Ú - 4 para todo x. Esta información, las intersecciones y los puntos de la Tabla 3 nos permiten graficar y = x2 - 4. Consulte la Figura 16.

Tabla 3

x	y · x2 · 4	(x,y)
-3	5	(-3, 5)
-1	-3	(-1, -3)
1	-3	(1, -3)
3	5	(3, 5)

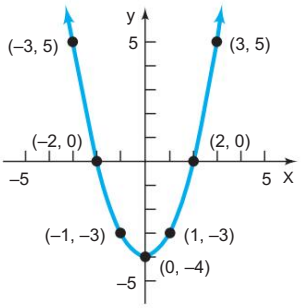


Figura 16 y = x2 - 4

Ahora resuelve el problema 2 3

4 Probar una ecuación de simetría con respecto al eje x, el eje y y el origen

Otra herramienta útil para graficar ecuaciones a mano implica la simetría, particularmente simetría con respecto al eje x, el eje y y el origen.

La simetría ocurre a menudo en la naturaleza. Considere la imagen de la mariposa. ¿Ves la simetría?

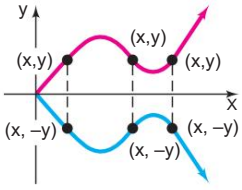


Figura 17 Simetría con respecto al eje x

DEFINICIÓN Simetría con respecto al eje x

Una gráfica es simétrica con respecto al eje x si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto 1x, - y2 también está en la gráfica.

La Figura 17 ilustra la definición. Tenga en cuenta que cuando una gráfica es simétrica con respecto al eje x, la parte de la gráfica sobre el eje x es un reflejo (o imagen especular) de la parte debajo de él, y viceversa.

EJEMPLO 6 Puntos simétricos con respecto al eje x

Si una gráfica es simétrica con respecto al eje x y el punto (3, 2) está en la gráfica, entonces el punto 13, - 22 también está en la gráfica.

Machine Translated by Google

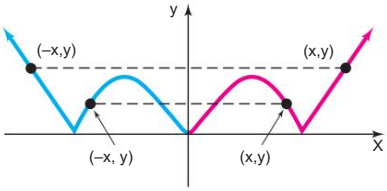


Figura 18 Simetría con respecto al eje y

DEFINICIÓN Simetría con respecto al eje y

Una gráfica es simétrica con respecto al eje y si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto 1 - x, y2 también está en la gráfica.

La Figura 18 ilustra la definición. Cuando una gráfica es simétrica con respecto al eje y, la parte de la gráfica a la derecha del eje y es un reflejo de la parte a la izquierda del mismo, y viceversa.

EJEMPLO 7 Puntos simétricos con respecto al eje y

Si una gráfica es simétrica con respecto al eje y y el punto (5, 8) está en la gráfica, entonces el punto 1 - 5, 82 también está en la gráfica.

DEFINICIÓN Simetría con respecto al origen

Una gráfica es simétrica con respecto al origen si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto 1 - x, - y2 también está en la gráfica.

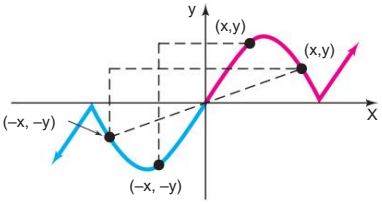


Figura 19 Simetría con respecto al origen

La Figura 19 ilustra la definición. La simetría con respecto al origen se puede ver de tres maneras:

- Como una reflexión sobre el eje y, seguida de una reflexión sobre el eje x
- Como una proyección a lo largo de una línea que pasa por el origen de modo que las distancias desde el origen sean iguales
- Como la mitad de una revolución completa sobre el origen

EJEMPLO 8 Puntos simétricos con respecto al origen

Si una gráfica es simétrica con respecto al origen y el punto 14, - 22 está en la gráfica, entonces el punto 1 - 4, 22 también está en la gráfica.

Ahora resuelve los problemas 3 1 y 4 1 (b)

Cuando la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto a un eje de coordenadas o al origen, se reduce la cantidad de puntos que es necesario trazar para ver el patrón. Por ejemplo, si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y, entonces una vez que se trazan los puntos a la derecha del eje y, se puede obtener un número igual de puntos en la gráfica reflejándolos alrededor del eje y. -eje. Debido a esto, antes de graficar una ecuación, primero debemos determinar si tiene alguna simetría. Para este fin se utilizan las siguientes pruebas.

Pruebas de simetría

Para probar la gráfica de una ecuación para ver simetría con respecto a la

- Eje x Reemplace y por - y en la ecuación y simplifique. Si resulta una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje x.
- Eje y Reemplace x por - x en la ecuación y simplifique. Si resulta una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje y.
- Origen Reemplaza x por - x e y por - y en la ecuación y simplifica. Si resulta una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al origen.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 9 Probar una ecuación de simetría

Prueba $4x^2 + 9y^2 = 36$ para ver simetría.

Solución

Eje x: para probar la simetría con respecto al eje x, reemplace y por - y.
Como $4x^2 + 9(-y)^2 = 36$ equivale a $4x^2 + 9y^2 = 36$, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje x.

Eje y: para probar la simetría con respecto al eje y, reemplace x por - x.
Dado que $4(-x)^2 + 9y^2 = 36$ equivale a $4x^2 + 9y^2 = 36$, la gráfica de - x2 la ecuación es simétrica con respecto al eje y.

Origen: para probar la simetría con respecto al origen, reemplace x por - x e y por - y. Como $4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36$ la gráfica de la ecuación es equivale a $4x^2 + 9y^2 = 36$, simétrica con respecto al origen.

EJEMPLO 10 Probar una ecuación de simetría

Prueba $y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ para simetría.

Solución

Eje x: para probar la simetría con respecto al eje x, reemplace y por - y.

Dado que $-y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ no es equivalente a $y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$, la gráfica de la ecuación no es simétrica con respecto al eje x.

Eje y: para probar la simetría con respecto al eje y, reemplace x por - x.

Dado que $y = \frac{4(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ es equivalente a $y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje y.

Origen: para probar la simetría con respecto al origen, reemplace x por - x e y por - y.

$$-y = \frac{4(-x)^2}{(-x)^2 + 1}$$ Reemplace x por ·x e y por ·y.

$$-y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$$ Simplificar.

$$y = -\frac{4x^2}{x^2 + 1}$$ Multiplica ambos lados por ·1.

Como el resultado no es equivalente a la ecuación original, la gráfica del $4x^2$ la ecuación $y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ no es simétrica con respecto al origen.

Ver el concepto

La Figura 20 muestra la gráfica $4x^2 + 9y^2 = 36$ usando Desmos. ¿Ves la simetría con respecto al eje x, el eje y y el origen?

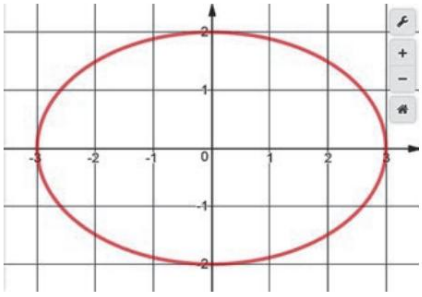


Figura 20 $4x^2 + 9y^2 = 36$

Ver el concepto

La figura 21 muestra el gráfico de $y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ usando una TI-84 Calculadora gráfica más C. ¿Ves la simetría con respecto al eje y?

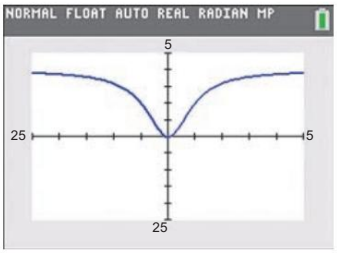


Figura 21 $y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$

Ahora resuelve el problema 6 1

5 Sepa cómo graficar ecuaciones clave

Los siguientes tres ejemplos utilizan intersecciones, simetría y trazado de puntos para obtener las gráficas de ecuaciones clave. Es importante conocer las gráficas de estas ecuaciones clave porque las usaremos más adelante. El primero de ellos es $y = x^3$.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 11

Graficar la ecuación y · x3 encontrando intersecciones, verificando la simetría y trazando puntos

Grafique la ecuación y = x3 trazando puntos. Encuentre cualquier intersección y verifique primero la simetría.

Solución

Primero, encuentra las intersecciones. Cuando x = 0, entonces y = 0; y cuando y = 0, entonces x = 0. El origen (0, 0) es la única intersección. Ahora prueba la simetría.

Eje x: Reemplace y por - y. Dado que - y = x3 no es equivalente a y = x3 , la gráfica es no simétrico con respecto al eje x.

Eje y: Reemplace x por - x. Dado que y = 1 - x2 3 = - x3 no es equivalente a y = x3 , el la gráfica no es simétrica con respecto al eje y.

Origen: Reemplazar x por - x e y por - y. Dado que - y = 1 - x2 a y = 3 = - x3 es equivalente x3 (multiplica ambos lados por - 1), la gráfica es simétrica con respecto al origen.

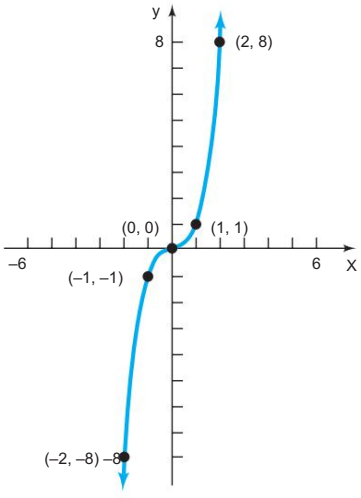


Figura 22 y = x3

Para graficar y = x3, Usa la ecuación para obtener varios puntos en la gráfica. Debido a la simetría, necesitamos ubicar solo puntos en la gráfica para los cuales x Ú 0. Consulte la Tabla 4. Dado que (1, 1) está en la gráfica, y la gráfica es simétrica con respecto al origen, el punto 1 - 1, - 12 también está en el gráfico. Traza los puntos de la Tabla 4 y usa la simetría. La figura 22 muestra el gráfico.

Tabla 4

x	y · x3	(x,y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	8	(2, 8)
3	27	(3, 27)

EJEMPLO 12

Graficar la ecuación x · y2

(a) Grafique la ecuación x = y2 . Encuentre cualquier intersección y verifique primero la simetría.

(b) Grafique x = y2 , y Ú 0.

Solución

(a) La única intersección es (0, 0). La gráfica es simétrica con respecto al eje x. (¿Ves por qué? Reemplaza y por - y.) La figura 23(a) muestra la gráfica.

(b) Si restringimos y de modo que y Ú 0, la ecuación x = y2 , y Ú 0, puede escribirse de manera equivalente como y = 2x. La porción de la gráfica de x = y2 en el cuadrante I es, por tanto, la gráfica de y = 1x. Véase la Figura 23(b).

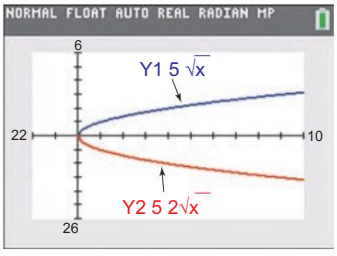


Figura 24

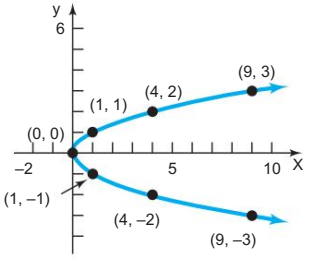
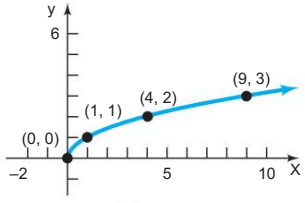


Figura 23 (a) x = y2



(b) y = 2x

COMENTARIO Para ver la gráfica de la ecuación x = y2 en una calculadora gráfica, necesitarás graficar dos ecuaciones: Y1 = 2x e Y2 = - 2x. Analizamos por qué en el Capítulo 2. Consulte la Figura 24. ▪

Machine Translated by Google

EJEMPLO 13 Graficar la ecuación $y = \frac{1}{x}$

Grafique la ecuación $y = \frac{1}{x}$. Primero, encuentre las intersecciones y verifique la simetría.

Solución

Primero verifique las intercepciones. Si hacemos que x = 0, obtenemos 0 en el denominador, lo que hace que y sea indefinida. Concluimos que no existe una intersección con el eje y. Si hacemos y = 0, obtenemos la ecuacion $\frac{1}{x} = 0$, que no tiene solución. Concluimos que no existe una intersección con el eje x.

La gráfica de $y = \frac{1}{x}$ no cruza ni toca los ejes coordenados.

Siguiente comprobación de simetría:

Eje x: Reemplazar y por - y produce $-y = \frac{1}{x}$, que no es equivalente a $y = \frac{1}{x}$.

Eje y: Reemplazar x por - x produce $y = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$, que no es equivalente a $y = \frac{1}{x}$.

Origen: Reemplazar x por - x e y por - y produce $-y = -\frac{1}{x}$, que es equivalente a $y = \frac{1}{x}$. La gráfica es simétrica con respecto al origen.

Ahora configure la Tabla 5, enumerando varios puntos en el gráfico. Debido a la simetría con respecto al origen, utilizamos sólo valores positivos de x. De la Tabla 5 inferimos que si x es un número grande y positivo, entonces $y = \frac{1}{x}$ es un número positivo cercano a 0. Nosotros También inferimos que si x es un número positivo cercano a 0, entonces $y = \frac{1}{x}$ es un gran y positivo número. Armados con esta información, podemos graficar la ecuación.

La Figura 25 ilustra algunos de estos puntos y la gráfica de $y = \frac{1}{x}$. Observa como x Se utilizó la ausencia de interceptos y la existencia de simetría con respecto al origen.

Tabla 5

x	$y = \frac{1}{x}$	(x,y)
$\frac{1}{10}$	10	¢$\frac{1}{10}$, 10≤
$\frac{1}{3}$	3	¢$\frac{1}{3}$, 3≤
$\frac{1}{2}$	2	¢$\frac{1}{2}$, 2≤
1	1	(1, 1)
2	$\frac{1}{2}$	¢2, $\frac{1}{2}$ ≤
3	$\frac{1}{3}$	¢3, $\frac{1}{3}$ ≤
10	$\frac{1}{10}$	¢10, $\frac{1}{10}$ ≤

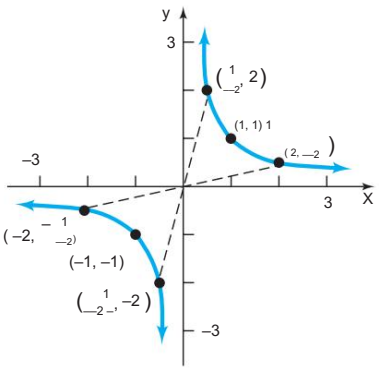


Figura 25 $y = \frac{1}{x}$

COMENTARIO Consulte el ejemplo 2 de la sección B.3 para conocer la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ utilizando una calculadora gráfica. ■

1.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Resuelve la ecuación 21x + 32 - 1 = - 7. (págs. A44–A45)

2. Resuelve la ecuación x2 - 9 = 0. (págs. A47–A48)

Conceptos y vocabulario

3. Los puntos, si los hay, en los que una gráfica cruza o toca los ejes de coordenadas se llaman _____.

4. Las intersecciones con el eje x de la gráfica de una ecuación son aquellos valores de x para los cuales _____.

5. Si para cada punto (x, y) en la gráfica de una ecuación el punto 1 - x, y2 también está en la gráfica, entonces la gráfica es simétrica con respecto a la _____.

6. Si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y y - 4 es una intersección con el eje x de esta gráfica, entonces también es una ___ intersección con el eje x.

7. Si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al origen y 13, - 42 es un punto en la gráfica, entonces también es un punto en la _____ gráfica.

8. Verdadero o Falso Para encontrar las intersecciones y de la gráfica de un ecuación, sea x = 0 y resuelva para y.

Machine Translated by Google

9. Verdadero o Falso La coordenada y de un punto en el que la gráfica cruza o toca el eje x es una intersección con el eje x.

10. Verdadero o Falso Si una gráfica es simétrica con respecto al eje x, entonces no puede ser simétrica con respecto al eje y.

11. Opción múltiple Dado que las intersecciones de una gráfica son 1 - 4, 02 y (0, 5), elige la afirmación que sea verdadera.

(a) La intersección con el eje y es - 4 y la intersección con el eje x es 5.
(b) Las intersecciones en y son - 4 y 5.
(c) Las intersecciones con el eje x son - 4 y 5.
(d) La intersección con el eje x es - 4 y la intersección con el eje y es 5.

12. Opción múltiple Para probar si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al origen, reemplaza _____ en la ecuación y simplifica. Si resulta una ecuación equivalente, entonces la gráfica es simétrica con respecto al origen.

(a) x por - x (b) y por - y
(c) x por - x e y por - y (d) x por - y y y por - x

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 18, determine cuáles de los puntos dados están en la gráfica de la ecuación.

13. Ecuación: y = x4 - 2x
Puntos: (0, 0); (1, 1); (2, 4)

14. Ecuación: y = x3 - 22x
Puntos: (0, 0); (1, 1); 11, - 12

15. Ecuación: y3 = x + 1
Puntos: (1, 2); (0, 1); 1 - 1, 02

16. Ecuación: y2 = x2 + 9
Puntos: (0, 3); (3, 0); 1 - 3, 02

17. Ecuación: x2 + 4y2 = 4
Puntos: (0, 1); (2, 0); ¢2, 12 ≤

18. Ecuación: x2 + y2 = 4
Puntos: (0, 2); 1 - 2, 22; 122, 222

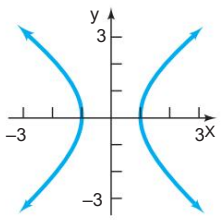
En los problemas 19 a 30, encuentre las intersecciones y represente gráficamente cada ecuación trazando puntos. Asegúrese de etiquetar las intersecciones.

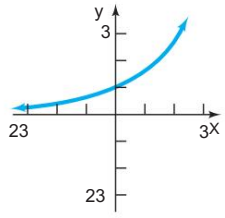
19. y = x - 6
20. y = x + 2
21. y = 3x - 9
22. y = 2x + 8
23. y = x2 - 1
24. y = x2 - 9
25. y = - x2 + 1
26. y = - x2 + 4
27. 5x + 2y = 10
28. 2x + 3y = 6
29. 4x2 + y = 4
30. 9x2 + 4y = 36

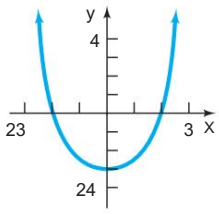
En los problemas 31 a 40, trace cada punto. Luego, trace el punto que le sea simétrico con respecto a (a) el eje x; (b) el eje y; (c) el origen.

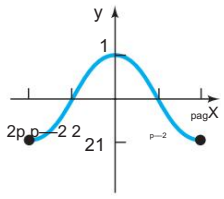
31. (3, 4)
32. (5, 3)
33. 14, - 22
34. 1 - 2, 12
35. 1 - 1, - 12
36. 15, - 22
37. (4, 0)
38. 1 - 3, - 42
39. 1 - 3, 02
40. 10, - 32

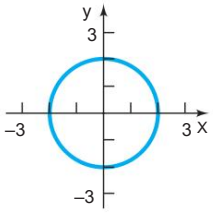
En los problemas 41 a 52 se da la gráfica de una ecuación. (a) Encuentre las intersecciones. (b) Indique si la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y, al origen o a ninguno de estos.

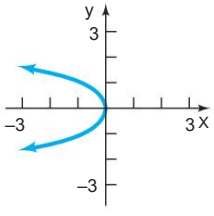
41.


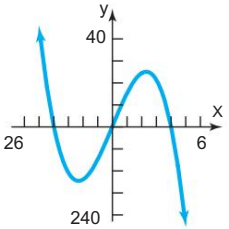
42.


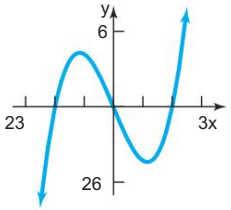
43.


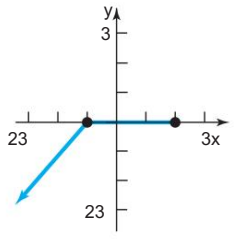
44.


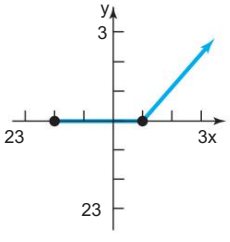
45.


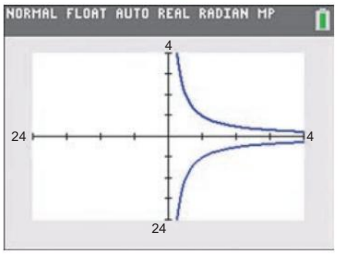
46.


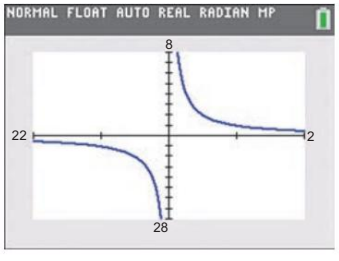
47.


48.


49.


50.


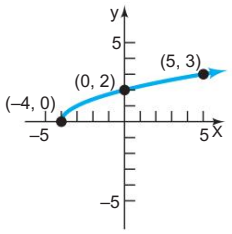
51.


52.


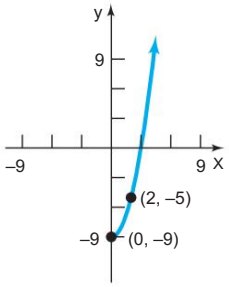
Machine Translated by Google

En los problemas 53 a 56, dibuje una gráfica completa que tenga el tipo de simetría indicada.

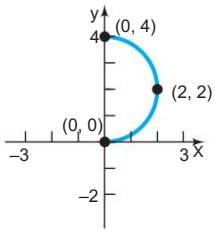
53. eje x



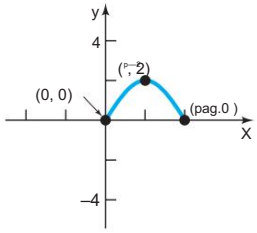
54. eje y



55. eje y



56. Origen



En los problemas 57 a 72, enumere las intersecciones y pruebe la simetría.

57. y2 = x + 9 61.
x2 + y - 9 = 0 65. y = x4
- 1 x2 - 4

58. y2 = x + 16 62.
x2 - y - 4 = 0 66. y = x3
- 64

59. y = 25 x 63.
4x2 + y2 = 4 67. y =
x2 + 4 x4 + 1

60. y = 23x _
64. 25x2 + 4y2 = 100
68. y = x2 - 2x - 8

69. $y = \frac{}{2x}$

70. $y = \frac{4x}{x2 + 16}$

71. $y = \frac{}{2x5}$

72. $y = \frac{- x3}{x2 - 9}$

En los problemas 73 a 76, grafica cada ecuación.

73. x = y2 74. y = x3

75. $y = \frac{1}{x}$

76. y = 2x

77. Si 1a, - 52 es un punto en la gráfica de y = x2 + 6x, ¿qué es a? 78. Si (a, 4) es un punto en la gráfica de y = x2 + 3x, ¿qué es a?

Aplicaciones y extensiones

79. Dado que el punto 12, 62 está en la gráfica de una ecuación que es simétrica con respecto al origen, ¿qué otro punto está en la gráfica?

80. Si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y y 6 es una intersección con el eje x de esta gráfica, nombra otra intersección con el eje x.

81. Si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y y 1 es una intersección con el eje x de esta gráfica, nombra otra intersección con el eje x.

82. Si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje x y 2 es una intersección con el eje y, nombra otra intersección con el eje y.

83. Micrófonos En los estudios y escenarios, los micrófonos cardioides suelen ser los preferidos por la riqueza que añaden a las voces y por su capacidad para reducir el nivel de sonido de los lados y la parte trasera del micrófono. Supongamos que uno de esos patrones cardioides viene dado por la ecuación $1x2 + y2 - 9x2)^2 = 81x2 + 81y2$.

(a) Encuentre las intersecciones de la gráfica de la ecuación.
(b) Prueba de simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen.

Fuente: www.notaviva.com

84. Energía solar Los sistemas de generación de electricidad solar en Kramer Junction, California, utilizan cilindros parabólicos para calentar un fluido de transferencia de calor a una temperatura alta. Este fluido se utiliza para generar vapor que impulsa un sistema de conversión de energía para producir electricidad. Para canales de 7,5 pies de ancho, una ecuación para la sección transversal es 16y2 = 120x - 225.

(a) Encuentre las intersecciones de la gráfica de la ecuación.
(b) Prueba de simetría con respecto al eje x, el eje y y el origen.

Fuente: Departamento de Energía de EE. UU.

85. Problema de desafío Lemniscata Para una constante a, distinta de cero = encuentra las intersecciones de la gráfica de $1x2 + a2)^2 1x2 - y2 2$. y2 2 Luego prueba la simetría con respecto al eje x, el eje y y el origen.

86. Problema de desafío Limaçon Para constantes a y b distintas de cero, encuentre las intersecciones de la gráfica de

$$1x2 + y2 - ax22 = b2 1x2 + y2 2$$

Luego prueba la simetría con respecto al eje x, el eje y y el origen.

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

87. (a) Grafique $y = 2\sqrt{x}$, $y = x$, $y = |x|$, y $y = \sqrt{12x^2}$, observando qué gráficas son iguales.

(b) Explique por qué las gráficas de $y = \sqrt{2x^2}$ e $y = \sqrt{\cdot x \cdot}$ son lo mismo.

(c) Explique por qué las gráficas de $y = x$ e $y = \sqrt{12x^2}$ son no es el mismo.

(d) Explique por qué las gráficas de $y = \sqrt{2x^2}$ e $y = x$ no son lo mismo.

88. Explique qué se entiende por gráfico completo.

89. Dibuja una gráfica de una ecuación que contenga dos intersecciones en x; en uno, la gráfica cruza el eje x y en el otro, la gráfica toca el eje x.

90. Haz una ecuación con las intersecciones (2, 0), (4, 0) y (0, 1). Compara tu ecuación con la ecuación de un amigo.
Comenta cualquier similitud.

91. Dibuja una gráfica que contenga los puntos.

$$-2, -12, 10, 12, 11, 32 \text{ y } 13, 52$$

Compara tu gráfico con el de otros estudiantes. ¿La mayoría de los gráficos son casi líneas rectas? ¿Cuántos son "curvos"? Analice las diversas formas en que estos puntos podrían estar conectados.

92. Se está probando la simetría de una ecuación con respecto al eje x, el eje y y el origen. Explique por qué, si dos de estas simetrías están presentes, la restante también debe estar presente.

93. Dibuja una gráfica que contenga los puntos $-2, 52$, $-1, 32$, y $(0, 2)$ y es simétrico con respecto al eje y.
Compara tu gráfico con el de otros estudiantes; comenta cualquier similitud. ¿Puede una gráfica contener estos puntos y ser simétrica con respecto al eje x? ¿el origen? ¿Por qué o por qué no?

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. -6 6 2. $-3, 3$

1.3 Líneas

OBJETIVOS 1 Calcular e interpretar la pendiente de una recta (p. 56)
2 Graficar rectas dado un punto y la pendiente (p. 59)
3 Encuentra la ecuación de una línea vertical (p. 60)
4 Utilice la forma punto-pendiente de una línea; Identificar líneas horizontales (p. 60)
5 Utilice la forma Pendiente-Intercepción de una recta (p. 61)
6 Encuentra una ecuación de una recta dados dos puntos (p. 63)
7 Líneas gráficas escritas en forma general usando intersecciones (p. 63)
8 Encuentra ecuaciones de rectas paralelas (p. 64)
9 Encuentra ecuaciones de rectas perpendiculares (p. 65)

En esta sección estudiamos cierto tipo de ecuación que contiene dos variables, llamada ecuación lineal, y su gráfica, una recta.

1 Calcular e interpretar la pendiente de una recta

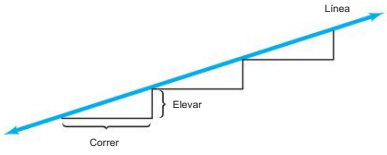


Figura 26

Considere la escalera ilustrada en la Figura 26. Cada escalón contiene exactamente el mismo tramo horizontal y el mismo ascenso vertical. La relación entre la subida y el recorrido, llamada pendiente, es una medida numérica de la pendiente de la escalera. Por ejemplo, si se aumenta el recorrido y la subida sigue siendo la misma, la escalera se vuelve menos empinada. Si el recorrido se mantiene igual pero se aumenta la subida, la escalera se vuelve más empinada.
Esta importante característica de una línea se define mejor utilizando coordenadas rectangulares.

DEFINICIÓN Pendiente

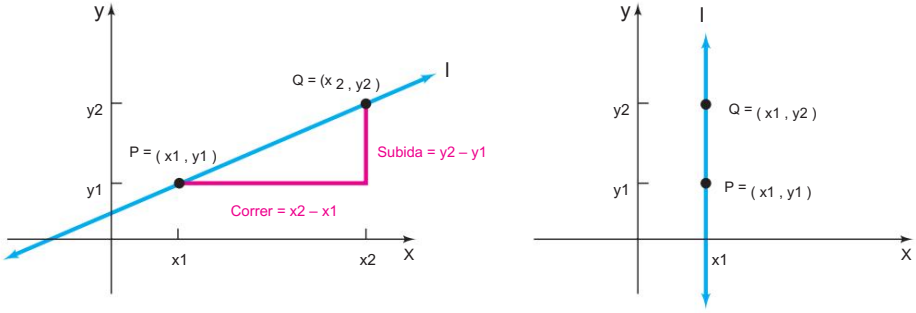
Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos distintos. Si $x_1 \cdot x_2$, la pendiente m de la recta no vertical L que contiene P y Q está definida por la fórmula

$$\text{metro} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \cdot x_2 \tag{1}$$

Si $x_1 = x_2$, entonces L es una línea vertical y la pendiente m de L no está definida (ya que esto resulta en una división por 0).

Machine Translated by Google

La Figura 27(a) ilustra la pendiente de una línea no vertical; La Figura 27(b) ilustra una línea vertical.



(a) La pendiente de L es $m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$, $x1 \neq x2$

(b) La pendiente no está definida; l es vertical

Figura 27

En palabras

El símbolo Δ es la letra mayúscula griega delta. En matemáticas, Δ Δy se lee "cambio en", también se lee Δx "cambio en y dividido por cambio en x".

Como ilustra la Figura 27(a), la pendiente m de una línea no vertical puede verse como

$$\text{metro} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{\text{Elevar}}{\text{Correr}} \quad \text{o como m} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{\text{Cambio en y}}{\text{Cambio en x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Es decir, la pendiente m de una línea no vertical mide la cantidad que y cambia cuando x cambia de x1 a x2. La expresión se llama tasa de cambio promedio de y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ con respecto a x.

Dos comentarios sobre cómo calcular la pendiente de una línea no vertical pueden resultar útiles:

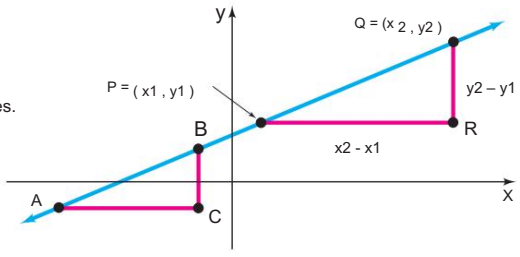
- Se pueden usar dos puntos distintos cualesquiera en la línea para calcular la pendiente de la línea. (Ver la Figura 28 para una justificación.) Dado que se pueden usar dos puntos distintos cualesquiera para calcular la pendiente de una línea, la tasa de cambio promedio de una línea es siempre el mismo número.

Figura 28

Los triángulos ABC y PQR son similares (ángulos iguales), por lo que las razones de los lados correspondientes son proporcionales. Entonces la pendiente usando P y Q

$$\frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{\text{es d1B, C2}}{\text{d1A, C2}},$$

cual es la pendiente usando A y B.



- La pendiente de una línea se puede calcular desde P = 1x1, y12 hasta Q = 1x2, y22 o de Q a P porque

$$\frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{y1 - y2}{x1 - x2}$$

EJEMPLO 1 Encontrar e interpretar la pendiente de una recta dados dos puntos

La pendiente m de la recta que contiene los puntos (1, 2) y 15, - 32 se puede calcular como

$$\text{metro} = \frac{-3 - 2}{5 - 1} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4} \quad \text{o como m} = \frac{2 - 1 - 32}{15} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

Por cada cambio de 4 unidades en x, y cambiará en - 5 unidades. Es decir, si x aumenta en 4 unidades, entonces y disminuirá en 5 unidades. La tasa de cambio promedio de y con respecto a x es $-\frac{5}{4}$.

Ahora resuelva los problemas 1 3 y 1 9

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2

Encontrar las pendientes de varias rectas que contienen el mismo punto (2, 3)

Calcula las pendientes de las rectas L1, L2, L3 y L4 que contienen los siguientes pares de puntos. Grafique las cuatro líneas en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

L1: P = 12, 32 Q1 = 1 - 1, - 22

L2: P = 12, 32 Q2 = 13, - 12

L3: P = 12, 32 Q3 = 15, 32

L4: P = 12, 32 P4 = 12, 52

Solución Sean m1, m2, m3 y m4 las pendientes de las rectas L1, L2, L3 y L4, respectivamente.

Entonces

$$m1 = \frac{-2-3}{-1-2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$ Un aumento de 5 dividido por una racha de 3

$$m2 = \frac{-1-3}{3-2} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$m3 = \frac{3-3}{5-2} = \frac{0}{3} = 0$$

m4 no está definido porque x1 = x2 = 2

Las gráficas de estas líneas se encuentran en la Figura 29.

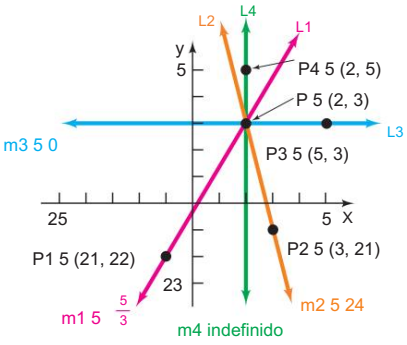


Figura 29

La Figura 29 ilustra los siguientes hechos:

- Cuando la pendiente de una línea es positiva, la línea se inclina hacia arriba de izquierda a derecha. derecha 1L12.
- Cuando la pendiente de una línea es negativa, la línea se inclina hacia abajo de izquierda a derecha. derecha 1L22.
- Cuando la pendiente es 0, la línea es horizontal 1L32.
- Cuando la pendiente no está definida, la línea es vertical 1L42.

Ver el concepto

En la misma pantalla, grafica las siguientes ecuaciones:

Y1 = 0 La pendiente de la línea es 0.

$Y2 = x\frac{1}{4}$ La pendiente de la recta es $\frac{1}{4}$.

$Y3 = x\frac{1}{2}$ La pendiente de la recta es $\frac{1}{2}$.

Y4 = x La pendiente de la recta es 1.

Y5 = 2x La pendiente de la recta es 2.

Y6 = 6x La pendiente de la línea es 6.

Ver Figura 30.

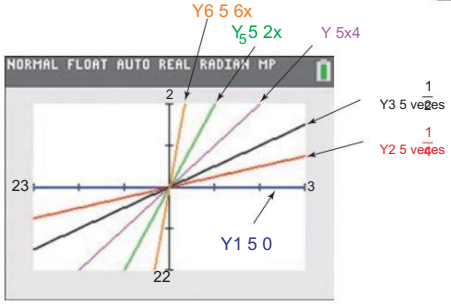


Figura 30

Machine Translated by Google

Ver el concepto

En la misma pantalla, grafica las siguientes ecuaciones:

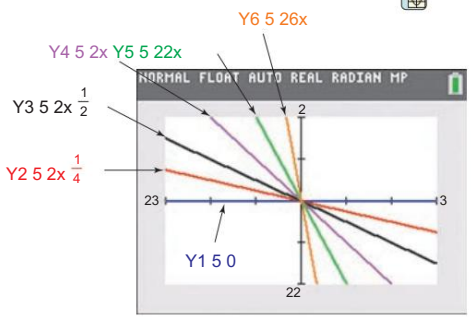


Figura 31

$Y1 = 0$ La pendiente de la línea es 0.

$Y2 = -x\ \frac{1}{4}$ La pendiente de la línea es $\frac{1}{4}$.

$Y3 = -x\ \frac{1}{2}$ La pendiente de la línea es $\frac{1}{2}$.

$Y4 = -x$ La pendiente de la línea es ·1.

$Y5 = -2x$ La pendiente de la línea es ·2.

$Y6 = -6x$ La pendiente de la línea es ·6.

Ver Figura 31.

Las figuras 30 y 31 ilustran que cuanto más cerca esté la línea de la posición vertical, más mayor es la magnitud de la pendiente.

2 Graficar rectas dado un punto y la pendiente

EJEMPLO 3 Graficar una recta dado un punto y una pendiente

Dibuja una gráfica de la recta que contiene el punto (3, 2) y tiene una pendiente de:

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $-5\ \frac{4}{}$

Solución

(a) Pendiente = $\frac{\text{Elevar}}{\text{La pendiente.}}$ $\frac{3}{4}$ significa que por cada cambio horizontal (recorrido) de 4 unidades hacia la derecha, hay un cambio vertical (ascenso) de 3 unidades. Comienza en el punto (3, 2) y avanza 4 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba, llegando al punto (7, 5). Trazar la línea que pasa por los puntos (7, 5) y (3, 2) da la gráfica.
Ver Figura 32.

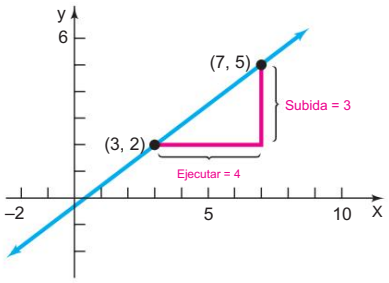


Figura 32

(b) Una pendiente de

$$-\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} = \frac{\text{Elevar}}{\text{Correr}}$$

significa que por cada cambio horizontal de 5 unidades hacia la derecha, hay un cambio vertical correspondiente de - 4 unidades (un movimiento hacia abajo). Comience en el punto (3, 2) y muévase 5 unidades hacia la derecha y luego 4 unidades hacia abajo, llegando al punto 18, - 22. Trazar la línea que pasa por estos puntos da la gráfica. Ver Figura 33.

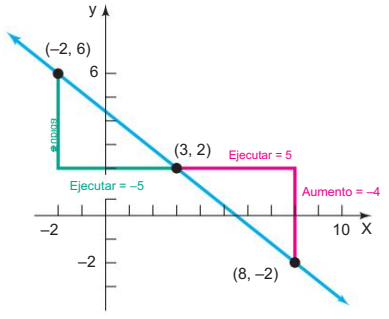


Figura 33

Alternativamente, considere que

$$-\frac{4}{5} = \frac{4}{-5} = \frac{\text{Elevar}}{\text{Correr}}$$

entonces, por cada cambio horizontal de - 5 unidades (un movimiento hacia la izquierda), hay un cambio vertical correspondiente de 4 unidades (hacia arriba). Este enfoque conduce al punto 1 - 2, 62, que también está en la gráfica de la línea en la Figura 33.

Ahora resuelve el problema 2 5

Machine Translated by Google

3 Encuentra la ecuación de una línea vertical

EJEMPLO 4 Graficar una recta

Grafique la ecuación: x = 3

Solución

Para graficar x = 3, encontramos todos los puntos (x, y) en el plano para los cuales x = 3. No importa qué coordenada y se use, la coordenada x correspondiente siempre es igual a 3. En consecuencia, la gráfica de la ecuación x = 3 es una línea vertical con intersección con el eje x 3 y una pendiente indefinida. Ver Figura 34.

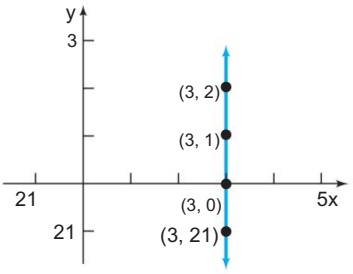


Figura 34 x = 3

El ejemplo 4 sugiere el siguiente resultado:

TEOREMA Ecuación de una recta vertical

Una recta vertical está dada por una ecuación de la forma

$$x = un$$

donde a es la intersección con el eje x.

COMENTARIO Para graficar una ecuación usando la mayoría de las utilidades gráficas, necesitamos expresar la ecuación en la forma y = 5expresión en x6. Pero x = 3 no se puede expresar de esta forma. Para superar esto, la mayoría de las utilidades gráficas tienen comandos especiales para dibujar líneas verticales. DRAW, LINE, PLOT y VERT se encuentran entre los más comunes. Consulte su manual para determinar la metodología correcta para su utilidad gráfica. ■

4 Utilice la forma punto-pendiente de una línea; Identificar líneas horizontales

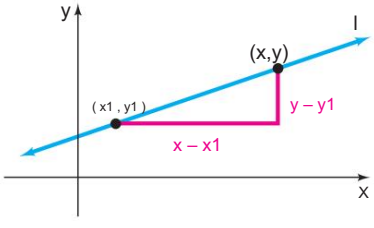


Figura 35

Sea L una recta no vertical con pendiente m que contiene el punto 1x1, y12. Vea la Figura 35. Para cualquier otro punto (x, y) en L, tenemos

$$\text{metro} = \frac{y - y1}{x - x1} \quad \text{o} \quad y - y1 = m1x - x12$$

TEOREMA Forma punto-pendiente de una ecuación de una recta

Una ecuación de una recta no vertical con pendiente m que contiene el punto 1x1, y12 es

$$y - y1 = m1x - x12 \qquad (2)$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5

Encontrar la forma punto-pendiente de una ecuación de una recta

Encuentra la forma punto-pendiente de una ecuación de la recta con pendiente 4, que contiene el punto (1, 2).

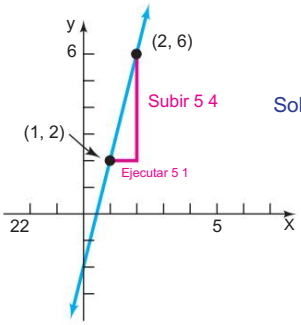


Figura 36 y - 2 = 4 (x - 1)

Solución Se puede encontrar una ecuación de la recta con pendiente 4 que contiene el punto (1, 2) usando la forma punto-pendiente con m = 4, x1 = 1 e y1 = 2.

$$y - y1 = m1x - x12$$

$$y - 2 = 41x - 12 \quad \text{metro} \cdot 4, x1 \cdot 1, y1 \cdot 2$$

Consulte la Figura 36 para ver el gráfico.

Ahora resuelve el problema 3 3

EJEMPLO 6

Encontrar la ecuación de una línea horizontal

Encuentre una ecuación de la línea horizontal que contiene el punto (3, 2).

Solución

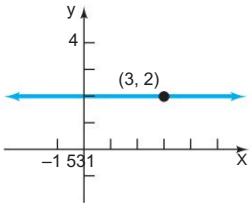


Figura 37 y = 2

Debido a que todos los valores de y son iguales en una línea horizontal, la pendiente de una línea horizontal es 0. Para obtener una ecuación, use la forma punto-pendiente con m = 0, x1 = 3 e y1 = 2.

$$y - y1 = m1x - x12 \quad y - 2 =$$

$$0 \# 1x - 32 \qquad \text{metro} \cdot 0, x1 \cdot 3, y1 \cdot 2$$

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2$$

Consulte la Figura 37 para ver el gráfico.

El ejemplo 6 sugiere el siguiente resultado:

TEOREMA Ecuación de una recta horizontal

Una recta horizontal está dada por una ecuación de la forma

$$y = \text{segundo}$$

donde b es la intersección con el eje y.

5 Usar la forma pendiente-intersección de una recta

Otra ecuación útil de una recta se obtiene cuando se conocen la pendiente my la intersección con b . Entonces el punto (0, b) está sobre la recta. Usando la forma punto-pendiente, ecuación (2), obtenemos

$$y - b = m1x - 02 \text{ o } y = mx + b$$

TEOREMA Pendiente-Forma de intersección de una ecuación de una recta

Una ecuación de una recta con pendiente m e intersección con el eje b es

$$y = mx + b \qquad (3)$$

Por ejemplo, si una recta tiene pendiente 5 y intercepto en y 2, podemos escribir la ecuación en forma pendiente-intersección como

$$y = 5x + 2$$

pendiente y-intersección

Ahora resuelva los problemas 5 3 y 5 9 (respuesta expresa en forma pendiente-intersección)

Machine Translated by Google

Ver el concepto

Para ver el papel que juega la pendiente m , grafica las siguientes líneas en la misma pantalla.

Y1 = 2 metro · 0
Y2 = x + 2 metro · 1
Y3 = - x + 2 metro · ·1
Y4 = 3x + 2 metro · 3
Y5 = -3x + 2 metro · ·3

La Figura 38 muestra los gráficos usando Desmos.
¿Qué concluyes sobre las rectas de la forma y = mx + 2?

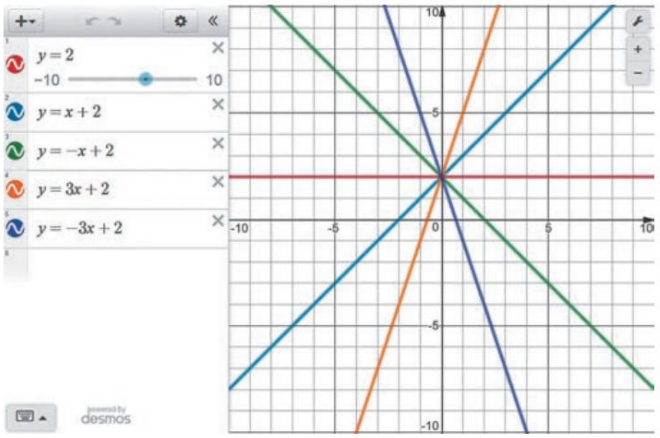


Figura 38 y = mx + 2

Para ver el papel de la intersección y b, grafique las siguientes líneas en la misma pantalla.

Y1 = 2x segundo · 0
Y2 = 2x + 1 segundo · 1
Y3 = 2x - 1 segundo · ·1
Y4 = 2x + 4 segundo · 4
Y5 = 2x - 4 segundo · ·4

La Figura 39 muestra los gráficos usando Desmos.
¿Qué concluyes sobre las rectas de la forma y = 2x + b?

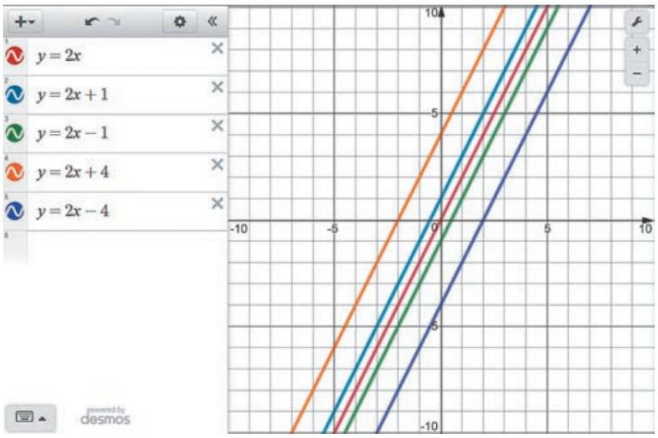


Figura 39 y = 2x + b

Cuando la ecuación de una recta se escribe en forma pendiente-intersección, es fácil encontrar la pendiente my la intersección y b de la recta. Por ejemplo, supongamos que la ecuación de una recta es

$$y = -2x + 7$$

Compara esta ecuación con y = mx + b.

$$y = -2x + 7$$

y · mx · b

La pendiente de esta recta es -2 y su intersección con el eje y es 7.

Ahora problema de trabajo 7 9

EJEMPLO 7

Encontrar la pendiente y la intersección con el eje y de una recta

Encuentra la pendiente my la intersección con el eje b de la ecuación 2x + 4y = 8. Grafica la ecuación.

Solución

Para encontrar la pendiente y la intersección con el eje y, escribe la ecuación en forma pendiente-intersección resolviendo para y.

$$2x + 4y = 8$$
$$4y = -2x + 8$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad y \cdot mx \cdot b$$

El coeficiente de x, $-\frac{1}{2}$, es la pendiente y la constante, 2, es la intersección con el eje y. Para graficar la recta con intersección y 2 y con pendiente $-\frac{1}{2}$, comience en el punto (0, 2) y avance hasta hacia la derecha 2 unidades y luego hacia abajo 1 unidad hasta el punto (2, 1). Dibuja la línea que pasa por estos puntos. Ver Figura 40.

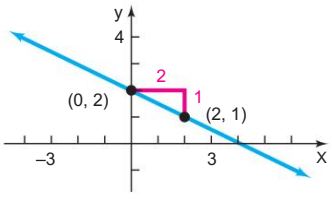


Figura 40 $y = -x + 2\frac{1}{2}$

Ahora problema de trabajo 8 5

Machine Translated by Google

6 Encuentra la ecuación de una recta dados dos puntos

EJEMPLO 8 Encontrar una ecuación de una línea dados dos puntos

Encuentra una ecuación de la recta que contiene los puntos (2, 3) y 1 - 4, 52. Grafica la recta.

Solución

Primero calcula la pendiente de la recta.

$$\text{metro} = \frac{5 - 3}{-4 - 2} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \qquad \text{metro} \cdot \frac{y2 \cdot y1}{x2 \cdot x1}$$

Utilice el punto (2, 3) y la pendiente $m = -\frac{1}{3}$ para obtener la forma punto-pendiente de 3 ecuación de la recta.

$$y - 3 = -\frac{1}{3}x - 22 \qquad y \cdot y1 \cdot m1x \cdot x12$$

Continúe obteniendo la forma pendiente-intersección.

$$y - 3 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \qquad y \cdot mx \cdot b$$

Consulte la Figura 41 para ver el gráfico.

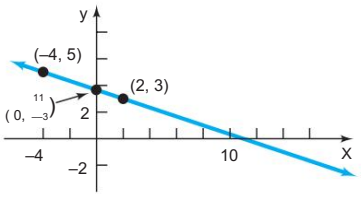


Figura 41 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

En la solución del Ejemplo 8, podríamos haber usado el otro punto, 1 - 4, 52, en lugar del punto (2, 3). La ecuación resultante, cuando se escribe en forma pendiente-intersección, es la ecuación que obtuvimos en el ejemplo. (Pruébelo usted mismo).

Ahora resuelve el problema 4 5

7 líneas gráficas escritas en forma general usando intersecciones

DEFINICIÓN Forma General

La ecuación de una recta está en forma general* cuando se escribe como

$$Ax + By = C \qquad (4)$$

donde A, B y C son números reales y A y B no son ambos 0.

Si B = 0 en la ecuación (4), entonces A · 0 y la gráfica de la ecuación es una vertical línea: $x = \frac{C}{A.}$

Si B · 0 en la ecuación (4), entonces podemos resolver la ecuación para y y escribir la ecuación en forma pendiente-intersección como lo hicimos en el Ejemplo 7.

Una forma de graficar una recta dada en forma general, ecuación (4), es encontrar sus intersecciones. Recuerde, las intersecciones de la gráfica de una ecuación son los puntos donde la gráfica cruza o toca un eje de coordenadas.

EJEMPLO 9 Graficar una ecuación en forma general usando sus intersecciones

Grafica la ecuación 2x + 4y = 8 encontrando sus intersecciones.

Solución

Para obtener la intersección con el eje x, sea y = 0 en la ecuación y resuelva para x.

$$2x + 4y = 8$$
$$2x + 4 \# 0 = 8 \qquad \text{Sea } y \cdot 0.$$
$$2x = 8$$
$$x = 4 \qquad \text{Divide ambos lados por 2.}$$

La intersección con el eje x es 4 y el punto (4, 0) está en la gráfica de la ecuación.

(continuado)

*Algunos textos utilizan el término forma estándar.

Machine Translated by Google

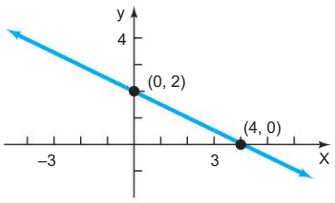


Figura 42 2x + 4y = 8

Para obtener la intersección con el eje y, sea x = 0 en la ecuación y resuelva para y.

$$2x + 4y = 8$$
$$2 \# 0 + 4y = 8 \qquad \text{Sea } x \cdot 0.$$
$$4 \text{ años} = 8$$
$$y = 2 \qquad \text{Divide ambos lados por 4.}$$

La intersección con el eje y es 2 y el punto (0, 2) está en la gráfica de la ecuación.

Traza los puntos (4, 0) y (0, 2) y dibuja la línea que pasa por los puntos. Ver Figura 42.

Ahora problema de trabajo 9 9

La ecuación de cada recta se puede escribir en forma general. Por ejemplo, una recta vertical cuya ecuación es

$$x = un$$

se puede escribir en forma general

$$1 \# x + 0 \# y = a \qquad A \cdot 1, B \cdot 0, C \cdot una$$

Una recta horizontal cuya ecuación es

$$y = segundo$$

se puede escribir en forma general

$$0 \# x + 1 \# y = b \qquad A \cdot 0, B \cdot 1, C \cdot segundo$$

Las rectas que no son ni verticales ni horizontales tienen ecuaciones generales de la forma

$$Hacha + Por = C \qquad A \cdot 0 \text{ y } B \cdot 0$$

Debido a que la ecuación de cada línea se puede escribir en forma general, cualquier ecuación equivalente a la ecuación (4) se llama ecuación lineal.

8 Encontrar ecuaciones de rectas paralelas

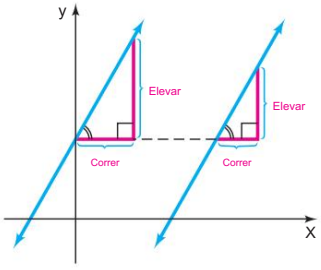


Figura 43 Líneas paralelas

Cuando dos rectas (en el plano) no se cruzan (es decir, no tienen puntos en común), son paralelas. Mire la Figura 43. Hemos dibujado dos líneas paralelas y hemos construido dos triángulos rectángulos dibujando lados paralelos a los ejes de coordenadas.
Los triángulos rectángulos son semejantes. (¿Ves por qué? Dos ángulos son iguales.) Como los triángulos son similares, las proporciones de los lados correspondientes son iguales.

Criterios del TEOREMA para rectas paralelas

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales y tienen diferentes intersecciones en el eje y.

El uso de la frase "si y sólo si" en el teorema anterior significa que en realidad se están haciendo dos declaraciones, una contraria a la otra.

- Si dos rectas no verticales son paralelas, entonces sus pendientes son iguales y tienen diferentes intersecciones en el eje y.
- Si dos rectas no verticales tienen pendientes iguales y tienen diferentes intersecciones en el eje y, entonces son paralelas.

EJEMPLO 10 **Demostrar que dos rectas son paralelas**

Demuestre que las rectas dadas por las siguientes ecuaciones son paralelas.

$$L1: 2x + 3y = 6 \qquad L2: 4x + 6y = 0$$

Machine Translated by Google

Solución

Para determinar si estas rectas tienen pendientes iguales y diferentes intersecciones en el eje y, escribe cada ecuación en forma pendiente-intersección.

L1: $2x + 3y = 6$

$3y = -2x + 6$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$

Pendiente $= -\frac{2}{3}$; y@intercepción = 2 3

L2: $4x + 6y = 0$

$6y = -4x$

$y = -\frac{2}{3}x$

Pendiente $= -\frac{2}{3}$; y@intercepción = 0

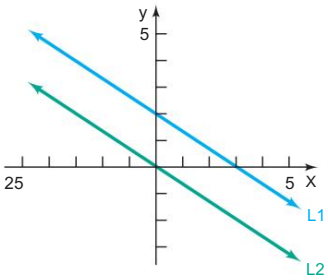


Figura 44 Líneas paralelas

Como estas rectas tienen la misma pendiente, $-\frac{2}{3}$, pero diferentes intersecciones en y, las líneas son paralelo. Ver Figura 44.

EJEMPLO 11 Encontrar una recta que sea paralela a una recta dada

Encuentra una ecuación para la recta que contiene el punto 12, - 32 y es paralela a la recta $2x + y = 6$.

Solución

Dado que las dos rectas deben ser paralelas, la pendiente de la recta que contiene el punto 12, - 32 es igual a la pendiente de la recta $2x + y = 6$. Comience escribiendo la ecuación de la recta $2x + y = 6$ en pendiente-intersección forma.

$$2x + y = 6$$

$$y = -2x + 6$$

La pendiente es - 2. Dado que la recta que contiene el punto 12, - 32 también tiene pendiente - 2, Usa la forma punto-pendiente para obtener su ecuación.

$y - y1 = m1x - x12$	Forma punto-pendiente
$y - 1 - 32 = -21x - 22$	metro · ·2, x1 · 2, y1 · ·3
$y + 3 = -2x + 4$	Simplificar.
$y = -2x + 1$	Forma pendiente-intersección
$2x + y = 1$	forma general

Esta línea es paralela a la línea $2x + y = 6$ y contiene el punto 12, - 32. Ver Figura 45.

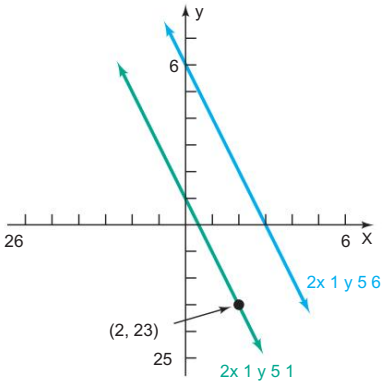


Figura 45

Ahora resuelve el problema 6 7

9 Encontrar ecuaciones de rectas perpendiculares

Cuando dos rectas se cruzan en ángulo recto (90°), son perpendiculares. Ver Figura 46.

El siguiente resultado da una condición, en términos de sus pendientes, para que dos rectas sean perpendiculares.

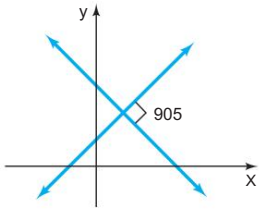


Figura 46 Líneas perpendiculares

Criterio del TEOREMA para rectas perpendiculares

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.

Aquí demostramos la parte "sólo si" de la afirmación:

Si dos rectas no verticales son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es -1.

Machine Translated by Google

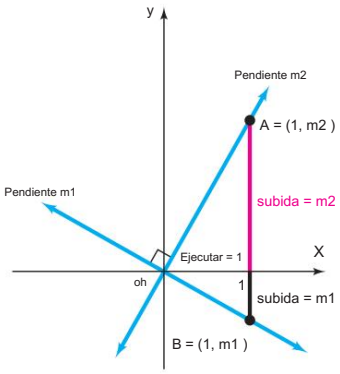


Figura 47

Prueba Sean m1 y m2 las pendientes de las dos rectas. No hay pérdida de generalidad (es decir, ni el ángulo ni las pendientes se ven afectados) si situamos las rectas de manera que se encuentren en el origen. Vea la Figura 47. El punto A = 11, m22 está en la línea que tiene pendiente m2, y el punto B = 11, m12 está en la línea que tiene pendiente m1. (¿Ves por qué esto debe ser cierto?)

Supongamos que las líneas son perpendiculares. Entonces el triángulo OAB es un triángulo rectángulo. Como resultado del teorema de Pitágoras se deduce que

$$3d1O, A2\,4^{2} + 3d1O, B2\,4^{2} = 3d1A, B2\,4^{2} \qquad (5)$$

Usando la fórmula de la distancia, los cuadrados de estas distancias son

$$3d1O, A2\,4^{2} = 11 - 02^{2} + 1m2 - 02^{2} = 1 + m2^{2}$$
$$3d1O, B2\,4^{2} = 11 - 02^{2} + 1m1 - 02^{2} = 1 + m1^{2}$$
$$3d1A, B2\,4^{2} = 11 - 12^{2} + 1m2 - m12^{2} = m2_{2 - 2m1m2 + m1}{}^{2}$$

Usando estos hechos en la ecuación (5), obtenemos

$$11 + m2\,22 + 11 + m1\,22 = m2^{2} - 2m1m2 + m1^{2}$$

que, simplificando, se puede escribir como

$$m1m2 = -1$$

Si las rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1. ■

En el problema 138, se le pide que demuestre la parte “si” del teorema:

> Si dos rectas no verticales tienen pendientes cuyo producto es -1, entonces las rectas son perpendiculares.

Quizás te resulte más fácil recordar la condición para que dos rectas no verticales sean perpendiculares si observas que la igualdad m1m2 = - 1 significa que m1 y m2 son recíprocos negativos entre sí; eso es,

$$m1 = -\frac{1}{m2} \quad \text{y} \quad m2 = -\frac{1}{m1}$$

EJEMPLO 12 Encontrar la pendiente de una recta perpendicular a otra recta

Si una recta tiene pendiente $\frac{3}{2}$, cualquier recta que tenga pendiente $-\frac{2}{3}$ es perpendicular a ella.

EJEMPLO 13 Encontrar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentra una ecuación de la recta que contiene el punto 11, - 22 y es perpendicular a la recta x + 3y = 6. Grafica las dos rectas.

Solución

Primero escribe la ecuación de la recta x + 3y = 6 en forma pendiente-intersección para encontrar su pendiente.

$$x + 3y = 6$$
$$3y = -x + 6 \qquad \text{Proceda a resolver para y.}$$
$$y = -3\,\frac{1}{}x + 2 \qquad \text{Colocar en la forma y · mx · b.}$$

La pendiente de la recta x + 3y = 6 es $-\frac{1}{3}$. Cualquier recta perpendicular a esta recta tiene pendiente 3.

Machine Translated by Google

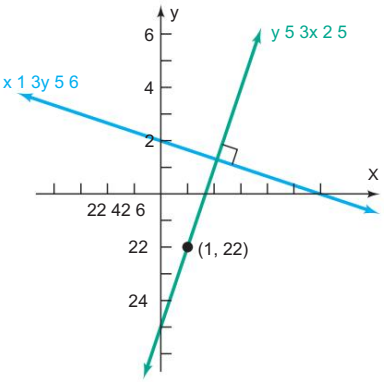


Figura 48

Como el punto 11, - 22 está sobre la recta con pendiente 3, usa la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta.

y - y1 = m1x - x12 Forma punto-pendiente

y - 1 - 22 = 31x - 12 metro · 3, x1 · 1, y1 · ·2

y + 2 = 31x - 12

Para obtener otras formas de la ecuación, proceda de la siguiente manera:

y + 2 = 3x - 3 Simplificar.

y = 3x - 5 Forma pendiente-intersección

3x - y = 5 forma general

La Figura 48 muestra los gráficos.

Ahora problema de trabajo 7 3

ADVERTENCIA Asegúrese de utilizar una pantalla cuadrada cuando utilice una calculadora gráfica para representar gráficamente líneas perpendiculares. De lo contrario, el ángulo entre las dos líneas aparecerá distorsionado. En la Sección B.5 se analizan las pantallas cuadradas.

1.3 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. La pendiente de una línea vertical es _____; la pendiente de una recta horizontal es _____.
2. Para la recta 2x + 3y = 6, la intersección con el eje x es la _____ y intersección con el _____.

eje y es 3. Verdadero o Falso La ecuación 3x + 4y = 6 está escrita en forma general.

4. Verdadero o Falso La pendiente de la recta 2y = 3x + 5 es 3.
5. Verdadero o Falso El punto (1, 2) está en la recta 2x + y = 4.
6. Dos rectas no verticales tienen pendientes m1 y m2, respectivamente. Las rectas son paralelas si _____ y el _____ son desiguales; las rectas son perpendiculares si _____.
7. Las rectas y = 2x + 3 e y = ax + 5 son paralelas si un = _____.
8. Las rectas y = 2x - 1 e y = ax + 2 son perpendiculares si un = _____.
9. Opción múltiple Si una línea se inclina hacia abajo de izquierda a derecha, ¿cuál de las siguientes describe su pendiente?
   (a) positivo (b) cero
   (c) negativo (d) indefinido
10. Opción múltiple Elige la fórmula para encontrar la pendiente m de una recta no vertical que contiene los dos puntos distintos 1x1, y12 y 1x2, y22.

(a) metro = $\frac{y2 - x2}{y1 - x1}$ x1 · y1 (b) m = x2 - y1 $\frac{y2 - x1}{}$ y1 · x2

(c) metro = $\frac{x2 - x1}{y2 - y1}$ y1 · y2 (d) m = $\frac{y2 - y1}{x2 - x1}$ x1 · x2

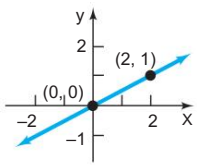
11. Opción múltiple Elige la afirmación correcta sobre la gráfica de la recta y = - 3.
   (a) La gráfica es vertical con intercepción x - 3.
   (b) La gráfica es horizontal con intersección en y - 3.
   (c) La gráfica es vertical con intersección en y - 3.
   (d) La gráfica es horizontal con intercepción x - 3.
12. Opción múltiple Elige la ecuación punto-pendiente de una recta no vertical con pendiente m que pasa por el punto 1x1, y12.

(a) y + y1 = mx + x1 (c) y + y1 = m1x + x12 (b) y - y1 = mx - x1 (d) y - y1 = m1x - x12

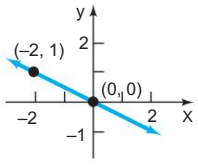
Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 16, (a) encuentre la pendiente de la recta y (b) interprete la pendiente.

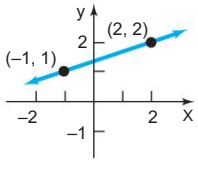
13.



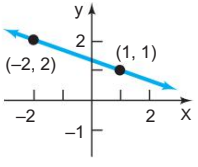
14.



15.



dieciséis.



Machine Translated by Google

En los problemas 17 a 24, trace cada par de puntos y determine la pendiente de la recta que contiene los puntos. Grafica la recta.

17. (4, 2); (3, 4) 21.
18. (2, 3); (4, 0) 22.
19. 1 - 2, 32; 12, 12 23.
20. 1 - 1, 12; 12, 32
14, 22; 1 - 5, 22
1 - 3, - 12;12, - 12
(2, 0); (2, 2)
24. 1 - 1, 22; 1 - 1, - 22

En los problemas 25 a 32, grafique la recta que contiene el punto P y tiene pendiente m.

25. P = 11, 22; metro = 3
26. P = 12, 12; metro = 4
27. P = 11, 32; metro = - 5
28. P = 12, 42; metro = - 4 $\frac{3}{}$
29. P = 12, - 42; metro = 0
30.P = 1 - 1, 32; metro = 0
31. P = 1 - 2, 02; pendiente indefinida 32. P = 10, 32; pendiente indefinida

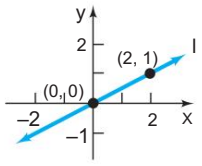
En los problemas 33 a 38 se dan un punto sobre una recta y su pendiente. Encuentra la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta.

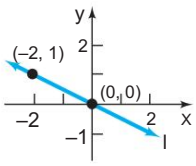
33. P = 11, 22; metro = 3
34. P = 12, 12; metro = 4
35. P = 11, 32; metro = - 5 $\frac{2}{}$
36. P = 12, 42; metro = - 4 $\frac{3}{}$
37. P = 12, - 42; metro = 0
38.P = 1 - 1, 32; metro = 0

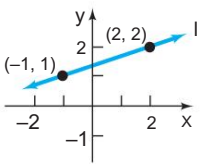
En los problemas 39 a 44 se dan la pendiente y un punto sobre una recta. Utilice esta información para localizar tres puntos adicionales en la línea. Las respuestas pueden variar. [Pista: No es necesario encontrar la ecuación de la recta. Ver Ejemplo 3.]

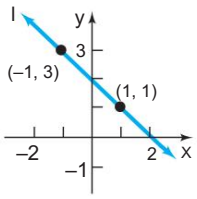
39. Pendiente 2; punto 1 - 2, 32
40. Pendiente 4; punto (1, 2)
41. Pendiente $\frac{4}{3}$; punto 1 - 3, 22
42. Pendiente - $\frac{3}{}$; punto 12, - 42 2
43. Pendiente - 1; punto (4, 1)
44. Pendiente - 2; punto 1 - 2, - 32

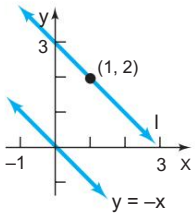
En los problemas 45 a 52, encuentre una ecuación de la recta L.

45.


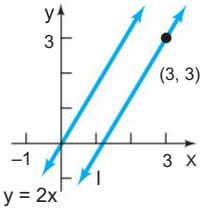
46.


47.


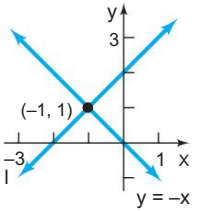
48.


49.


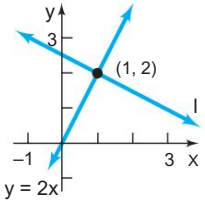
L es paralelo a y = –x

50.


L es paralela a y = 2x

51.


L es perpendicular a y = –x

52.


L es perpendicular a y = 2x

En los problemas 53 a 78, encuentre una ecuación para la recta con las propiedades dadas. Expresa tu respuesta usando la forma general o la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, según prefieras.

53. Pendiente = 3; que contiene el punto 1 - 2, 32
54. Pendiente = 2; que contiene el punto 14, - 32
Pendiente = - $\frac{2}{3}$; que contiene el punto 11, - 12 55.
56. Pendiente = $\frac{1}{2}$; que contiene el punto (3, 1)
57. Que contiene los puntos 1 - 3, 42 y (2, 5)
58. Que contiene los puntos (1, 3) y 1 - 1, 22
59. Pendiente = - 3; y@intercepción = 3
60. Pendiente = - 2; y@intercepción = - 2
61. x@intercepción = 2; y@intercepción = - 1 63.
62. x@intercepción = - 4; y@intercepción = 4
Pendiente indefinida; que contiene el punto (3, 8)
64. Pendiente indefinida; que contiene el punto (2, 4)
65. Verticales; que contiene el punto 14, - 52 67.
66. Horizontales; que contiene el punto 1 - 3, 22
Paralela a la recta y = 2x; que contiene el punto 1 - 1, 22 69. Paralela a la
68. Paralela a la recta y = - 3x; que contiene el punto 1 - 1, 22
recta 2x - y = - 2; que contiene el punto (0, 0)
70. Paralela a la recta x - 2y = - 5; que contiene el punto (0, 0)
71. Paralela a la recta y = 5; que contiene el punto (4, 2)
72. Paralela a la recta x = 5; que contiene el punto (4, 2)
73. Perpendicular a la recta y = x + 4; que contiene los 2
74. Perpendicular a la recta y = 2x - 3; que contiene el punto
punto 11, - 22
11, - 22

Machine Translated by Google

75. Perpendicular a la recta 2x + y = 2; que contiene el punto 1 - 3, 02

76. Perpendicular a la recta x - 2y = - 5; que contiene el punto (0, 4)

77. Perpendicular a la recta y = 8; que contiene el punto (3, 4)

78. Perpendicular a la recta x = 8; que contiene el punto (3, 4)

En los problemas 79 a 98, encuentre la pendiente y la intersección con el eje y de cada recta. Grafica la recta.

79. y = 2x + 3

80. y = - 3x + 4

81. x + y = 2 3

82. y = x - 1 2

83. y = 2x + $\frac{1}{2}$

84. y = $\frac{1}{2}$x + 2 2

85. x + 2y = 4 90.

86. - x + 3y = 6 91.

87. 3x + 2y = 6

88. 2x - 3y = 6

89. x - y = 2 94.

x + y = 1 95. x

y = - 1 96. y

92. x = - 4

93. x = 2

y = 5

+ y = 0

- x = 0

97. 3x + 2y = 0

98. 2y - 3x = 0

En los problemas 99 a 108, (a) encuentre las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y (b) represente gráficamente la ecuación.

99. 2x + 3y = 6

100. 3x - 2y = 6

101. 6x - 4y = 24

102. - 4x + 5y = 40

103. 5x + 3y = 18

104. 7x + 2y = 21

105. x - y = $\frac{2}{4-3}$

106. $\frac{1}{2}$x + $\frac{1}{}$y = 1 3

107. - 0,3x + 0,4y = 1,2 108. 0,2x - 0,5y = 1

109. Encuentra una ecuación del eje y.

110. Encuentra una ecuación del eje x.

En los problemas 111 a 114 se dan las ecuaciones de dos rectas. Determina si las líneas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

111. y = x - $\frac{1}{3-2}$

y = - 2x + 4

112. y = 2x - 3

y = 2x + 4

113. y = - 2x + 3

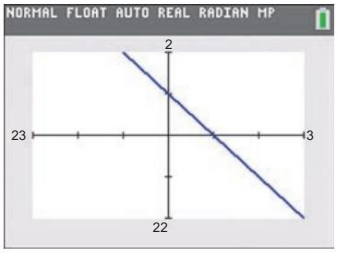
y = - 2 $\frac{1}{}$x + 2

114. y = 4x + 5

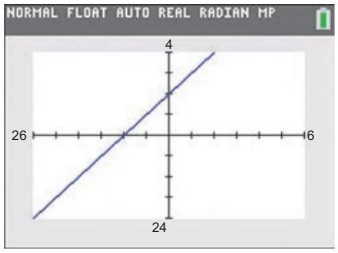
y = - 4x + 2

En los problemas 115 a 118, escribe una ecuación de cada línea. Expresa tu respuesta usando la forma general o la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, según prefieras.

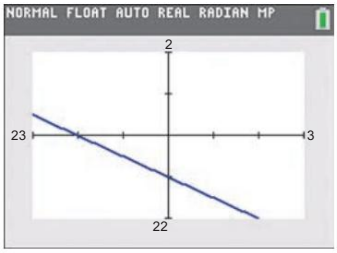
115.



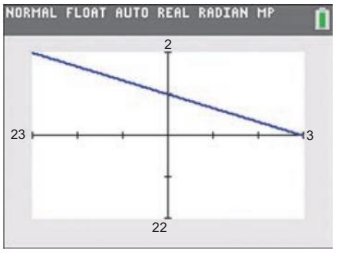
116.



117.



118.



Aplicaciones y extensiones

119. Geometría Usa pendientes para demostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son 11, - 12, (4, 1), (2, 2) y (5, 4) es un paralelogramo.

120. Geometría Usa pendientes para determinar si el triángulo cuyos vértices son 1 - 4, 42, 11, 52 y 12, 02 es un triángulo rectángulo.

121. Geometría Use pendientes y la fórmula de la distancia para mostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son (0, 0), (1, 3), (4, 2) y 13, - 12 es un cuadrado.

122. Geometría Usa pendientes para determinar si el cuadrilátero 1 - 3, 22 , cuyos vértices son 1 - 2, 12, 1 - 5, 02 1 - 4, - 12 y es un rectángulo.

123. Alquiler de camiones Una empresa de alquiler de camiones alquila un camión de mudanzas por un día cobrando $33 más $0,09 por milla. Escriba una ecuación lineal que relacione el costo C, en dólares, de alquilar el camión con el número x de millas recorridas. ¿Cuál es el costo de alquilar el camión si se recorre 175 millas? 403 millas?

124. Ecuación de costos Los costos fijos de operar una empresa son los costos incurridos independientemente del nivel de producción. Los costos fijos incluyen alquiler, salarios fijos y costos de arrendamiento. maquinaria. Los costos variables de operar una empresa son los costos que cambian con el nivel de producción. Los costos variables incluyen materias primas, salarios por hora y electricidad. Supongamos que un fabricante de jeans tiene costos fijos diarios de $1200 y costos variables de $20 por cada par de jeans fabricados. Escribe una ecuación lineal que relacione el costo diario C, en dólares, de fabricar los jeans con el número x de jeans fabricados. ¿Cuál es el costo de fabricar 400 pares de jeans? 740 pares?

125. Costo de conducir un automóvil Los costos fijos anuales de poseer un sedán pequeño son $4436, suponiendo que el automóvil esté completamente pagado. El costo de conducir el automóvil es de aproximadamente $0,16 por milla. Escriba una ecuación lineal que relacione el costo C y el número x de millas recorridas anualmente.

126. Salario de un vendedor de automóviles Dan recibe $525 por semana por vender automóviles nuevos y usados. También recibe el 5% de las ganancias de cualquier venta. Escribe una ecuación lineal que represente el salario semanal S de Dan cuando tiene ventas que generan una ganancia de x dólares.

Machine Translated by Google

127. Tarifas de electricidad en Florida Florida Power & Light Company suministra electricidad a clientes residenciales por un cargo mensual de 8,01 dólares más 8,89 centavos por kilovatio hora (kWh) hasta 1.000 kilovatios hora.

(a) Escriba una ecuación lineal que relacione el cargo mensual C, en dólares, con el número x de kilovatios hora utilizados en un mes, 0... x ... 1000.

(b) Grafique esta ecuación.

(c) ¿Cuál es el cargo mensual por usar 200 kilovatios hora?

(d) ¿Cuál es el cargo mensual por usar 500 kilovatios hora?

(e) Interprete la pendiente de la recta.

Fuente: Florida Power & Light Company, marzo de 2018

128. Tarifas del gas natural en Illinois Ameren Illinois suministra gas natural a clientes residenciales por un cargo mensual de $21,82 más 64,9 centavos por termia de energía térmica.

(a) Escriba una ecuación lineal que relacione el cargo mensual C, en dólares, con el número x de termias utilizadas en un mes.

(b) ¿Cuál es el cargo mensual por usar 90 termias?

(c) ¿Cuál es el cargo mensual por usar 150 termias?

(d) Grafique la ecuación.

(e) Interprete la pendiente de la recta.

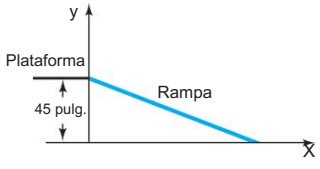
Fuente: Ameren Illinois, marzo de 2018

129. Medición de temperatura La relación entre los grados Celsius (°C) y Fahrenheit (°F) de medición de temperatura es lineal. Encuentre una ecuación lineal que relacione °C y °F si 0°C corresponde a 32°F y 100°C corresponde a 212°F. Usa la ecuación para encontrar la medida Celsius de 70°F.

130. Medición de la temperatura La escala Kelvin (K) para medir la temperatura se obtiene sumando 273 a la temperatura Celsius.

(a) Escriba una ecuación lineal que relacione K y °C.
(b) Escriba una ecuación lineal que relacione K y °F (consulte el problema 129).

131. Rampa de acceso Se está construyendo una rampa de acceso de madera para llegar a una plataforma que se encuentra a 45 pulgadas del suelo. La rampa cae 3 pulgadas por cada recorrido de 29 pulgadas.



(a) Escriba una ecuación lineal que relacione la altura y de la rampa sobre el piso con la distancia horizontal x desde la plataforma.

(b) Encuentre e interprete la intersección con el eje x de la gráfica de su ecuación.

(c) Los requisitos de diseño estipulan que el recorrido máximo sea de 30 pies (360 pulgadas) y que la pendiente máxima sea una caída de 1 pulgada por cada 8 pulgadas de recorrido. ¿Esta rampa cumplirá con los requisitos? Explicar.

(d) ¿Qué pendientes podrían usarse para obtener la elevación de 45 pulgadas y ¿Todavía cumple con los requisitos de diseño?

Fuente: www.adaptiveaccess.com/wood_ramps.php

132. Participación en publicidad en Estados Unidos Un informe mostró que los anuncios en Internet representaron el 19% de todo el gasto en publicidad en Estados Unidos, mientras que los anuncios impresos (revistas y periódicos) representaron el 26% del gasto. El informe mostró además que los anuncios en Internet representaron el 35% de todo el gasto en publicidad, mientras que los anuncios impresos representaron el 16% del gasto.

(a) Escriba una ecuación lineal que relacione ese porcentaje y del gasto en publicidad impresa al porcentaje x del gasto en publicidad en Internet.

(b) Encuentra las intersecciones de la gráfica de tu ecuación.

(c) ¿Tienen las intersecciones alguna interpretación significativa?

(d) Prediga el porcentaje del gasto en publicidad impresa si los anuncios en Internet representan el 39% de todo el gasto en publicidad en Estados Unidos.

Fuente: Marketing Fact Pack 2018. Ad Age Datacenter, 18 de diciembre de 2017

133. Promoción de productos Una empresa de cereales descubre que el número de personas que comprarán uno de sus productos en el primer mes de su lanzamiento está relacionado linealmente con la cantidad de dinero que gasta en publicidad. Si gasta 10.000 dólares en publicidad, se venderán 100.000 cajas de cereal, y si gasta 50.000 dólares en publicidad, se venderán 200.000 cajas de cereal.

(a) Escriba una ecuación que relacione la cantidad que A gastó en publicidad con el número x de cajas que la empresa pretende vender.

(b) ¿ Cuánta publicidad se necesita para vender 700 000 cajas de cereal?

(c) Interprete la pendiente.

134. La ecuación 2x - y = C define una familia de rectas, una recta para cada valor de C. En un conjunto de ejes de coordenadas, grafica los miembros de la familia cuando C = - 4, C = 0 y C = 2 .
¿Puedes sacar una conclusión del gráfico sobre cada miembro de la familia?

135. Problema de desafío Demuestre que la recta que contiene los puntos (a, b) y (b, a), a · b, es perpendicular a la recta
y = x. Demuestre también que el punto medio de (a, b) y (b, a) se encuentra en la recta y = x.

136. Problema de desafío Encuentra tres números a para los cuales las rectas x + 2y = 5, 2x - 3y + 4 = 0 y ax + y = 0
no forme un triangulo.

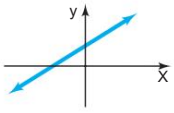
137. Problema de desafío Forma un triángulo usando los puntos (0, 0), (a, 0) y (b, c), donde a 7 0, b 7 0 y c 7 0. Encuentra el punto de intersección de los tres líneas que unen el punto medio de un lado del triángulo con el vértice opuesto.

138. Problema de desafío Demuestra que si dos rectas no verticales tienen pendientes cuyo producto es -1, entonces las rectas son perpendiculares.
[Sugerencia: consulte la Figura 47 y utilice el recíproco del teorema de Pitágoras.]

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

139. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría mostrar la gráfica? (Es posible más de una respuesta). (a) $2x + 3y = 6$



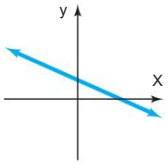
(b) $-2x + 3y = 6$

(c) $3x - 4y = -12$ (d) $x - y = 1$

(e) $x - y = -1$ (g) $y = 2x + 3$ (f) $y = 3x - 5$

(h) $y = -3x + 3$

140. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría mostrar la gráfica? (Es posible más de una respuesta).



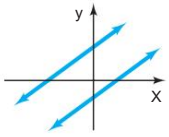
(a) $2x + 3y = 6$ (b) $2x - 3y = 6$

(c) $3x + 4y = 12$ (d) $x - y = 1$

(mi) $x - y = -1$ (f) $y = -2x - 1$

(g) $y = -\frac{1}{2}x + 10$ (h) $y = x + 4$

141. La figura muestra la gráfica de dos rectas paralelas. ¿Cuál de los siguientes pares de ecuaciones podría tener tal gráfica?



(a) $x - 2y = 3$
$x + 2y = 7$

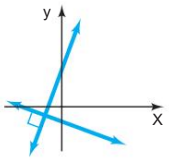
(b) $x + y = 2$
$x + y = -1$

(c) $x - y = -2$
$x - y = 1$

(d) $x - y = -2$
$2x - 2y = -4$

(mi) $x + 2y = 2$
$x + 2y = -1$

142. La figura muestra la gráfica de dos rectas perpendiculares. ¿Cuál de los siguientes pares de ecuaciones podría tener tal gráfica?



(a) $y - 2x = 2$
$y + 2x = -1$

(b) $y - 2x = 0$
$2y + x = 0$

(c) $2y - x = 2$
$2y + x = -2$

(d) $y - 2x = 2$
$x + 2y = -1$

(e) $2x + y = -2$
$2y + x = -2$

143. m es para Pendiente El símbolo aceptado que se usa para indicar la pendiente de una línea es la letra m. Investiga el origen de esta práctica. Comience consultando un diccionario de francés y buscando la palabra francesa monter. Escribe un breve ensayo sobre tus hallazgos.

144. Pendiente de una carretera El término pendiente se utiliza para describir la inclinación de una carretera. Cómo ¿Está este término relacionado con la noción?

de pendiente de una recta? ¿Es muy pronunciada una pendiente del 4%? Investigar las pendientes de algunos caminos montañosos y determinar sus pendientes. Escribe un breve ensayo sobre tus hallazgos.

145. Carpintería Los carpinteros utilizan el término pendiente para describir la pendiente de escaleras y tejados. ¿Cómo se relaciona el tono con la pendiente? Investigue las pendientes típicas utilizadas para escaleras y techos. Escribe un breve ensayo sobre tus hallazgos.

146. ¿Se puede escribir la ecuación de cada recta en forma pendiente-intersección? ¿Por qué?

147. ¿Tiene cada línea exactamente una intersección con el eje x y una intersección con el eje y? ¿Hay líneas que no tengan intersecciones?

148. ¿Qué puedes decir acerca de dos rectas que tienen pendientes iguales y ¿intersecciones y iguales ?

149. ¿Qué puedes decir acerca de dos rectas con el mismo intercepto en x y el mismo intercepto en y? Suponga que la intersección con el eje x no es 0.

150. Si dos rectas distintas tienen la misma pendiente pero diferentes intersecciones en x, ¿pueden tener la misma intersección en y?

151. Si dos rectas distintas tienen la misma intersección en y pero diferentes pendientes, ¿pueden tener la misma intersección en x?

152. ¿Qué forma de ecuación de una recta prefieres usar? Justifique su posición con un ejemplo que demuestre que su elección es mejor que otra. Tener razones.

153. ¿Qué salió mal? Se le pide a un estudiante que encuentre la pendiente de la recta que une 1 - 3, 22 y 11, - 42. Afirma que la la pendiente es $\frac{3}{2}$. ¿Tiene razón? Si no, ¿qué salió mal?

1.4 Círculos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Completar el cuadrado (Sección A.3, p. A29)
- Método de la raíz cuadrada (Sección A.6, p. A48)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 75.

OBJETIVOS 1 Escribir la forma estándar de la ecuación de un círculo (p. 72)

2 Graficar un círculo (pág. 73)

3 Trabajar con la forma general de la ecuación de un círculo (p. 74)

Machine Translated by Google

1 Escribe la forma estándar de la ecuación de un círculo.

Una ventaja de un sistema de coordenadas es que nos permite traducir un enunciado geométrico en un enunciado algebraico y viceversa. Considere, por ejemplo, el siguiente enunciado geométrico que define un círculo.

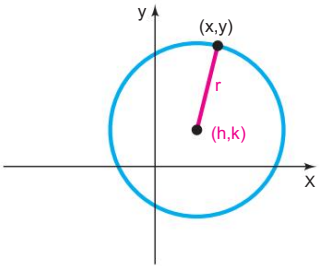


Figura 49
1x - h2 ^{2} + 1 año - k2 ^{2} = r ^{2}

DEFINICIÓN Círculo

Un círculo es un conjunto de puntos en el plano xy que están a una distancia fija r de un punto fijo (h, k). La distancia fija r se llama radio y el punto fijo (h, k) se llama centro del círculo.

¿Necesita revisar?
La fórmula de la distancia se analiza en la Sección 1.1, págs. 39 y 40.

La Figura 49 muestra la gráfica de un círculo. Para encontrar la ecuación, represente (x, y) las coordenadas de cualquier punto en un círculo con radio r y centro (h, k). Entonces la distancia entre los puntos (x, y) y (h, k) siempre debe ser igual a r. Es decir, por la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{1x - h2^{2} + 1 año - k2^{2}} = r$$

o equivalente,

$$1x - h2^{2} + 1 año - k2^{2} = r^{2}$$

DEFINICIÓN Forma estándar de una ecuación de un círculo

La forma estándar de una ecuación de un círculo con radio r y centro (h, k) es

$$1x - h2^{2} + 1 año - k2^{2} 2 = r \qquad (1)$$

TEOREMA

La forma estándar de una ecuación de un círculo de radio r con centro en el origen (0, 0) es

$$x2 + y2 = r^{2}$$

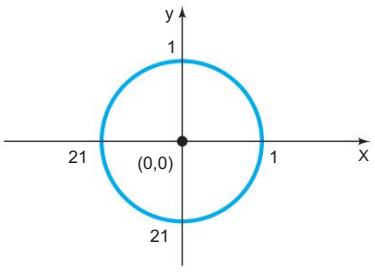


Figura 50
Círculo unitario x2 + y2 = 1

DEFINICIÓN Círculo unitario

Si el radio r = 1, la circunferencia cuyo centro está en el origen se llama circunferencia unitaria y tiene la ecuación

$$x2 + y2 = 1$$

Vea la Figura 50. Observe que la gráfica del círculo unitario es simétrica con respecto al eje x, el eje y y el origen.

EJEMPLO 1 Escribir la forma estándar de la ecuación de un círculo

Escribe la forma estándar de la ecuación del círculo con radio 5 y centro 1 - 3, 62.

Solución

Sustituya los valores r = 5, h = - 3 y k = 6 en la ecuación (1).

$$1x - h2^{2} + 1 año - k2^{2} = r^{2} \quad \text{Ecuación (1)}$$
$$3x - 1 - 32\,4^{2} + 1 año - 62^{2} = 52$$
$$1x + 32^{2} + 1 año - 62^{2} = 25$$

Ahora trabaja el problema 9

Machine Translated by Google

2 Graficar un círculo

EJEMPLO 2 Graficar un círculo

Grafica la ecuación: $1x + 32\ La\ ^{2} + 1\ año - 22^{2} = 16$

Solución

ecuación dada está en la forma estándar de una ecuación de un círculo. Para graficar el círculo, compare la ecuación con la ecuación (1). La comparación da información sobre el círculo.

$$1x + 32\ ^{2} + 1\ año - 22^{2} = 16$$
$$1x - 1 - 32\ 2\ ^{2} + 1\ año - 22^{2} = 42$$
$$\underset{\uparrow}{1x - h2}\ ^{2} + 1\ año - \underset{\uparrow}{k2}^{2} = \underset{\uparrow}{r}\ ^{2}$$

Vemos que h = - 3, k = 2 y r = 4. El círculo tiene centro 1 - 3, 22 y radio 4. Para graficar este círculo, primero traza el centro 1 - 3, 22. Dado que el radio es 4 , ubique cuatro puntos en el círculo trazando puntos 4 unidades a la izquierda, a la derecha, arriba y abajo desde el centro. Estos cuatro puntos se utilizan luego como guías para obtener el gráfico. Ver Figura 51.

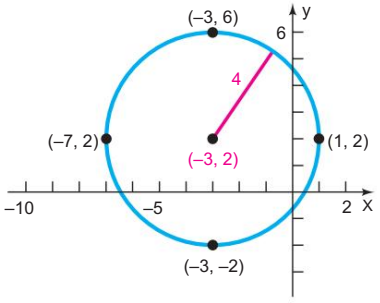


Figura 51 $1x + 32\ ^{2} + 1\ año - 22\ ^{2} = 16$

Ahora resuelva los problemas 2 7 (a) y (b)

EJEMPLO 3 Encontrar las intersecciones de un círculo

Encuentre las intersecciones, si las hay, de la gráfica del círculo $1x + 32.\ Esta\ ^{2} + 1\ año - 22^{2} = 16.$ es la ecuación representada en el ejemplo 2. Para encontrar las intersecciones con el eje x, si las hay, sea y = 0. Entonces

Solución

En palabras
El símbolo { se lee "más o menos". Significa sumar y restar la cantidad que sigue al símbolo {. Por ejemplo, 5 { 2 significa "5 - 2 = 3 o 5 + 2 = 7".

$$1x + 32\ ^{2} + 1\ año - 22^{2} = 16$$
$$1x + 32\ ^{2} + 10 - 22\ ^{2} = 16 \qquad y \cdot 0$$
$$1x + 32\ ^{2} + 4 = 16 \qquad \text{Simplificar.}$$
$$1x + 32x^{2} = 12 \qquad \text{Simplificar.}$$
$$+ 3 = \{ \sqrt{12} \qquad \text{Utilice el método de la raíz cuadrada.}$$
$$x = - 3 \{ \sqrt{23} \qquad \text{Solución para x.}$$

Las intersecciones con el eje x son $- 3 - \sqrt{23} \approx - 6{,}46$ y $- 3 + \sqrt{23} \approx 0{,}46$.

Para encontrar las intersecciones con el eje y, si las hay, sea x = 0. Entonces

$$1x + 32\ ^{2} + 1\ año - 22^{2} = 16$$
$$10 + 32\ ^{2} + 1\ año - 22^{2} = 16$$
$$9 + 1\ año - 22^{2} = 16$$
$$1\ año - \ ^{2} = 7$$
$$22\ años - 2 = \{ \sqrt{27}$$
$$y = 2 \{ \sqrt{27}$$

Las intersecciones en y son $2 - \sqrt{27} \approx - 0{,}65$ y $2 + \sqrt{27} \approx 4{,}65$.

Mire nuevamente la Figura 51 para verificar las ubicaciones aproximadas de las intersecciones.

Ahora resuelve el problema 2 7 (c)

Machine Translated by Google

3 Trabajar con la forma general de la ecuación de un círculo.

Si eliminamos los paréntesis de la forma estándar de la ecuación del círculo dada en el Ejemplo 2, obtenemos

$$1x + 32^{2} + 1 año - 22^{2} = 16$$

$$x2 + 6x + 9 + y2 - 4y + 4 = 16$$

lo que simplifica a

$$x2 + y2 + 6x - 4y - 3 = 0$$

Se puede demostrar que cualquier ecuación de la forma

$$x2 + y2 + ax + por + c = 0$$

tiene una gráfica que es un círculo, es un punto o no tiene ninguna gráfica. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación x2 + y2 = 0 es el único punto (0, 0). La ecuación x2 + y2 + 5 = 0, o x2 + y2 = - 5, no tiene gráfica, porque las sumas de cuadrados de números reales nunca son negativas.

DEFINICIÓN Forma general de la ecuación de un círculo

Cuando su gráfica es un círculo, la ecuación

$$x2 + y2 + ax + por + c = 0$$

es la forma general de la ecuación de un círculo.

Ahora resuelve el problema 1 5

¿Necesita revisar?
Completar el cuadrado se analiza en la Sección A.3, p. A29.

Si la ecuación de un círculo está en forma general, usamos el método de completar el cuadrado para poner la ecuación en forma estándar para que podamos identificar su centro y radio.

EJEMPLO 4 Graficar un círculo cuya ecuación está en forma general

Grafique la ecuación: x2 + y2 + 4x - 6y + 12 = 0

Solución

Agrupa los términos que involucran a x, agrupa los términos que involucran a y y coloca la constante en el lado derecho de la ecuación. El resultado es

$$1x2 + 4x2 + 1y2 - 6y2 = - 12$$

Luego, completa el cuadrado de cada expresión entre paréntesis. Recuerda que cualquier número que se sume en el lado izquierdo de la ecuación también se debe sumar en el derecho.

$$1x2 + 4x + 42 + 1y2 - 6y + 92 = - 12 + 4 + 9$$

6c 6c

$$\text{¢ 4 2≤ 2} \cdot 4 \qquad \text{¢ ·0 ≤ 2} \cdot 9$$

$$1x + 22^{2} + 1 año - 32^{2} = 1$$ Factor.

Esta ecuación es la forma estándar de la ecuación de un círculo con radio 1 y centro 1 - 2, 32. Para graficar la ecuación, use el centro 1 - 2, 32 y el radio 1. Consulte la Figura 52.

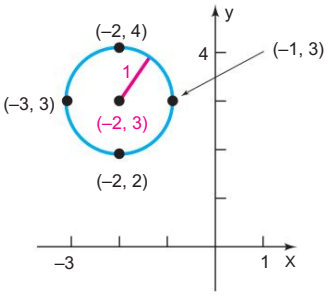


Figura 52 1x + 22 2 + 1 año - 32 2 = 1

Ahora resuelve el problema 3 1

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Usar una utilidad gráfica para graficar un círculo

Grafique la ecuación: x2 + y2 = 4

Solución

Esta es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio 2. Para graficar esta ecuación usando una utilidad gráfica, comience resolviendo y.

x2 + y2 = 4

y2 = 4 - x2 Resta x2 de ambos lados.

y = { 24 - x2 Usa el método de la raíz cuadrada para resolver y.

Hay dos ecuaciones para graficar: primero grafica Y1 = 24 - x2 y luego grafica Y2 = - 24 - x2 en la misma pantalla cuadrada. (Su círculo aparecerá ovalado si no utiliza una pantalla cuadrada.*) Consulte la Figura 53.

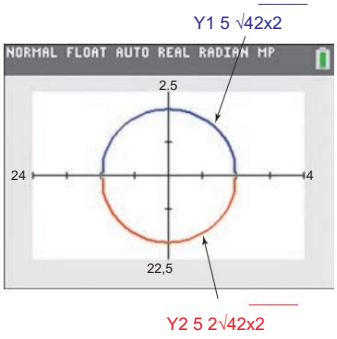


Figura 53 x2 + y2 = 4

Descripción general

La discusión en las Secciones 1.3 y 1.4 sobre líneas y círculos aborda dos problemas que pueden generalizarse de la siguiente manera:

- Dada una ecuación, clasificarla y graficarla.
- Dada una gráfica, o información sobre una gráfica, encuentra su ecuación.

Este texto aborda ambos problemas. Estudiaremos varias ecuaciones, las clasificaremos y las representaremos gráficamente.

*La relación de pantalla cuadrada de la calculadora gráfica TI-84 Plus C es 8:5.

1.4 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Para completar el cuadrado de x2 + 10x, debes (sumar/restar) _____ el número _____. (pág. A29)

2. Utilice el método de la raíz cuadrada para resolver la ecuación = 9. (p. A48)
1x - 22 ^{2}

Conceptos y vocabulario

3. Verdadero o Falso Cada ecuación de la forma

x2 + y2 + ax + por + c = 0

tiene un círculo como gráfica.

4. Para un círculo, _____ es la distancia del centro a cualquier punto del círculo.

5. Verdadero o Falso El radio del círculo x2 + y2 = 9 es 3.

6. Verdadero o Falso El centro del círculo.

1x + 32 ^{2} + 1 año - 22 ^{2} = 13

es 13, - 22.

7. Opción múltiple Elige la ecuación de un círculo con radio 6 y centro 13, - 52.

(a) 1x - 32 ^{2} + 1 año + 52 ^{2} = 6

(b) 1x + 32 ^{2} + 1 año - 52 ^{2} = 36

(c) 1x + 32 ^{2} + 1 año - 52 ^{2} = 6

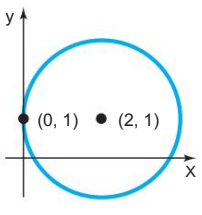
(d) 1x - 32 8. ^{2} + 1 año + 52 ^{2} = 36

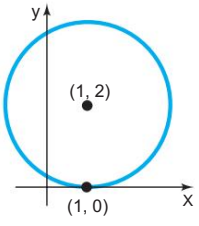
Opción múltiple ¿La ecuación de un círculo se puede cambiar de forma general a estándar mediante cuál de las siguientes opciones?

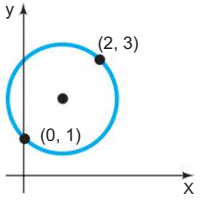
(a) completar los cuadrados (c) resolver para y (b) resolviendo para x (d) elevar al cuadrado ambos lados

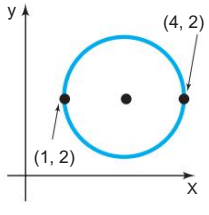
Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 12, encuentre el centro y el radio de cada círculo. Escribe la forma estándar de la ecuación.

9.


10.


11.


12.


Machine Translated by Google

En los problemas 13 a 24, escriba la forma estándar de la ecuación y la forma general de la ecuación de cada círculo de radio r y centro (h, k). Grafica cada círculo.

13.r = 3; 1h, k2 = 10, 02 17. r = 4; 1h, k2 = 12, - 32

14.r = 2; 1h, k2 = 10, 02 18. r = 5; 1h, k2 = 14, - 32

15.r = 2; 1h, k2 = 10, 22 19. r = 7; 1h, k2 = 1 - 5, - 22

16.r = 3; 1h, k2 = 11, 02 20.r = 4; 1h, k2 = 1 - 2, 12

21.r = _ $\frac{1}{2}$; 1h, k2 = ¢0, - 2 ≤ 22. r = $\frac{1}{2}$; 1h, k2=¢1 $\frac{}{2}$, 0≤

23.r = 225; 1h, k2 = 1 - 3, 22 24. r = 213; 1h, k2 = 15, - 12

En los problemas 25 a 38, (a) encuentre el centro (h, k) y el radio r de cada círculo; (b) grafique cada círculo; (c) encuentre las intersecciones, si las hay.

25. x2 + 1y - 12 ^{2} = 1

26. x2 + y2 = 4 + 2y2 = 8

27. 21x - 32 ^{2}

28. 31x + 12 ^{2} + 31 años - 12 ^{2} = 6

29. x2 + y2 + 4x + 2y - 20 = 0 32. x2

30. x2 + y2 - 2x - 4y - 4 = 0

31. x2 + y2 + 4x - 4y - 1 = 0 34. x2 + y2 - 6x + 2y + 9 = 0 35. 2x2 + 2y2

33. x2 + y2 + x + y - 36. $\frac{1}{2}$ = 0

+ y2 - x + 2y + 1 = 0 37. 3x2 + 3y2 - 12x + 8y - 24 = 0 38. 2x2 + 8x + 2y2 = 0

2x2 + 2y2 + 8x + 7 = 0

- 12y = 0

En los problemas 39 a 44, encuentre la forma estándar de la ecuación de cada círculo.

39. Centro (1, 0) y que contiene el punto 1 - 3, 22 41. Con extremos de un diámetro en (4, 3) y (0, 1)

40. Centro en el origen y que contiene el punto 1 - 2, 32

42. Con puntos finales de un diámetro en (1, 4) y 1 - 3, 22

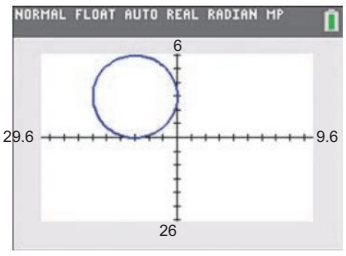
43. Centro 1 - 5, 62 y zona 49p

44. Centro 12, - 42 y circunferencia 16p

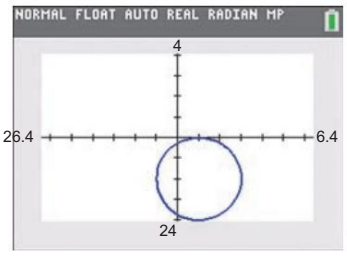
En los problemas 45 a 48, relacione cada gráfica con la ecuación correcta.

(a) 1x - 32 ^{2} + 1 año + 32 ^{2} = 9 (b) 1x + 12 ^{2} + 1 año - 22 ^{2} = 4 (c) 1x - 12 ^{2} + 1 año + 22 ^{2} = 4 (d) 1x + 32 ^{2} + 1 año - 32 $^{2 = 9}$

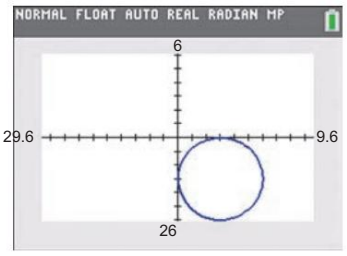
45.



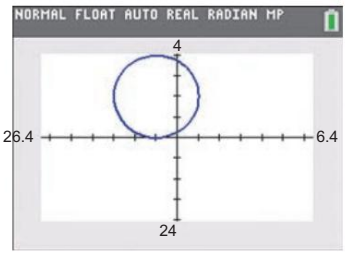
46.



47.



48.



Aplicaciones y extensiones

49. Encuentra una ecuación de la recta que contiene los centros de las dos circulos

1x - 42 ^{2} + 1 año + 22 $^{2 = 25}$

y

1x + 12 ^{2} + 1 año - 52 $^{2 = 16}$

50. Encuentra una ecuación de la recta que contiene los centros de las dos circulos

x2 + y2 - 4x + 6y + 4 = 0

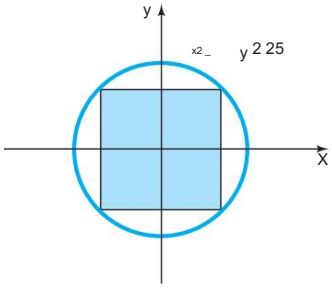
y

x2 + y2 + 6x + 4y + 9 = 0

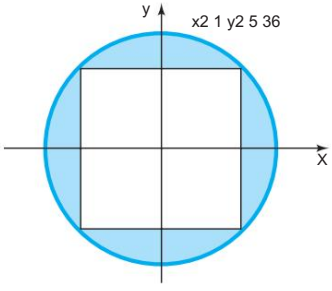
51. Si un círculo de radio 2 rueda a lo largo del eje x en los cuadrantes I y II, ¿cuál es la ecuación para la trayectoria del centro del círculo?

52. Un círculo de radio 7 rueda a lo largo del eje y en los cuadrantes I y IV. Encuentra una ecuación para la trayectoria del centro del círculo.

53. Encuentra el área del cuadrado de la figura.



54. Encuentra el área de la región sombreada en azul en la figura, suponiendo que el cuadrilátero dentro del círculo es un cuadrado.



Machine Translated by Google

55. Noria La noria de observación High Roller de Las Vegas tiene una altura máxima de 550 pies y un diámetro de 520 pies, y una rotación completa dura aproximadamente 30 minutos. Encuentre una ecuación para la rueda si el centro de

la rueda está en el eje y.

Fuente: Revista de revisión de Las Vegas

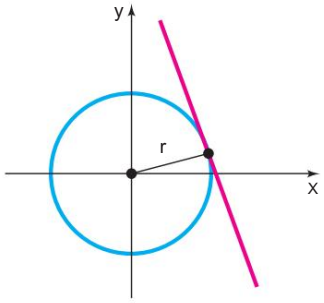
56. Noria Una noria tiene una altura máxima de 270 pies y un diámetro de rueda de 260 pies. Encuentra un

ecuación para la rueda si el centro de la rueda está en el eje y y y representa la altura sobre el suelo.

57. Edificio verticalmente circular El hotel Sunrise Kempinski en Beijing, China, es un edificio verticalmente circular cuyo contorno se describe mediante la ecuación x2 + y2 - 78y - 1843 = 0 si el centro del edificio está en el eje y. Si x e y están en metros, ¿cuál es la altura del edificio?

Los problemas 59 a 66 requieren la siguiente discusión.

La recta tangente a un círculo se puede definir como la recta que corta al círculo en un solo punto, llamado punto de tangencia. Ver la figura.



58. Edificio verticalmente circular Ubicada en Al Raha, Abu Dhabi, la sede de la empresa promotora inmobiliaria Aldar es un edificio circular vertical con un diámetro de 121 metros. La punta del edificio se encuentra a 110 metros del suelo. Encuentra una ecuación para el contorno del edificio si el centro del edificio está en el eje y.

En los problemas 59 a 62, encuentre la forma estándar de la ecuación de cada círculo. (Consulte la discusión anterior).

59. Centro 1 - 3, 12 y tangente al eje y

60. Centro (2, 3) y tangente al eje x.

61. Centro 14, - 22 y tangente a la recta x = 1

62. Centro 1 - 1, 32 y tangente a la recta y = 2

63. Problema de desafío Si la ecuación de un círculo es x2 + y2 = r y la ^{2} ecuación de una recta tangente es y = mx + b, demuestra que:

(a) r ^{2} 11 + m2 2 = b2

[Sugerencia: La ecuación cuadrática x2 + 1mx + b2 tiene ^{2} = r ^{2} tiene exactamente una solución.]

(b) El punto de tangencia es ¢ - r 2m $\frac{}{b}$, $\frac{r^{2}}{\text{segundo s.}}$

(c) La recta tangente es perpendicular a la recta que contiene el centro del círculo y el punto de tangencia.

64. La recta x - 2y + 16 = 0 es tangente a un círculo en 10, 82. La recta y = 2x - 1 es tangente al mismo círculo en 13, 52. Encuentra el centro del círculo.

65. Problema de desafío El método griego El método griego para encontrar la ecuación de la recta tangente a un círculo utiliza el hecho de que en cualquier punto de un círculo, la recta que contiene el centro y la recta tangente son perpendiculares. Utilice este método para encontrar una ecuación de la recta tangente al círculo x2 + y2 = 9 en el punto 11, 2222.

66. Problema de desafío Utilice el método griego descrito en el problema 65 para encontrar una ecuación de la recta tangente al círculo.

$$x2 + y2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

en el punto 13, 222 - 32.

67. Problema de desafío Si x2 + y2 + dx + ey + f = 0 es la ecuación de un círculo, demuestre que

$$x0x + y0y + d¢ \; x + x0\,2 \leq + e¢ \; y + y0 \;\; 2 \leq + f = 0$$

es una ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto 1x0, y02.

68. Problema de desafío Si 1x1, y12 y 1x2, y22 son los puntos finales del diámetro de un círculo, demuestre que una ecuación del círculo es

$$1x - x12\ 1x - x22 + 1y - y12\ 1y - y22 = 0$$

Explicar conceptos: discusión y escritura

69. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría mostrar la gráfica? (Es posible más de una respuesta).

(a) 1x - 22 ^{2} + 1 año + 32 ^{2} = 13

(b) 1x - 22 ^{2} + 1 año - 22 ^{2} = 8

(c) 1x -22 ^{2} + 1 año - 32 ^{2} = 13

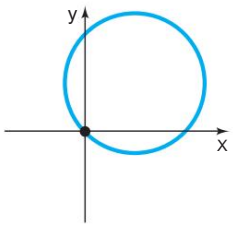
(d) 1x + 22 ^{2} + 1 año - 22 ^{2} = 8

(e) x2 + y2 - 4x - 9y = 0

(f) x2 + y2 + 4x - 2y = 0

(g) x2 + y2 - 9x - 4y = 0

(h) x2 + y2 - 4x - 4y = 4



70. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría tener la gráfica mostrada? (Es posible más de una respuesta).

(a) 1x - 22 ^{2} + y2 = 3

(b) 1x + 22 ^{2} + y2 = 3

(c) x2 + 1y - 22 ^{2} = 3

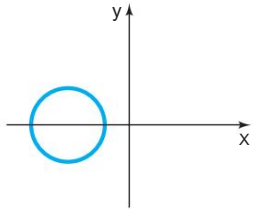
(d) 1x + 22 ^{2} + y2 = 4

(e) x2 + y2 + 10x + 16 = 0

(f) x2 + y2 + 10x - 2y = 1

(g) x2 + y2 + 9x + 10 = 0

(h) x2 + y2 - 9x - 10 = 0



Machine Translated by Google

71. Explica cómo se pueden usar el centro y el radio de un círculo para representar gráficamente el círculo.

72. ¿Qué salió mal? Un estudiante afirmó que el centro y el radio de la gráfica cuya ecuación es $1x + 32^2 + 1 año - 22^2 = 16$ son 13, - 22 y 4, respectivamente. ¿Por qué es esto incorrecto?

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. agregar; 25 2. 5 - 1, 56

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Fórmulas

Fórmula de distancia (pág. 39)	$re = 21x2 - x12^2 + 1y2 - y12^2$
Fórmula del punto medio (p. 42)	$1x, y2 = \phi x1 + x2^2, \frac{y1 + y2}{2} \leq$
Pendiente de una línea (p. 56)	metro = $\frac{y2 - y1}{x2 - x1}$ si x1 · x2; indefinido si x1 = x2
Líneas paralelas (pág. 64)	Pendientes iguales 1m1 = m22 y diferentes intersecciones en y 1b1 · b22
Líneas perpendiculares (pág. 65)	El producto de las pendientes es - 1 1m1 # m2 = - 12
Ecuaciones de rectas y circunferencias	
Línea vertical (pág. 60)	x = un; a es la intersección x
Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta (p. 60)	y - y1 = m1x - x12; m es la pendiente de la recta, 1x1, y12 es un punto de la recta
Línea horizontal (pág. 61)	y = b; b es la intersección y
Forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta (p. 61)	y = mx + b; m es la pendiente de la recta, b es la intersección con el eje y
Forma general de la ecuación de una recta (p. 63)	Hacha + Por = C; A, B no ambos 0
Forma estándar de la ecuación de un círculo (p. 72)	$1x - h2^2 + 1 año - k2^2 = r^2$; r es el radio del círculo, (h, k) es el centro del círculo
Ecuación del círculo unitario (p. 72)	$x2 + y2 = 1$
Forma general de la ecuación de un círculo (pág. 74)	$x2 + y2 + ax + por + c = 0$

Objetivos

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplos	Ejercicios de revisión
1.1	1 Utilice la fórmula de la distancia (p. 39)	1–3	1(a)–3(a), 29, 30(a), 31
	2 Utilice la fórmula del punto medio (p. 41)	4	1(b)–3(b), 31
1.2	1 Graficar ecuaciones trazando puntos (p. 46)	1–3	4
	2 Encuentra intersecciones en una gráfica (p. 48)	4	5
	3 Encuentra las intersecciones de una ecuación (p. 48)	5	6-10
	4 Pruebe la simetría de una ecuación con respecto al eje x, el eje y y el origen (p. 49)	6-10	6-10
	5 Sepa cómo graficar ecuaciones clave (p. 51)	11-13	26, 27

Machine Translated by Google

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplos	Ejercicios de revisión
1.3	1 Calcular e interpretar la pendiente de una recta (p. 56)	1, 2	1(c)–3(c), 1(d)–3(d), 32
	2 Grafica rectas dado un punto y la pendiente (p. 59)	3	28
	3 Encuentra la ecuación de una recta vertical (p. 60)	4	17
	4 Utilice la forma punto-pendiente de una línea; identificar líneas horizontales (p. 60)	5, 6	
	5 Usa la forma pendiente-intersección de una recta (p. 61)	7	16, 18-23
	6 Encuentra la ecuación de una recta dados dos puntos (p. 63)	8	18, 19
	7 Líneas gráficas escritas en forma general usando intersecciones (p. 63)	9	24, 25
	8 Encuentra ecuaciones de rectas paralelas (p. 64)	10, 11	20
	9 Encuentra ecuaciones de rectas perpendiculares (p. 65)	12, 13	21, 30(b)
1.4	1 Escribe la forma estándar de la ecuación de un círculo (p. 72)	1	11, 12, 31
	2 Grafica un círculo (pág. 73)	2, 3, 5	13-15
	3 Trabajar con la forma general de la ecuación de un círculo (pág. 74)	4	14, 15

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 a 3, encuentre lo siguiente para cada par de puntos:

(a) La distancia entre los puntos.

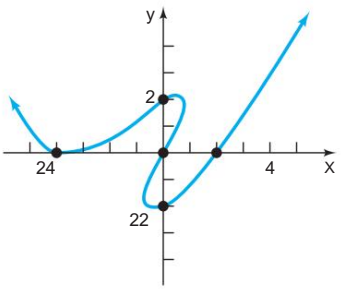
(b) El punto medio del segmento de recta que conecta los puntos

(c) La pendiente de la recta que contiene los puntos.

(d) Interprete la pendiente encontrada en el inciso (c)

1. 10, 02; 14, 22
2. 11, - 12; 1 - 2, 32
3. 14, - 42; 14, 82
4. Grafique y = x2 + 4 trazando puntos.

5. Enumera las intersecciones del siguiente gráfico.



En los problemas 6 a 10, enumere las intersecciones y pruebe la simetría con respecto al eje x, el eje y y el origen.

6. 3x2 = 2y 9.
y5 = x2 - 4x

7. 4x2 + y2 = 16 10.
x2 + x + y2 + 2y = 0

8. y = x4 + 2x2 + 1

En los problemas 11 y 12, encuentre la forma estándar de la ecuación del círculo cuyo centro y radio están dados.

11. 1h, k2 = 1 - 3, 42; r = 5 12. 1h, k2 = 1 - 1, - 22; r = 1

En los problemas 13 a 15, encuentre el centro y el radio de cada círculo. Grafica cada círculo. Encuentra las intersecciones, si las hay, de cada círculo.

13. x2 + 1y - 12 ^{2} = 4

14. x2 + y2 - 2x + 4y - 4 = 0

15. 3x2 + 3y2 - 6x + 12y = 0

En los problemas 16 a 21, encuentre una ecuación de la recta que tenga las características dadas. Expresa tu respuesta usando la forma general o la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, según prefieras.

16. Pendiente = - 2; que contiene el punto 13, - 12 18.
y@intercepción = - 2; que contiene el punto 15, - 32 20. Paralela a
la recta 2x - 3y = - 4;
que contiene el punto 1 - 5, 32

17. horizontales; que contiene el punto 11, - 42
19. Que contiene los puntos 12, - 32 y 14, 12
21. Perpendicular a la recta x - y = 3;
que contiene el punto 1 - 3, 52

Machine Translated by Google

En los problemas 22 y 23, encuentre la pendiente y la intersección con el eje y de cada recta. Grafique la línea y etiquete las intersecciones.

22. $4x - 5y = -20$

23. $\frac{1}{-}x - 2 \quad \frac{1}{-}y = -3\,6\,\frac{1}{-}$

En los problemas 24 y 25, encuentra las intersecciones y grafica cada línea.

24. $2x - 3y = 12$

25. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2$

26. Grafica $y = x3$.

27. Grafica $y = 2x$.

28. Grafica la recta con pendiente $3\ \frac{2}{-}$ que contiene el punto (1, 2).

29. Demuestre que los puntos A = 13, 42, B = 11, 12, y C = 1 - 2, 32 son los vértices de un triángulo isósceles.

30. Demuestre que los puntos A = 1 - 2, 02, B = 1 - 4, 42, y C = 18, 52 son los vértices de un triángulo rectángulo de dos formas:

(a) Utilizando el inverso del teorema de Pitágoras

(b) Usando las pendientes de las líneas que unen los vértices

31. Los puntos finales del diámetro de un círculo son 1 - 3, 22 y 15, - 62. Encuentra el centro y el radio del círculo. Escribe la ecuación estándar de este círculo.

32. Demuestre que los puntos A = 12, 52, B = 16, 12 y C = 18, - 12 se encuentran sobre una recta usando pendientes.

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

En los problemas 1 a 3, utilice P1 = 1 - 1, 32 y P2 = 15, - 12.

1. Encuentra la distancia de P1 a P2.
2. Encuentra el punto medio del segmento de línea que une P1 y P2.
3. (a) Encuentre la pendiente de la recta que contiene P1 y P2.
   (b) Interprete esta pendiente.
4. Grafique y = x2 - 9 trazando puntos.
5. Grafica y2 = x.
6. Enumere las intersecciones y pruebe la simetría: x2 + y = 9
7. Escribe la forma pendiente-intersección de la recta con pendiente - 2 que contiene el punto 13, - 42. Grafica la recta.
8. Escribe la forma general del círculo con centro 14, - 32 y radio 5.
9. Encuentra el centro y el radio del círculo.

   $$x2 + y2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

   Grafica este círculo.
10. Para la línea 2x + 3y = 6, encuentre una línea paralela a la línea dada que contiene el punto 11, - 12. Encuentre también una línea perpendicular a la línea dada que contiene el punto (0, 3).

Proyecto del Capítulo

Proyecto basado en Internet

I. Determinar el precio de venta de una vivienda Determinar cuánto pagar por una vivienda es una de las decisiones más difíciles que se deben tomar al comprar una vivienda. Hay muchos factores que influyen en el valor de una vivienda. La ubicación, el tamaño, la cantidad de dormitorios, la cantidad de baños, el tamaño del lote y los materiales de construcción son solo algunos de ellos. Afortunadamente, el sitio web Zillow.com ha desarrollado su propia fórmula para predecir el precio de venta de una vivienda.

Esta información es una gran herramienta para predecir el precio de venta real. Por ejemplo, los datos de la derecha muestran el "zestimate" (el precio de venta de una casa según lo predicho por la gente de Zillow) y el precio de venta real de la casa, para las casas en Oak Park, Illinois.

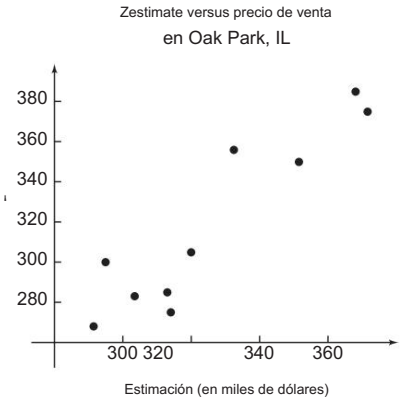
Estimación (en miles de dólares)	Precio de venta ($ miles)
291,5	268
320	305
371,5	375
303.5	283
351,5	350
314	275
332,5	356
295	300
313	285
368	385

Machine Translated by Google

El siguiente gráfico, llamado diagrama de dispersión, muestra los puntos

(291.5, 268), (320, 305),..., (368, 385)

en un plano cartesiano. Del gráfico se desprende que los datos siguen una relación lineal.



1. Imagínese trazar una línea a través de los datos que parece ajustarse bien a los datos. ¿Crees que la pendiente de la recta sería positiva, negativa o cercana a cero? ¿Por qué?
2. Elige dos puntos del diagrama de dispersión. Trate la estimación z como el valor de x y trate el precio de venta como el valor correspondiente de y. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos que seleccionaste.
3. Interpreta la pendiente de la recta.
4. Usa tu ecuación para predecir el precio de venta de una casa cuyo zestimate es $335,000.
5. ¿Crees que sería una buena idea usar la ecuación que encontraste en la parte 2 si la estimación z fuera $950 000? ¿Por qué o por qué no?
6. Elija un lugar en el que le gustaría vivir. Vaya a zillow.com y seleccione al azar al menos diez casas que se hayan vendido recientemente.

   (a) Dibuja un diagrama de dispersión de tus datos.

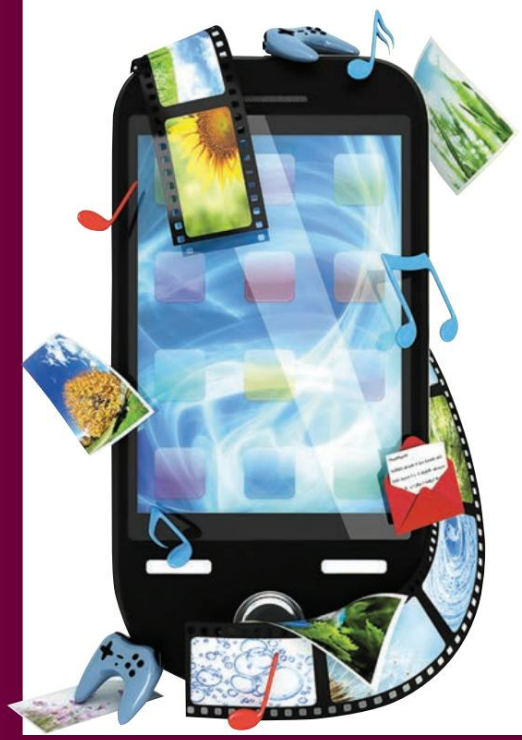
   (b) Seleccione dos puntos del diagrama de dispersión y encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos.

   (c) Interprete la pendiente.

   (d) Encuentre una casa en el sitio web de Zillow que le interese en la opción "Make Me Move" para la cual hay una estimación disponible. Utilice su ecuación para predecir el precio de venta según la estimación z.

Machine Translated by Google

2 Funciones y Sus gráficos



Elegir un plan de datos

Al seleccionar un plan de datos para un dispositivo, la mayoría de los consumidores eligen primero un proveedor de servicios y luego seleccionan un plan de datos apropiado de ese proveedor. La elección del tipo de plan seleccionado depende del uso que usted haga del dispositivo. Por ejemplo, ¿son importantes los juegos online? ¿Quieres transmitir audio o vídeo? Las matemáticas aprendidas en este capítulo pueden ayudarle a decidir qué plan se adapta mejor a sus necesidades particulares.

—Ver el Proyecto del Capítulo en Internet—

Describir

2.1 Funciones

2.2 La gráfica de una función

2.3 Propiedades de las funciones

2.4 Biblioteca de Funciones;
Funciones definidas por partes

2.5 Técnicas gráficas:
Transformaciones

2.6 Modelos Matemáticos:

Funciones del edificio

Revisión del capítulo

Prueba de capítulo

Revisión acumulativa

Proyectos del Capítulo

Una mirada atras

Hasta ahora, nuestra discusión se ha centrado en técnicas para representar gráficamente ecuaciones que contienen dos variables.

Una mirada hacia el futuro

En este capítulo, veremos un tipo especial de ecuación que involucra dos variables llamada función.
Este capítulo trata sobre qué es una función, cómo graficar funciones, propiedades de funciones y cómo se usan las funciones en aplicaciones. La palabra función aparentemente fue introducida por René Descartes en 1637. Para él, una función era simplemente cualquier potencia integral positiva de una variable x. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quien siempre enfatizó el lado geométrico de las matemáticas, usó la palabra función para denotar cualquier cantidad asociada con una curva, como las coordenadas de un punto en la curva. Leonhard Euler (1707-1783) usó la palabra para referirse a cualquier ecuación o fórmula que involucra variables y constantes. Su idea de función es similar a la que se ve con mayor frecuencia en los cursos que preceden al cálculo. Posteriormente, el uso de funciones en la investigación de ecuaciones de flujo de calor condujo a una definición muy amplia que se originó con Lejeune Dirichlet (1805-1859), que describe una función como una correspondencia entre dos conjuntos. Ésa es la definición utilizada en este texto.

Machine Translated by Google

2.1 Funciones

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Intervalos (Sección A.9, págs. A72–A74)
- Resolver desigualdades (Sección A.9, págs. A76–A78)
- Evaluación de expresiones algebraicas, dominio de una variable (Sección A.1, págs. A6–A7)
- Racionalizar denominadores y Numeradores (Sección A.10, págs. A85–A86)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 95.

OBJETIVOS 1 Describir una relación (p. 83)
2 Determinar si una relación representa una función (p. 85)
3 Utilice la notación de funciones; Encuentra el valor de una función (p. 87)
4 Encuentra el cociente de diferencias de una función (p. 90)
5 Encuentre el dominio de una función definida por una ecuación (p. 91)
6 Formar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones (p. 93)

1 Describir una relación

A menudo hay situaciones en las que una variable está de alguna manera vinculada a otra variable. Por ejemplo, el precio del galón de gasolina está vinculado al precio del barril de petróleo. Se puede asociar una persona a su(s) número(s) de teléfono. El volumen V de una esfera depende de su radio R. La fuerza F ejercida por un objeto corresponde a su aceleración a. Estos son ejemplos de una relación, una correspondencia entre dos conjuntos llamados dominio y rango.

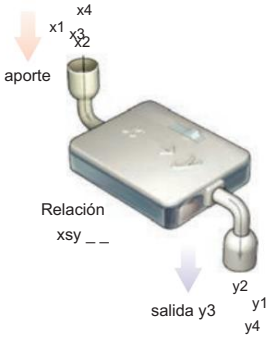


Figura 1

DEFINICIÓN Relación

Una relación es una correspondencia entre dos conjuntos: un conjunto X, llamado dominio, y un conjunto Y, llamado rango. En una relación, cada elemento del dominio corresponde al menos a un elemento del rango.

Si x es un elemento del dominio e y es un elemento del rango, y si existe una relación de x a y, entonces decimos que y corresponde a x o que y depende de x, y escribimos x S y. A menudo resulta útil pensar en x como la entrada y en y como la salida de la relación. Ver Figura 1.

Supongamos que un astronauta parado en la Luna lanza una piedra a 20 metros de altura y pone en marcha un cronómetro cuando la roca comienza a caer. El astronauta mide la altura de la roca a 1, 2, 2,5, 3, 4 y 5 segundos y obtiene alturas de 19,2, 16,8, 15, 12,8, 7,2 y 0 metros, respectivamente. Este es un ejemplo de una relación expresada verbalmente.
El dominio de la relación es el conjunto 50, 1, 2, 2,5, 3, 4, 56 y el rango de la relación es el conjunto 520, 19,2, 16,8, 15, 12,8, 7,2, 06.

El astronauta también podría expresar esta relación de forma numérica, gráfica o algebraica.

tabla 1

Tiempo (en segundos)	Altura (en metros)
0	20
1	19.2
2	16.8
2.5	15
3	12.8
4	7.2
5	0

La relación se puede expresar numéricamente usando una tabla de números, como en la Tabla 1, o utilizando un conjunto de pares ordenados. Usando pares ordenados, la relación es

510, 202, 11, 19,22, 12, 16,82, 12,5, 152, 13, 12,82, 14, 7,22, 15, 026

donde el primer elemento de cada par denota el tiempo y el segundo elemento denota la altura.

Supongamos que x representa el número de segundos en el cronómetro e y representa la altura de la roca en metros. Entonces la relación se puede expresar gráficamente trazando los puntos (x, y). Consulte la Figura 2 en la página siguiente.

La relación se puede representar como un mapeo dibujando una flecha desde un elemento en el dominio hasta el elemento correspondiente en el rango. Consulte la Figura 3 en la página siguiente.

Machine Translated by Google

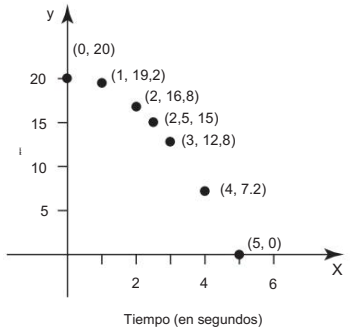


Figura 2

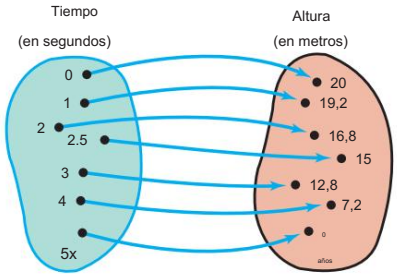


figura 3

Finalmente, desde la física, la relación se puede expresar algebraicamente usando la ecuación

$$y = 20 - 0,8x2$$

EJEMPLO 1

Describir una relación A

continuación se proporciona una descripción verbal de una relación.

El precio de los sellos postales estadounidenses de primera clase ha cambiado a lo largo de los años. Enviar una carta por correo en 2015 costaba 0,49 dólares. En 2016 costaba $0,49 parte del año y $0,47 el resto del año. En 2017 costaba $0,47 parte del año y $0,49 el resto del año.
En 2018 costaba $0,49 parte del año y $0,50 el resto del año.

Utilizando el año como insumo y el precio como producto,

(a) ¿Cuál es el dominio y el rango de la relación? (b) Exprese la

relación como un conjunto de pares ordenados. (c) Exprese la

relación como una aplicación. (d) Exprese la

relación como una gráfica.

Solución

La relación establece una correspondencia entre el precio de entrada, el año, y el de salida, el precio de un sello postal estadounidense de primera clase.

(a) El dominio de la relación es 52015, 2016, 2017, 20186. El rango de la relación es 5 +0,47, +0,49, +0,506.

(b) La relación expresada como un conjunto de pares ordenados es 512015, +0,492, 12016, +0,472, 12016, +0,492, 12017, +0,472, 12017, +0,492, 12018, +0,492, 12018, +0,5026.

(c) Consulte la Figura 4 para ver la relación expresada como mapeo, utilizando t para el año y p para el precio. (d) La Figura 5 muestra una gráfica de la relación.

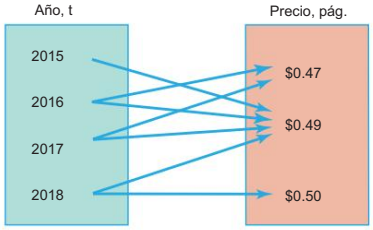


Figura 4 Precio del sello de primera clase

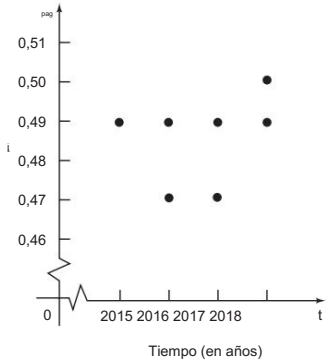


Figura 5 Precio de los sellos de primera clase (2015—2018)

Ahora resuelve el problema 1 7

Machine Translated by Google

2 Determinar si una relación representa una función

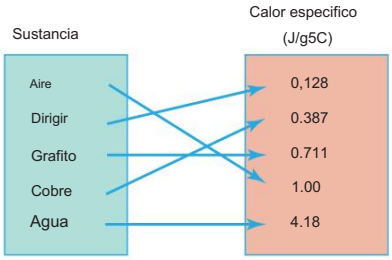


Figura 6 Calor específico de algunas sustancias comunes.

Vuelve a mirar la relación que involucra la altura de una roca en la Luna descrita al comienzo de la sección. Observe que cada entrada, el tiempo, corresponde exactamente a una salida, la altura. Con el tiempo, se podía saber la altura exacta de la roca. Pero no ocurre lo mismo con el precio de los sellos. Teniendo en cuenta el año 2018, no se puede determinar con certeza el precio de un sello. Podría ser $0,49 o podría ser $0,50.

Considere el mapeo de la relación en la Figura 6. Muestra una correspondencia entre una sustancia y su calor específico. Observe que para cada sustancia se puede determinar con certeza su calor específico.

La relación que asocia el tiempo con la altura de la roca es una función, y la relación que asocia una sustancia dada con su calor específico es una función. Pero la relación que asocia el año al precio de un sello postal de Primera Clase no es una función. Para ser una función, cada entrada debe corresponder exactamente a una salida.

DEFINICIÓN Función

Sean X e Y dos conjuntos no vacíos.* Una función de X a Y es una relación que asocia con cada elemento de X exactamente un elemento de Y.

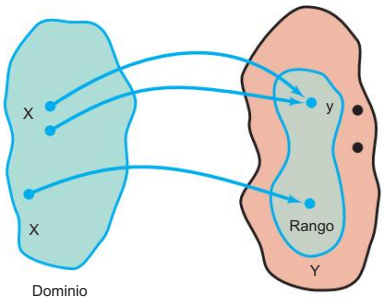


Figura 7

Al conjunto X se le llama dominio de la función. Para cada elemento x en X, el elemento correspondiente y en Y se llama valor de la función en x, o la imagen de x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio se llama rango de la función. Ver Figura 7.

Dado que puede haber algunos elementos en Y que no sean la imagen de alguna x en X, se deduce que el rango de una función puede ser un subconjunto propio de Y, como se muestra en la Figura 7.

La idea detrás de una función es su certeza. Si se proporciona una entrada, podemos usar la función para determinar la salida. Esto no es posible si una relación no es una función.
El requisito de "un resultado" proporciona un comportamiento predecible que es importante cuando se utilizan las matemáticas para modelar o analizar el mundo real. Permite a los médicos saber exactamente cuánto medicamento darle a un paciente, a un ingeniero determinar el material a utilizar en la construcción, al gerente de una tienda elegir cuántas unidades mantener en stock, etc.

EJEMPLO 2 Determinar si una relación dada por una asignación es una función

Para cada relación, indique el dominio y el rango. Luego determina si la relación es una función.

(a) Ver Figura 8. Esta relación muestra una correspondencia entre un elemento en Menú de McDonald's $1-$2-$3 y su precio.
Fuente: Corporación McDonald's, 2018

(b) Consulte la Figura 9. Esta relación muestra una correspondencia entre el nivel de actividad y las calorías diarias necesarias para un individuo con una tasa metabólica basal (TMB) de 1975 kilocalorías por día (kcal/día).

(c) Ver Figura 10. Esta relación muestra una correspondencia entre el período de gestación (en días) y la esperanza de vida (en años) para cinco especies animales.

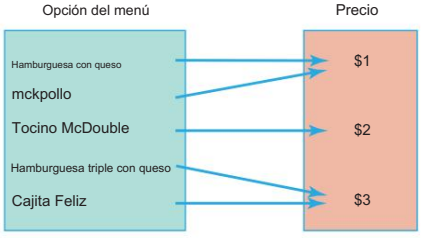


Figura 8

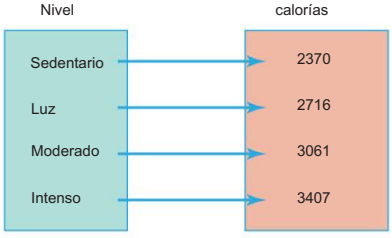


Figura 9

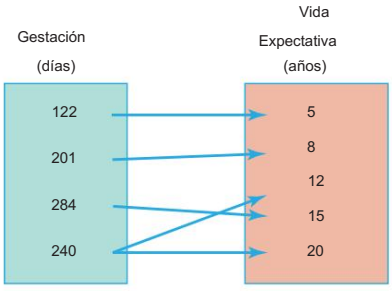


Figura 10

*Los conjuntos X e Y normalmente serán conjuntos de números reales, en cuyo caso resulta una función (real). Los dos conjuntos también pueden ser conjuntos de números complejos, y entonces hemos definido una función compleja. En la definición amplia (propuesta por Lejeune Dirichlet), X e Y pueden ser dos conjuntos cualesquiera.

Machine Translated by Google

Solución (a) El dominio de la relación es {Hamburguesa con queso, McChicken, Bacon McDouble, Triple Cheeseburger, Happy Meal} y el rango de la relación es 5 +1, +2, +36.
La relación en la Figura 8 es una función porque cada elemento en el dominio corresponde exactamente a un elemento en el rango.

(b) El dominio de la relación es 5Sedentario, Ligero, Moderado, Intenso6, y el rango de la relación es 52370, 2716, 3061, 34076. La relación en la Figura 9 es una función porque cada elemento en el dominio corresponde exactamente a uno elemento en el rango.

(c) El dominio de la relación es 5122, 201, 240, 2846 y el rango de la relación es 55, 8, 12, 15, 206. La relación de la Figura 10 no es una función porque hay un elemento en la dominio, 240, que corresponde a dos elementos del rango, 12 y 20. Si del dominio se selecciona un período de gestación de 240 días, no se le puede asociar una única esperanza de vida.

Ahora problema de trabajo 1 9

También podemos pensar en una función como un conjunto de pares ordenados (x, y) en el que ningún par ordenado tiene el mismo primer elemento y segundos elementos diferentes. El conjunto de todos los primeros elementos x es el dominio de la función y el conjunto de todos los segundos elementos y es su rango. Cada elemento x en el dominio corresponde exactamente a un elemento y en el rango.

EJEMPLO 3 Determinar si una relación está dada por un conjunto de pares ordenados es una función

Para cada relación, indique el dominio y el rango. Luego determina si la relación es una función.

(a) 5 11, 42, 12, 52, 13, 62, 14, 72 6

(b) 5 11, 42, 12, 42, 13, 52, 16, 102 6

(c) 5 1 - 3, 92, 1 - 2, 42, 10, 02, 11, 12, 1 - 3, 82 6

Solución (a) El dominio de esta relación es 51, 2, 3, 46 y su rango es 54, 5, 6, 76. Esta relación es una función porque no hay pares ordenados con el mismo primer elemento y segundos elementos diferentes.

(b) El dominio de esta relación es 51, 2, 3, 66 y su rango es 54, 5, 106. Esta relación es una función porque no hay pares ordenados con el mismo primer elemento y segundos elementos diferentes.

(c) El dominio de esta relación es 5 - 3, - 2, 0, 16 y su rango es 50, 1, 4, 8, 96.
Esta relación no es una función porque hay dos pares ordenados, 1 - 3, 92 y 1 - 3, 82, que tienen el mismo primer elemento y segundos elementos diferentes.

En el Ejemplo 3(b), observe que 1 y 2 en el dominio tienen la misma imagen en el rango. Esto no viola la definición de función; dos primeros elementos diferentes pueden tener el mismo segundo elemento. La definición se viola cuando dos pares ordenados tienen el mismo primer elemento y segundos elementos diferentes, como en el Ejemplo 3(c).

Ahora resuelve el problema 2 3

Hasta ahora hemos mostrado cómo identificar cuándo una relación es una función para relaciones definidas por asignaciones (Ejemplo 2) y pares ordenados (Ejemplo 3). Pero las relaciones también pueden expresarse como ecuaciones.

Machine Translated by Google

Generalmente es más fácil determinar si una ecuación, donde y depende de x, es una función, cuando la ecuación se resuelve para y. Si cualquier valor de x en el dominio corresponde a más de una y, la ecuación no define una función; de lo contrario, define una función.

EJEMPLO 4 Determinar si una ecuación es una función

Determina si la ecuación y = 2x - 5 define y como función de x.

Solución

La ecuación nos dice que tomemos una entrada x, la multipliquemos por 2 y luego restemos 5. Para cualquier entrada x, estas operaciones producen solo una salida y, por lo que la ecuación es una función. Por ejemplo, si x = 1, entonces y = 2 # 1 - 5 = - 3. Si x = 3, entonces y = 2 # 3 - 5 = 1.

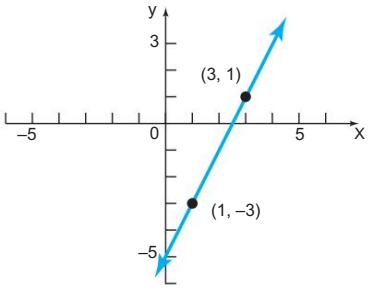


Figura 11 y = 2x - 5

La gráfica de la ecuación y = 2x - 5 es una recta con pendiente 2 y intersección con el eje y - 5. La función se llama función lineal. Ver Figura 11.

EJEMPLO 5 Determinar si una ecuación es una función

Determina si la ecuación x2 + y2 = 1 define y como función de x.

Solución

Para determinar si la ecuación x2 + y2 = 1, que define el círculo unitario, es una función, resuelve la ecuación para y.

$$x2 + y2 = 1$$

$$y2 = 1 - x2$$

$$y = \{ 21 - x2$$

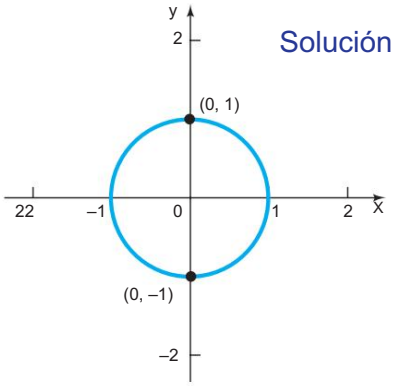


Figura 12 x2 + y2 = 1

Para valores de x para los cuales - 1 6 x 6 1, resultan dos valores de y . Por ejemplo, si x = 0, entonces y = {1, por lo que dos salidas diferentes resultan de la misma entrada. Esto significa que la ecuación x2 + y2 = 1 no define una función. Ver Figura 12.

Ahora resuelve el problema 3 7

3 Usar notación de funciones; Encuentra el valor de una función

Es una práctica común denotar funciones con letras como f, g, F, G y otras.
Si f es una función, entonces para cada número x en el dominio, el número correspondiente y en el rango se designa con el símbolo f1x2, se lee como “f de x” y escribimos y = f1x2.
Cuando una función se expresa de esta manera, estamos usando notación de función.

Nos referimos a f(x) como el valor de la función f en el número x. Por ejemplo, la función del Ejemplo 4 se puede escribir usando notación de función como y = f1x2 = 2x - 5.
Entonces f112 = - 3 y f132 = 1.

A veces es útil pensar en una función f como una máquina que recibe como entrada un número del dominio, lo manipula y genera un valor en el rango.
Ver Figura 13.

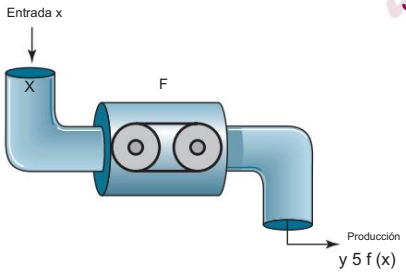


Figura 13 Máquina de entrada/salida

Las restricciones de esta máquina de entrada/salida son las siguientes:

- Acepta sólo números del dominio de la función.
- Para cada entrada, hay exactamente una salida (que puede repetirse para diferentes entradas).

En palabras
Si y = f1x2, entonces x es la entrada e y es la salida correspondiente a x.

Machine Translated by Google

ADVERTENCIA La notación y = f1x2 denota una función f. NO significa "f multiplicado por x".

La Figura 14 ilustra algunas otras funciones. Observe que en cada función, por cada x en el dominio, hay un valor correspondiente en el rango.

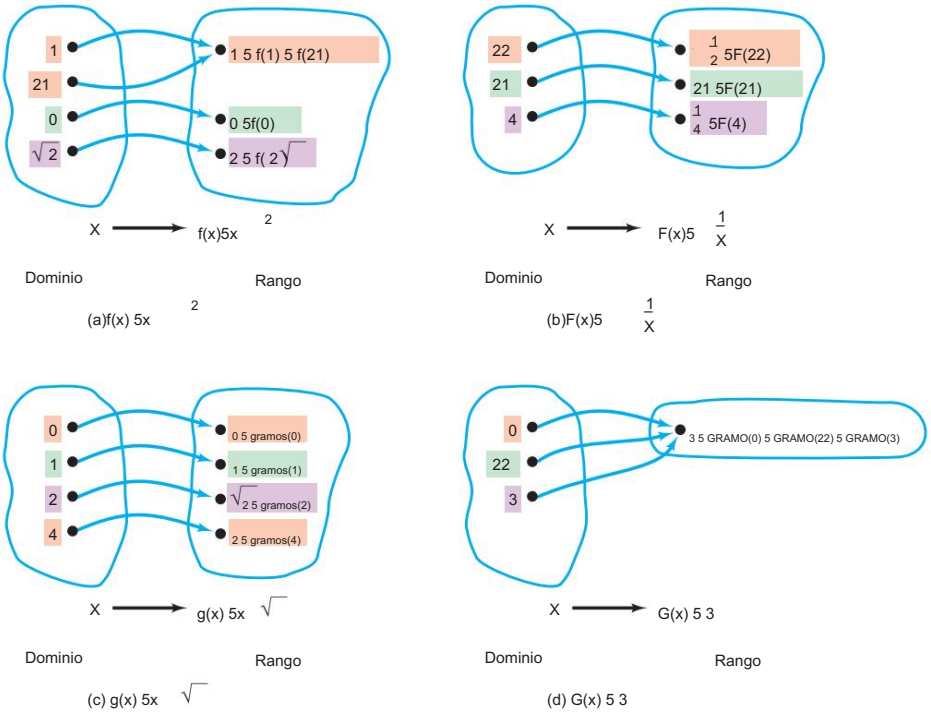


Figura 14

Para una función y = f1x2, la variable x se llama variable independiente porque se le puede asignar cualquier número del dominio. La variable y se llama variable dependiente porque su valor depende de x.

Se puede utilizar cualquier símbolo para representar las variables independientes y dependientes. Por ejemplo, si f es la función cúbica, entonces f puede estar dada por f1x2 = x3 o f1t2 = t^3 o f1z2 = z3 . Las tres funciones son iguales. Cada uno dice que se debe elevar al cubo la variable independiente para obtener el resultado. En la práctica, los símbolos utilizados para las variables independiente y dependiente se basan en el uso común, como el uso de t para el tiempo y a para la aceleración.

La variable independiente también se llama argumento de la función. Pensar en la variable independiente como un argumento a veces puede hacer que sea más fácil encontrar el valor de una función. Por ejemplo, si f es la función definida por f1x2 = x3, entonces f nos dice que aumentemos el argumento al cubo. Entonces f122 significa elevar al cubo 2, f1a2 significa elevar al cubo el número a y f1x + h2 significa elevar al cubo la cantidad x + h.

EJEMPLO 6 Encontrar valores de una función

Para la función f definida por f1x2 = 2x2 - 3x, evalúe

(a) f132 (b) f1x2 + f132 (f) (c) 3f1x2 (d) f1- x2

(e) - f1x2 f13x2 (g) f1x + 32 (h) f1x + h2

Solución

(a) Sustituya x por 3 en la ecuación de f, f1x2 = 2x2 - 3x, para obtener

$$f132 = 2 \# 32 - 3 \# 3 = 18 - 9 = 9$$

La imagen del 3 es el 9.

(b) f1x2 + f132 = 12x2 - 3x2 + 9 = 2x2 - 3x + 9

(c) Multiplique la ecuación de f por 3.

$$3f1x2 = 312x2 - 3x2 = 6x2 - 9x$$

Machine Translated by Google

(d) Sustituya - x por x en la ecuación de f y simplifique.

$$f1 - x2 = 21 - x2 \quad ^2 - 31 - x2 = 2x2 + 3x$$ Observe el uso de paréntesis aquí.

(e) $- f1x2 = - 12x2 - 3x2 = - 2x2 + 3x$

(f) Sustituya x por 3x en la ecuación de f y simplifique.

$$f13x2 = 213x2 \quad ^2 - 3 \# 3x = 2 \# 9x2 - 9x = 18x2 - 9x$$

(g) Sustituya x + 3 por x en la ecuación de f y simplifique.

$$f1x + 32 = 21x + 32 \quad ^2 - 31x + 32$$
$$= 21x2 + 6x + 92 - 3x - 9$$
$$= 2x2 + 12x + 18 - 3x - 9$$
$$= 2x2 + 9x + 9$$

(h) Sustituya x + h por x en la ecuación de f y simplifique.

$$f1x + h2 = 21x + h2 = \quad ^2 - 31x + h2$$
$$21x2 + 2xh + h22 - 3x - 3h$$
$$= 2x2 + 4xh + 2h2 - 3x - 3h$$

Observe en este ejemplo que $f1x + 32 \cdot f1x2 + f132$, $f1 - x2 \cdot - f1x2$, y $3f1x2 \cdot f13x2$.

Ahora resuelve el problema 4 3

La mayoría de las calculadoras tienen teclas especiales que le permiten encontrar el valor de ciertas funciones de uso común. Algunos ejemplos son claves para la función cuadrada $f1x2 = x2$, la función de raíz cuadrada $f1x2 = 1x$, y la función recíproca $f1x2 = \frac{1}{x} = x\text{-}1$.

EJEMPLO 7 Encontrar valores de una función en una calculadora

Verifica los siguientes resultados en tu calculadora.

(a) $f1x2 = x2 \qquad f11,2342 = 1,2342 = 1,522756$

(b) $F1x2 = \frac{1}{x} \qquad F11.2342 = \frac{1}{1.234} \approx 0,8103727715$

(c) $g1x2 = 1x \; g11.2342 = 11.234 \approx 1.110855526$

COMENTARIO Las calculadoras gráficas se pueden utilizar para evaluar una función. La Figura 15 muestra la función $Y1 = f1x2 = 2x2 - 3x$ evaluada en 3 en una calculadora gráfica TI-84 Plus C. Compare este resultado con la solución del Ejemplo 6(a).

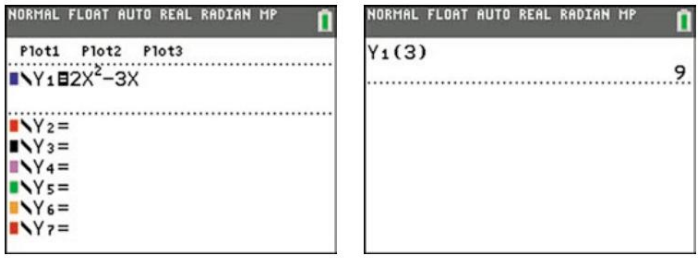


Figura 15 Evaluación de $f1x2 = 2x2 - 3x$ para $x = 3$

Machine Translated by Google

Forma implícita de una función

COMENTARIO Una calculadora gráfica requiere la forma explícita de una función. ■

En general, cuando una función f está definida por una ecuación en xey , decimos que la función f está dada implícitamente. Si es posible resolver la ecuación para y en términos de x, entonces escribimos y = f1x2 y decimos que la función está dada explícitamente. Por ejemplo,

Forma implícita	Forma explícita
3x + y = 5 x2	y = f1x2 = - 3x + 5
- y = 6	y = f1x2 = x2 - 6
xy = 4	$y = f1x2 = \frac{4}{x}$

RESUMEN

Datos importantes sobre las funciones

- Para cada x en el dominio de una función f, hay exactamente una imagen f1x2 en el rango; sin embargo, más de una x en el dominio puede tener la misma imagen en el rango.
- f es el símbolo que usamos para denotar la función. Es un símbolo de la ecuación (regla) que usamos para obtener de x en el dominio a f1x2 en el rango.
- Si y = f1x2, entonces x es la variable independiente, o el argumento de f, y y, o f1x2, es la variable dependiente, o el valor de f en x.

4 Encuentra el cociente de diferencias de una función

Un concepto importante en cálculo implica el uso de un determinado cociente. Para una función f, las entradas x y x + h, h · 0, dan como resultado los valores f1x2 y f1x + h2. El cociente de sus diferencias.

$$\frac{f1x + h2 - f1x2}{1x + h2 - x} = \frac{f1x + h2 - f1x2}{h}$$

con h · 0, se llama cociente de diferencias de f en x.

DEFINICIÓN Cociente de diferencias

El cociente de diferencias de una función f en x está dado por

$$\frac{f1x + h2 - f1x2}{h} \qquad h \cdot 0 \qquad (1)$$

El cociente de diferencias se utiliza en cálculo para definir la derivada, lo que conduce a aplicaciones como la velocidad de un objeto y la optimización de recursos.

Al encontrar un cociente de diferencias, es necesario simplificar la expresión (1) para que se pueda cancelar la h en el denominador.

EJEMPLO 8 Encontrar el cociente de diferencias de una función

Encuentra el cociente de diferencias de cada función.

(a) f1x2 = 2x2 - 3x

(b) $f1x2 = \frac{4}{x}$

(c) f1x2 = 1x

Machine Translated by Google

Solución

$$\text{(a)}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2-(x+h)+4-(3x^2-x+4)}{h}$$

$f(x+h)=3(x+h)^2-(x+h)+4$

$$= \frac{3x^2+6xh+3h^2-x-h+4-3x^2+x-4}{h}$$ Simplificar.

$$= \frac{6xh+3h^2-h}{h}$$ Distribuir y combinar términos semejantes.

$$= \frac{h(6x+3h-1)}{h}$$ Combina términos semejantes.

$$= 6x+3h-1$$ Factoriza h. Cancelar las h.

$$\text{(b)}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{4}{x+h}-\frac{4}{x}}{h}$$ $f(x)=\frac{4}{x}$

$$= \frac{\frac{4x-4(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$ Sustraer.

$$= \frac{4x-4x-4h}{x(x+h)h}$$ Dividir y distribuir.

$$= \frac{-4h}{x(x+h)h}$$ Simplificar.

$$= -\frac{4}{x(x+h)}$$ Cancelar las h.

¿Necesita revisar?

La racionalización de numeradores se analiza en la Sección A.10, págs. A85-A86.

(c) Cuando una función involucra una raíz cuadrada, racionalizamos el numerador de la expresión (1). Después de simplificar, las h se cancelan.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}$$ $f(x)=\sqrt{2x}$

$$= \frac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}$$ Racionalizar el numerador.

$$= \frac{(\sqrt{2(x+h)})^2-(\sqrt{2x})^2}{h(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x})}$$ $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x})}$$ $(\sqrt{x})^2=x$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}$$ Cancelar las h.

Ahora problema de trabajo 8 3

5 Encuentre el dominio de una función definida por una ecuación

A menudo no se especifica el dominio de una función f ; en cambio, solo se da la ecuación que define la función. En tales casos, el dominio de f es el conjunto más grande de números reales para los cuales el valor f1x2 es un número real. El dominio de una función f es el mismo que el dominio de la variable x en la expresión f1x2.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 9

Encontrar el dominio de una función

Encuentra el dominio de cada función.

(a) f1x2 = x2 + 5x

(b) g1x2 = x2 $\frac{3x}{-4}$

(c) h1t2 = $\sqrt{24 - 3t}$

(d) F1x2 = x - 5 $\frac{\sqrt{23x + 12}}{}$

Solución

(a) La función f1x2 = x2 + 5x dice sumar el cuadrado de un número y cinco veces el número. Dado que estas operaciones se pueden realizar con cualquier número real, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales.

(b) La función g1x2 = x2 - $\frac{3x}{4}$ dice dividir 3x entre x2 - 4. Dado que la división entre 0 no está definido, el denominador x2 - 4 no puede ser 0, por lo que x no puede ser igual a - 2 o 2. El dominio de la función g es 5x· x · - 2, x · 26.

En palabras
El dominio de g encontrado en el ejemplo 9(b) es 5x· x · - 2, x · 26. Esta notación se lee: "El dominio de la función g es el conjunto de todos los números reales x tales que x no es igual a - 2 y x no es igual a 2".

(c) La función h1t2 = $\sqrt{24 - 3t}$ dice que se debe sacar la raíz cuadrada de 4 - 3t. Dado que sólo los números no negativos tienen raíces cuadradas reales, la expresión bajo la raíz cuadrada (el radicando) debe ser no negativa (mayor o igual a cero). Eso es,

$$4 - 3t \text{ Ú } 0$$
$$- 3t \text{ Ú } - 4$$
$$t \ldots \frac{4}{3}$$

El dominio de h es e t ` t ... $\frac{4}{3}$ f, o el intervalo a - q, 3 d .

(d) La función F1x2 = $\frac{\sqrt{23x + 12}}{x - 5}$ dice que se debe tomar la raíz cuadrada de 3x + 12 y x - 5 divida el resultado por x - 5. Esto requiere que 3x + 12 Ú 0, entonces x Ú - 4, y también que x - 5 · 0, entonces x · 5. Combinando estas dos restricciones, el dominio de F es

$$5x\cdot\ x \text{ Ú } -4,\ x \cdot 56$$

Los siguientes pasos pueden resultar útiles para encontrar el dominio de una función que está definido por una ecuación y cuyo dominio es un subconjunto de los números reales.

Encontrar el dominio de una función definida por una ecuación

- Comience con el dominio como el conjunto de todos los números reales.
- Si la ecuación tiene un denominador, excluye cualquier número cuyo denominador sea cero.
- Si la ecuación tiene un radical con un índice par, excluye cualquier número cuya expresión dentro del radical (el radicando) sea negativa.

Ahora resuelve el problema 5 5

Expresamos el dominio de una función usando notación de intervalos, notación de conjuntos o palabras, lo que sea más conveniente. Si x está en el dominio de una función f, decimos que f está definida en x, o que f 1x2 existe. Si x no está en el dominio de f, decimos que f no está definido en x, o f 1x2 no existe. Por ejemplo, si f1x2 = x2 - 1 $\frac{x}{\sqrt{\ }}$, entonces f102 existe, pero f112 y f1 - 12 no existen. (¿Ves por qué?)

Cuando una función está definida por una ecuación, puede resultar difícil encontrar su rango a menos que también tengamos una gráfica de la función. Por lo tanto, normalmente nos contentamos con encontrar sólo el dominio.

Machine Translated by Google

Cuando utilizamos funciones en aplicaciones, el dominio puede estar restringido por consideraciones físicas o geométricas. Por ejemplo, el dominio de la función f definida por f1x2 = x2 es el conjunto de todos los números reales. Sin embargo, si f representa el área de un cuadrado cuyos lados tienen longitud x, el dominio de f está restringido a los números reales positivos, ya que la longitud de un lado nunca puede ser 0 o negativa.

EJEMPLO 10 Encontrar el dominio de una función utilizada en una aplicación

Expresa el área de un círculo en función de su radio. Encuentra el dominio.

Solución

Figura 16 Círculo de radio r

Ver Figura 16. La fórmula para el área A de un círculo de radio r es A = pr para ^{2}. usando r representar la variable independiente y A para representar la variable dependiente, la función que expresa esta relación es

$$A = A1r2 = pr \text{ En } ^2$$

esta aplicación, el dominio es 5r·r 7 06. (¿Ves por qué?)

Ahora problema de trabajo 1 0 5

6 Formar la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones

Las funciones, como los números, se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Por ejemplo, si f1x2 = x2 + 9 y g1x2 = 3x + 5, entonces

$$f1x2 + g1x2 = 1x2 + 92 + 13x + 52 = x2 + 3x + 14$$

La nueva función y = x2 + 3x + 14 se llama función de suma f + g. Similarmente,

$$f1x2 \# g1x2 = 1x2 + 92\ 13x + 52 = 3x3 + 5x2 + 27x + 45$$

La nueva función y = 3x3 + 5x2 + 27x + 45 se llama función producto f # g.

Las definiciones generales se dan a continuación.

DEFINICIÓN Función de suma

Dadas las funciones f y g, la función de suma está definida por

$$1f + g2\ 1x2 = f1x2 + g1x2$$

RECORDAR
El símbolo x significa intersección. Significa el conjunto de elementos que común a ambos conjuntos.

El dominio de f + g consta de todos los números reales x que están en los dominios de tanto f como g. Es decir, dominio de f + g = dominio de f ∩ dominio de g.

DEFINICIÓN Función de diferencia

Dadas las funciones f y g, la función de diferencia está definida por

$$1f - g2\ 1x2 = f1x2 - g1x2$$

El dominio de f - g consta de todos los números reales x que están en los dominios de tanto f como g. Es decir, dominio de f - g = dominio de f ∩ dominio de g.

DEFINICIÓN Función del Producto

Dadas las funciones f y g, la función producto está definida por

$$1f \# g2\ 1x2 = f1x2 \# g1x2$$

El dominio de f # g consta de todos los números reales x que están en los dominios de tanto f como g. Es decir, dominio de f # g = dominio de f ∩ dominio de g.

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Función Cociente

Dadas las funciones f y g, la función cociente se define por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad g(x) \neq 0$$

El dominio de $\frac{f}{g}$ consta de todos los números reales x para los cuales $g(x) \neq 0$ que también son g en los dominios de f y g. Eso es,

$$\text{dominio de } \frac{f}{g} = \{x \mid g(x) \neq 0\} \cap \text{dominio de } f \cap \text{dominio de } g$$

EJEMPLO 11 Operaciones sobre funciones

Sean f y g dos funciones definidas como

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x}{x-1}$$

Encuentre las siguientes funciones y determine el dominio.

(a) $(f+g)(x)$ (c) $(f \cdot g)(x)$ (d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Solución

El dominio de f es $\{x \mid x \neq -2\}$ y el dominio de g es $\{x \mid x \neq 1\}$.

(a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x}{x-1}$

$$= \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} + \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{x-1+x^2+2x}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2+3x-1}{(x+2)(x-1)}$$

El dominio de f + g consta de todos los números reales x que están en los dominios de f y g. El dominio de f + g es $\{x \mid x \neq -2, x \neq 1\}$.

(b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x-1}$

$$= \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{x-1-x^2-2x}{(x+2)(x-1)} = \frac{-x^2-x-1}{(x+2)(x-1)} = -\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x-1)}$$

El dominio de f - g consta de todos los números reales x que están en los dominios de f y g. El dominio de f - g es $\{x \mid x \neq -2, x \neq 1\}$.

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x}{(x+2)(x-1)}$

El dominio de f # g consta de todos los números reales x que están en los dominios de f y g. El dominio de f # g es $\{x \mid x \neq -2, x \neq 1\}$.

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{x(x+2)}$

Machine Translated by Google

El dominio de F consta de todos los números reales x para los cuales g1x2 · 0 que también están en g los dominios de f y g. Dado que g1x2 = 0 cuando x = 0, excluya 0 y - 2 f y 1 del dominio. El dominio de g es 5x· x · - 2, x · 0, x · 16.

Ahora problema de trabajo 7 1

En cálculo, a veces resulta útil ver una función complicada como la suma, diferencia, producto o cociente de funciones más simples. Por ejemplo,

F1x2 = x2 + 1x es la suma de f1x2 = x2 y g1x2 = 1x.

$H1x2 = x2 \frac{x2 - 1}{+ 1}$ es el cociente de f1x2 = x2 - 1 y g1x2 = x2 + 1.

RESUMEN

Función

- Una relación entre dos conjuntos de números reales de modo que cada número x en el primer conjunto, el dominio, corresponde exactamente a un número y en el segundo conjunto.
- Un conjunto de pares ordenados 1x, y2 o 1x, f1x2 2 en el que ningún primer elemento está emparejado con dos segundos elementos diferentes.
- El rango es el conjunto de valores de y de la función que son las imágenes de los valores de x en el dominio.
- Una función f puede definirse implícitamente mediante una ecuación que incluya xey o explícitamente escribiendo y = f1x2.

Dominio no especificado Si una función f está definida por una ecuación y no se especifica ningún dominio, entonces el dominio es el conjunto más grande de números reales para los cuales f1x2 es un número real.

Notación de funciones

- y = f1x2
- f es un símbolo de la función.
- x es la variable independiente o argumento.
- y es la variable dependiente.
- f1x2 es el valor de la función en x.

2.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La desigualdad - 1 6 x 6 3 se puede escribir en notación de intervalo como _____. (págs. A72-A74)
2. Si x = - 2, el valor de la expresión $3x2 - 5x + \frac{1}{x}$ es _____. (págs. A6–A7)
3. El dominio de la variable en la expresión $\frac{x - 3}{x + 4}$ es _____. (pág. A7)
4. Resuelve la desigualdad: 3 - 2x 7 5. Grafica el conjunto solución. (págs. A76–A78)
5. Para racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt{5} - 2}$, multiplica numerador y denominador por _____. (págs. A85-A86)
6. Un cociente se considera racionalizado si su denominador tiene No _____. (págs. A85-A86)

Conceptos y vocabulario

7. Para una función y = f1x2, la variable x es variable y el _____ la variable y es variable. el _____
8. Elección múltiple El conjunto de todas las imágenes de los elementos en el dominio de una función se llama _____.

   (a) rango (b) dominio (c) conjunto solución (d) función
9. Opción múltiple A veces se hace referencia a la variable independiente como la de la función. _____

   (a) rango (b) valor (c) argumento (d) definición
10. Verdadero o Falso El dominio de F consta de los números x que están en los dominios de f y g.
11. Verdadero o Falso Toda relación es una función.
12. Cuatro formas de expresar una relación son _____, _____, _____, y _____.
13. Verdadero o Falso Si no se especifica ningún dominio para una función f, entonces el dominio de f es el conjunto de los números reales.
14. Verdadero o Falso Si x está en el dominio de una función f, decimos que f no está definida en x, o f1x2 no existe.

Machine Translated by Google

15. La expresión $\frac{f1x + h2 - f1x2}{h}$ se llama _____ apagado .

16. Cuando se escribe como y = f1x2, se dice que una función es definido _____.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 17 y 18 se da una relación expresada verbalmente.

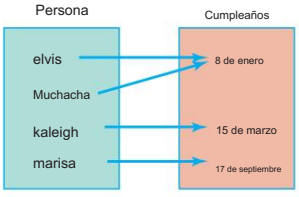
(a) ¿Cuál es el dominio y el rango de la relación? (b) Exprese la relación mediante una aplicación. (c) Exprese la relación como un conjunto de pares ordenados.

17. La densidad de un gas a presión constante depende de la temperatura. Manteniendo una presión constante a 14,5 libras por pulgada cuadrada, un químico mide la densidad de una muestra de oxígeno a temperaturas de 0, 22, 40, 70 y 100ºC y obtiene densidades de 1,411, 1,305, 1,229, 1,121 y 1,031 kg/m3 . respectivamente.

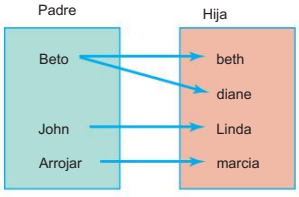
18. Un investigador quiere investigar cómo el peso depende de la altura entre los hombres adultos en Europa. Visita cinco regiones de Europa y determina que las alturas promedio en esas regiones son 1,80, 1,78, 1,77, 1,77 y 1,80 metros. Los pesos medios correspondientes son 87,1, 86,9, 83,0, 84,1 y 86,4 kg, respectivamente.

En los problemas 19 a 30, encuentre el dominio y el rango de cada relación. Luego determina si la relación representa una función.

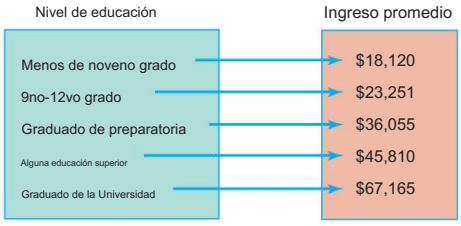
19.



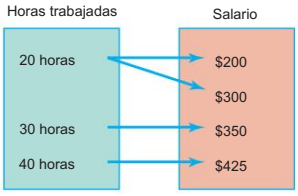
20.



21.



22.



23. 5 12, 62, 1 - 3, 62, 14, 92, 12, 102 6 24. 5 1 - 2, 52, 1 - 1, 32, 13, 72, 14, 122 6 25. 5 10, - 22, 11, 32, 12, 32, 13, 72 6

26. 5 11, 32, 12, 32, 13, 32, 14, 32 6 27. 5 1 - 4, 42, 1 - 3, 32, 1 - 2, 22, 1 - 1, 12, 1 - 4, 02 6 28. 5 13, 32, 13, 52, 10, 12, 1 - 4, 62 6

29. 5 1 - 2, 162, 1 - 1, 42, 10, 32, 11, 42 6 30. 5 1 - 1, 82, 10, 32, 12, - 12, 14, 326

En los problemas 31 a 42, determine si la ecuación define y como función de x.

31. y = x3

32. y = 2x2 - 3x + 4

33. y = 0 x 0

34. $y = \frac{1}{x}$

35. $y = \{ 21 - 2x$

36. x2 = 8 - y2

37. x = y2

38. x + y2 = 1

39. $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$

40. $y = 23x$ _

41. x2 - 4y2 = 1

42. · y· = 2x + 3

En los problemas 43 a 50, encuentre lo siguiente para cada función:

(a) f102 (b) f112 (c) f1 - 12 (d) f1 - x2 (e) - f1x2 (f) f1x + 12 (g) f12x2 (h) f1x + h2

43. f1x2 = 3x2 + 2x - 4

44. f1x2 = - 2x2 + x - 1

45. $f1x2 = \frac{x2 - 1}{x + 4}$

46. $f1x2 = x2 \frac{x}{+ 1}$

47. $f1x2 = 2x2 + x$

48. f1x2 = 0 x 0 + 4

49. $f1x2 = 1 - 1x + \frac{1}{22}$ 2

50. $f1x2 = \frac{2x + 1}{3x - 5}$

En los problemas 51 a 70, encuentre el dominio de cada función.

51. f1x2 = x2 + 2 52. f1x2 = - 5x + 4

53. $f1x2 = x2 \frac{x2}{+ 1}$

54. $f1x2 = \frac{x + 1}{2x2 + 8}$

55. $g1x2 = \frac{x}{x2 - 16}$

56. $h1x2 = \frac{2x}{x2 - 4}$

57. $G1x2 = \frac{x + 4}{x3 - 4x}$

58. $F1x2 = \frac{x - 2}{x3 + x}$

Machine Translated by Google

59. $G(x) = 21 - x$

60. $h(x) = 23x - 12$

61. $f(x) = \cdot \dfrac{x - 1}{3x - 1 \cdot - 4}$

62. $p(x) = \cdot \dfrac{x}{2x + 3 \cdot - 1}$

63. $f(x) = 2 - \dfrac{- x}{x - 2}$

64. $f(x) = 2x \dfrac{x}{- 4}$

65. $h(z) = z \dfrac{2z + 3}{- 2}$

66. $P(t) = 3t \dfrac{2t - 4}{- 21}$

67. $g(t) = -t^{2 + 23 \text{ toneladas}} \sqrt{2 + 7t}$

68. $f(x) = 23\ 5x - 4$

69. $N(p) = A\ 5^{\frac{\text{pag}}{2p2 - 98}}$

70. $M(t) = A\ 5^{\frac{t + 1}{- 5t - 14}}$

En los problemas 71 a 80, para las funciones dadas f y g, encuentre lo siguiente. Para las partes (a) a (d), encuentre también el dominio.

(a) $(f + g)(x)$ (b) $(f - g)(x)$ (c) $(f \# g)(x)$ (d) $\left(\frac{f}{g}\right)_{\text{segundo } 1x2}$

(e) $(f + g)(3)$ (f) $(f - g)(4)$ (g) $(f \# g)(2)$ (h) $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$

71. $f(x) = 3x + 4$; $g(x) = 2x - 3$

72. $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = 3x - 2$

73. $f(x) = 2x^2 + 3$; $g(x) = 4x^3 + 1$

74. $f(x) = x - 1$; $g(x) = 2x^2$

75. $f(x) = 0 \times 0$; $g(x) = x$

76. $f(x) = 1x$; $g(x) = 3x - 5$

77. $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = 24 - x$

78. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

79. $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = \dfrac{2}{x}$

80. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 2}$; $g(x) = \dfrac{4x}{3x - 2}$

81. Dado $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y una $\left(\frac{f}{g}\right)_{\text{segundo } 1x2} = \dfrac{x + 1}{x^2 - x}$, encuentre la función g.

82. Dado $f(x) = 3x + 1$ y $(f + g)(x) = 6 - x^2$, encuentre la función g.

En los problemas 83 a 98, encuentre el cociente de diferencias de f; es decir, encontrar $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, para cada función. Asegúrate de simplificar.

83. $f(x) = 4x + 3$

84. $f(x) = - 3x + 1$

85. $f(x) = 3x^2 + 2$

86. $f(x) = x^2 - 4$

87. $f(x) = 3x^2 - 2x + 6$

88. $f(x) = x^2 - x + 4$

89. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

90. $f(x) = \dfrac{5}{4x - 3}$

91. $f(x) = \dfrac{5x}{x - 4}$

92. $f(x) = \dfrac{2x}{x + 3}$

93. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

94. $f(x) = \sqrt{2x - 2}$

95. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

96. $f(x) = x^2 \dfrac{1}{}$

97. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 2}$

98. $f(x) = \sqrt{24 - x^2}$

Aplicaciones y extensiones

99. Dado $f(x) = x^2 - 3x + 3$, encuentre el valor(es) de x tal que $f(x) = 31$.

100. Si $f(x) = \dfrac{5}{6}x - \dfrac{3}{4}$, encuentre el valor(es) de x entonces que $f(x) = - 16$. $\dfrac{7}{}$

101. Si $f(x) = 2x^3 + Ax^2 + 7x - 5$ y $f(2) = 5$, ¿cuál es el valor de A?

102. Si $f(x) = 3x^2 - Bx + 4$ y $f(1) - 12 = 12$, ¿cuál es el valor de B ?

103. Si $f(b) = y\ f(- 3) = 2$, $^{4b + 4}_{\text{segundo - un}}$ ¿cuál es el valor de A?

104. Si $f(x) = 3x \dfrac{2x - B}{+ 4}$ y $f(1) = 2$ $\dfrac{1}{}$, ¿cual es el valor de b?

105. Geometría Expresa el perímetro P de un rectángulo en función de la longitud L si el ancho del rectángulo es el doble de su largo.

106. Geometría Expresa el área A de un triángulo rectángulo isósceles en función de la longitud x de uno de los dos lados iguales.

107. Funciones de construcción Ann, una vendedora a comisión, gana un salario base de $100 más $10 por artículo vendido. Exprese su salario bruto G en función del número x de artículos vendidos.

108. Construcción de funciones Expresa el salario bruto G de una persona que gana $16 por hora en función del número x de horas trabajadas.

109. Efecto de la gravedad en Júpiter Si una roca cae desde una altura de 20 metros en el planeta Júpiter, su altura H (en metros) después de x segundos es aproximadamente

$$H(x) = 20 - 13x^2$$

(a) ¿Cuál es la altura de la roca cuando x = 1 segundo? ¿Cuando x = 1,1 segundos? ¿Cuando x = 1,2 segundos?

(b) ¿Cuándo es la altura de la roca 15 metros? ¿Cuándo son 10 metros? ¿Cuándo mide 5 metros?

(c) ¿Cuándo golpea la roca el suelo?

Machine Translated by Google

110. Efecto de la gravedad en la Tierra Si una roca cae desde una altura de 31 metros en la Tierra, la altura H (en metros) después de x segundos 31 es aproximadamente

$$H(x) = 31 - 4{,}9x2 .$$

(a) ¿Cuál es la altura de la roca cuando x = 1,3 segundos?

(b) ¿Cuándo es la altura de la roca 14 metros?

(c) ¿Cuándo golpea la roca el suelo?

111. Costo del viaje transatlántico Un avión cruza el Océano Atlántico (3000 millas) con una velocidad aérea de 550 millas por hora. El costo C (en dólares) por pasajero está dado por

$$C1x2 = 150 + 15\ \frac{X}{\ } + \frac{36.000}{X}$$

donde x es la velocidad sobre el terreno 1velocidad aérea {viento2.

(a) ¿Cuál es el costo por pasajero en reposo (sin viento)? ¿condiciones?

(b) ¿Cuál es el costo por pasajero con un viento en contra de ¿50 millas por hora?

(c) ¿Cuál es el costo por pasajero con un viento de cola de 100 millas por hora?

(d) ¿Cuál es el costo por pasajero con un viento en contra de 100 millas por hora?

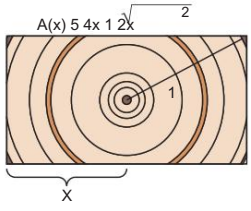
112. Área de la sección transversal El área de la sección transversal de una viga

El corte de un tronco con un radio de 1 pie viene dado por la función A1x2 = 4x21 - x2, donde x representa la longitud, en pies, de la mitad de la base de la viga. Ver la figura. Determine el área de la sección transversal de la viga si la longitud de la mitad de la base de la viga es la siguiente:

(a) Un tercio de pie

(b) Medio pie

(c) Dos tercios de un pie



113. Economía La tasa de participación es el número de personas en la fuerza laboral dividido por la población civil (excluidos los militares). Sea L1x2 el tamaño de la fuerza laboral en el año x y P1x2 la población civil en el año x.
Determine una función que represente la tasa de participación R en función de x.

114. Delitos Supongamos que V1x2 representa el número de delitos violentos cometidos en el año x y P1x2 representa el número de delitos contra la propiedad cometidos en el año x. Determine una función T que represente el total combinado de delitos violentos y delitos contra la propiedad en el año x.

115. Atención médica Supongamos que P1x2 representa el porcentaje de ingresos gastados en atención médica en el año x y I1x2 representa los ingresos en el año x. Encuentre una función H que represente los gastos totales de atención médica en el año x.

116. Impuesto sobre la renta Supongamos que I(x) representa el ingreso de un individuo en el año x antes de impuestos y T(x) representa la factura de impuestos del individuo en el año x. Encuentre una función N que represente el ingreso neto del individuo (ingreso después de impuestos) en el año x.

117. Función de beneficio Supongamos que el ingreso R, en dólares, por la venta de x teléfonos móviles, en cientos, es R1x2 = - 1,7x2 + 320x. El costo C, en dólares, de vender x celulares, en cientos, es C1x2 = 0.06x3 - 3x2 + 85x + 400.
(a) Encuentre la función de ganancias, P1x2 = R1x2 - C1x2.
(b) Encuentre la ganancia si x = 1200 teléfonos celulares se venden.
(c) Interprete P(12).

118. La población en función de la edad La función

$$P = P1a2 = 0{,}027a2 - 6{,}530a + 363{,}804$$

representa la población P (en millones) de estadounidenses que tienen al menos un año de edad en 2015.
(a) Identifique las variables dependientes e independientes.
(b) Evalúe P(20). Explique el significado de P(20).
(c) Evalúe P(0). Explique el significado de P(0).
Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

119. Distancia de frenado Cuando el conductor de un vehículo observa un impedimento, la distancia total de frenado involucra tanto la distancia de reacción R (la distancia que recorre el vehículo mientras el conductor mueve su pie hacia el pedal del freno) como la distancia de frenado B (la distancia que recorre el vehículo una vez aplicados los frenos). Para un automóvil que viaja a una velocidad de v millas por hora, la distancia de reacción R, en pies, se puede estimar mediante R1v2 = 2.2v. Supongamos que la distancia de frenado B, en pies, para un automóvil está dada por B1v2 = 0,05v2 + 0,4v - 15.
(a) Encuentre la función de distancia de frenado

$$D1v2 = R1v2 + B1v2$$

(b) Encuentre la distancia de frenado si el automóvil viaja a una velocidad de 60 mph.
(c) Interprete D(60).

120. Algunas funciones f tienen la propiedad de que

$$f1a + b2 = f1a2 + f1b2$$

para todos los números reales a y b. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene esta propiedad?

(a) h1x2 = 2x (b) g1x2 = x2

(c) F1x2 = 5x - 2 (d) G1x2 = $\frac{1}{X}$

121. Problema de desafío si f a x + 4 5x - 4 b = 3x2 - 2, encuentre f112.

122. Problema de desafío Encuentra el cociente de diferencias de la función f1x2 = 23 x.

1 Pista: Factoriza usando a3 - b3 = 1a - b2 1a2 + ab + b2 2 con a = 23 x + h y b = 23 x.2

123. Problema de desafío Encuentra el dominio de f1x2 = B x2 + 1 · 3x - 1 ·

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

124. ¿Son iguales las funciones f1x2 = x - 1 y g1x2 = $\frac{x2 - 1}{x + 1}$? Explicar.

125. Encuentra una función H que multiplica un número x por 3 y luego resta el cubo de x y divide el resultado por tu edad.

126. Investigar cuándo, históricamente, el uso de la función
La notación y = f1x2 apareció por primera vez.

Conserve su conocimiento

Los problemas 127 a 135 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

127. Enumere las intersecciones y pruebe la simetría de la gráfica de
$$1x + 122^{2} + y2 = 16$$

128. Determina cuáles de los puntos dados están en la gráfica de la ecuación y = 3x2 - 82x.
Puntos: 1 - 1, - 52, 14, 322, 19, 1712

129. ¿Cuántas libras de hamburguesa magra con 7% de grasa se deben mezclar con 12 libras de carne molida con 20% de grasa para obtener una mezcla de hamburguesa con 15% de grasa?

130. Resuelve x3 - 9x = 2x2 - 18.

131. Dado a + bx = ac + d, resuelve para a.

132. Inercia rotacional La inercia rotacional I de un objeto varía con el cuadrado de la distancia perpendicular d del objeto al eje de rotación según el modelo.
$$yo = \frac{10}{9} d2\ 1pulg\ kg\ \#\ m2\ 2$$
¿Cuál es la inercia rotacional del objeto si la distancia perpendicular es de 1,5 m?

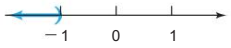
133. Encuentra la pendiente de una recta perpendicular a la recta 3x - 10y = 12

134. Simplifica $\frac{14x2 - 72\ \#\ 3 - 13x + 52\ \#\ 8x}{14x2 - 72}$.

135. Determina el grado del polinomio
$$9x2\ 13x - 52\ 15x + 12^{4}$$

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 1 - 1, 32 2. 21.5 3. 5x· x · - 46 4. 5x· x 6 - 16



5. $25 + 2$ 6. radicales

2.2 La gráfica de una función

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Gráficas de ecuaciones (Sección 1.2, págs. 46 y 47)
- Intercepciones (Sección 1.2, págs. 48–49)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 103.

OBJETIVOS 1 Identificar la gráfica de una función (p. 100)
2 Obtener información de o sobre la gráfica de una función (p. 100)

En la sección 1.2 vimos cómo una gráfica puede demostrar más claramente la relación entre dos variables. Considere los datos del precio promedio de la gasolina y el gráfico correspondiente proporcionados nuevamente por conveniencia en la Tabla 2 y la Figura 17.

Tabla 2

Año	Precio	Año	Precio	Año	Precio
1991	1,98	2000	2.11	2009	2,68
1992	1,90	2001	1,97	2010	3.12
1993	1.81	2002	1,83	2011	3.84
1994	1,78	2003	2.07	2012	3.87
1995	1,78	2004	2.40	2013	3.68
1996	1,87	2005	2,85	2014	3.48
1997	1,83	2006	3.13	2015	2.51
1998	1,55	2007	3.31	2016	2.19
1999	1,67	2008	3.70	2017	2.38

Fuente: Administración de Información Energética de EE. UU.

Figura 17 Precio minorista promedio de la gasolina (dólares de 2017)

Machine Translated by Google

Podemos ver en el gráfico que el precio de la gasolina (ajustado por inflación) se mantuvo aproximadamente igual de 1993 a 1997 y aumentó de 2002 a 2008.
El gráfico también muestra que el precio más bajo se produjo en 1998.

Mire nuevamente la Figura 17. El gráfico muestra que para cada fecha en el eje horizontal, hay solo un precio en el eje vertical. El gráfico representa una función, aunque no se proporciona una regla para pasar de la fecha al precio.

Cuando una función está definida por una ecuación en x e y, la gráfica de la función es la gráfica de la ecuación; es decir, es el conjunto de puntos 1x, y2 en el plano xy el que satisface la ecuación.

1 Identificar la gráfica de una función

No todos los conjuntos de puntos en el plano xy representan la gráfica de una función. Recuerde, para una función, cada número x en el dominio tiene exactamente una imagen y en el rango. Esto significa que la gráfica de una función no puede contener dos puntos con la misma coordenada x y diferentes coordenadas y. Por lo tanto, la gráfica de una función debe satisfacer la siguiente prueba de la recta vertical.

En palabras
Si cualquier línea vertical corta una gráfica en más de un punto, la gráfica no es la gráfica de una función.

TEOREMA Prueba de línea vertical

Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si y solo si cada línea vertical corta la gráfica en como máximo un punto.

EJEMPLO 1 Identificar la gráfica de una función

¿Cuáles de las gráficas de la Figura 18 son gráficas de funciones?

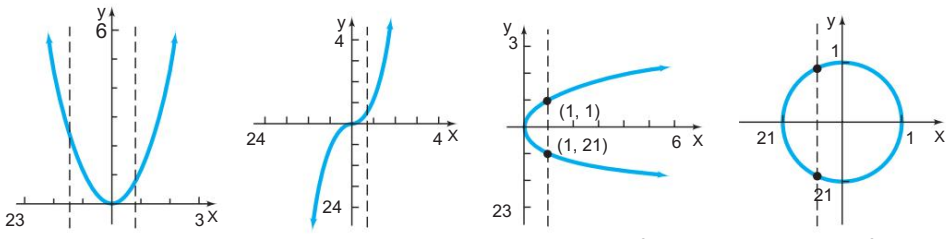


Figura 18

Solución Las gráficas de las Figuras 18(a) y 18(b) son gráficas de funciones, porque cada línea vertical intersecta cada gráfica en como máximo un punto. Las gráficas de las Figuras 18(c) y 18(d) no son gráficas de funciones, porque hay una línea vertical que cruza cada gráfica en más de un punto. Observe en la Figura 18(c) que la entrada 1 corresponde a dos salidas, - 1 y 1. Es por eso que la gráfica no representa una función.

Ahora resuelva los problemas 1 5 y 1 7

2 Obtener información de o sobre la gráfica de una función

Si 1x, y2 es un punto en la gráfica de una función f, entonces y es el valor de f en x; es decir, y = f1x2. Además, si y = f1x2, entonces 1x, y2 es un punto en la gráfica de f.
Por ejemplo, si 1 - 2, 72 está en la gráfica de f, entonces f1 - 22 = 7, y si f152 = 8, entonces el punto 15, 82 está en la gráfica de y = f1x2.

EJEMPLO 2 Obtener información de la gráfica de una función

Sea f la función cuya gráfica se muestra en la Figura 19. (La gráfica de f podría representar la distancia y a la que se encuentra la masa de un péndulo desde su posición en reposo en el momento x. Los valores negativos de y significan que el péndulo debe a la izquierda de la posición de reposo, y los valores positivos de y significan que el péndulo está a la derecha de la posición de reposo).

Machine Translated by Google

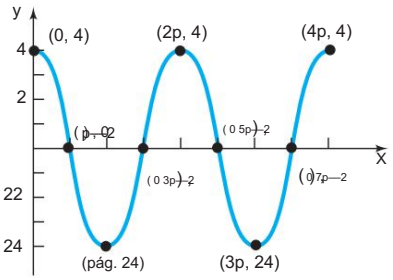


Figura 19

(a) ¿Cuáles son f102, f a 3p2, y f13p2?

(b) ¿Cuál es el dominio de f ?

(c) ¿Cuál es el rango de f ?

(d) Enumere las intersecciones. (Recuerde que estos son los puntos, si los hay, donde la gráfica cruza o toca los ejes de coordenadas.)

(e) ¿Cuántas veces la recta y = 2 intersecta la gráfica?

(f) ¿Para qué valores de x f1x2 = - 4?

(g) ¿Para qué valores de x es f1x2 7 0?

Solución

(a) Dado que (0, 4) está en la gráfica de f, la coordenada y 4 es el valor de f en coordenada x 0; es decir, f102 = 4. De manera similar, cuando x = $\frac{3p}{2}$, entonces y = 0, entonces un 2pb = 0. Cuando x = 3p, entonces y = - 4, entonces f13p2 = - 4.

(b) Para determinar el dominio de f, observe que los puntos en la gráfica de f tienen coordenadas x entre 0 y 4p, inclusive; y para cada número x entre 0 y 4p, hay un punto 1x, f1x22 en la gráfica. El dominio de f es 5x· 0 … x … 4p6 o el intervalo 30, 4p4.

(c) Todos los puntos de la gráfica tienen coordenadas y entre -4 y 4, inclusive; y para cada uno de esos números y, hay al menos un número x en el dominio. El rango de f es 5y· - 4 … y … 46 o el intervalo 3 - 4, 44 .

(d) Las intersecciones son los puntos

10, 42, ap2, 0b, un 3p, 0b, un 5p, 0b y 7p 2, 0b

(e) Dibuje la línea horizontal y = 2 en la gráfica de la Figura 19. Observe que la línea corta la gráfica cuatro veces.

(f) Dado que 1p, - 42 y 13p, - 42 son los únicos puntos de la gráfica para los cuales y = f1x2 = - 4, tenemos f1x2 = - 4 cuando x = p y x = 3p.

(g) Para determinar dónde f1x2 7 0, observe la Figura 19 y determine los valores de x de 0 a 4p para los cuales la coordenada y es positiva. esto ocurre 5p en c 0, pag 2bh a 3p 2, 2bh a 7p 2, 4p d . Usando notación de desigualdad, f1x2 7 0 para 0 ... x6 pag 2 o 3p 2 6x6 _ _ 5p 2 o 7p 2 6x … 4p .

RECORDAR

El símbolo h significa unión. Significa el conjunto de elementos que se encuentran en cualquiera de dos conjuntos.

Cuando se da la gráfica de una función, su dominio puede verse como la sombra creada por la gráfica en el eje x por rayos de luz verticales. Su rango puede verse como la sombra creada por el gráfico en el eje y por rayos de luz horizontales. Pruebe esta técnica con el gráfico que se muestra en la Figura 19.

Ahora problema de trabajo 1 1

EJEMPLO 3 Obtener información sobre la gráfica de una función

Considere la función: f1x2 = x + 1 + 2

(a) Encuentre el dominio de f.

(b) ¿Es el punto a1, 1 2b en la gráfica de f ?

(c) Si x = 2, ¿cuál es f1x2? ¿Qué punto está en la gráfica de f ?

(d) Si f1x2 = 2, ¿cuál es x? ¿Qué punto está en la gráfica de f ?

(e) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de f (si las hay)? ¿Qué puntos correspondientes están en la gráfica de f ?

Machine Translated by Google

Solución

(a) El dominio de f es 5x· x · - 26.

(b) Cuando x = 1, entonces

$$f112 = 1\ \frac{1+1}{+2} = \frac{2}{3} \qquad f\ 1x2 \cdot \ \frac{x \cdot 1}{x \cdot 2}$$

El punto a1, 2 $\overline{3}$ b está en la gráfica de f; el punto a1, 1 $\overline{2}$b no lo es.

(c) Si x = 2, entonces

$$f122 = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

El punto a2, 3 $\overline{4}$ b está en la gráfica de f.

(d) Si f1x2 = 2, entonces

$$\frac{x+1}{x+2} = 2 \qquad f\ 1x2 \cdot 2$$

$$x + 1 = 21x + 22 \qquad \text{Multiplica ambos lados por } x \cdot 2.$$

$$x + 1 = 2x + 4 \qquad \text{Distribuir.}$$

$$x = -3 \qquad \text{Solución para x.}$$

NOTA En el ejemplo 3, - 2 no está en el dominio de f, por lo que x + 2 no es cero y podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por x + 2. j

Si f1x2 = 2, entonces x = - 3. El punto 1 - 3, 22 está en la gráfica de f.

(e) Las intersecciones con el eje x de la gráfica de f son las soluciones reales de la ecuación f1x2 = 0 que están en el dominio de f.

$$\frac{x+1}{x+2} = 0$$

$$x + 1 = 0 \qquad \text{Multiplica ambos lados por } x \cdot 2.$$

$$x = -1 \qquad \text{Resta 1 de ambos lados.}$$

La única solución real de la ecuación f1x2 = = 0 es x = - 1, por lo que = 1 es x + 2 la única intersección con el eje x. Como f1 - 12 = 0, el punto 1 - 1, 02 está en la gráfica de f.

Ahora resuelve el problema 2 7

EJEMPLO 4 Energía gastada

Para un individuo que camina, la energía gastada E en términos de velocidad v puede aproximarse mediante

$$E1v2 = \frac{29}{v} + 0{,}0053v$$

donde E tiene unidades de cal/min/kg y v tiene unidades de m/min.

(a) Encuentre la energía gastada para una velocidad de v = 40 m/min.

(b) Encuentre la energía gastada para una velocidad de v = 70 m/min.

(c) Encuentre la energía gastada para una velocidad de v = 100 m/min.

(d) Grafique la función E = E1v2, 0 6 v … 200

(e) Cree una TABLA con TblStart = 1 y ΔTbl = 1. ¿Qué valor de v minimiza la energía gastada?

Fuente: Ralston, HJ Int. Z. Angew. Fisiol. Einschl. Arbeitsfisiol. (1958) 17: 277.

Solución

(a) La energía gastada para caminar a una velocidad de v = 40 metros por minuto es

$$E1402 = \frac{29}{40} + 0{,}0053 \# 40 \approx 0{,}94 \text{ cal/min/kg}$$

Machine Translated by Google

(b) La energía gastada para caminar a una velocidad de v = 70 metros por minuto es

$$E1702 = + \frac{29}{70} \# 70 \approx 0{,}79 \text{ cal/min/kg}$$

(c) La energía gastada para caminar a una velocidad de v = 100 metros por minuto es

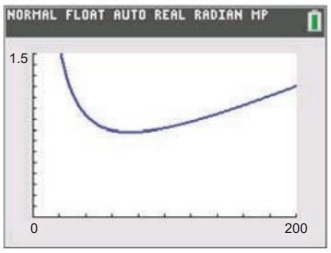
$$E11002 = + \frac{29}{100} \# 100 = 0{,}82 \text{ cal/min/kg}$$

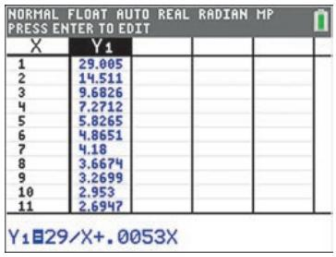
(d) Consulte la Figura 20 para ver el gráfico de E = E1v2 en una TI-84 Plus C.

(e) Con la función E = E1v2 en Y1, creamos la Tabla 3. Desplácese hacia abajo para encontrar un valor de v para el cual Y1 es el más pequeño. La Tabla 4 muestra que una velocidad de marcha de v = 74 metros por minuto minimiza la energía gastada en aproximadamente 0,784 cal/min/kg.

Tabla 3

Tabla 4





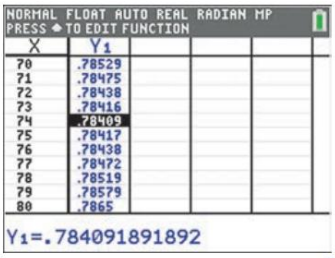


Figura 20 $E1v2 = \frac{29}{v} + 0{,}0053v$

Ahora resuelve el problema 3 5

RESUMEN

- Gráfica de una función El conjunto de puntos 1x, y2 en el plano xy que satisfacen la ecuación y = f1x2.
- Prueba de recta vertical Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si y sólo si cada recta vertical interseca la gráfica en como máximo un punto.

2.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Las intersecciones de la ecuación x2 + 4y2 = 16 son _____. (págs. 48 y 49)
2. Verdadero o Falso El punto 1 - 2, - 62 está en la gráfica de la ecuación x = 2y - 2. (págs. 46 y 47)

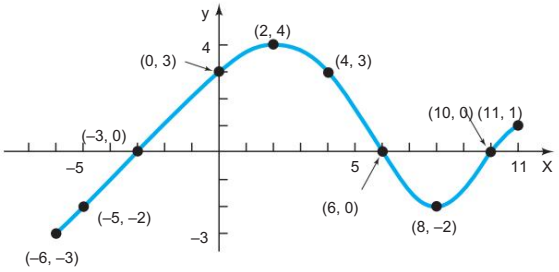
Conceptos y vocabulario

3. Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si y solo si cada línea _____interseca la gráfica en como máximo un punto.
4. Si el punto 15, - 32 es un punto en la gráfica de f, entonces f1____) = ____.
5. Encuentra a tal que el punto 1 - 1, 22 esté en la gráfica de f1x2 = ax2 + 4.
6. Verdadero o Falso Cada gráfica representa una función.
7. Verdadero o Falso La gráfica de una función y = f1x2 siempre cruza el eje y.
8. Verdadero o Falso La intersección y de la gráfica de la función y = f1x2, cuyo dominio son todos los números reales, es f102.
9. Opción múltiple Si una función está definida por una ecuación en x e y, entonces el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy que satisfacen la ecuación se _____.
   llama (a) dominio de la función (b) rango de la función
   (c) gráfica de la función (d) relación de la función
10. Opción múltiple ¿ La gráfica de una función y = f1x2 puede tener más de una de qué tipo de intersección?
    (a) intersección x (b) intersección y (c) ambos (d) ninguno

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

11. Usa la gráfica dada de la función f para responder los incisos (a)–(n).



(a) Encuentre f102 y f1 - 62.

(b) Encuentre f162 y f1112.

(c) ¿F132 es positivo o negativo? (d)

¿Es f1 - 42 positiva o negativa? (e)

¿Para qué valores de x es f1x2 = 0? (f)

¿Para qué valores de x es f1x2 7 0? (g)

¿Cuál es el dominio de f ? (h)

¿Cuál es el rango de f? (i)

¿ Cuáles son las intersecciones

con el eje x? (j) ¿ Cuál es la intersección con el eje y?

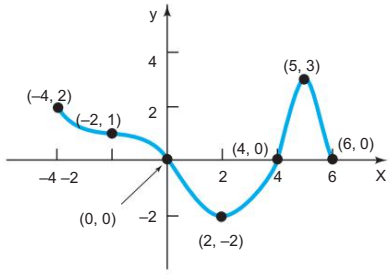
1 (k) ¿Con qué frecuencia la recta y = se cruza con la gráfica? 2

(l) ¿Con qué frecuencia la recta x = 5 intersecta la gráfica? (m)

¿Para qué valores de x f1x2 = 3? (n) ¿Para qué

valores de x f1x2 = - 2?

12. Usa la gráfica dada de la función f para responder los incisos (a)–(n).



(a) Encuentre f102 y f162.

(b) Encuentre f122 y f1 - 22.

(c) ¿Es f132positiva o negativa? (d)

¿Es f1 - 12 positiva o negativa? (e)

¿Para qué valores de x es f1x2 = 0? (f)

¿Para qué valores de x es f1x2 6 0? (g)

¿Cuál es el dominio de f ? (h)

¿Cuál es el rango de f ? (i)

¿ Cuáles son las intersecciones

con el eje x? (j) ¿ Cuál es la

intersección con el eje y? (k) ¿Con qué frecuencia la recta y = - 1

interseca la gráfica? (l) ¿Con qué frecuencia la recta x = 1

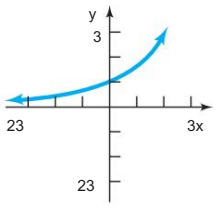
interseca la gráfica? (m) ¿Para qué valor de x

f1x2 = 3? (n) ¿Para qué valor de x f1x2 = - 2?

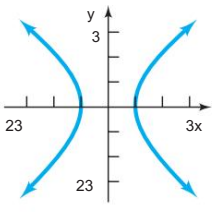
En los problemas 13 a 24, determine si la gráfica es o no la de una función mediante la prueba de la línea vertical. En cualquier caso, utilice la gráfica para

(a) El dominio y el rango (b) Las intersecciones, si las hubiere encontrar: (c) Cualquier simetría con respecto al eje x, el eje y o el origen.

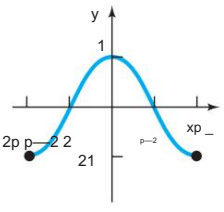
13.

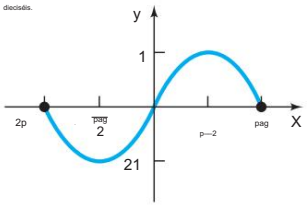


14.

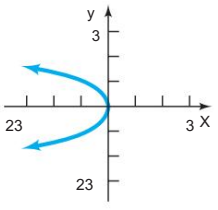


15.

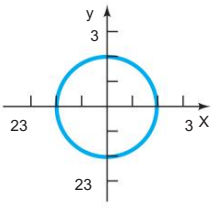




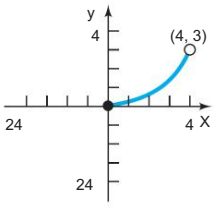
17.



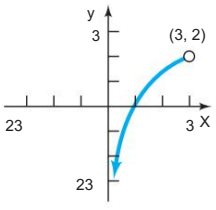
18.



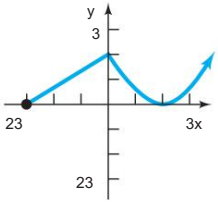
19.



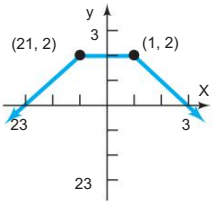
20.



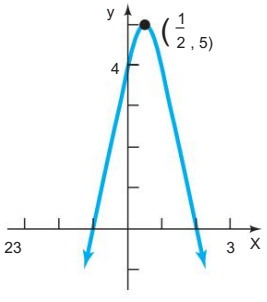
21.



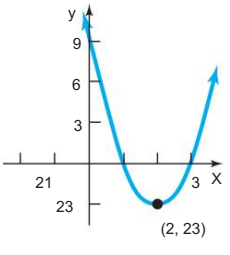
22.



23.



24.



Machine Translated by Google

En los problemas 25 a 30, responda las preguntas sobre cada función.

25. f1x2 = - 3x2 + 5x

(a) ¿Está el punto 1 - 1, 22 en la gráfica de f ?

(b) Si x = - 2, ¿cuál es f1x2? ¿Qué punto está en la gráfica?

apagado ? _

(c) Si f1x2 = - 2, ¿cuál es x? ¿Qué punto(s) están en la gráfica de f ?

(d) ¿Cuál es el dominio de f ?

(e) Enumere las intersecciones con el eje x, si las hay, de la gráfica de f.

(f) Enumere la intersección con el eje y, si la hay, de la gráfica de f.

26. f1x2 = 3x2 + x - 2

(a) ¿Está el punto (1, 2) en la gráfica de f?

(b) Si x = - 2, ¿cuál es f1x2? ¿Qué punto está en la gráfica de f?

(c) Si f1x2 = - 2, ¿cuál es x? ¿Qué puntos están en el gráfico?

¿ apagado ?

(d) ¿Cuál es el dominio de f ?

(e) Enumere las intersecciones con el eje x, si las hay, de la gráfica de f.

(f) Enumere la intersección con el eje y, si la hay, de la gráfica.

apagado .

27. f1x2 = $\dfrac{x + 2}{x - 6}$

(a) ¿Está el punto (3, 14) en la gráfica de f ?

(b) Si x = 4, ¿cuál es f1x2? ¿Qué punto está en la gráfica de f?

(c) Si f1x2 = 2, ¿cuál es x? ¿Qué puntos están en el gráfico?

¿ apagado ?

(d) ¿Cuál es el dominio de f ?

(e) Enumere las intersecciones con el eje x, si las hay, de la gráfica de f.

(f) Enumere la intersección con el eje y, si la hay, de la gráfica de f.

28. f1x2 = $\dfrac{x2 + 2}{x + 4}$

(a) ¿Es el punto a1, 3 $\frac{}{}$ 5 b en la gráfica de f?

(b) Si x = 0, ¿cuál es f1x2? ¿Qué punto está en la gráfica de f?

(c) Si f1x2 = 2 $\frac{1}{}$, ¿Qué es x? ¿Qué puntos están en el gráfico?

apagado ? _

(d) ¿Cuál es el dominio de f ?

(e) Enumere las intersecciones con el eje x, si las hay, de la gráfica de f.

(f) Enumere la intersección con el eje y, si la hay, de la gráfica de f.

29. f1x2 = $\dfrac{2x}{x - 2}$

(a) ¿Es el punto un 1? $\frac{}{2}$, - $\frac{2}{}$ 3 b en la gráfica de f ?

(b) Si x = 4, ¿cuál es f1x2? ¿Qué punto está en la gráfica de f?

(c) Si f1x2 = 1, ¿cuál es x? ¿Qué puntos están en el gráfico?

¿ apagado ?

(d) ¿Cuál es el dominio de f ?

(e) Enumere las intersecciones con el eje x, si las hay, de la gráfica de f.

(f) Enumere la intersección con el eje y, si la hay, de la gráfica de f.

30. f1x2 = x2 $\dfrac{12x4}{+ 1}$

(a) ¿Está el punto 1 - 1, 62 en la gráfica de f?

(b) Si x = 3, ¿cuál es f1x2? ¿Qué punto está en la gráfica de f?

(c) Si f1x2 = 1, ¿cuál es x? ¿Qué puntos están en el gráfico?

¿ apagado ?

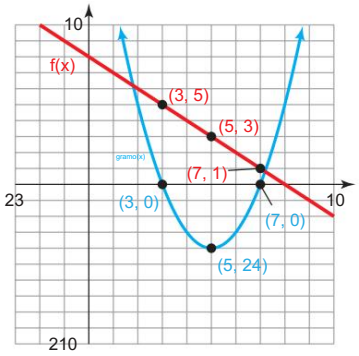
(d) ¿Cuál es el dominio de f ?

(e) Enumere las intersecciones con el eje x, si las hay, de la gráfica de f.

(f) Enumere la intersección con el eje y, si la hay, de la gráfica de f.

Aplicaciones y extensiones

31. A continuación se ilustran las gráficas de dos funciones, f y g. Utilice la gráfica para responder los incisos (a) a (f).



(a) 1f + g2 132 = ? (b) 1f + g2 152 = ?

(c) 1f - g2 172 = ?

(d) 1g - f2 172 = ?

(e) 1f # g2 132 = ?

(f) una $\frac{f}{}$ b 152 = ?

32. Si un jugador lanzó un tiro en un ángulo de 30 grados desde un punto a 5,5 pies sobre el suelo, entonces la función - 21x2

h1x2 = + 0,6x + 5,5 se aproxima a su altura. En v2 la función, h es la altura inicial del punto de tiro.

lanzamiento, x es la distancia horizontal recorrida por el disparo y v es la magnitud de la velocidad inicial del disparo en pies por segundo.

(a) Suponiendo que la altura del disparo es de aproximadamente 9,9 pies cuando la distancia horizontal recorrida por el disparo es de 15 pies, determine la magnitud de la velocidad inicial del disparo. (b) Escriba una función para la trayectoria del disparo usando la velocidad encontrada en el inciso (a).

(c) Determine la altura del disparo después de haber recorrido una distancia distancia horizontal de 20 pies.

(d) Encuentre algunos puntos adicionales y represente gráficamente la trayectoria del disparo.

33. Si un jugador de fútbol patea una pelota en un ángulo de 60 grados con respecto al suelo desde una posición a 1 pie por encima del - 64x2

suelo, entonces la función h1x2 = + 1.7x + 1 $\dfrac{}{v2}$

modela la trayectoria de la pelota. En esta ecuación, h es la altura de la pelota sobre el suelo, x es la distancia hacia adelante recorrida por la pelota y v es la magnitud de la velocidad inicial con la que se pateó la pelota medida en pies por segundo. Supongamos que un jugador patea una pelota con una velocidad inicial de 28 pies por segundo.

(continuado)

Machine Translated by Google

(a) Encuentre la altura de la pelota después de haber recorrido 5 pies frente al poste de la portería.

(b) Encuentre la altura de la pelota después de haber recorrido 10 pies por delante del poste.

(c) Encuentre algunos puntos adicionales y represente gráficamente la trayectoria del pelota.

(d) El travesaño del poste tiene 8 pies de alto y la portería está a 20 pies del punto de contacto inicial. ¿El balón golpeará el travesaño del poste? ¿Por qué o por qué no?

Si no es así, ¿qué velocidad inicial debe tener la pelota para golpear el travesaño del poste, suponiendo el mismo punto de contacto, magnitud y dirección de la velocidad inicial?

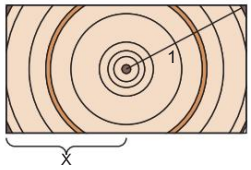
34. Área de la sección transversal El área de la sección transversal de una viga cortada de un tronco con un radio de 1 pie está dada por la función A1x2 = 4x21 - x2 , donde x representa la longitud, en pies, de la mitad de la base de la viga. Ver la figura.

(a) Encuentre el dominio de A.

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la función A = A1x2.

(c) Cree una TABLA con TblStart = 0 y ΔTbl = 0,1 para 0… x … 1. ¿Qué valor de x maximiza el área de la sección transversal? ¿Cuál debe ser la longitud de la base de la viga para maximizar el área de la sección transversal?

A(x) 5 4x 1\2x 2



35. Movimiento de una pelota de golf Se golpea una pelota de golf con una velocidad inicial de 130 pies por segundo con una inclinación de 45° con respecto a la horizontal. En física se establece que la altura h de la pelota de golf viene dada por la función

$$h1x2 = + x \frac{- 32x2}{1302}$$

donde x es la distancia horizontal que ha recorrido la pelota de golf.

(a) Determine la altura de la pelota de golf después de haberla viajó 100 pies.

(b) ¿Cuál es la altura después de haber recorrido 300 pies?

(c) ¿Cuál es h(500)? Interprete este valor.

(d) ¿A qué distancia fue golpeada la pelota de golf?

(e) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la función h = h1x2.

(f) Utilice una herramienta gráfica para determinar la distancia que ha recorrido la pelota cuando su altura es de 90 pies.

(g) Cree una TABLA con TblStart = 0 y ΔTbl = 25. Redondeado a los 25 pies más cercanos, ¿qué distancia recorre la pelota antes de alcanzar una altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

(h) Ajuste el valor de ΔTbl hasta que determine la distancia, con una precisión de 1 pie, que recorre la pelota antes de alcanzar su altura máxima.

36. Efecto de la elevación sobre el peso Si un objeto pesa m libras al nivel del mar, entonces su peso W (en libras) a una altura de h millas sobre el nivel del mar viene dado aproximadamente por

$$W1h2 = ma\ 4000 \frac{2}{4000 + h}\ b$$

(a) Si Amy pesa 120 libras al nivel del mar, ¿cuánto pesará en Pikes Peak, que está a 14,110 pies sobre el nivel del mar?

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la función W = W1h2. Utilice m = 120 libras.

(c) Cree una TABLA con TblStart = 0 y ΔTbl = 0,5 para ver cómo varía el peso W cuando h cambia de 0 a 5 millas.

(d) ¿A qué altura Amy pesará 119,95 libras?

(e) ¿Su respuesta al inciso (d) le parece razonable? Explicar.

37. Costo del viaje transatlántico Un Boeing 747 cruza el Océano Atlántico (3000 millas) con una velocidad aérea de 500 millas por hora. El costo C (en dólares) por pasajero está dado por

$$C1x2 = 100 + \frac{x}{10} + \frac{36.000}{x}$$

donde x es la velocidad terrestre 1velocidad aérea {viento2.

(a) ¿Cuál es el costo cuando la velocidad sobre el terreno es de 480 millas por hora? ¿600 millas por hora?

(b) Encuentre el dominio de C.

(c) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la función C = C1x2.

(d) Cree una TABLA con TblStart = 0 y ΔTbl = 50.

(e) Redondeado a las 50 millas por hora más cercanas, ¿qué velocidad respecto al suelo minimiza el costo por pasajero?

38. Lectura e interpretación de gráficas Sea C la función cuya gráfica se muestra a continuación. Esta gráfica representa el costo C de fabricar q computadoras en un día.

(a) Encuentre C(0). Interprete este valor.

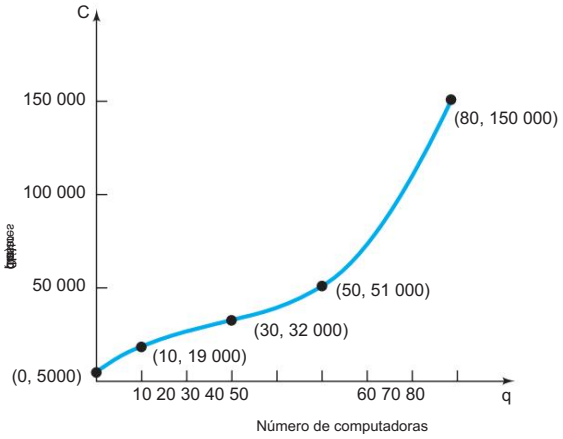
(b) Encuentre C(10). Interprete este valor.

(c) Encuentre C(50). Interprete este valor.

(d) ¿ Cuál es el dominio de C? ¿Qué implica este dominio? ¿En términos de producción diaria?

(e) Describe la forma de la gráfica.

(f) El punto (30, 32 000) se llama punto de inflexión. Describe el comportamiento de la gráfica alrededor del punto de inflexión.



Machine Translated by Google

39. Lectura e interpretación de gráficas Sea C la función cuya gráfica se muestra a continuación. Esta gráfica representa el costo C de usar g gigabytes de datos en un mes para un plan de solo datos.

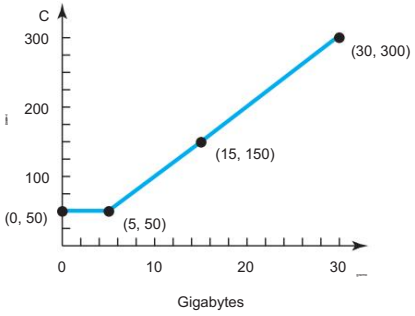
(a) Encuentre C (0). Interprete este valor.

(b) Encuentre C (5). Interprete este valor.

(c) Encuentre C (15). Interprete este valor.

(d) ¿ Cuál es el dominio de C? ¿Qué implica este dominio en términos de número de gigabytes?

(e) Describe la forma de la gráfica.



40. Problema de desafío Supongamos que f1x2 = x2 - 4x + c y g1x2 = - 4. Encuentre f132 si g1 - 22 = 5.

41. Problema de desafío Supongamos que f1x2 = 2x + 2 y g1x2 = x2 + n. Si f1g1522 = 4, ¿cuál es el valor de g1n2?

Explicar conceptos: discusión y escritura

42. Describe cómo encontrarías el dominio y el rango de una función si te dieran su gráfica. ¿Cómo cambiaría su estrategia si ¿Te dieron la ecuación que define la función en lugar de su gráfica?

43. ¿ Cuántas intersecciones con el eje x puede tener la gráfica de una función? ¿Cuántas intersecciones en el eje y puede tener la gráfica de una función? Explicar por qué.

44. ¿Una gráfica que consta de un solo punto es la gráfica de una función? ¿Puedes escribir la ecuación de tal función?

45. Relaciona cada una de las siguientes funciones con la gráfica que mejor describe la situación.

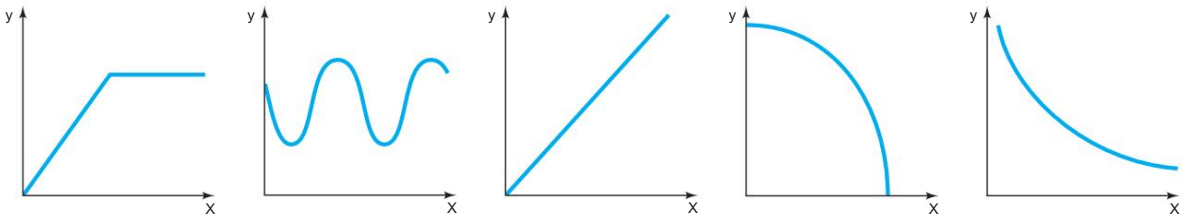
(a) El costo de construir una casa en función de sus metros cuadrados.

(b) La altura de un huevo que se deja caer desde un edificio de 300 pies en función del tiempo

(c) La altura de un ser humano en función del tiempo

(d) La demanda de Big Macs en función del precio

(e) La altura de un niño en un columpio en función del tiempo



46. Relaciona cada una de las siguientes funciones con la gráfica que mejor describe la situación.

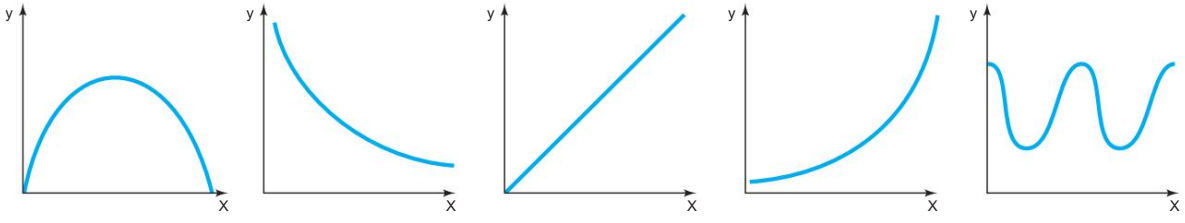
(a) La temperatura de un plato de sopa en función del tiempo.

(b) El número de horas de luz al día durante un período de dos años.

(c) La población de Florida en función del tiempo

(d) La distancia recorrida por un automóvil que va a velocidad constante en función del tiempo.

(e) La altura de una pelota de golf golpeada con un hierro 7 en función del tiempo

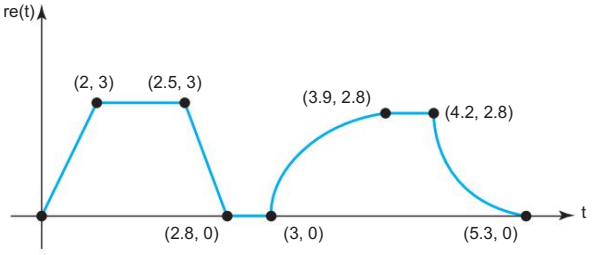


Machine Translated by Google

47. Considere el siguiente escenario: Bárbara decide salir a caminar. Sale de casa, camina 2 cuadras en 5 minutos a velocidad constante y se da cuenta de que olvidó cerrar la puerta.
Entonces Bárbara corre a casa en 1 minuto. Mientras está en la puerta de su casa, le toma 1 minuto encontrar sus llaves y cerrar la puerta.
Bárbara camina 5 cuadras en 15 minutos y luego decide correr hasta casa.
Le toma 7 minutos llegar a casa. Dibuja una gráfica de la distancia de Bárbara desde su casa (en bloques) en función del tiempo.

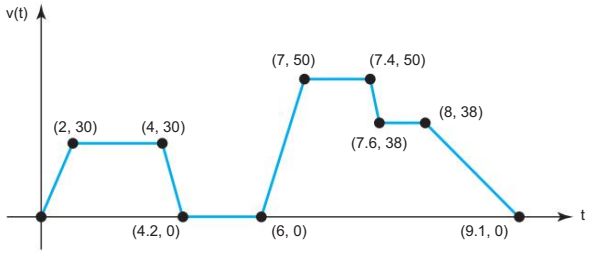
48. Considere el siguiente escenario: a Jayne le gusta andar en bicicleta por el bosque. En la reserva forestal, se sube a su bicicleta y sube una pendiente de 2000 pies en 10 minutos.
Luego baja la pendiente en 3 minutos. Los siguientes 5000 pies son terreno nivelado y cubre la distancia en 20 minutos. Descansa 15 minutos.
Luego, Jayne viaja 10,000 pies en 30 minutos. Dibuja una gráfica de la distancia recorrida por Jayne (en pies) en función del tiempo.

49. El siguiente gráfico representa la distancia d (en millas) que Kevin estaba desde su casa en función del tiempo t (en horas). Responde las preguntas consultando el gráfico.
En los incisos (a) a (g), ¿cuántas horas transcurrieron y a qué distancia estuvo Kevin de su casa durante los horarios indicados?



(a) De t = 0 a t = 2 (b) De t = 2 a t = 2,5
(c) De t = 2,5 a t = 2,8 (d) De t = 2,8 a t = 3
(e) De t = 3 a t = 3,9 (f) De t = 3,9 a t = 4,2
(g) De t = 4,2 a t = 5,3
(h) ¿Cuál es la distancia más alejada a la que estaba Kevin de su casa?
(i) ¿Cuántas veces regresó Kevin a casa?

50. El siguiente gráfico representa la velocidad v (en millas por hora) del automóvil de Michael en función del tiempo t (en minutos).



(a) ¿ Durante qué intervalo de tiempo viajó Michael?
¿lo más rápido?
(b) ¿ Durante qué intervalo(s) de tiempo la velocidad de Michael fue cero?
(c) ¿Cuál fue la velocidad de Michael entre 0 y 2 minutos?
(d) ¿Cuál fue la velocidad de Michael entre 4,2 y 6 minutos?
(e) ¿Cuál fue la velocidad de Michael entre 7 y 7,4 minutos?
(f) ¿Cuándo fue constante la velocidad de Michael?

51. Grafica una función cuyo dominio es

$$5x\cdot - 3 \ldots x \ldots 8, x \cdot 56$$

y cuyo rango es

$$5y\cdot - 1 \ldots y \ldots 2, y \cdot 06$$

¿Qué punto(s) en el rectángulo - 3 … x … 8, - 1 … y … 2
¿No puede estar en el gráfico? Compara tu gráfico con el de otros estudiantes. ¿Qué diferencias ves?

52. ¿Existe una función cuya gráfica sea simétrica con respecto a el eje x? Explicar.

53. Explique por qué funciona la prueba de la línea vertical.

Conserve su conocimiento

Los problemas 54 a 63 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

54. Si f1x2 = - x2 + x - 3, encuentre f1x - 22.

55. Encuentra la distancia entre los puntos 13, - 62 y (1, 0).

56. Escribe una ecuación de la recta con pendiente que $\frac{2}{3}$ contiene el punto 1 - 6, 42.

57. Encuentra el dominio de $g1x2 = 23\ x + 4 - 5.$

58. Encuentra el número que se debe sumar a m2 - 12m para completar el cuadrado.

59. Racionaliza el numerador: $\frac{\sqrt{2x - 26}}{x - 6}$

60. Dos automóviles salen de una intersección al mismo tiempo, uno viaja hacia el norte a 25 mph y el otro hacia el oeste a 35 mph. ¿Cuánto tiempo tardarán los autos en estar a 40 millas de distancia?

61. Encuentra los números x que satisfacen ambas desigualdades.

$$3x + 4 \ldots 7 \text{ y } 5 - 2x\ 6\ 13$$

62. Simplifica 15x2 - 7x + 22 - 18x - 102.

63. Escribe la desigualdad - 3 … x … 10 en notación de intervalo.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 1 - 4, 02, (4, 0), 10, - 22, (0, 2)

2. Falso

Machine Translated by Google

2.3 Propiedades de las funciones

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Intervalos (Sección A.9, págs. A72–A74)
- Intercepciones (Sección 1.2, págs. 48–49)
- Pendiente de una línea (Sección 1.3, págs. 56–59)
- Forma punto-pendiente de una línea (Sección 1.3, págs. 60 y 61)
- Simetría (Sección 1.2, págs. 49–51)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 117.

OBJETIVOS 1 Identificar funciones pares e impares a partir de una gráfica (p. 109)
2 Identificar funciones pares e impares a partir de una ecuación (p. 110)
3 Utilice una gráfica para determinar dónde una función es creciente, decreciente o Constante (pág. 111)
4 Utilice una gráfica para localizar máximos y mínimos locales (p. 112)
5 Utilice una gráfica para localizar el máximo absoluto y el mínimo absoluto (p. 113)
6 Utilice una utilidad gráfica para aproximar máximos y mínimos locales y determinar dónde una función aumenta o disminuye (p. 115)
7 Encuentre la tasa de cambio promedio de una función (p. 115)

Para obtener la gráfica de una función y = f1x2, suele ser útil conocer las propiedades de la función y el impacto de estas propiedades en la gráfica de la función.

1 Identificar funciones pares e impares a partir de una gráfica

Las palabras par e impar, cuando se habla de una función f, describen la simetría de la gráfica de la función.

Una función f es par si y sólo si, siempre que el punto 1x, y2 esté en la gráfica de f, el punto 1 - x, y2 también esté en la gráfica. Usando notación de funciones, definimos una función par de la siguiente manera:

DEFINICIÓN Función par

Una función f es par si, para cada número x en su dominio, el número - x también está en el dominio y

$$f(-x) = f(x)$$

Una función f es impar si y sólo si, siempre que el punto (x, y) esté en la gráfica de f, el punto 1 - x, - y2 también esté en la gráfica. Usando notación de funciones, definimos una función impar de la siguiente manera:

DEFINICIÓN Función impar

Una función f es impar si, para cada número x en su dominio, el número - x también está en el dominio y

$$f(-x) = -f(x)$$

Machine Translated by Google

Consulte la página 50, donde se enumeran las pruebas de simetría. A continuación se muestran los resultados.

TEOREMA Gráficas de funciones pares e impares

- Una función es par si y sólo si su gráfica es simétrica con respecto a el eje y.
- Una función es impar si y sólo si su gráfica es simétrica con respecto a el origen.

EJEMPLO 1 Identificar funciones pares e impares a partir de una gráfica

Determina si cada gráfica dada en la Figura 21 es la gráfica de una función par, una función impar o una función que no es ni par ni impar.

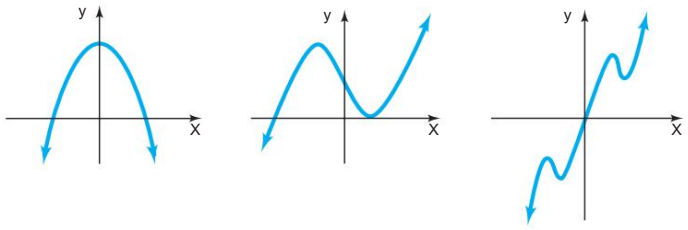


Figura 21 (a) (b) (C)

Solución

(a) La gráfica de la Figura 21(a) es la de una función par, porque la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

(b) La función cuya gráfica se da en la Figura 21(b) no es par ni impar, porque la gráfica no es simétrica con respecto al eje y ni simétrica con respecto al origen.

(c) La función cuya gráfica se da en la Figura 21(c) es impar, porque su gráfica es simétrica con respecto al origen.

Ahora resuelva los problemas 2 5 (a), (b) y (d)

2 Identificar funciones pares e impares a partir de una ecuación

EJEMPLO 2 Identificar funciones pares e impares algebraicamente

Determina si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de las dos. Luego determina si la gráfica es simétrica con respecto al eje y, con respecto al origen o ninguna de las dos.

(a) f1x2 = x2 - 5 (c)

(b) g1x2 = x3 - 1

h1x2 = 5x3 - x

(d) F1x2 = 0 x 0

Solución

(a) Para determinar si f es par, impar o ninguna de las dos cosas, reemplace x por - x en f1x2 = x2 - 5.

$$f1 - x2 = 1 - x2^{2} - 5 = x2 - 5 = f1x2$$

Como f1 - x2 = f1x2, la función es par y la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y.

(b) Reemplace x por - x en g1x2 = x3 - 1.

$$g1 - x2 = 1 - x2^{3} - 1 = - x3 - 1$$

Dado que g1 - x2 · g1x2 y g1- x2 · - g1x2 = - 1x3 - 12 = - x3 + 1, la función no es par ni impar. La gráfica de g no es simétrica con respecto al eje y, ni tampoco lo es con respecto al origen.

Machine Translated by Google

(c) Reemplace x por - x en h1x2 = 5x3 - x.

$$h1 - x2 = 51 - x2 \quad {}^{3} - 1 - x2 = - 5x3 + x = - 15x3 - x2 = - h1x2$$

Como h1 - x2 = - h1x2, h es una función impar y la gráfica de h es simétrica con respecto al origen.

(d) Reemplace x por -x en F1x2 = 0 x 0 .

$$F1 - x2 = 0 - x\,0 = 0 - 1\,0 \# 0 \times 0 = 0 \times 0 = F1x2$$

Dado que F1 - x2 = F1x2, F es una función par y la gráfica de F es simétrica con respecto al eje y.

Ahora resuelve el problema 3 7

3 Utilice una gráfica para determinar dónde una función es creciente, decreciente o constante

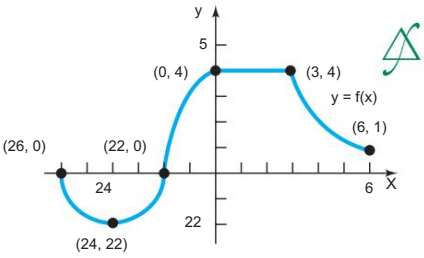


Figura 22

Considere la gráfica que se muestra en la Figura 22. Si mira de izquierda a derecha a lo largo de la gráfica de la función, notará que partes de la gráfica suben, partes bajan y partes son horizontales. En tales casos, la función se describe como creciente, decreciente o constante, respectivamente.

En palabras

- Si una función es creciente, entonces como los valores de x aumentan, los valores de la función también aumentan.
- Si una función es decreciente, entonces a medida que los valores de x aumentan, los valores de la función se reducen.
- Si una función es constante, entonces a medida que los valores de x aumentan, los valores de la función permanecen sin cambios.

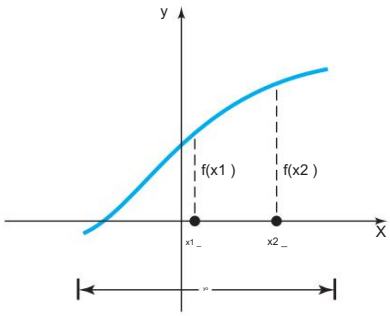
¿Necesita revisar?

La notación de intervalos se analiza en la Sección A.9, págs. A72–A74.

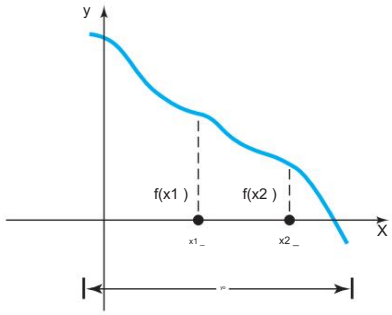
DEFINICIONES Función creciente, función decreciente, Función constante

- Una función f es creciente en un intervalo I si, para cualquier elección de x1 y x2 en I, con x1 6 x2, entonces f1x12 6 f1x22.
- Una función f es decreciente en un intervalo I si, para cualquier elección de x1 y x2 en I, con x1 6 x2, entonces f1x12 7 f1x22.
- Una función f es constante en un intervalo I si, para todas las elecciones de x en I, los valores f1x2 son iguales.

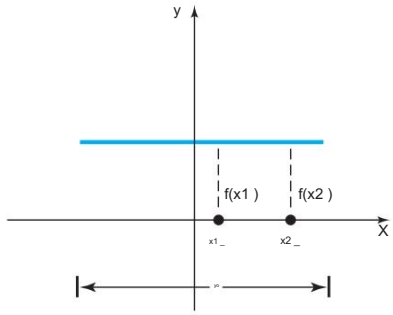
La Figura 23 ilustra las definiciones. La gráfica de una función creciente sube de izquierda a derecha, la gráfica de una función decreciente desciende de izquierda a derecha y la gráfica de una función constante permanece a una altura fija. El intervalo I en el que una función es creciente, decreciente o constante puede ser abierto, cerrado o medio abierto/medio cerrado dependiendo de si los puntos finales del intervalo satisfacen la desigualdad requerida o no.



(a) Para x 1 en I, x1 2 f(x 1) , f(x 2); f aumenta en I.



(b) Para x 1 en I, x1 2 f(x 1) . f(x 2); f es decreciente en I.



(c) Para todo x en I, los valores de f son iguales; f es constante en I.

Figura 23

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3

Determinar dónde una función es creciente, decreciente o constante a partir de su gráfica

Determine los valores de x para los cuales la función de la Figura 24 es creciente. ¿Dónde está disminuyendo? ¿Dónde es constante?

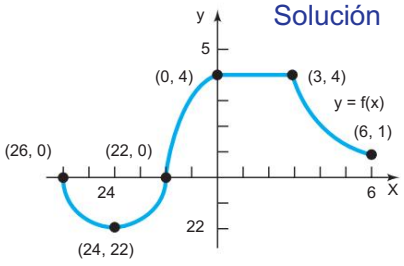


Figura 24

Solución

Al determinar dónde una función es creciente, dónde es decreciente y dónde es constante, utilizamos intervalos que involucran a la variable independiente x.

La función cuya gráfica se muestra en la Figura 24 es decreciente en el intervalo 3 - 6, - 44 porque para cualquier elección de x1 y x2 en el intervalo para el cual x1 6 x2, tenemos f1x12 7 f1x22. Por ejemplo, - 6 se incluye en el intervalo donde f es decreciente porque si x es cualquier número para el cual - 6 6 x ... - 4, entonces f1 - 62 7 f1x2.

De manera similar, f aumenta en el intervalo 3 - 4, 04 porque para cualquier elección de x1 y x2 en el intervalo para el cual x1 6 x2, tenemos f1x12 6 f1x22.

Finalmente, la función f es constante en el intervalo [0, 3] y decreciente en el intervalo [3, 6].

Ahora problemas de trabajo 1 3 , 15 , 1 7 y 2 5 (c)

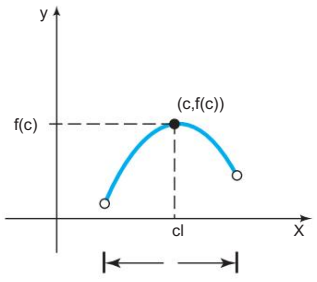
4 Utilice una gráfica para localizar máximos y mínimos locales

Supongamos que f es una función definida en un intervalo abierto I que contiene c. Si el valor de f en c es mayor o igual que los otros valores de f en I, entonces f tiene un máximo local en c.† Consulte la Figura 25(a).

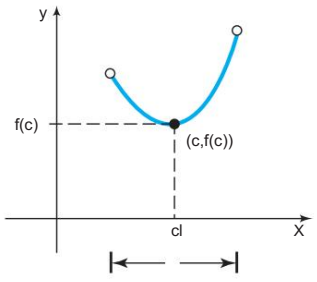
NOTA "Maxima" es el plural de "máximo"; "mínimos" es el plural de "mínimo".

Si el valor de f en c es menor o igual que los otros valores de f en I, entonces f tiene un mínimo local en c. Véase la Figura 25(b).

f tiene un máximo local en c.



(a)



(b)

f tiene un mínimo local en c.

Figura 25 Máximo local y mínimo local

DEFINICIONES Máximo/Mínimo local

Sea f una función definida en algún intervalo I y sea c un número en I.

- Una función f tiene un máximo local en c si hay un intervalo abierto en I que contiene c de manera que f1c2 Ú f1x2 para todo x en este intervalo abierto.
  El número f1c2 se denomina valor máximo local de f.
- Una función f tiene un mínimo local en c si hay un intervalo abierto en I que contiene c de modo que f1c2 … f1x2 para todo x en este intervalo abierto.
  El número f1c2 se denomina valor mínimo local de f.

Si f tiene un máximo local en c, entonces el valor de f en c es mayor o igual a los valores de f cerca de c. Si f tiene un mínimo local en c, entonces el valor de f en c es menor o igual a los valores de f cerca de c. La palabra local se utiliza para sugerir que sólo cerca de c, no necesariamente en todo el dominio, el valor f1c2 tiene estas propiedades.

† Algunos textos utilizan el término relativo en lugar de local.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 4 Encontrar máximos y mínimos locales a partir de la gráfica de una función y determinar dónde la función es creciente, decreciente o constante

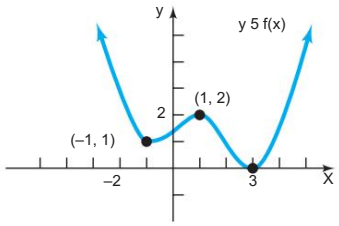


Figura 26

La Figura 26 muestra la gráfica de una función f.

(a) ¿En qué números x, si los hay, tiene f un máximo local? Enumere el máximo local valores).

(b) ¿En qué números x, si los hay, tiene f un mínimo local? Enumere el mínimo local valores).

(c) Encuentre los intervalos en los que f aumenta. Encuentre los intervalos en los que f es decreciente.

Solución

El dominio de f es el conjunto de los números reales.

(a) f tiene un máximo local en 1, ya que para todo x cercano a 1, tenemos f1x2 … f112. El valor máximo local es f112 = 2.

(b) f tiene mínimos locales en - 1 y en 3. Los valores mínimos locales son f1 - 12 = 1 y f132 = 0.

(c) La función cuya gráfica se muestra en la Figura 26 es creciente en los intervalos 3 - 1, 14 y 33, q 2, o para - 1 … x … 1 y x Ú 3. La función es decreciente en los intervalos 1 - q, - 14 y [1, 3], o para x … - 1 y 1… x … 3.

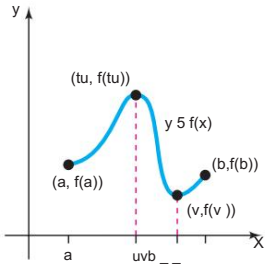
ADVERTENCIA El valor de y es el valor máximo local o el valor mínimo local y ocurre en algún número x.

Por ejemplo, en la Figura 26, decimos que f tiene un máximo local en 1 y el valor máximo local es 2.

Ahora resuelve los problemas 1 9 y 2 1

5 Utilice una gráfica para localizar el máximo absoluto y el mínimo absoluto

Mire la gráfica de la función f dada en la Figura 27. El dominio de f es el intervalo cerrado [a, b]. Además, el valor más grande de f es f1u2 y el valor más pequeño de f es f1v2. Estos se denominan, respectivamente, máximo absoluto y mínimo absoluto. de f en [a, b].



dominio: [a, b]
para todo x en [a, b], f (x) # f (u)
para todo x en [a, b], f (x) $ f (v)
máximo absoluto: f (u)
mínimo absoluto: f (v)

Figura 27

DEFINICIONES Máximo absoluto y mínimo absoluto

Sea f una función definida en algún intervalo I.

- Si hay un número u en I para el cual f1u2 Ú f1x2 para todo x en I, entonces f tiene un máximo absoluto en u, y el número f1u2 es el máximo absoluto de f en I.

- Si hay un número v en I para el cual f1v2 … f1x2 para todo x en I, entonces f tiene un mínimo absoluto en v, y el número f1v2 es el mínimo absoluto de f en I.

El máximo absoluto y el mínimo absoluto de una función f a veces se denominan extremos absolutos o valores extremos de f en I.

El máximo absoluto o el mínimo absoluto de una función f pueden no existir. Veamos algunos ejemplos.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Encontrar el máximo absoluto y el mínimo absoluto a partir de la gráfica de una función

Para la gráfica de cada función y = f1x2 en la Figura 28, encuentre el máximo absoluto y el mínimo absoluto, si existen. Además, encuentre cualquier máximo o mínimo local.

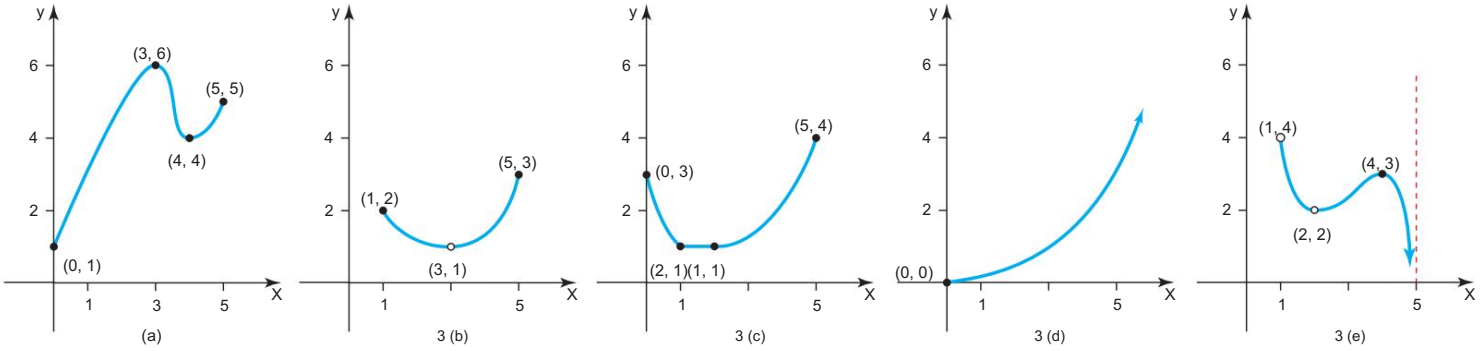


Figura 28

Solución (a) La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 28(a) tiene el intervalo cerrado [0, 5] como dominio. El valor más grande de f es f132 = 6, el máximo absoluto. El valor más pequeño de f es f102 = 1, el mínimo absoluto. La función tiene un valor máximo local de 6 en x = 3 y un valor mínimo local de 4 en x = 4.

(b) La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 28(b) tiene dominio 5x|1 … x … 5, x · 36. Tenga en cuenta que excluimos 3 del dominio debido al "agujero" en (3, 1) . El valor más grande de f en su dominio es f152 = 3, el máximo absoluto. No existe un mínimo absoluto. ¿Ves por qué? A medida que trazas la gráfica, acercándote al punto (3, 1), no existe un valor único más pequeño. [¡Tan pronto como reclames un valor más pequeño, podemos acercarnos a (3, 1) y obtener un valor más pequeño!]

La función no tiene máximos ni mínimos locales.

(c) La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 28(c) tiene el intervalo [0, 5] como dominio. El máximo absoluto de f es f152 = 4. El mínimo absoluto es 1.
Observe que el mínimo absoluto ocurre en cualquier número en el intervalo [1, 2].
La función tiene un valor mínimo local de 1 en cada x en el intervalo [1, 2], pero no tiene un máximo local.

(d) La función f dada en la Figura 28(d) tiene el intervalo 30, q 2 como dominio. La función no tiene máximo absoluto; el mínimo absoluto es f102 = 0. La función no tiene máximos ni mínimos locales.

(e) La función f en la Figura 28(e) tiene dominio 5x· 1 6 x 6 5, x · 26. La función no tiene máximo ni mínimo absolutos. ¿Ves por qué? La función tiene un valor máximo local de 3 en x = 4, pero ningún valor mínimo local.

En cálculo, existe un teorema con condiciones que garantizan que una función tendrá un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

TEOREMA Teorema del valor extremo

Si una función f es continua* en un intervalo cerrado [a, b], entonces f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en [a, b].

El máximo (mínimo) absoluto se puede encontrar seleccionando el valor más grande (más pequeño) de f de la siguiente lista:

- Los valores de f en cualquier máximo local o mínimo local de f en [a, b].
- El valor de f en cada punto final de [a, b], es decir, f1a2 y f1b2.

*Aunque una definición precisa requiere cálculo, estaremos de acuerdo por ahora en que una función es continua si su gráfica no tiene huecos ni agujeros y se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

Machine Translated by Google

Por ejemplo, la gráfica de la función f dada en la Figura 28(a) es continua en el intervalo cerrado [0, 5]. El teorema del valor extremo garantiza que f tiene valores extremos en [0, 5]. Para encontrarlos, enumeramos

- El valor de f en los extremos locales: f132 = 6, f142 = 4
- El valor de f en los puntos finales: f102 = 1, f152 = 5

El mayor de ellos, 6, es el máximo absoluto; el más pequeño de ellos, 1, es el mínimo absoluto.

Ahora problema de trabajo 4 9

6 Utilice una utilidad gráfica para aproximar máximos y mínimos locales y determinar dónde aumenta o disminuye una función

Para localizar el valor exacto en el que una función f tiene un máximo o un mínimo local generalmente se requiere cálculo. Sin embargo, se puede utilizar una utilidad gráfica para aproximar estos valores utilizando las características MÁXIMO y MÍNIMO.

EJEMPLO 6 Uso de una utilidad gráfica para aproximar máximos y mínimos locales y determinar dónde aumenta o disminuye una función

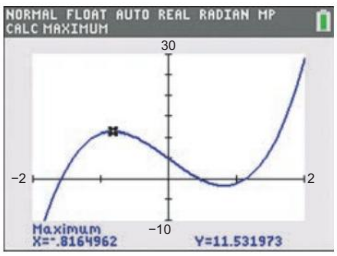
(a) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente f1x2 = 6x3 - 12x + 5 para - 2 … x … 2. Aproximar donde f tiene un máximo local y donde f tiene un mínimo local.

(b) Determine dónde f aumenta y dónde disminuye.

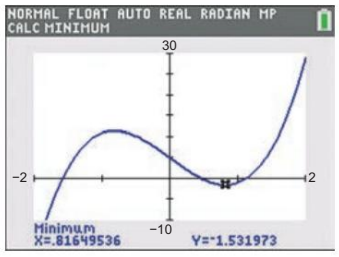
Solución

(a) Las utilidades gráficas tienen una característica que encuentra el punto máximo o mínimo de una gráfica dentro de un intervalo determinado. Grafique la función f para - 2 … x … 2. Usando MAXIMUM en una TI-84 Plus C, encontramos que el valor máximo local es 11,53 y que ocurre en x = - 0,82, redondeado a dos decimales. Ver Figura 29(a).

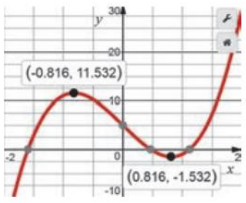
Usando MÍNIMO, encontramos que el valor mínimo local es - 1,53 y que ocurre en x = 0,82, redondeado a dos decimales. Véase la Figura 29(b). La Figura 29(c) muestra los dos extremos en Desmos.



(a) Máximo local



(b) Mínimo local



(c) Extremos locales

Figura 29

(b) Si observamos la Figura 29, vemos que f aumenta en los intervalos 3 - 2, - 0,824 y [0,82, 2], o para - 2... x ... - 0,82 y 0,82... x ... 2. Y f es decreciente en el intervalo 3 - 0,82, 0,824, o para - 0,82... x ... 0,82.

Ahora problema de trabajo 5 7

7 Encuentre la tasa de cambio promedio de una función

En la sección 1.3 dijimos que la pendiente de una recta se puede interpretar como la tasa de cambio promedio. Para encontrar la tasa de cambio promedio de una función entre dos puntos cualesquiera en su gráfica, calcule la pendiente de la línea que contiene los dos puntos.

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Tasa de cambio promedio

Si a y b, a · b, están en el dominio de una función y = f1x2, la tasa de cambio promedio de f de a a b se define como

$$\text{Tasa de cambio promedio} = \Delta x \quad \frac{\Delta y}{\text{segundo - un}} = \frac{f1b2 - f1a2}{a \cdot b} \qquad (1)$$

El símbolo ∆y en la ecuación (1) es el "cambio en y" y ∆x es el "cambio en x". La tasa de cambio promedio de f es el cambio en y dividido por el cambio en x.

EJEMPLO 7 Encontrar la tasa de cambio promedio

Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = 3x2 :

(a) De 1 a 3 (b) De 1 a 5 (c) De 1 a 7

Solución

(a) La tasa de cambio promedio de f1x2 = 3x2 de 1 a 3 es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f132 - f112}{3 - 1} = \frac{27 - 3}{3 - 1} = \frac{24}{2} = 12$$

(b) La tasa de cambio promedio de f1x2 = 3x2 de 1 a 5 es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f152 - f112}{5 - 1} = \frac{75 - 3}{5 - 1} = \frac{72}{4} = 18$$

(c) La tasa de cambio promedio de f1x2 = 3x2 de 1 a 7 es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f172 - f112}{7 - 1} = \frac{147 - 3}{7 - 1} = \frac{144}{6} = 24$$

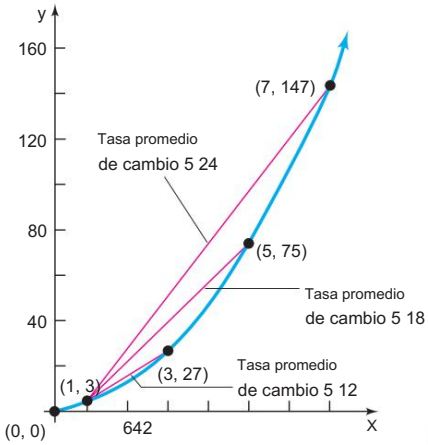


Figura 30 f1x2 = 3x2

Consulte la Figura 30 para ver una gráfica de f1x2 = 3x2 . La función f aumenta en el intervalo 30, q 2. El hecho de que la tasa de cambio promedio sea positiva para cualquier x1, x2, x1 · x2, en el intervalo [1, 7] indica que f aumenta en 1 … x … 7.

Ahora resuelve el problema 6 5

La recta secante

La tasa de cambio promedio de una función tiene una interpretación geométrica importante. Mire la gráfica de y = f1x2 en la Figura 31. Hay dos puntos etiquetados en la gráfica: 1a, f1a2 2 y 1b, f1b2 2. La recta que contiene estos dos puntos se llama recta secante; su pendiente es

$$\text{mseg} = \frac{f1b2 - f1a2}{b - a}$$

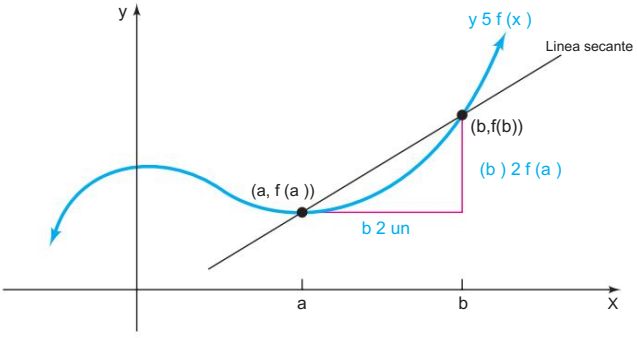


Figura 31 Recta secante

Machine Translated by Google

TEOREMA Pendiente de una recta secante

La tasa de cambio promedio de una función de a a b es igual a la pendiente de la recta secante que contiene los dos puntos 1a, f1a2 2 y 1b, f1b2 2 en su gráfica.

EJEMPLO 8 Encontrar una ecuación de una recta secante

Supongamos que g1x2 = 3x2 - 2x + 3.

(a) Encuentre la tasa de cambio promedio de g de -2 a 1.

(b) Encuentre una ecuación de la recta secante que contenga 1 - 2, g1 - 22 2 y 11, g112 2.

(c) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje la gráfica de g y la recta secante obtenida en parte (b) en la misma pantalla.

Solución

(a) La tasa de cambio promedio de g1x2 = 3x2 - 2x + 3 de - 2 a 1 es

$$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{g112 - g1 - 22}{1 - 1 - 22}$$

$$= \frac{4 - 19}{3} \qquad g112 \cdot 3112^{2} \cdot 2 \sim 1 \cdot 3 \cdot 4 \quad g1 \cdot 22 \cdot 31 \cdot 22^{2} \cdot 21 \cdot 22 \cdot 3 \cdot 19$$

$$= -\frac{15}{3} = -5$$

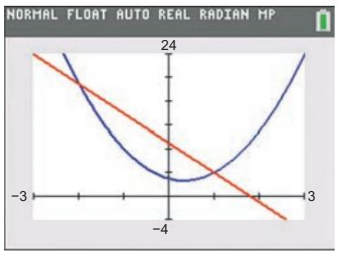


Figura 32 Gráfica de g y la recta secante

(b) La pendiente de la recta secante que contiene 1 - 2, g1 - 22 2 = 1 - 2, 192 y 11, g112 2 = 11, 42 es ms = - 5. Usa la forma punto-pendiente para encontrar una ecuación de la recta secante.

y - y1 = mseg 1x - x12	Forma punto-pendiente de una recta secante
y - 19 = - 51x - 1 - 22 2	x1 · ·2, y1 · g1 ·22 · 19, ms · ·5
y - 19 = - 5x - 10	Distribuir.
y = - 5x + 9	Forma pendiente-intersección de la recta secante

(c) La Figura 32 muestra la gráfica de g junto con la recta secante y = - 5x + 9 en una TI-84 Plus C.

Ahora problema de trabajo 7 1

2.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. El intervalo (2, 5) se puede escribir como la desigualdad _____. (págs. A72-A74)
2. La pendiente de la recta que contiene los puntos 1 - 2, 32 y (3, 8) es _____. (págs. 56 a 59)
3. Pruebe la simetría de la ecuación y = 5x2 - 1 con respecto al eje x, el eje y y el origen. (págs. 49 a 51)
4. Escribe la forma punto-pendiente de la recta con pendiente 5 que contiene el punto 13, - 22. (págs. 60–61)
5. Las intersecciones de la gráfica de y = x2 - 9 son _____. (págs. 48 y 49)

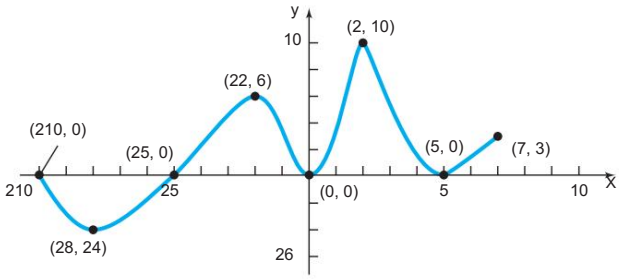
Conceptos y vocabulario

6. Una función f es _____ en un intervalo I si, por cualquier la elección de x1 y x2 en I, con x1 6 x2, luego f1x12 6 f1x22.
7. Una(n) _____función f es aquella para la cual f1 - x2 = f1x2 para cada x y - x en el dominio de f; una(n) _____ función f es aquella para la cual f1 - x2 = - f1x2 para cada x y - x en el dominio de f.
8. Verdadero o Falso Una función f es decreciente en un intervalo I si, para cualquier elección de x1 y x2 en I, con x1 6 x2, luego f1x12 7 f1x22.
9. Verdadero o Falso Una función f tiene un mínimo local en c si hay un intervalo abierto I que contiene c de modo que f1c2 … f1x2 para todo x en este intervalo abierto.
10. Verdadero o Falso Las funciones pares tienen gráficas simétricas con respecto al origen.
11. Opción múltiple Una función impar es simétrica con respecto a _____.
    (a) el eje x (c) el origen (b) el eje y (d) la recta y = x
12. Opción múltiple Se garantiza que una función que es continua en máximo _____ el tiene valor absoluto de intervalo y un mínimo absoluto.
    (a) (a, b) (b) (a, b] (c) [a, b) (d) [a, b]

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 24, use la gráfica a la derecha de la función f.



13. ¿ F aumenta en el intervalo 3 - 8, - 24?

14. ¿F está disminuyendo en el intervalo 3 - 8, - 44?

15. ¿ F aumenta en el intervalo 3 - 2, 64?

16. ¿ F está disminuyendo en el intervalo [2, 5]?

17. Enumere los intervalos en los que f aumenta.

18. Enumere los intervalos en los que f está disminuyendo.

19. ¿Existe un máximo local en 2? ¿Y si si, que?

20. ¿Existe un máximo local de 5? ¿Y si si, que?

21. Enumere los números en los que f tiene un máximo local. ¿Cuáles son los valores máximos locales?

22. Enumere los números en los que f tiene un mínimo local. ¿Cuáles son los valores mínimos locales?

23. Encuentra el máximo absoluto de f en 3 - 10, 74.

24. Encuentra el mínimo absoluto de f en 3 - 10, 74.

En los problemas 25 a 32 se da la gráfica de una función. Usa el gráfico para encontrar:

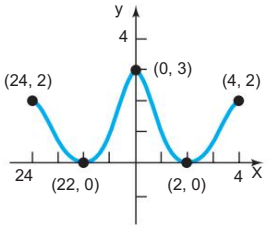
(a) Las intersecciones, si las hubiere.

(b) El dominio y el rango

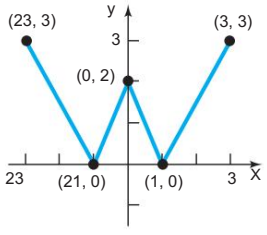
(c) Los intervalos en los que la función es creciente, decreciente o constante

(d) Si la función es par, impar o ninguna de las dos.

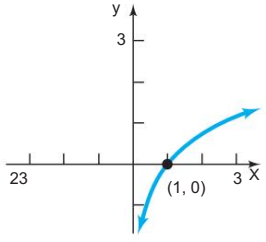
25.



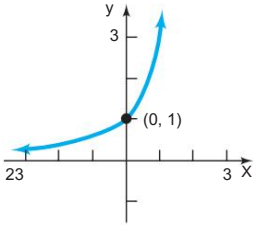
26.



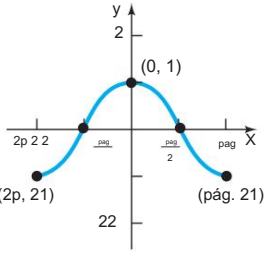
27.



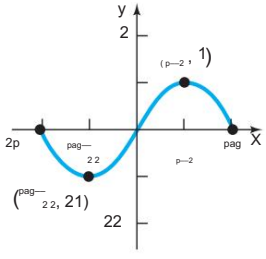
28.



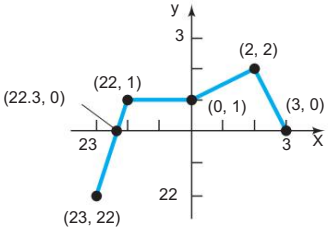
29.



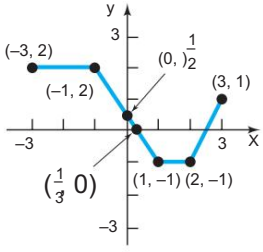
30.



31.



32.

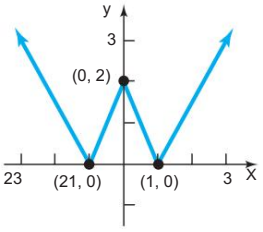


En los problemas 33 a 36 se da la gráfica de una función f. Usa el gráfico para encontrar:

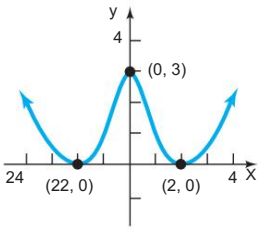
(a) Los números, si los hay, en los que f tiene un máximo local. ¿Cuáles son los valores máximos locales?

(b) Los números, si los hay, en los que f tiene un mínimo local. ¿Cuáles son los valores mínimos locales?

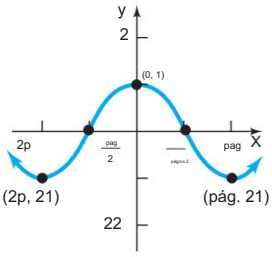
33.



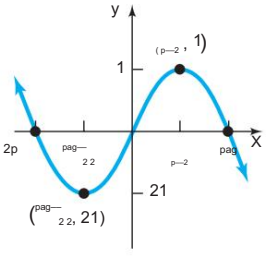
34.



35.



36.



En los problemas 37 a 48, determine algebraicamente si cada función es par, impar o ninguna de las dos.

37. f1x2 = 4x3 41.

G1x2 = 1x

38. f1x2 = 2x4 - x2 42.

F1x2 = 23 4x

39. h1x2 = 3x3 + 5 43.

f1x2 = 23 2x2 + 1

40. g1x2 = 10 - x2

44. f1x2 = x + 0 x 0

45. $h(x) = x^2 \dfrac{x}{-1}$

46. $g(x) = x^2 \dfrac{1}{+8}$

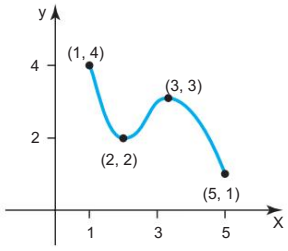
47. $F(x) = \dfrac{2x}{0x0}$

48. $h(x) = \dfrac{-x^3}{3x^2 - 9}$

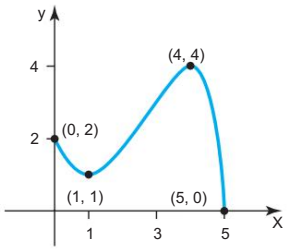
Machine Translated by Google

En los problemas 49 a 56, para cada gráfica de una función y = f1x2, encuentre el máximo absoluto y el mínimo absoluto, si existen. Identifique los valores máximos locales o los valores mínimos locales.

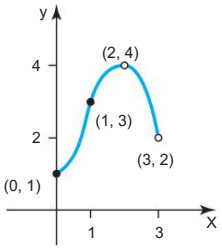
49.



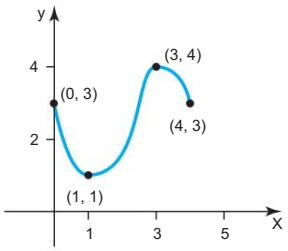
50.



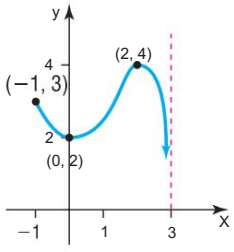
51.



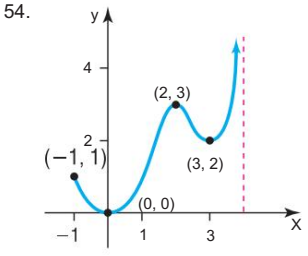
52.



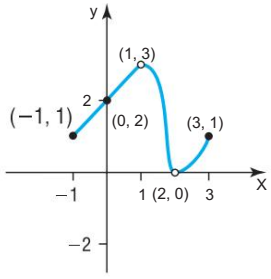
53.



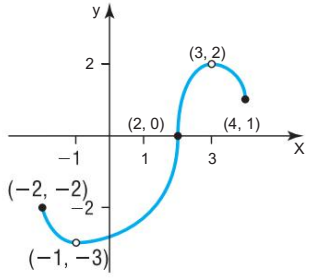
54.



55.



56.



En los problemas 57 a 64, utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente cada función en el intervalo indicado y aproximar los valores máximos y mínimos locales. Determine dónde la función crece y dónde decrece. Redondea las respuestas a dos decimales.

57. f1x2 = x3 - 3x + 2 3 - 2, 24

58. f1x2 = x3 - 3x2 + 5 3 - 1, 34

59. f1x2 = x4 - x2 3 - 2, 24

60. f1x2 = x5 - x3 3 - 2, 24

61. f1x2 = - 0.4x3 + 0.6x2 + 3x - 2 3 - 4, 54

62. f1x2 = - 0,2x3 - 0,6x2 + 4x - 6 3 - 6, 44

63. f1x2 = - 0,4x4 - 0,5x3 + 0,8x2 - 2 3 - 3, 24

64. f1x2 = 0,25x4 + 0,3x3 - 0,9x2 + 3 3 - 3, 24

65. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = - 2x2 + 4:
(a) De 0 a 2 (b) De 1 a 3 (c) De 1 a 4

66. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = - x3 + 1:
(a) De 0 a 2 (b) De 1 a 3 (c) De - 1 a 1

67. Encuentre la tasa de cambio promedio de h1x2 = x2 - 2x + 3:
(a) De - 1 a 1 (b) De 0 a 2 (c) De 2 a 5

68. Encuentre la tasa de cambio promedio de g1x2 = x3 - 4x + 7:
(a) De - 3 a - 2 (b) De - 1 a 1 (c) De 1 a 3

69. f1x2 = - 4x + 1
(a) Encuentre la tasa de cambio promedio de 2 a 5.
(b) Encuentre una ecuación de la recta secante que contenga 12, f122 2 y 15, f152 2.

70. f1x2 = 5x - 2
(a) Encuentre la tasa de cambio promedio de 1 a 3.
(b) Encuentre una ecuación de la recta secante que contenga 11, f112 2 y 13, f132 2.

71. g1x2 = x2 - 2
(a) Encuentre la tasa de cambio promedio de -2 a 1.
(b) Encuentre una ecuación de la recta secante que contiene 1 - 2, g1 - 22 2 y 11, g112 2.

72. g1x2 = x2 + 1
(a) Encuentre la tasa de cambio promedio de -1 a 2.
(b) Encuentre una ecuación de la recta secante que contiene 1 - 1, g1 - 12 2 y 12, g122 2.

73. h1x2 = - 2x2 + x
(a) Encuentre la tasa de cambio promedio de 0 a 3.
(b) Encuentre una ecuación de la recta secante que contenga 10, h102 2 y 13, h132 2.

74. h1x2 = x2 - 2x
(a) Encuentre la tasa de cambio promedio de 2 a 4.
(b) Encuentre una ecuación de la recta secante que contenga 12, h122 2 y 14, h142 2.

75. Práctica Mixta f1x2 = - x3 + 12x
(a) Determine si f es par, impar o ninguna de las dos cosas.
(b) Hay un valor máximo local de 16 en 2. Determine el valor mínimo local.

76. Práctica Mixta g1x2 = x3 - 27x
(a) Determine si g es par, impar o ninguna de las dos cosas.
(b) Hay un valor mínimo local de - 54 en 3. Determine el valor máximo local.

Aplicaciones y extensiones

77. F1x2 = - x4 + 8x2 + 9
(a) Determine si F es par, impar o ninguna de las dos cosas.
(b) Hay un valor máximo local de 25 en x = 2. Encuentre un segundo valor máximo local.
(c) Suponga que el área de la región encerrada por la gráfica de F y el eje x entre x = 0 y x = 3 es 50,4 unidades cuadradas. Usando el resultado de (a), determine el área de la región encerrada por la gráfica de F y el eje x entre x = - 3 y x = 0.

Machine Translated by Google

78. G1x2 = - x4 + 32x2 + 144

(a) Determine si G es par, impar o ninguna de las dos cosas.

(b) Hay un valor máximo local de 400 en x = 4.
Encuentre un segundo valor máximo local.

(c) Suponga que el área de la región encerrada por la gráfica de G y el eje x entre x = 0 y x = 6 es 1612,8 unidades cuadradas. Usando el resultado de (a), determine el área de la región encerrada por la gráfica de G y el eje x entre x = - 6 y x = 0.

79. Costo promedio mínimo El costo promedio por hora en dólares, C, de producir x cortadoras de césped con conductor puede modelarse mediante la función

$$\overline{C}1x2 = 0{,}3x2 + 21x - 251 + \frac{2500}{x}$$

(a) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente $\overline{C} = \overline{C}1x2$.

(b) Determine la cantidad de cortadoras de césped que se deben producir para minimizar el costo promedio.

(c) ¿Cuál es el costo promedio mínimo?

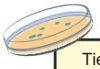
80. Concentración del medicamento La concentración C de un medicamento en el torrente sanguíneo t horas después de ser administrado está modelada por la función

$$C1t2 = - 0{,}002t^{4} + 0{,}039\ \text{toneladas}^{3} - 0{,}285\ \text{toneladas}^{2} + 0{,}766\ t + 0{,}085$$

(a) ¿ Después de cuántas horas será la concentración?
¿más alto?

(b) Una mujer que amamanta a un niño debe esperar hasta que la concentración sea inferior a 0,5 antes de poder alimentarlo. Después de tomar el medicamento, ¿cuánto tiempo debe esperar antes de alimentar a su hijo?

81. Crecimiento de E. coli Se coloca una cepa de E. coli Beu 397-recA441 en un caldo nutritivo a 30° Celsius y se deja crecer. Se recogen los datos que se muestran en la tabla. La población se mide en gramos y el tiempo en horas.
Dado que la población P depende del tiempo t, y cada entrada corresponde exactamente a una salida, podemos decir que la población es función del tiempo, por lo que P(t) representa la población en el tiempo t.



Tiempo (horas), t	Población (gramos), P
0	0,09
2.5	0,18
3.5	0,26
4.5	0,35
6	0,50

(a) Encuentre la tasa de cambio promedio de la población de 0 a 2,5 horas.

(b) Encuentre la tasa de cambio promedio de la población de 4,5 a 6 horas.

(c) ¿Qué sucede con la tasa de cambio promedio a medida que pasa el tiempo?
pasa?

82. Deuda Nacional El tamaño de la deuda total del gobierno federal de los Estados Unidos continúa creciendo. De hecho, según el Departamento del Tesoro, la deuda por persona que vive en Estados Unidos es de aproximadamente 63.720 dólares (o más de 172.000 dólares por hogar estadounidense). Los siguientes datos representan la deuda estadounidense para los años 2007-2017. Dado que la deuda D depende del año y, y cada insumo corresponde exactamente a un producto, la deuda es función del año.
Entonces D(y) representa la deuda de cada año y.

Año	Deuda (miles de millones de dólares)
2007	9008
2008	10.025
2009	11,910
2010	13.562
2011	14.790
2012	16.066
2013	16.738
2014	17.824
2015	18.151
2016	19.573
2017	20.245

Fuente: www.treasurydirect.gov

(a) Grafique los puntos (2007, 9008), (2008, 10 025), etc. (b) Dibuje un segmento de recta desde el punto (2007, 9008) hasta (2012, 16 066).
¿Qué representa la pendiente de este segmento de recta?

(c) Encuentre la tasa de cambio promedio de la deuda desde 2008 a 2010.

(d) Encuentre la tasa de cambio promedio de la deuda desde 2011 a 2013.

(e) Encuentre la tasa de cambio promedio de la deuda desde 2014 a 2016.

(f) ¿Qué parece estar sucediendo con la tasa de cambio promedio a medida que pasa el tiempo?

83. Para la función f1x2 = x2 , calcule la tasa de cambio promedio:

0 a 1 (c) De 0 a 0,1 (b) De 0 a 0,5 (a) De
(d) De 0 a 0,01 (e) De 0 a 0,001

(f) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente cada una de las rectas secantes junto con f.

(g) ¿Qué crees que está pasando con las rectas secantes?

(h) ¿Qué está pasando con las pendientes de las rectas secantes?
¿Hay algún número al que se estén acercando?
¿Cuál es ese número?

84. Para la función f1x2 = x2 , calcule la tasa de cambio promedio:

(a) De 1 a 2 (b) De 1 a 1,5 (c) De 1 a 1,1
(d) De 1 a 1,01 (e) De 1 a 1,001

(f) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente cada una de las rectas secantes junto con f.

(g) ¿Qué crees que está pasando con las rectas secantes?

(h) ¿Qué está pasando con las pendientes de las rectas secantes?
¿Hay algún número al que se estén acercando?
¿Cuál es ese número?

Machine Translated by Google

Los problemas 85 a 92 requieren el siguiente análisis de una recta secante. La pendiente de la recta secante que contiene los dos puntos 1x, f1x2 2 y 1x + h, f1x + h2 2 en la gráfica de una función y = f1x2 se puede dar como

$$\text{mseg} = \frac{f1x + h2 - f1x2}{1x + h2 - x} = \frac{f1x + h2 - f1x2}{h} \qquad h \cdot 0$$

(a) Exprese la pendiente de la recta secante de cada función en términos de x y h. Asegúrate de simplificar tu respuesta.
(b) Encuentre ms para h = 0,5, 0,1 y 0,01 en x = 1. ¿A qué valor se aproxima ms cuando h se acerca a 0?
(c) Encuentre una ecuación para la recta secante en x = 1 con h = 0,01.
(d) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente f y la recta secante encontrada en el inciso (c) en la misma ventana de visualización.

f1x2 = - 3x + 2 86. f1x2 = 2x + 5 89. f1x2 = - x2 + 3x - 2 90. f1x2 = 2x2 - 3x + 1

87. f1x2 = 2x2 + x 85.

88. f1x2 = x2 + 2x

91. f1x2 = x2 $\frac{1}{}$

92. f1x2 = $\frac{1}{x}$

93. Problema de desafío Teorema del valor medio Supongamos que f1x2 = x3 + 2x2 - x + 6. Desde el cálculo, el teorema del valor medio garantiza que hay al menos un número en el intervalo abierto 1 - 1, 22 en el cual el valor de la derivada de f, dado por f ′1x2 = 3x2 + 4x - 1, es igual a la tasa de cambio promedio de f en el intervalo. Encuentre todos esos números x en el intervalo.

94. Problema de desafío Si f es una función impar, determine si g1x2 = - 2f a - $\frac{x}{3}$ b es par, impar o ninguno de los dos.

Explicar conceptos: discusión y escritura

95. Dibuja la gráfica de una función que tenga las siguientes propiedades: dominio: todos los números reales; rango: todos los números reales; intersecciones: 10, - 32 y (3, 0); un valor máximo local de - 2 a la 1; un valor mínimo local de - 6 a 2. Compara tu gráfica con las de otros. Comente cualquier diferencia.

96. Rehacer el problema 95 con la siguiente información adicional: aumentando en 1 - q, - 14, 32, q 2; disminuyendo en 3 - 1, 24. Nuevamente compare su gráfico con otros y comente cualquier diferencia.

97. ¿ Cuántas intersecciones con el eje x puede tener una función definida en un intervalo si es creciente en ese intervalo? Explicar.

98. Supongamos que un amigo tuyo no entiende la idea de funciones crecientes y decrecientes. Proporcione una explicación, completa con gráficos, que aclare la idea.

99. ¿Puede una función ser a la vez par e impar? Explicar.

100. Utilizando una herramienta gráfica, grafique y = 5 en el intervalo 3 - 3, 34. Utilice MAXIMUM para encontrar los valores máximos locales en 3 - 3, 34. Comente el resultado proporcionado por la herramienta gráfica.

101. Una función f tiene una tasa de cambio promedio positiva en el intervalo [2, 5]. ¿ F aumenta en [2 , 5]? Explicar.

102. Demuestre que una función constante f1x2 = b tiene una tasa de cambio promedio de 0. Calcule la tasa de cambio promedio de y = 24 - x2 en el intervalo 3 - 2, 24. Explique cómo puede suceder esto.

Conserve su conocimiento

Los problemas 103 a 112 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

103. Simplificar: $\sqrt{2540}$

104. Multiplique: 14a - b2 ^{2}

El cargo de alquiler diario de un camión de mudanzas es de $40 más un cargo por millaje de $0,80 por milla. Exprese el costo C de alquilar un camión de mudanzas por un día en función del número x de millas recorridas.

106. Si un caracol de jardín puede viajar una milla en 33 horas, ¿cuántos días le tomará a ese caracol viajar seis millas? Supongamos que el caracol viaja sin detenerse.

107. Escribe la forma estándar de la ecuación de un círculo con centro 13, - 22 y radio r = 2 $\sqrt{26}$.

108. Factoriza completamente:

1x2 - 22 ^{3} # 213x5 + 12 # 15x4 + 13x5 + 12 ^{2} # 31x2-22 _ $^{2\,\#\,2x}$

109. Encuentra el punto medio del segmento de línea que conecta el puntos 1 - 2, 12 y 3 $\sqrt{5}$, - 4b.

110. Resuelve: · 3x + 7· - 3 = 5

111. Encuentra las soluciones reales de x6 + 7x3 = 8.

112. Resuelve para D si

3y2 # D + 3x2 - 3xy2 - 3x2 y # D = 0

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 2 6 x 6 5 2. 1 3. simétrico con respecto al eje y 4. y + 2 = 51x - 32 5. 1 - 3, 02, 13, 02, 10, - 92

Machine Translated by Google

2.4 Biblioteca de Funciones; Funciones definidas por partes

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente: • Intercepciones (Sección 1.2, págs. 48 y 49) • Gráficas de ecuaciones clave (Sección 1.2: Ejemplo 3, pág. 47; Ejemplos 11–13, págs. 52–53)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 130.

OBJETIVOS 1 Graficar las funciones enumeradas en la Biblioteca de funciones (p. 122)
2 Analizar una función definida por partes (p. 127)

1 Grafique las funciones enumeradas en la biblioteca de funciones.

La Figura 33 muestra la gráfica de y = 1x. Según la prueba de la línea vertical, y = f1x2 = 1x es una función, llamada función de raíz cuadrada. Del gráfico tenemos las siguientes propiedades:

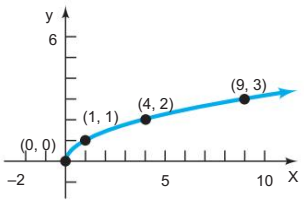


Figura 33 y = f1x2 = 2x

Propiedades de f 1x2 · !x •

El dominio y el rango de f1x2 = 2x son el conjunto de valores reales no negativos números.

• La intersección con el eje x de la gráfica de f1x2 = 1x es 0. La intersección con el eje x de la gráfica de f1x2 = 1x también es 0. • f1x2 = 2x no es ni par ni impar. • f1x2 = 2x aumenta en el intervalo 30, q 2. • f1x2 = 2x tiene un mínimo absoluto de 0 en x = 0.

EJEMPLO 1

Graficar la función de raíz cúbica (a) Determine si f1x2 = 23 x es par, impar o ninguno de los dos. Indique si la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, simétrica con respecto al origen o ninguna de las dos.

(b) Encuentre las intersecciones, si las hay, de la gráfica de f1x2 = 23 x.

(c) Grafique f1x2 = 23 x. (a)

Solución Porque

$$f1 - x2 = 23 - x = - 23 x = - f1x2$$

la función de raíz cúbica es impar. La gráfica de f es simétrica con respecto al origen.

(b) La intersección con el eje y es f102 = 23 0 = 0. La intersección con el eje x se encuentra resolviendo la ecuación f1x2 = 0.

$$f1x2 = 0 \quad 23$$
$$x = 0 \qquad f\,1x2 \cdot !3\,x$$
$$x = 0 \qquad \text{Cubos en ambos lados de la ecuación.}$$

La intersección con el eje x también es 0.

(c) Utilice la función para formar la Tabla 5 y obtenga algunos puntos en la gráfica. Debido a la simetría con respecto al origen, encontramos sólo puntos (x, y) para los cuales x Ú 0. La Figura 34 muestra la gráfica de f1x2 = 23 x.

Machine Translated by Google

Tabla 5

x	y · f 1x2 · !3 x	(x,y)
0	0	(0, 0)
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}, \frac{1}{2}$ segundo
1	1	(1, 1)
8	2	(8, 2)

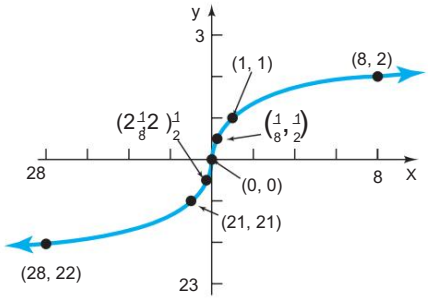


Figura 34 Función de raíz cúbica

De los resultados del Ejemplo 1 y la Figura 34, tenemos las siguientes propiedades de la función raíz cúbica.

Propiedades de la función raíz cúbica f 1x2 · !3 x

- El dominio y el rango de f1x2 = 23 x son el conjunto de todos los números reales.
- La intersección con el eje x de la gráfica de f1x2 = 23 x es 0. La intersección con el eje y de la gráfica de f1x2 = 23 x también es 0.
- f1x2 = 23 x es impar. La gráfica es simétrica con respecto al origen.
- f1x2 = 23 x aumenta en el intervalo 1 - q, q 2.
- f1x2 = 23 x no tiene ningún mínimo local ni ningún máximo local.

EJEMPLO 2 Graficar la función de valor absoluto

(a) Determine si f1x2 = 0 x 0 es par, impar o ninguna de las dos cosas. Indique si la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, simétrica con respecto al origen o ninguna de las dos.

(b) Determine las intersecciones, si las hay, de la gráfica de f1x2 = 0 x ·

0 (c) Grafique f1x2 = 0 x 0

Solución

(a) Porque

$$f1-x2 = 0 - x0$$

$$= 0 \times 0 = f1x2$$

la función de valor absoluto es par. La gráfica de f es simétrica con respecto al eje y.

(b) La intersección con el eje y es f102 = 0 0 0 = 0. La intersección con el eje x se encuentra resolviendo la ecuación f1x2 = 0 x 0 = 0. La intersección con el eje x es 0.

(c) Utilice la función para formar la Tabla 6 y obtenga algunos puntos en la gráfica. Debido a la simetría con respecto al eje y, sólo necesitamos encontrar puntos (x, y) para los cuales x Ú 0. La Figura 35 muestra la gráfica de f1x2 = 0 x 0 .

Tabla 6

x	y · f 1x2 · x	(x,y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
3	3	(3, 3)

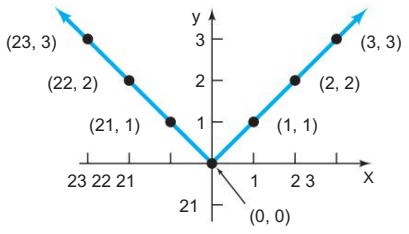


Figura 35 Función de valor absoluto

Machine Translated by Google

Del Ejemplo 2 y la Figura 35, tenemos las siguientes propiedades de la función de valor absoluto.

Propiedades de la función de valor absoluto f 1x2 · x

- El dominio de f1x2 = · x· es el conjunto de todos los números reales. El rango de f es 5y· y Ú 06.
- La intersección con el eje x de la gráfica de f1x2 = 0 x 0 es 0. La intersección con el eje y de la gráfica de f1x2 = 0 x 0 también es 0.
- f1x2 = · x· es par. La gráfica es simétrica con respecto al eje y.
- f1x2 = · x· es decreciente en el intervalo 1 - q, 04 . Es creciente en el intervalo 30, q 2.
- f1x2 = · x· tiene un mínimo absoluto de 0 en x = 0.

A continuación se muestra una lista de las funciones clave que hemos discutido. Al revisar esta lista, preste especial atención a las propiedades de cada función, particularmente al dominio de cada función y a la forma de cada gráfica. Conocer estos gráficos, junto con los puntos clave de cada gráfico, sienta las bases para técnicas gráficas adicionales.

Función constante

f1x2 = b b es un número real

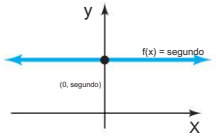


Figura 36 Función constante

Ver Figura 36.

El dominio de una función constante es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto formado por un solo número b. Su gráfica es una recta horizontal cuya intersección con el eje y es b. La función constante es una función par.

Función de identidad

f1x2 = x

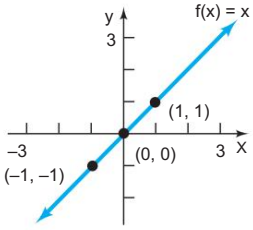


Figura 37 Función de identidad

Ver Figura 37.

El dominio y el rango de la función identidad son el conjunto de todos los números reales. Su gráfica es una línea con pendiente 1 e intersección con el eje 0. La línea consta de todos los puntos para los cuales la coordenada x es igual a la coordenada y. La función de identidad es una función impar y aumenta en su dominio. Tenga en cuenta que la gráfica divide los cuadrantes I y III.

Función cuadrada

f1x2 = x2

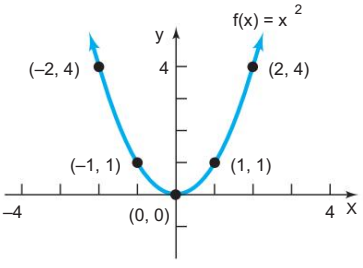


Figura 38 Función Cuadrada

Ver Figura 38.

El dominio de la función cuadrada es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de números reales no negativos. La gráfica de la función cuadrada es una parábola cuya intersección está en (0, 0). La función cuadrada es una función par que disminuye en el intervalo 1 - q, 04 y aumenta en el intervalo 30, q 2.

Machine Translated by Google

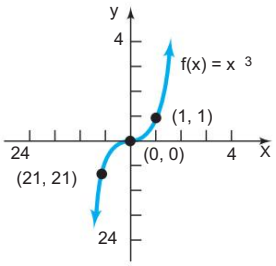


Figura 39 Función del cubo

Función de cubo

f1x2 = x3

Ver Figura 39.

El dominio y el rango de la función cúbica son el conjunto de todos los números reales. La intersección de la gráfica está en (0, 0). La función cúbica es impar y aumenta en el intervalo 1 - q, q 2.

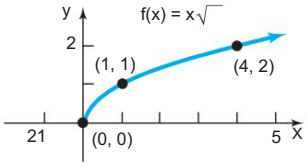


Figura 40 Función de raíz cuadrada

Función de raíz cuadrada

f1x2 = 2x

Ver Figura 40.

El dominio y el rango de la función raíz cuadrada son el conjunto de números reales no negativos. La intersección de la gráfica está en (0, 0). La función de raíz cuadrada no es par ni impar y aumenta en el intervalo 30, q 2.

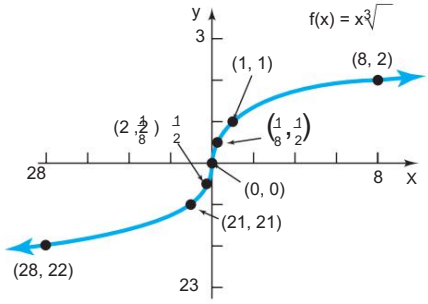


Figura 41 Función de raíz cúbica

Función de raíz cúbica

f1x2 = 23x

Ver Figura 41.

El dominio y el rango de la función raíz cúbica son el conjunto de todos los números reales. La intersección de la gráfica está en (0, 0). La función de raíz cúbica es una función impar que aumenta en el intervalo 1 - q, q 2.

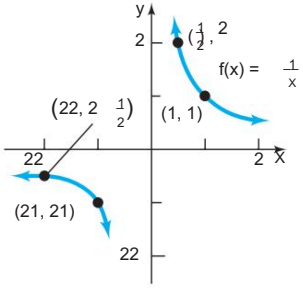


Figura 42 Función recíproca

Función recíproca

f1x2 = $\frac{1}{x}$

Consulte el Ejemplo 13, página 53, para una discusión de la ecuación y = $\frac{1}{x}$. Ver Figura 42.

El dominio y el rango de la función recíproca son el conjunto de todos los números reales distintos de cero. La gráfica no tiene intersecciones. La función recíproca es decreciente en los intervalos 1 - q, 02 y 10, q 2 y es una función impar.

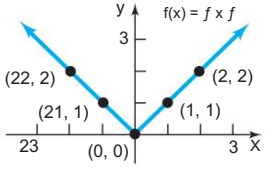


Figura 43 Función de valor absoluto

Función de valor absoluto

f1x2 = 0x0

Ver Figura 43.

El dominio de la función de valor absoluto es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de números reales no negativos. La intersección de la gráfica está en (0, 0). Si x Ú 0, entonces f1x2 = x, y la gráfica de f es parte de la recta y = x; si x 6 0, entonces f1x2 = - x, y la gráfica de f es parte de la recta y = - x. La función de valor absoluto es una función par; es decreciente en el intervalo 1 - q, 04 y creciente en el intervalo 30, q 2.

Machine Translated by Google

La notación int(x) representa el mayor número entero menor o igual a x. Por ejemplo,

$$\text{int}(1.12) = 1 \quad \text{int}(2.52) = 2 \quad \text{int}(1) = 1 \quad \text{int}\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{int}\left(-\tfrac{3}{4}\right) = -1 \quad \text{int}(2) = 3$$

Tabla 7

x	y = f(x) = entero(x)	(x,y)
-1	-1	(-1, -1)
$-\frac{1}{2}$	-1	$\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$
$-\frac{1}{4}$	-1	$\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$
0	0	(0, 0)
$\frac{1}{4}$	0	$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$
$\frac{1}{2}$	0	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
$\frac{3}{4}$	0	$\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

DEFINICIÓN Función entera mayor

$$f(x) = \text{int}(x) = \text{mayor entero menor o igual a } x^*$$

Obtenemos la gráfica de f(x) = int(x) trazando varios puntos. Ver Tabla 7. Para valores de x, $-1 \le x < 0$, el valor de f(x) = int(x) es -1; para valores de x, $0 \le x < 1$, el valor de f es 0. Consulte la Figura 44 para ver el gráfico.

El dominio de la función entera mayor es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de los números enteros. La intersección con el eje y de la gráfica es 0. Las intersecciones con el eje x se encuentran en el intervalo [0, 1). La función entera más grande no es ni par ni impar. Es constante en cada intervalo de la forma 3k, k + 12, para k un número entero. En la Figura 44, un punto sólido indica, por ejemplo, que en x = 1 el valor de f es f(1) = 1; Se utiliza un círculo abierto para mostrar que el valor de f no es 0 en x = 1.

Aunque una definición precisa requiere cálculo, en un sentido aproximado, una función es continua si su gráfica no tiene espacios ni agujeros y se puede trazar sin levantar el lápiz del papel en el que se dibuja la gráfica. Una función es discontinua si su gráfica tiene huecos o agujeros y no se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

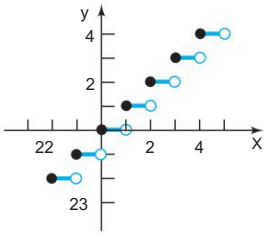


Figura 44 Función del entero mayor

La función de mayor número entero también se llama función escalonada. En x = 0, x = {1, x = {2, etc., esta función es discontinua porque, en valores enteros, la gráfica repentinamente "pasa" de un valor a otro sin tomar ninguno de los valores intermedios. Por ejemplo, inmediatamente a la izquierda de x = 3, las coordenadas y de los puntos en el gráfico son 2, y en x = 3 y inmediatamente a la derecha de x = 3, las coordenadas y de los puntos en la gráfica son 3.

COMENTARIO Al graficar una función utilizando una utilidad gráfica, normalmente puede elegir el modo conectado, en el que los puntos trazados en la pantalla están conectados, haciendo que el gráfico parezca continuo, o el modo de puntos, en el que solo aparecen los puntos trazados. Al graficar la función entera más grande con una utilidad gráfica, puede que sea necesario estar en modo punto. Esto es para evitar que la utilidad "conecte los puntos" cuando f(x) cambia de un valor entero al siguiente. Sin embargo, algunas utilidades mostrarán los espacios incluso cuando estén en modo "conectado". Ver Figura 45. ■

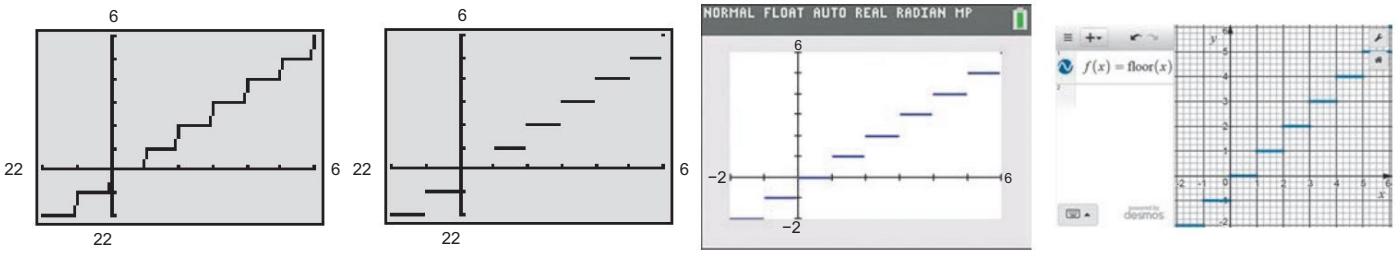


Figura 45 f(x) = int(x)

Las funciones comentadas hasta ahora son básicas. Siempre que te encuentres con uno de ellos, deberías ver una imagen mental de su gráfico. Por ejemplo, si encuentra la función $f(x) = x^2$, debería ver en tu mente la imagen de una parábola.

Ahora resuelva los problemas 1 1 al 1 8

* Algunos textos usan la notación f(x) = 3x4 o llaman a la función de mayor entero la "función piso" y usan la notación f(x) = :x; .

Machine Translated by Google

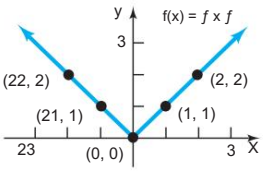


Figura 46 Función de valor absoluto

2 Analizar una función definida por partes A veces una función se define usando diferentes ecuaciones en diferentes partes de su dominio. Por ejemplo, la función de valor absoluto f1x2 = 0 x 0 en realidad está definida por dos ecuaciones: f1x2 = x si x Ú 0 y f1x2 = - x si x 6 0. Consulte la Figura 46. Por conveniencia, estas ecuaciones generalmente se combinan en una sola. expresión como

$$f1x2 = 0\,x\,0 = e\ x \text{ si } x \text{ Ú } 0 \quad -x \text{ si } x \text{ 6 } 0$$

Cuando una función está definida por diferentes ecuaciones en diferentes partes de su dominio, se llama función definida por partes .

EJEMPLO 3 Analizar una función definida por partes

Una función f definida por partes se define como

$$f1x2 = e\ -2x \text{ si } x \text{ 6 } 0 \quad 2x \text{ si } x \text{ Ú } 0$$

(a) Encuentre f1 - 42, f102 y f142. (b)

Encuentre el dominio de f. (c)

Localice cualquier intercepción.

(d) Gráfico f.

(e) Utilice la gráfica para encontrar el rango de f.

Solución

(a) Al evaluar una función definida por partes, primero debemos identificar qué ecuación debe usarse en la evaluación. Hacemos esto identificando en qué parte del dominio se encuentra el valor de la variable independiente.

- Para encontrar f1 - 42, observe que - 4 6 0 entonces x = - 4 se encuentra en el dominio de la primera ecuación. Esto significa que cuando x = - 4, la ecuación para f es f1x2 = - 2x.

  Entonces

  $$f1 - 42 = -\,21 - 42 = 8$$

- Para encontrar f102, observe que cuando x = 0, la ecuación para f es f1x2 = 2x.

  Entonces

  $$f102 = 20 = 0$$

- Para encontrar f142, observe que cuando x = 4, la ecuación para f es f1x2 = 2x.

  Entonces

  $$f142 = 24 = 2$$

(b) El dominio de la primera ecuación de la función f es el conjunto de todos los números reales negativos, 5x· x 6 06, o 1 - q, 02 en notación de intervalo. El dominio de la segunda ecuación de la función f es el conjunto de todos los números reales no negativos, 5x· x Ú 06, o 30, q 2 en notación de intervalo. El dominio de la función es la unión de los dominios de las ecuaciones individuales. Desde

$$1 - q, 02 \text{ h } 30, q\ 2 = 1 - q, q\ 2$$

el dominio de f es el conjunto de todos los números reales.

(c) La intersección y de la gráfica de la función es f102. Debido a que la ecuación para f cuando x = 0 es f1x2 = 1x, la intersección con el eje y es f102 = 10 = 0.

(continuado)

Machine Translated by Google

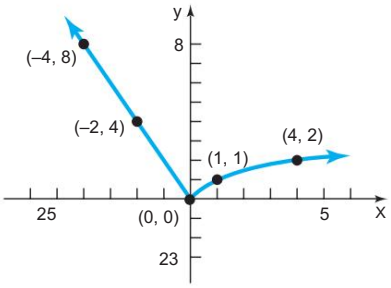


Figura 47

Las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función son las soluciones reales de la ecuación f1x2 = 0. Para encontrar las intersecciones con el eje x de f, resuelva f1x2 = 0 para cada ecuación de la función y luego determine qué valores de x, si cualquiera, satisface el dominio de la ecuación.

f1x2 = 0 x * 0 f1x2 = 0 x # 0

- 2x = 0 2x = 0

x = 0 x = 0

El resultado de la izquierda 1x = 02 se descarta porque no satisface la condición x 6 0. El resultado de la derecha 1x = 02 se obtiene bajo la condición x Ú 0, por lo que 0 es una intersección con el eje x. La única intersección es 10, 02.

(d) Para representar gráficamente f, represente cada ecuación. Primero grafica la recta y = - 2x y conserva solo la parte para la cual x 6 0. Luego grafica la función de raíz cuadrada y = 2x para x Ú 0. Ver Figura 47.

(e) De la gráfica concluimos que el rango de f es el conjunto de números reales no negativos, o el intervalo 30, q 2.

EJEMPLO 4 Analizar una función definida por partes

Una función f definida por partes se define como

si x = 1

f1x2 = c - 2x + 2 si - 3 … x 6 1 si x 7 1

(a) Encuentre f1 - 22, f112 y f122.

(b) Encuentre el dominio de f.

(c) Localice cualquier intercepción.

(d) Gráfico f.

(e) Utilice la gráfica para encontrar el rango de f.

Solución

(a) Para encontrar f1 - 22, observe que - 3 … - 2 6 1, por lo que cuando x = - 2, la ecuación para f está dada por f1x2 = - 2x + 1. Entonces

f1 - 22 = - 21 - 22 + 1 = 5 f 1x2 · ·2x · 1 si ·3 " x * 1

Para encontrar f112, observe que cuando x = 1, la ecuación para f es f1x2 = 2. Entonces,

f112 = 2 f 1x2 · 2 si x · 1

Cuando x = 2, la ecuación para f es f1x2 = x2 . Entonces

f122 = 22 = 4 f 1x2 · x2 si x + 1

(b) El dominio de f es la unión de los dominios de cada ecuación en la función definida por partes. Entonces el dominio de f es 3 - 3, 12 h 516 h 11, q 2 = 3 - 3, q 2.

El dominio de f es 3 - 3, q 2 en notación de intervalos, o 5x· x Ú - 36 en notación de conjuntos.

(c) La intersección y de la gráfica de la función es f102. Debido a que la ecuación para f cuando x = 0 es f1x2 = - 2x + 1, la intersección con el eje y es f102 = - 2 # 0 + 1 = 1.
Las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función f son las soluciones reales de la ecuación f1x2 = 0. Para encontrar las intersecciones con el eje x de f, resuelva f1x2 = 0 para cada ecuación de la función y luego determine qué valores de x, si los hay, están en el dominio de la ecuación.

f1x2 = 0 ·3 " x * 1 f1x2 = 0 x · 1 f1x2 = 0 x + 1

- 2x + 1 = 0 2 = 0 x2 = 0

- 2x = - 1 Sin solución x = 0

$x = \frac{1}{2}$

Machine Translated by Google

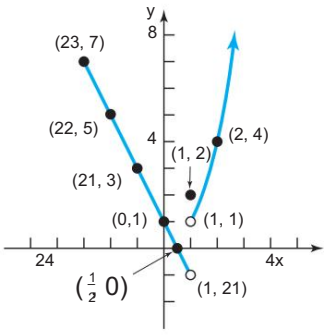


Figura 48

La primera intersección potencial con el eje x, $x = \frac{1}{2}$, satisface la condición - 3 … x 6 1, entonces $x = \frac{1}{2}$ es una intersección con el eje x. La segunda intersección potencial con el eje x, x = 0, no satisface la condición x 7 1, por lo que la descartamos. La única intersección con el eje x es $\frac{1}{2}$. El

las intersecciones son 10, 12 y $1\overline{2}$, 0b.

(d) Para graficar f, primero grafica la recta y = - 2x + 1 y conserva solo la parte para la cual - 3 … x 6 1. Cuando x = 1, f1x2 = 2, traza el punto 11, 22.
Finalmente, grafica la parábola y = x2 y conserva solo la parte para la cual x 7 1.
Vea la Figura 48. Observe que usamos círculos abiertos en los puntos 11, - 12 y 11, 12 para indicar que estos puntos no son parte del gráfico.

(e) De la gráfica, concluimos que el rango de f es 5y· y 7 - 16, o el intervalo 1 - 1, q 2.

Ahora resuelve el problema 3 1

EJEMPLO 5

Costo de la electricidad

En la primavera de 2018, Duke Energy Progress suministró electricidad a residencias en Carolina del Sur por un cargo mensual al cliente de $8,29 más 8,6035. por kilovatio-hora (kWh) para los primeros 1000 kWh suministrados en el mes y 9,1446. por kWh para todo uso superior a 1000 kWh en el mes.

(a) ¿Cuál es el cargo por usar 500 kWh en un mes?

(b) ¿Cuál es el cargo por usar 1500 kWh en un mes?

(c) Si C es el cargo mensual por x kWh, desarrolle un modelo que relacione el cargo mensual y los kilovatios-hora utilizados. Es decir, expresar C en función de x.
Fuente: Progreso de Duke Energy, 2018

Solución

(a) Por 500 kWh, el cargo es $8,29 más 18,6035. = +0,0860352 por kWh. Eso es,

Cargo = +8,29 + +0,086035 # 500 = +51,31

(b) Para 1500 kWh, el cargo es de $8.29 más 8.6035¢ por kWh para los primeros 1000 kWh más 9.1446¢ por kWh para los 500 kWh en exceso de 1000. Es decir,

Cargo = +8,29 + +0,086035 # 1000 + +0,091446 # 500 = +140,05

(c) Sea x el número de kilovatios-hora utilizados. Si 0... x ... 1000, entonces el cargo mensual C (en dólares) se puede encontrar multiplicando x por $0,086035 y sumando el cargo mensual al cliente de $8,29. Entonces, si 0... x ... 1000, entonces

C1x2 = 0,086035x + 8,29

Para x 7 1000, el cargo es 0.086035 # 1000 + 8.29 + 0.0914461x - 10002, ya que 1x - 10002 equivale al uso superior a 1000 kWh, lo que cuesta $0.091446 por kWh. Es decir, si x 7 1000, entonces

C1x2 = 0,086035 # 1000 + 8,29 + 0,0914461x - 10002
= 86,035 + 8,29 + 0,091446x - 91,446
= 0,091446x + 2,879

La regla para calcular C sigue dos ecuaciones:

si 0... x ... 1000

C1x2 = e 0,086035x + 8,29
0,091446x + 2,879 si x 7 1000

El modelo

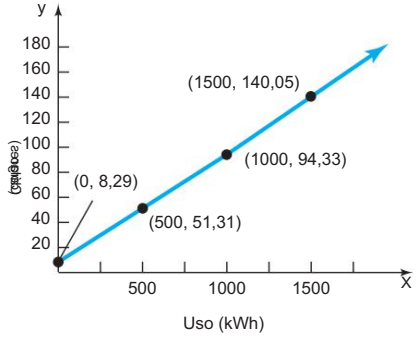


Figura 49

Consulte la Figura 49 para ver el gráfico. Tenga en cuenta que las dos gráficas son líneas, pero tienen diferentes pendientes (tasas) y se cruzan en el punto (1000, 94,33).

Machine Translated by Google

2.4 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Grafica y = 1x. (pág.52)
2. Grafica y = $\frac{1}{x}$. (pág.53)
3. Encuentra las intersecciones de la ecuación y = x3 - 8. (págs. 48 y 49)

Conceptos y vocabulario

4. La función f1x2 = x2 es decreciente en el intervalo _____.
5. Cuando las funciones están definidas por más de una ecuación, funciones. se les llama _____
6. Verdadero o Falso La función cúbica es impar y aumenta en el intervalo 1 - q, q 2.
7. Verdadero o Falso La función raíz cúbica es impar y decreciente en el intervalo 1 - q, q 2.
8. Verdadero o Falso El dominio y el rango de la función recíproca son el conjunto de todos los números reales.
9. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes funciones tiene un ¿Gráfico que es simétrico con respecto al eje y?
   (a) y = 2x (b) y = · x· (c) y = x3 (d) y = $\frac{1}{x}$
10. Opción múltiple Considere la siguiente función.

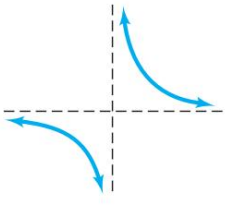
$$f1x2 = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \text{ 6 } 2 \\ x2 + 5 & \text{si } 2 \ldots x \text{ 6 } 10 \\ 3 & \text{si } x \text{ Ú } 10 \end{cases}$$

¿Qué expresión(es) deberían usarse para encontrar la intersección con el eje y?
(a) 3x - 2 (b) x2 + 5 (d) los tres (c) 3

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 18, relacione cada gráfica con su función.

A. Función constante B. Función de identidad C. Función cuadrática D. Función de cubo
E. Función de raíz cuadrada F. Función recíproca G. Función de valor absoluto H. Función de raíz cúbica

11.
12.
13.
14.
15.
16.
17. 
18.

En los problemas 19 a 26, grafica cada función. Asegúrate de etiquetar tres puntos en el gráfico.

19. f1x2 = x2
20. f1x2 = x
21. f1x2 = 1x
22. f1x2 = x3
23. f1x2 = 0x0
24. f1x2 = $\frac{1}{x}$
25. f1x2 = 3
26. f1x2 = 23x

27. Si $f1x2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ 6 } -1 \\ 2x2 + 1 & \text{si } x = -1 \\ & \text{si } x \text{ 7 } -1 \end{cases}$ encontrar:
    (a) f1 - 22 (b) f1 - 12 (c) f102

28. Si $f1x2 = \begin{cases} 4 & \text{si } x \text{ 6 } 0 \\ 3x - 2 & \text{si } x = 0 \\ & \text{si } x \text{ 7 } 0 \end{cases}$ encontrar:
    (a) f1 - 32 (b) f102 (c) f132

29. Si $f1x2 = \begin{cases} bx3 & \text{si } -2 \ldots x \text{ 6 } 1 \\ 3x + 2 & \text{si } 1 \ldots x \ldots 4 \end{cases}$ encontrar:
    (a) f1 - 12 (b) f102 (c) f112 (d) f132

30. Si $f1x2 = \begin{cases} b\,2x + x3 & \text{si } -3 \ldots x \ldots 1 \\ -1 & \text{si } 1 \text{ 6 } x \ldots 5 \end{cases}$ encontrar:
    (a) f1 - 22 (b) f102 (c) f112 (d) f132

Machine Translated by Google

En los problemas 31 a 42:

(a) Encuentre el dominio de cada función. (b) Localice cualquier intercepción. (c) Grafique cada función.

(d) Con base en la gráfica, encuentre el rango.

31. f1x2 = b 2x si x ·0 si x = 0

32. f1x2 = b 3x si x ·0 si x = 0

33. f1x2 = bx + 3 si x 6 - 2
-2x - 3 si x Ú - 2

34. f1x2 = b -3x - 2 si x 6 1
2x + 3 si x Ú 1

35. f1x2 = c 2x + 5 si - 3... x 6 0
- 3 si x = 0
5x + 5 si x 7 0

36. f1x2 = cx + 3 si - 2 … x 6 1
5 si x = 1
x + 2 si x 7 1

37. f1x2 = c 1/x si x 6 0
23x si x Ú 0

38. f1x2 = b1 + x si x 6 0
-2 si x Ú 0

39. f1x2 = b2 - 2x si - 3... x 6 1
x si x 7 1

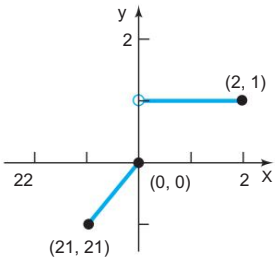
40. f1x2 = segundo x3 si - 2... x 6 0
0x0 si x 7 0

41. f1x2 = • 3x + 5 si - 3 … x 6 - 2
5 si - 2 … x 6 2
1 - 3x si x 7 2

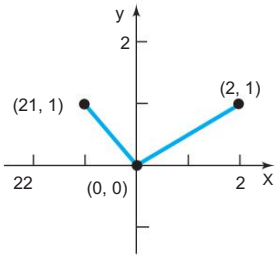
42. f1x2 = • x2 si 0 6 x … 2
x + 2 si 2 6 x 6 5
7 si x Ú 5

En los problemas 43 a 46 se da la gráfica de una función definida por partes. Escribe una definición para cada función.

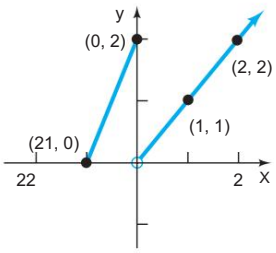
43.



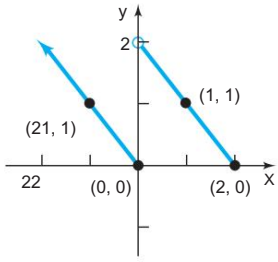
44.



45.



46.



47. Si f1x2 = inta x b, encontrar

(a) f11.22 (b) f11.62 (c) f1 - 1,82

48. Si f1x2 = int12x2, encuentre

(a) f11.72 (b) f12.82 (c) f1 - 3,62

Aplicaciones y extensiones

49. (a) Gráfica f1x2 = e 1x2 + 12 2 si 0... x 6 2
10 si 2... x ...6

(b) Encuentre el dominio de f.

(c) Encuentre el máximo absoluto y el mínimo absoluto, si existen.

50. (a) Grafique f1x2 = c x + 1 si - 2 ... x 6 0
2 si x = 0
x2 si 0 6 x 6 2

(b) Encuentre el dominio de f.

(c) Encuentre el máximo absoluto y el mínimo absoluto, si existen.

51 Servicio de tableta Una compañía telefónica ofrece un plan mensual de telefonía celular por $19,99. Incluye 250 minutos a cualquier hora más $0,25 por minuto por minutos adicionales. La siguiente función se utiliza para calcular el costo mensual de un suscriptor, donde x es la cantidad de minutos utilizados en cualquier momento.

C(x) = e 19,99 si 0 6 x … 250
19,99 + 0,25x - 42,51 si x 7250

Calcule el costo mensual del teléfono celular por el uso de los siguientes minutos en cualquier momento.

(a) 100 (b) 320 (c) 251

52. Estacionamiento en el Aeropuerto Internacional O'Hare La tarifa de estacionamiento a corto plazo (no más de 24 horas) F (en dólares) por estacionamiento x horas en un día laborable en el estacionamiento principal del Aeropuerto Internacional O'Hare se puede modelar mediante la funci

F1x2 = c 2 - 9 int13 - x2 si 4 6 x … 9
2 - 3 int11 - x2 si 0 6 x … 4
7.4 si 9 6 x … 24

Determine la tarifa por estacionar en el estacionamiento de corta duración para

(a) 2 horas (b) 7 horas

(c) 15 horas (d) 8 horas y 24 minutos

Fuente: Aeropuerto Internacional O'Hare

Machine Translated by Google

53. Costo del gas natural En abril de 2018, Nicor Gas tenía el siguiente programa de tarifas para el uso de gas natural en pequeñas empresas.

Cargo mensual al cliente	$90.00
Cargo de distribución	
1.ª 150 termias	$0.1201/termia
Siguiente 4850 termias	$0.0549/termia
Más de 5000 termias	$0.0482/termia
Cargo por suministro de gas	$0.35/termia

(a) ¿Cuál es el cargo por utilizar 1000 termias en un mes?

(b) ¿Cuál es el cargo por usar 6000 termias en un mes?

(c) Desarrolle una función que modele el cargo mensual C para x termias de gas.

(d) Grafique la función encontrada en el inciso (c).

Fuente: Nicor Gas

54. Costo del gas natural En marzo de 2018, Spire, Inc. tenía el siguiente programa de tarifas para el uso de gas natural en residencias unifamiliares.

cargo por servicio mensual	$23.44
Gastos de envío	
Primeras 30 termias	$0.91686/termia
Más de 30 termias	$0
Costo del gas natural	
Primeras 30 termias	$0.26486/termia
Más de 30 termias	$0.50897/termia

(a) ¿Cuál es el cargo por usar 20 termias en un mes?

(b) ¿Cuál es el cargo por usar 150 termias en un mes?

(c) Desarrolle una función que modele el cargo mensual C para x termias de gas.

(d) Grafique la función encontrada en el inciso (c).

Fuente: Spire, Inc.

55. Impuesto federal sobre la renta En la tabla adjunta se presentan dos tablas de tasas impositivas para 2018. Si x es igual a la renta imponible e y es igual al impuesto adeudado, construya una función y = f1x2 para el Anexo X.

Listas de tasas impositivas de 2018										
Horario X—Único					Anexo Y-1: Casado que presenta una declaración conjunta o Viudo(a) calificado(a)					
Si está sujeto a impuestos El ingreso es Encima	Pero no Encima	El impuesto es Este Cantidad	Más Este %	Del Exceso Encima	Si está sujeto a impuestos El ingreso es Encima	Pero no Encima	El impuesto es Este Cantidad	Más Este %	Del Exceso Encima	
$0	$9,525	$0 +	10%	$0	$0	$19,050	$0 + 10%		$0	
9.525	38.700	952,50 +	12%	9.525	19.050	77.400	1.905 + 12%		19.050	
38.700	82.500	4.453,50 +	22%	38.700	77.400	165.000	8.907,00 + 22%		77.400	
82.500	157.500	14.089,50 +	24%	82.500	165.000	315.000	28.179,00 + 24%		165.000	
157.500	200.000	32.089,50 +	32%	157.500	315.000	400.000	64.179,00 + 32%	400.000	600.000	315.000
200.000	500.000	45.689,50 +	35%	200.000	91.379,00 + 35%					400.000
500.000	–	150.689,50 +	37%	500.000	600.000	–	161.379,00 + 37%			600.000

56. Impuesto Federal sobre la Renta Consulte los cuadros de tasas impositivas de 2018. Si x es igual a la renta imponible e y es igual al impuesto adeudado, construya una función y = f1x2 para el Anexo Y-1.

57. Costo del transporte de mercancías Una empresa de camiones transporta mercancías entre Chicago y Nueva York, una distancia de 960 millas. La política de la compañía es cobrar, por cada libra, $0.50 por milla durante las primeras 100 millas, $0.40 por milla durante las siguientes 300 millas, $0.25 por milla durante las siguientes 400 millas y ningún cargo por las 160 millas restantes.

(a) Grafique la relación entre el costo de transporte por libra en dólares y el kilometraje en toda la ruta de 960 millas.

(b) Encuentre el costo en función del kilometraje para recorridos entre 100 y a 400 millas de Chicago.

(c) Encuentre el costo en función del kilometraje para recorridos entre 400 y a 800 millas de Chicago.

58. Costos de alquiler de automóviles Un automóvil económico alquilado en Florida a Enterprise® por semana cuesta $185 por semana. Los días adicionales cuestan $37 por día hasta que la tarifa diaria exceda la tarifa semanal, en cuyo caso se aplica la tarifa semanal. Además, cualquier parte del día utilizada cuenta como un día completo. Encuentre el costo C de alquilar un automóvil económico en función del número de días usados x, donde 7… x … 14. Grafique esta función.

59. Tarifas hipotecarias Fannie Mae cobra un ajuste de precio a nivel de préstamo (LLPA) en todas las hipotecas, lo que representa una tarifa que deben pagar los compradores de viviendas que buscan un préstamo. La tasa pagada depende del puntaje crediticio del prestatario, la cantidad prestada y la relación préstamo-valor (LTV). El ratio LTV es la relación entre el importe prestado y el valor de tasación de la vivienda. Por ejemplo, un comprador de vivienda que desea pedir prestado $250 000 con un puntaje crediticio de 730 y un índice LTV del 80 % pagará el 0,75 % (0,0075) de $250 000, o $1875.

La tabla muestra la LLPA para varios puntajes crediticios y un ratio LTV del 80%.

Puntaje de crédito	Nivel de préstamo Tasa de ajuste de precios
… 659	3,00%
660–679	2,75%
680–699	1,75%
700–719	1,25%
720–739	0,75%
Ú 740	0,50%

Fuente: Fannie Mae

Machine Translated by Google

(a) Construya una función C = C1s2, donde C es el ajuste de precio a nivel de préstamo (LLPA) y s es la puntuación crediticia de una persona que desea pedir prestado $300 000 con una relación LTV del 80%.

(b) ¿Cuál es el LLPA de un préstamo de $300 000 con una relación LTV del 80% para un prestatario cuyo puntaje crediticio es 725?

(c) ¿Cuál es el LLPA de un préstamo de $300 000 con un índice LTV del 80% para un prestatario cuyo puntaje crediticio es 670?

60. Pagos mínimos de tarjetas de crédito Los titulares de tarjetas de crédito emitidas por bancos, grandes almacenes, compañías petroleras, etc., reciben facturas cada mes que indican los montos mínimos que deben pagar antes de una determinada fecha de vencimiento. El monto mínimo adeudado depende del monto total adeudado. Una de estas compañías de tarjetas de crédito utiliza las siguientes reglas: Para una factura de menos de $10, se debe pagar el monto total. Para una factura de al menos $10 pero menos de $500, el mínimo adeudado es $10. Se debe pagar un mínimo de $30 en una factura de al menos $500 pero menos de $1000, se debe pagar un mínimo de $50 en una factura de al menos $1000 pero menos de $1500, y se debe pagar un mínimo de $70 en facturas de $1500 o más. Encuentre la función f que describe el pago mínimo adeudado en un billete de x dólares. Gráfico f.

61. Sensación térmica El factor de sensación térmica representa la temperatura del aire a una velocidad de viento estándar que produciría la misma pérdida de calor que la temperatura y la velocidad del viento dadas. Una fórmula para calcular la temperatura equivalente es

$$W = \begin{cases} t & 0 \dots v \ 6 \ 1{,}79 \\ 33 - \dfrac{110.45 + 101v - \sqrt{v}\,2\,133 - t2}{22.04} & 1{,}79 \dots v \dots 20 \\ 33 - 1.5958133 - t2 & v \ 7 \ 20 \end{cases}$$

donde v representa la velocidad del viento (en metros por segundo) y t representa la temperatura del aire (°C). Calcule la sensación térmica para lo siguiente:

(a) Una temperatura del aire de 10°C y una velocidad del viento de 1 metro por segundo (m/seg).

(b) Una temperatura del aire de 10°C y una velocidad del viento de 5 m/seg.

(c) Una temperatura del aire de 10°C y una velocidad del viento de 15 m/seg.

(d) Una temperatura del aire de 10°C y una velocidad del viento de 25 m/seg.

(e) Explique el significado físico de la ecuación correspondiente a 0 … v 6 1,79.

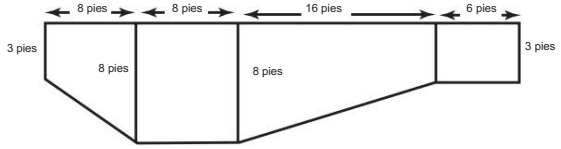
(f) Explique el significado físico de la ecuación correspondiente a v 7 20.

62. Sensación térmica Rehacer el problema 61(a)–(d) para una temperatura del aire de -10°C.

63. Correo de primera clase En 2018, el Servicio Postal de EE. UU. cobró $1,00 de envío por ciertos paquetes minoristas de correo de primera clase (como un sobre de 8,5 por 11) que pesaban hasta 1 onza, más $0,21 por cada onza adicional hasta 13 onzas. . Las tarifas de primera clase no se aplican a los pisos que pesen más de 13 onzas. Desarrolle un modelo que relacione C, el franqueo de primera clase cobrado, para un piso que pesa x onzas. Grafica la función.

Fuente: Servicio Postal de los Estados Unidos

64. Desafío Problema Profundidad de la piscina Desarrolla un modelo para la profundidad de la piscina que se muestra a continuación en función de la distancia desde la pared de la izquierda.



65. Problema de desafío Encuentra la función de suma 1f + g2 1x2 si

$$f1x2 = \begin{cases} b & 2x + 3 \text{ si } x \ 6 \ 2 \\ x2 + 5x \text{ si } x \ \text{Ú} \ 2 \end{cases}$$

y

$$g1x2 = \begin{cases} b & 4x + 7 \text{ si } x \dots 1 \text{ si } x \ 7 \ 0 \end{cases}$$

Explicar conceptos: discusión y escritura

En los problemas 66 a 73, utilice una utilidad gráfica.

66. Gráfica de exploración y = x2 . Luego, en la misma pantalla, grafica y = x2 + 2, seguido de y = x2 + 4, seguido de y = x2 - 2. ¿Qué patrón observas? ¿ Puedes predecir la gráfica de y = x2 - 4? ¿ De y = x2 + 5?

67. Gráfica de exploración y = x2 . Luego en la misma pantalla seguido graficar y = 1x - 22 ^{2}, de y = 1x - 42 ^{2}, seguido por y = 1x + 22 ^{2}. ¿Qué patrón observas? Puede predecir la gráfica de y = 1x + 42 ^{2}? De y = 1x - 52 68. ^{2}?

Gráfica de exploración y = · x· . Luego, en la misma pantalla, grafica y = 2· x· , seguido de y = 4· x· , · x· . seguido de y = $\frac{1}{2}$

¿Qué patrón observas? ¿Puedes predecir la gráfica de y = $\frac{1}{4}$ · x· ? De y = 5· x· ?

69. Gráfica de exploración y = x2 . Luego en la misma pantalla grafica y = - x2 . Ahora prueba y = · x· e y = - · x·. ¿Qué concluyes?

70. Gráfica de exploración y = 2x. Luego en la misma pantalla grafica y = 2- x. Ahora intenta y = 2x + 1 e y = 21 - x2 + 1. ¿Qué concluyes?

71. Gráfica de exploración y = x3 . Luego en la misma pantalla + 2. ¿ Gráfica y = 1x - 12 ^{3} ¿Podrías haber predicho el resultado?

72. Gráfica de exploración y = x2 , y = x4 , e y = x6 en la misma pantalla. ¿Qué notas que es igual en cada gráfico? ¿Qué notas que es diferente?

73. Gráfica de exploración y = x3 , y = x5 , e y = x7 en la misma pantalla. ¿Qué notas que es igual en cada gráfico? ¿Qué notas que es diferente?

74. Considere la ecuación.

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Es esta una función? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su alcance? ¿Cuál es su intersección con el eje y, si la hay? ¿Cuáles son sus intersecciones con el eje x, si las hay? ¿Es par, impar o ninguno de los dos? ¿Cómo describirías su gráfica?

75. Defina algunas funciones que pasan por 10, 02 y 11, 12 y aumentan para x Ú 0. Comience su lista con y = 2x, y = x e y = x2 . ¿Puedes proponer un general? resultado sobre tales funciones?

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 76 a 85 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

76. Simplifica: 1x-3 y5 2 $^{-2}$

77. Encuentra el centro y el radio del círculo x2 + y2 = 6y + 16.

78. Resuelve: 4x - 512x - 12 = 4 - 71x + 12

79. Ethan tiene $60 000 para invertir. Pone parte del dinero en un CD que gana un 3% de interés simple por año y el resto en un fondo mutuo que gana un 8% de interés simple por año. ¿Cuánto invirtió en cada uno si el interés devengado el primer año fue de $3700?

80. Encuentra el cociente y el resto cuando x3 + 3x2 - 6 se divide por x + 2.

81. ¿Cuál es el conjugado de - 2i? $\frac{3}{2}$

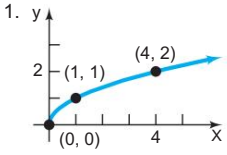
82. Identifica el término principal: - 5x4 + 8x2 - 2x7

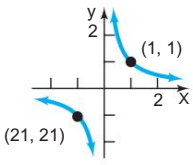
83. Simplifica: 21 5t $^{2}{}_{2}{}^{2}$ + 125t 7>2 2 ^{2}

84. Encuentra el dominio de h1x2 = 24 x + 7 + 7x.

85. Factorizar: 3x3 y - 2x2 y2 + 18x - 12y

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 

2. 

3. 10, - 82, 12, 02

2.5 Técnicas gráficas: transformaciones

OBJETIVOS 1 Graficar funciones usando desplazamientos verticales y horizontales (p. 134)
2 Funciones gráficas mediante compresiones y estiramientos (p. 138)
3 Graficar funciones usando reflexiones sobre los ejes x y y (p. 140)

En esta etapa, debería poder graficar rápidamente cualquiera de las funciones.

y = xy = x2 y = x3 y = 2x y = 23 xy = $\frac{1}{x}$ y = 0 x 0

con puntos clave trazados. Si es necesario, revise la sección anterior, Figuras 37 a 43.

A veces se nos pide que grafiquemos una función que es “casi” parecida a una que ya sabemos graficar. En esta sección, desarrollamos técnicas para graficar dichas funciones. En conjunto, estas técnicas se denominan transformaciones.

1 Funciones gráficas mediante desplazamientos verticales y horizontales

EJEMPLO 1

Desplazamiento vertical hacia arriba

Usa la gráfica de f1x2 = x2 para obtener la gráfica de g1x2 = x2 + 3. Encuentra el dominio y rango de g.

Solución

La función g1x2 = x2 + 3 es básicamente una función cuadrada. De hecho, observa que g1x2 = f1x2 + 3. Crea una tabla de valores para obtener algunos puntos en las gráficas de f y g. Por ejemplo, cuando x = 0, entonces y = f102 = 0 e y = g102 = 3.
Cuando x = 1, entonces y = f112 = 1 e y = g112 = 4. La Tabla 8 enumera estos y algunos otros puntos en cada gráfico. Observe que cada coordenada y de un punto en la gráfica de g es 3 unidades mayor que la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de f. Concluimos que la gráfica de g es idéntica a la de f, excepto que está desplazada verticalmente 3 unidades hacia arriba. Ver Figura 50.

Machine Translated by Google

Tabla 8

x	y · f 1x2 · x2	y · g 1x2 · x2 · 3
-2	4	7
-1	1	4
0	0	3
1	1	4
2	4	7

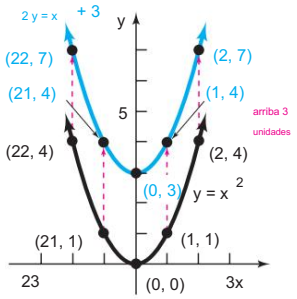


Figura 50

El dominio de g son todos los números reales, o 1 - q, q 2. El rango de g es 33, q 2.

EJEMPLO 2

Desplazamiento vertical hacia abajo

Usa la gráfica de f1x2 = x2 para obtener la gráfica de g1x2 = x2 - 4. Encuentra el dominio y rango de g.

Solución

La función g1x2 = x2 - 4 es básicamente una función cuadrada. La Tabla 9 enumera algunos puntos de las gráficas de f y g. Observe que cada coordenada y de g es 4 unidades menor que la coordenada y correspondiente de f. Observe también que g1x2 = f1x2 - 4.

Para obtener la gráfica de g a partir de la gráfica de f, resta 4 de cada coordenada y en la gráfica de f. La gráfica de g es idéntica a la de f excepto que está desplazada 4 unidades hacia abajo. Ver Figura 51.

Tabla 9

x	y · f 1x2 · x2	y · g 1x2 · x2 · 4
-2	4	0
-1	1	-3
0	0	-4
1	1	-3
2	4	0

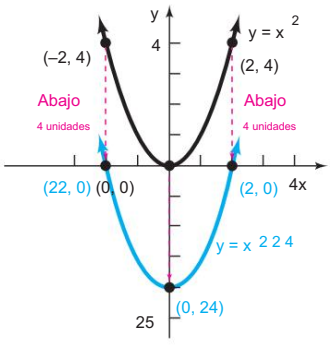


Figura 51

El dominio de g son todos los números reales, o 1 - q, q 2. El rango de g es 3 - 4, q 2.

Un desplazamiento vertical afecta sólo el rango de una función, no el dominio. Por ejemplo, el rango de f1x2 = x2 es 30, q 2. En el Ejemplo 1 el rango de g1x2 = f1x2 + 3 es 33, q 2, mientras que en el ejemplo 2 el rango de g1x2 = f1x2 - 4 es 3 - 4, q 2 . El dominio de las tres funciones son todos los números reales.

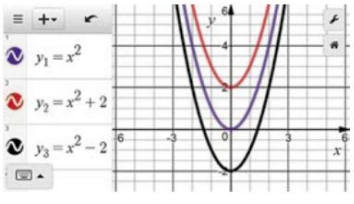


Figura 52

Exploración En la misma pantalla, grafica cada una de las siguientes funciones:

Y1 = x2 Y2 = x2 + 2 Y3 = x2 - 2

La Figura 52 ilustra los gráficos usando Desmos. Deberías haber observado un patrón general. Con Y1 = x2 en la pantalla, la gráfica de Y2 = x2 + 2 es idéntica a la de Y1 = x2, excepto que se desplaza verticalmente 2 unidades hacia arriba. La gráfica de Y3 = x2 - 2 es idéntica a la de Y1 = x2, excepto que se desplaza verticalmente hacia abajo 2 unidades.

Machine Translated by Google

En palabras

Para y = f 1x2 + k, k 7 0, suma k a cada coordenada y en la gráfica de y = f 1x2 para desplazar la gráfica hacia arriba k unidades.
Para y = f 1x2 - k, k 7 0, resta k de cada coordenada y para desplazar la gráfica hacia abajo k unidades.

Nos llevan a las siguientes conclusiones:

Cambios verticales

- Si se suma un número real positivo k a la salida de una función y = f1x2, la gráfica de la nueva función y = f1x2 + k es la gráfica de f desplazada verticalmente hacia arriba k unidades.
- Si se resta un número real positivo k de la salida de una función y = f1x2, la gráfica de la nueva función y = f1x2 - k es la gráfica de f desplazada verticalmente hacia abajo k unidades.

Ahora resuelve el problema 3 7

EJEMPLO 3

Desplazamiento horizontal hacia la derecha

Usa la gráfica de f1x2 = 1x para obtener la gráfica de g1x2 = 1x - 2. Encuentra el dominio y rango de g.

Solución

La función g1x2 = 1x - 2 es básicamente una función de raíz cuadrada. La Tabla 10 enumera algunos puntos de las gráficas de f y g. Tenga en cuenta que cuando f1x2 = 0, entonces x = 0, pero cuando g1x2 = 0, entonces x = 2. Además, cuando f1x2 = 2, entonces x = 4, pero cuando g1x2 = 2, entonces x = 6. Las coordenadas x en la gráfica de g son 2 unidades más grandes que las coordenadas x correspondientes en la gráfica de f para cualquier coordenada y dada. Observe también que g1x2 = f1x - 22. Concluimos que la gráfica de g es idéntica a la de f, excepto que se desplaza horizontalmente 2 unidades hacia la derecha. Ver Figura 53.

Tabla 10

x	y · f 1x2 · 1xx		y · g 1x2 · 1x · 2	
0	0		2	0
1	1		3	1
4	2		6	2
9	3		11	3

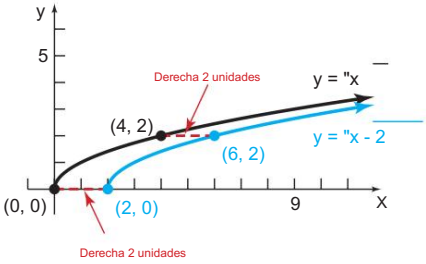


Figura 53

El dominio de g es 32, q 2 y el rango de g es 30, q 2.

EJEMPLO 4

Desplazamiento horizontal hacia la izquierda

Usa la gráfica de f1x2 = 1x para obtener la gráfica de g1x2 = 1x + 4. Encuentra el dominio y rango de g.

Solución

La función g1x2 = 1x + 4 es básicamente una función de raíz cuadrada. La Tabla 11 enumera algunos puntos de las gráficas de f y g. Tenga en cuenta que cuando f1x2 = 0, entonces x = 0, pero cuando g1x2 = 0, entonces x = - 4. Además, cuando f1x2 = 2, entonces x = 4, pero cuando g1x2 = 2, entonces x = 0. La x- Las coordenadas en la gráfica de g son 4 unidades más pequeñas que las coordenadas x correspondientes en la gráfica de f para cualquier coordenada y dada.
Observe también que g1x2 = f1x + 42. Concluimos que la gráfica de g es idéntica a la de f, excepto que se desplaza horizontalmente 4 unidades hacia la izquierda. Ver Figura 54.

Tabla 11

x	y · f 1x2 · 2xx		y · g1x2 · 2x · 4	
0	0		-4	0
1	1		-3	1
4	2		0	2
9	3		5	3

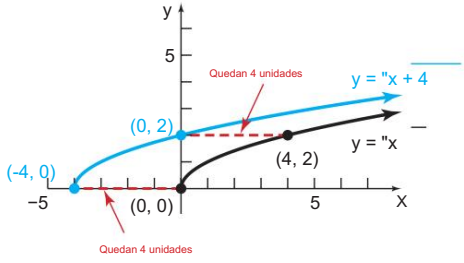


Figura 54

El dominio de g es 3 - 4, q 2 y el rango de g es 30, q 2.

Ahora resuelve el problema 4 1

Machine Translated by Google

Un desplazamiento horizontal afecta sólo al dominio de una función, no al rango. Por ejemplo, el dominio de f1x2 = 1x es 30, q 2. En el Ejemplo 3 el dominio de g1x2 = f1x - 22 es 32, q 2, mientras que en el ejemplo 4 el dominio de g1x2 = f1x + 42 es 3 - 4, q 2. El rango para las tres funciones es 30, q 2.

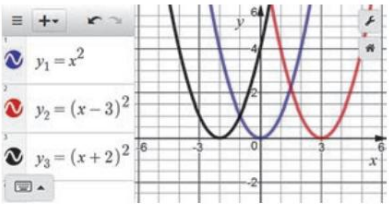


Figura 55

Exploración En la misma pantalla, grafica cada una de las siguientes funciones:

$$Y1 = x2 \qquad Y2 = 1x - 32 \text{ La}^{2} \qquad Y3 = 1x + 22^{2}$$

Figura 55 ilustra los gráficos usando Desmos.

Deberías haber observado el siguiente patrón. Con la gráfica de Y1 = x2 en la pantalla, es idéntica a la de Y1 la gráfica de Y2 = 1x - 32 a la ^{2} = x2, excepto que se desplaza horizontalmente es idéntica a la de Y1 = x2, derecha 3 unidades. La gráfica de Y3 = 1x + 22 se ^{2} excepto que es desplazó horizontalmente hacia la izquierda 2 unidades.

Nos llevan a las siguientes conclusiones:

En palabras

Para y = f 1x - h2, h 7 0, suma h a cada coordenada x en la gráfica de y = f 1x2 para desplazar la gráfica hacia la derecha h unidades.

Para y = f 1x + h2, h 7 0, resta h de cada coordenada x en la gráfica de y = f 1x2 para desplazar la gráfica hacia la izquierda h unidades.

Cambios horizontales

- Si el argumento x de una función f se reemplaza por x - h, h 7 0, la gráfica de la nueva función y = f1x - h2 es la gráfica de f desplazada horizontalmente hacia la derecha h unidades.
- Si el argumento x de una función f se reemplaza por x + h, h 7 0, la gráfica de la nueva función y = f1x + h2 es la gráfica de f desplazada horizontalmente hacia la izquierda h unidades.

Observe la distinción entre desplazamientos verticales y horizontales. La gráfica de f1x2 = x3 + 2 se obtiene desplazando la gráfica verticalmente porque primero evaluamos la función cúbica y luego sumamos 2. La gráfica de g1x2 = 1x + 22 se obtiene desplazando la gráfica de y = x3 horizontalmente porque sumamos 2 a x antes de evaluar la función del cubo.

Otra forma de pensar en la distinción es observar dónde ocurre el cambio. Si el desplazamiento ocurre fuera de la función básica, como es el caso de f1x2 = x3 + 2, entonces hay un desplazamiento vertical. Si el desplazamiento se produce dentro de la función básica, como es el caso de f1x2 = 1x + 22 ^{3}, entonces hay un desplazamiento horizontal.

La gráfica de una función se puede mover a cualquier parte del plano coordenado mediante combinando desplazamientos verticales y horizontales.

EJEMPLO 5 Combinando cambios verticales y horizontales

Grafica la función f1x2 = · x + 3 · - 5. Encuentra el dominio y rango de f.

Solución

Graficamos f en pasos. Primero, observe que f es básicamente una función de valor absoluto, así que comience con la gráfica de y = · x · como se muestra en la Figura 56(a). Luego, para obtener la gráfica de y = · x + 3 ·, desplaza la gráfica de y = · x · horizontalmente 3 unidades hacia la izquierda. Véase la Figura 56(b). Finalmente, para obtener la gráfica de y = · x + 3 · - 5, desplaza la gráfica de y = · x + 3 · verticalmente hacia abajo 5 unidades. Ver Figura 56(c).

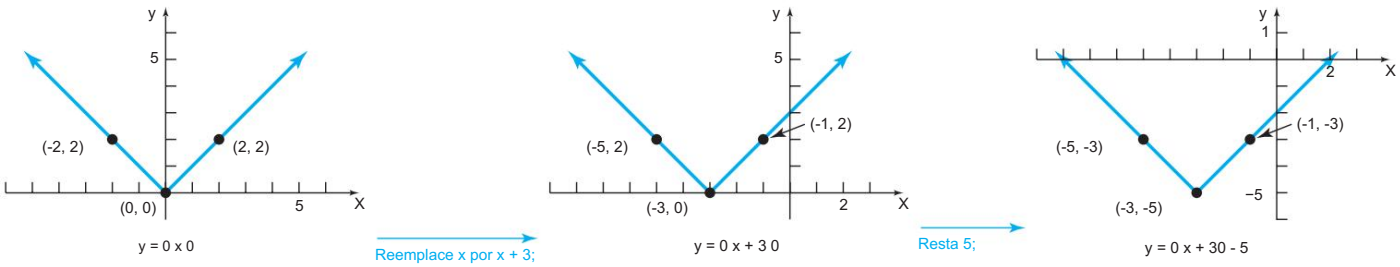


Figura 56

El dominio de f son todos los números reales, o 1 - q, q 2. El rango de f es 3 - 5, q 2.

Machine Translated by Google

Tenga en cuenta los puntos trazados en cada gráfico de la Figura 56. El uso de puntos clave puede ser útil para realizar un seguimiento de las transformaciones que se han realizado.

En el ejemplo 5, si el desplazamiento vertical se hubiera realizado primero, seguido del desplazamiento horizontal cambio, el gráfico final habría sido el mismo. Pruébelo usted mismo.

Ahora resuelve los problemas 4 3 y 6 7

2 Funciones gráficas mediante compresiones y estiramientos

EJEMPLO 6 Estiramiento vertical

Usa la gráfica de f1x2 = 1x para obtener la gráfica de g1x2 = 21x.

Solución Para ver la relación entre las gráficas de f y g, enumeramos los puntos en cada gráfica, como se muestra en la Tabla 12. Para cada x, la coordenada y de un punto en la gráfica de g es 2 veces mayor que la coordenada y correspondiente en la gráfica de f. Es decir, g1x2 = 2 f1x2.

La gráfica de f1x2 = 1x se estira verticalmente por un factor de 2 para obtener la gráfica de g1x2 = 21x. Por ejemplo, 11, 12 está en la gráfica de f, pero 11, 22 está en la gráfica de g. Ver Figura 57.

Tabla 12

x	y · f 1x2 · 1x	y · g 1x2 · 21x
0	0	0
1	1	2
4	2	4
9	3	6

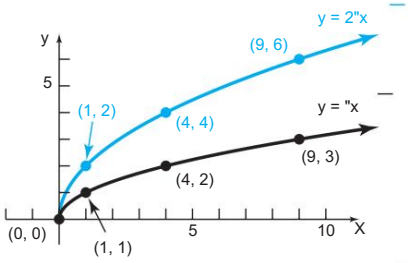


Figura 57

EJEMPLO 7 Compresión vertical

Utilice la gráfica de f1x2 = 0 x 0 para obtener la gráfica de g1x2 = $\frac{1}{2}$ 0x0 . _ _

Solución Para cada x, la coordenada y de un punto en la gráfica de g es $\frac{1}{2}$ tan grande como el coordenada y correspondiente en la gráfica de f. Es decir, g1x2 = $\frac{1}{2}$ f1x2. El gráfico de f1x2 = 0 x 0 se comprime verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$ para obtener la gráfica de g1x2 = $\frac{1}{2}$ 0x0 . _ _ Por ejemplo, (2, 2) está en la gráfica de f, pero (2, 1) está en la gráfica de g. Consulte la Tabla 13 y la Figura 58.

Tabla 13

x	y · f 1x2 · x	y · g 1x2 · $\frac{1}{2}$ x
-2	2	1
-1	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$
2	2	1

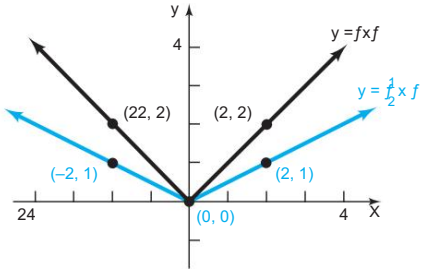


Figura 58

Machine Translated by Google

En palabras

Para y = a f1x2, a 7 0, el factor a está "fuera" de la función, por lo que afecta las coordenadas y. Multiplica cada coordenada y en la gráfica de y = f1x2 por a.

Compresión o estiramiento vertical

Si una función y = f1x2 se multiplica por un número positivo a, entonces la gráfica de la nueva función y = a f1x2 se obtiene multiplicando cada coordenada y de la gráfica de y = f1x2 por a. • Si 0 6 a 6 1, se produce una compresión vertical por un factor de a .

• Si a 7 1, resulta un estiramiento vertical por un factor de a .

Ahora resuelve el problema 4 5

¿Qué sucede si el argumento x de una función y = f1x2 se multiplica por un número positivo a, creando una nueva función y = f1ax2? Para encontrar la respuesta, mira la siguiente Exploración.

Exploración En la misma pantalla, grafica cada una de las siguientes funciones:

Y1 = f 1x2 = 1x Y2 = f 12x2 = 22x Y3 = f a 1 2xb = B 1 2 x = un x2

Crea una tabla de valores para explorar la relación entre las coordenadas x e y de cada función.

Resultado Debería haber obtenido los gráficos de la Figura 59. Mire la Tabla 14(a). Tenga en cuenta que (1, 1), (4, 2) y (9, 3) son puntos en la gráfica de Y1 = 1x. Además, (0,5, 1), (2, 2) y (4,5, 3) son puntos en la gráfica de Y2 = 22x. Para una coordenada y dada, la coordenada x en el gráfico de Y2 es $\frac{1}{2}$ de la coordenada x en Y1.

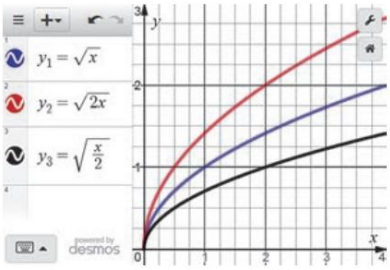
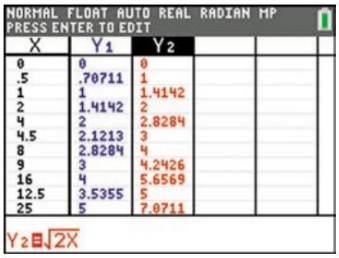
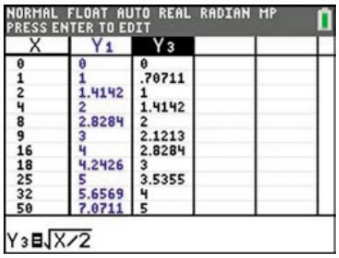


Figura 59

Tabla 14



(a)



(b)

Concluimos que la gráfica de Y2 = 22x se obtiene multiplicando la coordenada x de cada punto de la gráfica de Y1 = 1x por de $\frac{1}{2}$. La gráfica de Y2 = 22x es la gráfica de Y1 = 1x comprimido horizontalmente.

Mire la Tabla 14(b). Observa que (1, 1), (4, 2) y (9, 3) son puntos en la gráfica de Y1 = 1x. Observe también que (2, 1), (8, 2) y (18, 3) son puntos en la gráfica de Y3 = A x $\frac{1}{2}$. por un dada la coordenada y, la coordenada x en la gráfica de Y3 es 2 veces la coordenada x en Y1. Nosotros concluir que la gráfica de Y3 = A x $\frac{1}{2}$ se obtiene multiplicando la coordenada x de cada punto en la gráfica de Y1 = 1x por 2. La gráfica de Y3 = A x $\frac{1}{2}$ es la gráfica de Y1 = 1x estirada horizontalmente.

Con base en la Exploración, tenemos el siguiente resultado:

En palabras

Para y = f 1ax2, a 7 0, el factor a está "dentro" de la función, por lo que afecta las coordenadas x. Multiplica cada coordenada x por 1 gráfica de y = f 1x2 por $\frac{1}{a}$.

Compresión o estiramiento horizontal

Si el argumento de una función y = f1x2 se multiplica por un número positivo a, entonces la gráfica de la nueva función y = f1ax2 se obtiene multiplicando cada uno Coordenada x de la gráfica de y = f1x2 por $\frac{1}{a}$.

• Si es 7 1, se obtiene una compresión horizontal por un factor de resultados. $\frac{1}{a}$

• Si 0 6 a 6 1, un estiramiento horizontal por un factor de $\frac{1}{a}$ resultados.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 8 Graficar usando estiramientos y compresiones

La gráfica de y = f1x2 se muestra en la Figura 60. Utilice esta gráfica para encontrar las gráficas de

(a) y = 2f1x2 (b) y = f13x2

Solución

(a) Debido a que el 2 está "fuera" de la función f, la gráfica de y = 2 f1x2 se obtiene multiplicando cada coordenada y de y = f1x2 por 2. Consulte la Figura 61.

(b) Como el 3 está "dentro" de la función f, la gráfica de y = f13x2 se obtiene de la gráfica de y = f1x2 multiplicando cada coordenada x de y = f1x2 por $\frac{1}{3}$. Ver Figura 62.

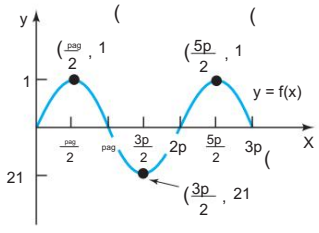


Figura 60 y = f1x2

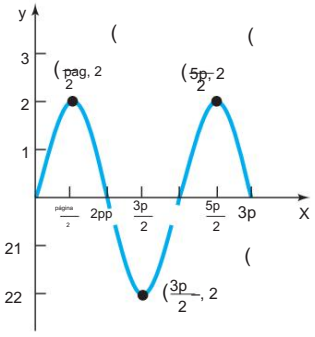


Figura 61 y = 2f1x2; Estiramiento vertical por un factor de 2

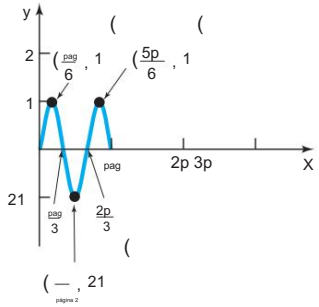


Figura 62 y = f13x2; Horizontal compresión por un factor de $\frac{1}{3}$

Ahora resuelve los problemas 6 1 (e) y (g)

3 Graficar funciones usando reflexiones sobre los ejes x y y

EJEMPLO 9 Reflexión sobre el eje x

Grafique la función f1x2 = - x2 . Encuentra el dominio y rango de f.

Solución

Tenga en cuenta que f es básicamente una función cuadrada, así que comience con la gráfica de y = x2, como se muestra en negro en la Figura 63. Para cada punto (x, y) en la gráfica de y = x2 , el punto 1x, - y2 está en la gráfica de y = - x2 , como se indica en la Tabla 15. Dibuje la gráfica de y = - x2 por reflejando la gráfica de y = x2 con respecto al eje x. Ver Figura 63.

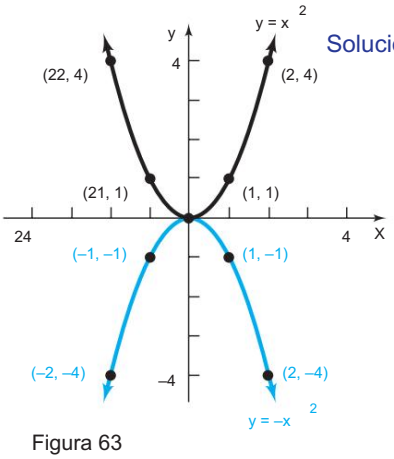


Figura 63

Tabla 15

x	y · x2	y ·· x2
-2	4	-4
-1	1	-1
0	0	0
1	1	-1
2	4	-4

El dominio de f son todos los números reales, o 1 - q, q 2. El rango de f es 1 - q, 04 .

Reflexión sobre el eje x

Cuando una función f se multiplica por - 1, la gráfica de la nueva función y = - f1x2 es la reflexión sobre el eje x de la gráfica de la función f.

Ahora problema de trabajo 4 7

Machine Translated by Google

EJEMPLO 10 Reflexión sobre el eje y

Grafica la función f1x2 = 1- x. Encuentra el dominio y rango de f.

Solución

Para graficar f1x2 = 1- x, comience con la gráfica de y = 1x, como se muestra en negro en la Figura 64. Para cada punto (x, y) en la gráfica de y = 1x, el punto 1 - x, y2 está en la gráfica de y = 1- x, como se enumera en la Tabla 16. Obtenga la gráfica de y = 1- x mediante reflejando la gráfica de y = 1x alrededor del eje y. Ver Figura 64.

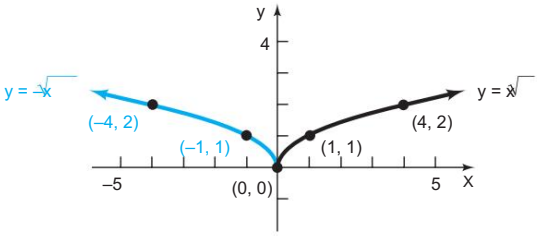


Figura 64

Tabla 16

xy · 2xx		y ·2·x	
0	0	0	0
1	1	-1	1
4	2	-4	2
9	3	-9	3

El dominio de f es 1 - q, 0]. El rango de f es el conjunto de todos los números reales no negativos, o 30, q 2.

En palabras
Para y = - f 1x2, multiplica cada coordenada y en la gráfica de y = f 1x2 por - 1.
Para y = f 1 - x2, multiplica cada coordenada x por - 1.

Reflexión sobre el eje y

Cuando se conoce la gráfica de la función f , la gráfica de la nueva función y = f1 - x2 es la reflexión sobre el eje y de la gráfica de la función f.

RESUMEN DE TÉCNICAS DE GRAFÍAS

Cada técnica gráfica tiene un efecto diferente en la gráfica de una función. Las compresiones y estiramientos cambian las proporciones de un gráfico y las reflexiones cambian la orientación, pero no sus proporciones. Los desplazamientos verticales y horizontales cambian la ubicación del gráfico, sin cambiar sus proporciones ni su orientación.

Para graficar:	Dibuja la gráfica de f y:	Cambio funcional a f(x)
desplazamientos verticales		
y = f1x2 + k, k 7 0 y = f1x2 - k, k 7 0	Desplaza la gráfica de f hacia arriba k unidades. Desplaza la gráfica de f hacia abajo k unidades.	Agregue k a f1x2. Resta k de f1x2.
Cambios horizontales		
y = f1x + h2, h 7 0 y = f1x - h2, h 7 0	Desplaza la gráfica de f a la izquierda h unidades. Desplaza la gráfica de f hacia la derecha h unidades.	Reemplace x por x + h. Reemplace x por x - h.
Comprimir o estirar		
y = af1x2, a 7 0	Multiplica cada coordenada y de y = f1x2 por a. Estire la gráfica de f verticalmente si a 7 1. Comprime la gráfica de f verticalmente si 0 6 a 6 1.	Multiplica f1x2 por a.
y = f1ax2, a 7 0	Multiplica cada coordenada x de y = f1x2 por $\frac{1}{a}$. Estire la gráfica de f horizontalmente si 0 6 a 6 1. Comprime la gráfica de f horizontalmente si a 7 1.	Reemplace x por ax.
Reflexión sobre el eje x.		
y = - f1x2	Refleja la gráfica de f respecto del eje x.	Multiplica f1x2 por - 1.
Reflexión sobre el eje y		
y = f1 - x2	Refleja la gráfica de f respecto del eje y.	Reemplace x por -x .

Machine Translated by Google

EJEMPLO 11 Determinar la función obtenida de una serie de transformaciones

Encuentre la función que finalmente se grafica después de aplicar la siguiente secuencia de transformaciones a la gráfica de y = 0 x 0 .

1. Desplazamiento a la izquierda 2 unidades
2. Subir 3 unidades
3. Reflexiona sobre el eje y.

Solución

1. Desplazarse 2 unidades hacia la izquierda: Reemplazar x por x + 2. y = 0 x + 2 0
2. Subir 3 unidades: Sumar 3. y = 0 x + 2 0 + 3
3. Reflexiona sobre el eje y: reemplaza x por - x. y = 0 - x + 2 0 + 3

Ahora trabaja el problema 2 9

EJEMPLO 12 Usar técnicas gráficas

Grafica la función $f(x) = \frac{3}{x - 2} + 1$. Encuentra el dominio y rango de f.

Solución

Es útil escribir f como $f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x - 2} + 1$. Ahora utilice los siguientes pasos para obtener la gráfica de f.

SUGERENCIA: Aunque el orden en el que se realizan las transformaciones se puede modificar, considere utilizar el siguiente orden para mantener la coherencia:

1. Desplazamiento horizontal
2. Reflexiones
3. Compresiones y estiramientos
4. Desplazamiento vertical

Paso 1: $y = \frac{1}{x}$ función recíproca

Paso 2: $y = \frac{1}{x - 2}$ Reemplace x por x · 2; desplazamiento horizontal hacia la derecha 2 unidades.

Paso 3: $y = 3 \cdot \frac{1}{x - 2} = \frac{3}{x - 2}$ Multiplicar por 3; estiramiento vertical por un factor de 3.

Paso 4: $y = \frac{3}{x - 2} + 1$ Añade 1; desplazamiento vertical hacia arriba 1 unidad.

Ver Figura 65.

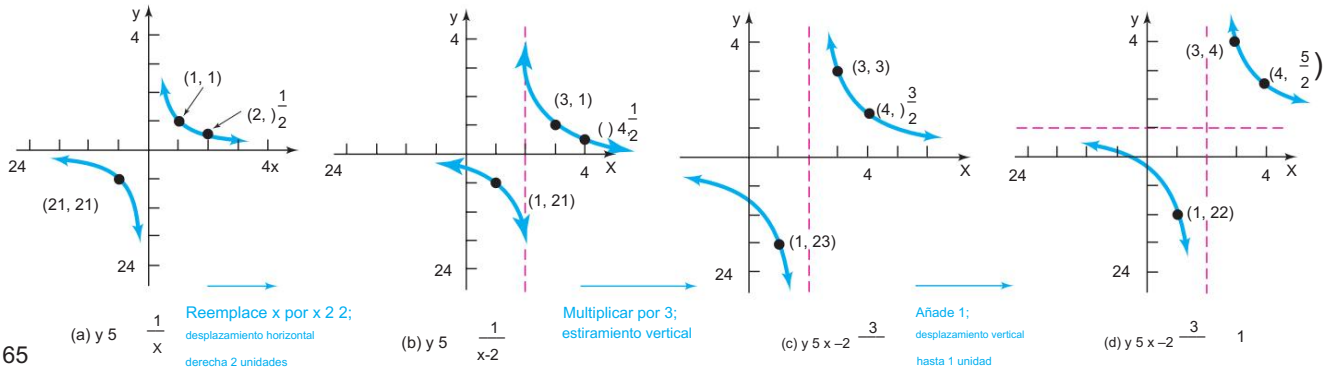


Figura 65

El dominio de $y = \frac{1}{x}$ es 5x· x · 06 y su rango es 5y· y · 06. Debido a que nos desplazamos 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba para obtener f, el dominio de f es 5x· x · 26 y su rango es 5y· y · 16.

Machine Translated by Google

Otros ordenamientos de los pasos mostrados en el ejemplo 12 también darían como resultado la gráfica de f. Por ejemplo, prueba este:

Paso 1: $y = \frac{1}{x}$ función recíproca

Paso 2: $y = 3 \# \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ Multiplicar por 3; estiramiento vertical por un factor de 3.

Paso 3: $y = x - 2 \frac{3}{\quad}$ Reemplace x por x · 2; desplazamiento horizontal hacia la derecha 2 unidades.

Paso 4: $y = + 1 \frac{3}{x - 2}$ Añade 1; desplazamiento vertical hacia arriba 1 unidad.

EJEMPLO 13 Usar técnicas gráficas

Grafica la función f1x2 = 21 - x + 2. Encuentra el dominio y rango de f.

Solución Comience reescribiendo f1x2 como f1x2 = 21 - x + 2 = 2- x + 1 + 2. Ahora siga los siguientes pasos.

Paso 1: y = 1x Función de raíz cuadrada

Paso 2: y = 2x + 1 Reemplace x por x · 1; desplazamiento horizontal hacia la izquierda 1 unidad.

Paso 3: y = 2- x + 1 = 21 - x Reemplace x por ·x; reflexiona sobre el eje y.

Paso 4: y = 21 - x + 2 Añade 2; desplazamiento vertical hacia arriba 2 unidades.

Ver Figura 66.

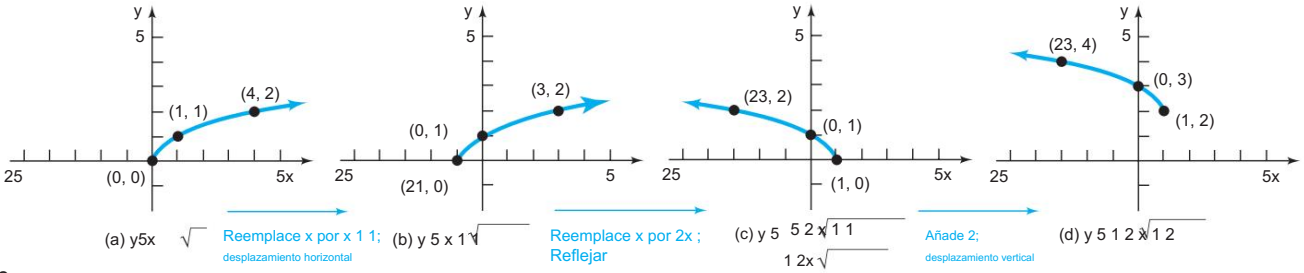


Figura 66

El dominio de f es 1 - q, 1] y el rango es 32, q 2.

Ahora resuelve el problema 5 3

2.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Supongamos que se conoce la gráfica de una función f . Entonces el desplazamiento de y = f1x - 22 se obtiene mediante _____ gráfico de la una gráfica de f _____ una distancia de 2 unidades.

elevada a 2. Supongamos que se conoce la gráfica de una función f . Entonces la gráfica de y = f1 - x2 es una reflexión respecto del eje _____ de la gráfica de la función y = f1x2.

3. Verdadero o Falso La gráfica de $y = g1x2 es \frac{1}{3}$ la gráfica de y = g1x2 estirado verticalmente por un factor de 3.

4. Verdadero o Falso La gráfica de y = - f1x2 es la reflexión alrededor del eje x de la gráfica de y = f1x2.

5. Opción múltiple ¿Qué función tiene una gráfica que es la gráfica de y = 2x desplazada 3 unidades hacia abajo?

(a) y = 2x + 3 (b) y = 2x - 3

(c) y = 2x + 3 (d) y = 2x - 3

6. Opción múltiple ¿Qué función tiene una gráfica que es la gráfica de y = f 1x2 estirada horizontalmente por un factor de 4?

(a) y = f14x2 (b) y = f a 1 4xb

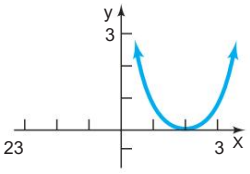
(c) y = 4f1x2 (d) $y = \frac{1}{4}$f1x2

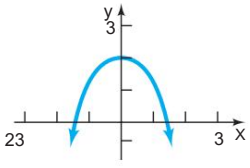
Machine Translated by Google

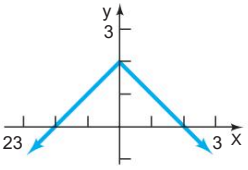
Desarrollo de habilidades

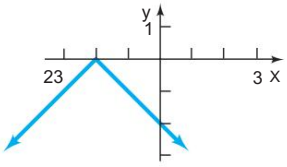
En los problemas 7 a 18, relacione cada gráfica con una de las siguientes funciones:

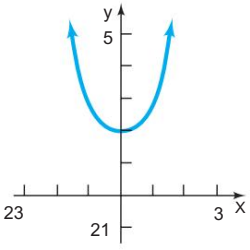
A. $y = x2 + 2$
B. $y = - x2 + 2$
C. $y = 0 x 0 + 2$
D. $y = - 0 x 0 + 2$
E. $y = 1x - 22$
F. $y = - 1x + 22$
G. $y = 0 x - 2 0$
H. $y = - 0 x + 2 0$
yo $y = 2x2$
J. $y = - 2x2$
K. $y = 2 0 x 0$
L. $y = - 2 0 x 0$

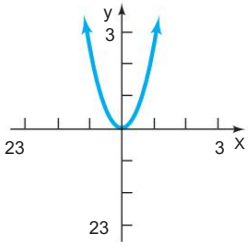
7. 

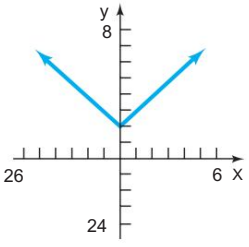
8. 

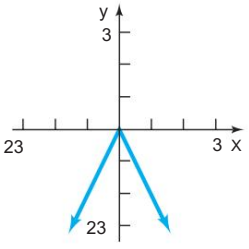
9. 

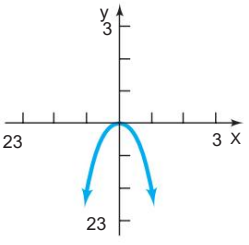
10. 

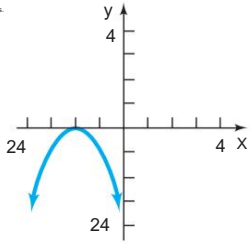
11. 

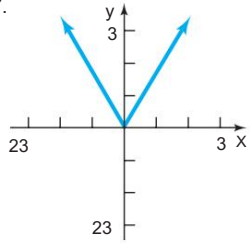
12. 

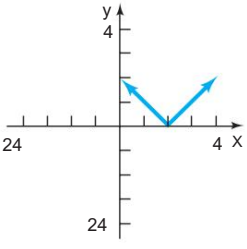
13. 

14. 

15. 

dieciséis. 

17. 

18. 

En los problemas 19 a 28, escriba la función cuya gráfica es la gráfica de $y = x3$, pero es:

19. Desplazado a la izquierda 4 unidades.
20. Desplazado a la derecha 4 unidades.
21. Bajó 4 unidades.
22. Subió 4 unidades
23. Reflexionado sobre el eje x.
24. Reflexionado sobre el eje y.
25. Estirado horizontalmente por un factor de 4
26. Estirado verticalmente por un factor de 5
27. Comprimido verticalmente por un factor de 4 $\frac{1}{}$
28. Comprimido horizontalmente por un factor de 2 $\frac{1}{}$

En los problemas 29 a 32, encuentre la función que finalmente se representa gráficamente después de aplicar cada una de las siguientes transformaciones a la gráfica de $y = \overline{1x}$ en el orden indicado.

29. (1) Subir 2 unidades
(2) Reflexiona sobre el eje x
(3) Reflexiona sobre el eje y

30. (1) Reflexiona sobre el eje x.
(2) Desplazamiento a la derecha 3 unidades
(3) Bajar 2 unidades

31. (1) Subir 2 unidades
(2) Reflexiona sobre el eje y
(3) Desplazamiento a la izquierda 3 unidades

32. (1) Estiramiento vertical por un factor de 3
(2) Subir 4 unidades
(3) Desplazamiento a la izquierda 5 unidades

33. Si 13, 62 es un punto en la gráfica de $y = f1x2$, ¿cuál de los siguientes puntos debe estar en la gráfica de $y = f1 - x2$?
(a) 16, 32 (b) 16, - 32
(c) 13, - 62 (d) 1 - 3, 62

34. Si 13, 62 es un punto en la gráfica de $y = f1x2$, ¿cuál de los siguientes puntos debe estar en la gráfica de $y = - f1x2$?
(a) 16, 32 (b) 16, - 32
(c) 13, - 62 (d) 1 - 3, 62

35. Si 14, 22 es un punto en la gráfica de $y = f1x2$, ¿cuál de los siguientes puntos debe estar en la gráfica de $y = f12x2$?
(a) 14, 12 (b) 18, 22
(c) 12, 22 (d) 14, 42

36. Si 11, 32 es un punto en la gráfica de $y = f1x2$, ¿cuál de los siguientes puntos debe estar en la gráfica de $y = 2f1x2$?
(a) a1, 3 $\frac{}{2 \text{ segundo}}$
(b) 12, 32
(c) 11, 62
(d) un $\overline{2}$, 3b

Machine Translated by Google

En los problemas 37 a 60, represente gráficamente cada función utilizando las técnicas de desplazamiento, compresión, estiramiento y/o reflexión. Comience con la gráfica de la función básica (por ejemplo, y = x2) y muestre todos los pasos. Asegúrese de mostrar al menos tres puntos clave. Encuentra el dominio y el rango de cada función.

37. f1x2 = x2 - 1

38. f1x2 = x2 + 4

39. g1x2 = A 3 $\frac{1}{2}$x

40. g1x2 = 23x

41. h1x2 = 2x + 2

42. h1x2 = 2x + 1

43. f1x2 = 1x - 12 ^{3} + 2

44. f1x2 = 1x + 22

45. g1x2 = 41x

46. g1x2 = $\frac{1}{2}$ 1x2

47. ^{3} - 3

f1x2 = - 23 x

48. f1x2 = - 1x

49. f1x2 = 31x - 22

50. f1x2 = 21x + 12 ^{2} - 3

51. g1x2 = 3 0 x + 1 0 - 3

52. ^{2} + 1

g1x2 = 22x - 2 + 1

53. h1x2 = 1 - x - 2

54. h1x2 = $\frac{4}{x}$ + 2

55. f1x2 = - 42x - 1

56. f1x2 = - 1x + 12 ^{3} - 1

57. g1x2 = 422- x

58. g1x2 = 2 0 1 - x 0

59. h1x2 = 23 x - 1 + 3

60. h1x2 = 2x $\frac{1}{2}$

En los problemas 61 a 64 se ilustra la gráfica de una función f. Utilice la gráfica de f como primer paso para graficar cada una de las siguientes funciones:

(a) F1x2 = f1x2 + 3

(b) G1x2 = f1x + 22

(c) P1x2 = - f1x2

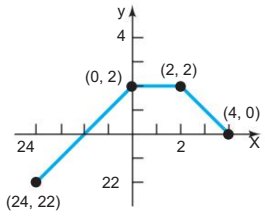
(d) H1x2 = f1x + 12 - 2

(e) Q1x2 = f1x2 2$\frac{1}{2}$

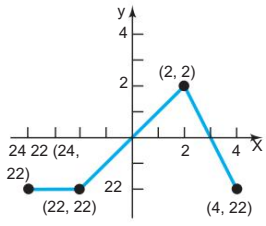
(f) g1x2 = f1 - x2

(g) h1x2 = f12x2

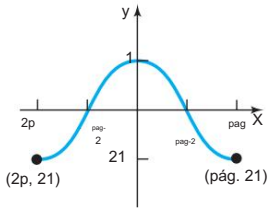
61.



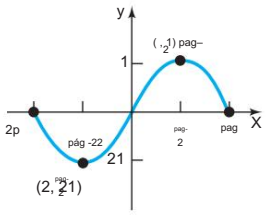
62.



63.



64.



Práctica mixta En los problemas 65 a 72, completa el cuadrado de cada expresión cuadrática. Luego grafica cada función usando técnicas gráficas. (Si es necesario, consulte el Apéndice A, Sección A.3 para revisar cómo completar el cuadrado).

65. f1x2 = x2 - 6x

66. f1x2 = x2 + 2x

67. f1x2 = x2 - 8x + 1

68. f1x2 = x2 + 4x + 2

69. f1x2 = 3x2 + 6x + 1

70. f1x2 = 2x2 - 12x + 19

71. f1x2 = - 2x2 - 12x - 13

72. f1x2 = - 3x2 - 12x - 17

Aplicaciones y extensiones

73. Supongamos que las intersecciones x de la gráfica de y = f1x2 son - 5 y 3.

(a) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de y = f1x + 22?

(b) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de y = f1x - 22?

(c) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de y = 4f1x2?

(d) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de y = f1 - x2?

74. Suponga que las intersecciones con el eje x de la gráfica de y = f1x2 son - 8 y 1.

(a) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de y = f1x + 42?

(b) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de y = f1x - 32?

(c) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de y = 2f1x2?

(d) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de y = f1 - x2?

75. Supongamos que la función y = f1x2 aumenta en el intervalo 3 - 1, 54.

(a) ¿En qué intervalo se encuentra la gráfica de y = f1x + 22? ¿creciente?

(b) ¿En qué intervalo se encuentra la gráfica de y = f1x - 52? ¿creciente?

(c) ¿La gráfica de y = - f1x2 es creciente, decreciente o ninguna de las dos cosas en el intervalo 3 - 1, 54?

(d) ¿La gráfica de y = f1 - x2 es creciente, decreciente o ninguna de las dos cosas en el intervalo 3 - 5, 14?

76. Supongamos que la función y = f1x2 es decreciente en el intervalo 3 - 2, 74.

(a) ¿En qué intervalo se encuentra la gráfica de y = f1x + 22? ¿decreciente?

(b) ¿En qué intervalo se encuentra la gráfica de y = f1x - 52? ¿decreciente?

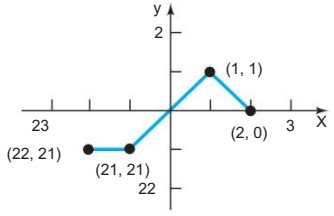
(c) ¿La gráfica de y = - f1x2 es creciente, decreciente o ninguna de las dos cosas en el intervalo 3 - 2, 74?

(d) ¿La gráfica de y = f1 - x2 es creciente, decreciente o ninguna de las dos cosas en el intervalo 3 - 7, 24?

77. La gráfica de una función f se ilustra en la figura.

(a) Grafique y = 0 f1x2 0 .

(b) Grafique y = f1 0 x 0 2.

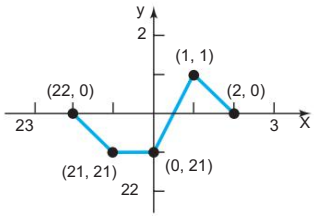


Machine Translated by Google

78. La gráfica de una función f se ilustra en la figura.

(a) Grafique y = 0 f1x2 0 .

(b) Grafique y = f1 0 x 0 2.



79. Supongamos que (1, 3) es un punto en la gráfica de y = f1x2.

(a) ¿Qué punto está en la gráfica de y = f1x + 32 - 5?

(b) ¿Qué punto está en la gráfica de y = - 2f1x - 22 + 1?

(c) ¿Qué punto está en la gráfica de y = f12x + 32?

80. Supongamos que 1 - 3, 52 es un punto en la gráfica de y = g1x2.

(a) ¿Qué punto está en la gráfica de y = g1x + 12 - 3?

(b) ¿Qué punto está en la gráfica de y = - 3g1x - 42 + 3?

(c) ¿Qué punto está en la gráfica de y = g13x + 92?

81. Grafica las siguientes funciones usando transformaciones.

(a) f1x2 = int1 - x2 (b) g1x2 = - int1x2

82. Grafica las siguientes funciones usando transformaciones.

(a) f1x2 = int1x - 12 (b) g1x2 = int11 - x2

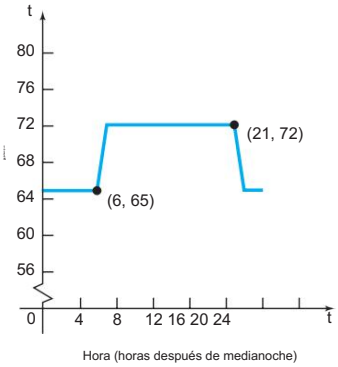
83. (a) Grafique f1x2 = · x - 3· - 3 usando transformaciones.

(b) Encuentre el área de la región que está limitada por f y el eje x y que se encuentra debajo del eje x.

84. (a) Grafique f1x2 = - 2· x - 4· + 4 usando transformaciones.

(b) Encuentre el área de la región que está limitada por f y el eje x y que se encuentra sobre el eje x.

85. Control de termostato Los expertos en conservación de energía estiman que los propietarios pueden ahorrar entre un 5 % y un 10 % en las facturas de calefacción en invierno programando sus termostatos entre 5 y 10 grados menos mientras duermen. En el siguiente gráfico, la temperatura T (en grados Fahrenheit) de una casa está dada en función del tiempo t (en horas después de la medianoche) durante un período de 24 horas.



Hora (horas después de medianoche)

(a) ¿A qué temperatura está ajustado el termostato durante el día? ¿A qué temperatura se ajusta el termostato durante la noche?

(b) El propietario reprograma el termostato en y = T1t2 - 2. Explique cómo esto afecta la temperatura de la casa. Grafique esta nueva función.

(c) El propietario reprograma el termostato a y = T1t + 12. Explique cómo esto afecta la temperatura de la casa. Grafique esta nueva función.

Fuente: Roger Albright, 547 maneras de consumir combustible de forma inteligente, 2000

86. Ingresos de la música digital Los ingresos totales de la música digital a nivel mundial R, en miles de millones de dólares, para los años 2012 a 2017 se pueden modelar mediante la función

$$R1x2 = 0,15x2 - 0,03x + 5,46$$

donde x es el número de años después de 2012.

(a) Encuentre R(0), R(3) y R(5) y explique qué representa cada valor.

(b) Encuentre r1x2 = R1x - 22.

(c) Encuentre r(2), r(5) y r(7) y explique qué representa cada valor.

(d) En el modelo r = r1x2, ¿qué representa x ?

(e) ¿Habría alguna ventaja en utilizar el modelo r al estimar los ingresos proyectados para un año determinado en lugar del modelo R?

Fuente: Informe IFPI sobre música digital 2017

87. Mediciones de temperatura La relación entre las escalas Celsius (°C) y Fahrenheit (°F) para medir la temperatura viene dada por la ecuación

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

La relación entre Celsius (°C) y Kelvin (K) escalas es K = C + 273. Grafique la ecuación $F = C + 32\ \frac{9}{5}$ usando grados Fahrenheit en el eje y y grados Celsius en el eje x. Utilice las técnicas introducidas en esta sección para obtener el gráfico que muestra la relación entre las temperaturas Kelvin y Fahrenheit.

88. Período de un péndulo El período T (en segundos) de un péndulo simple es función de su longitud l (en pies) definida por la ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde g ≈ 32,2 pies por segundo por segundo es la aceleración de la gravedad.

(a) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la función T = T1l2.

(b) Ahora grafique las funciones T = T1l + 12, T = T1l + 22, y T = T1l + 32.

(c) Analice cómo agregar a la longitud l cambia la periodo t.

(d) Ahora grafique las funciones T = T12l2, T = T13l2 y T = T14l2.

(e) Analice cómo multiplicar la longitud l por factores de 2, 3, y 4 cambia el periodo T.

89. La ecuación $y = 1x - c2^2$ define una familia de parábolas, una parábola por cada valor de c. En un conjunto de ejes de coordenadas, grafica los miembros de la familia para c = 0, c = 3 y c = - 2.

90. Repita el problema 89 para la familia de parábolas y = x2 + c.

91. Problema de desafío En estadística, el estándar normal 1 la función de densidad está dada por $f1x2 = 22p\ \frac{1}{\#}\ \text{expc-}\ \frac{x2}{2d.}$

Esta función se puede transformar para describir cualquier distribución normal general con media, my desviación estándar, s. Se da una función de densidad normal general.

Machine Translated by Google

por f1x2 = $\frac{1}{22p\,\#\,s}$ # expc- $\frac{1x - m2^{2}}{2s2d}$. Describe el transformaciones necesarias para pasar de la gráfica de la función normal estándar a la gráfica de una función normal general.

92. Problema de desafío Si una función f aumenta en los intervalos 3 - 3, 34 y 311, 194 y decrece en el intervalo 33, 114, determine el intervalo(s) en los que g1x2 = - 3 f12x - 52 aumenta.

Explicar conceptos: discusión y escritura

93. Supongamos que se conoce la gráfica de una función f . Explica en qué se diferencia la gráfica de y = 4f1x2 de la gráfica de y = f14x2.

94. Supongamos que se conoce la gráfica de una función f . Explica en qué se diferencia la gráfica de y = f1x2 - 2 de la gráfica de y = f1x - 22.

95. El área bajo la curva y = 1x acotada desde abajo por 16 el eje x y a la derecha por x = 4 son unidades cuadradas. Usando $\frac{}{3}$ De acuerdo con las ideas presentadas en esta sección, ¿cuál crees que es el área bajo la curva de y = 1- x limitada desde abajo por el eje x y a la izquierda por x = - 4? Justifica tu respuesta.

96. Explique cómo se compara el rango de la función f 1x2 = x2 con el rango de g1x2 = f 1x2 + k.

97. Explique cómo se compara el dominio de g1x2 = 2x con el dominio de g1x - k2, donde k Ú 0.

Conserve su conocimiento

Los problemas 98 a 106 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

98. Encuentra la pendiente y la intersección con el eje y de la recta 3x - 5y = 30

99. Angie corre 7 mph durante la primera mitad de un maratón, 13,1 millas, pero se tuerce la rodilla y debe caminar 2 mph durante la segunda mitad. ¿Cuál fue su velocidad promedio? Redondear a 2 decimales.

100. Encuentre la cantidad de agua utilizada en una ducha de 9 minutos si los galones de agua g utilizados al ducharse dependen de la cantidad de minutos m que se abre la ducha según el modelo

gramo = 1,75 m

101. Encuentra las intersecciones y prueba la simetría: y2 = x + 4

102. Encuentra el dominio de h1x2 = $\frac{x + 2}{x2 - 5x - 14.}$

103. Movimiento de proyectil Se lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio. Su altura h, en pies, después de t segundos viene dada por la ecuación h = - 16t ^{2} + 96t + 200. ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en estar a 88 pies del suelo?

104. Simplifica 23 16x5 y6 z.

105. Encuentra el cociente de diferencias de f1x2 = 3x2 + 2x - 1.

106. Factoriza z3 + 216.

2.6 Modelos matemáticos: funciones de construcción

OBJETIVO 1 Construir y analizar funciones (p. 147)

1 Construir y analizar funciones

Los problemas del mundo real a menudo resultan en modelos matemáticos que involucran funciones. Estas funciones deben construirse o construirse en función de la información proporcionada. Al construir funciones, debemos ser capaces de traducir la descripción verbal al lenguaje matemático. Esto se hace asignando símbolos para representar las variables independientes y dependientes y luego encontrando la función o regla que relaciona estas variables.

EJEMPLO 1 Encontrar la distancia desde el origen a un punto en una gráfica

Sea P = 1x, y2 un punto en la gráfica de y = x2 - 1.

(a) Gráfica f. Exprese la distancia d desde P hasta el origen O en función de x.

(b) ¿Cuál es d si x = 0? (c) ¿Cuál es d si x = 1? (d) ¿Cuál es d si x = $\frac{22}{2}$?

(e) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la función d = d1x2, x Ú 0. Redondeando a dos decimales, encuentre el valor de x en el que d tiene un mínimo local. [Esto da los puntos en la gráfica de y = x2 - 1 más cercanos al origen.]

Machine Translated by Google

Solución (a) La Figura 67 ilustra la gráfica de y = x2 - 1. La distancia d de P a O es

$$d = 21x - 02^{2} + 1 \text{ año} - 02^{2} = 2x2 + y2$$

Como P es un punto en la gráfica de y = x2 - 1, sustituye y por x2 - 1 . Entonces

$$d1x2 = 2x2 + 1x2 - 12^{2} = 2x4 - x2 + 1$$

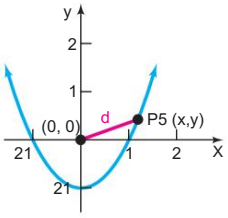


Figura 67 y = x2 - 1

La distancia d se expresa en función de x.

(b) Si x = 0, la distancia d es

$$d102 = 204 - 02 + 1 = 21 = 1$$

(c) Si x = 1, la distancia d es

$$d112 = 21\,4^{2-1} + 1 = 1$$

(d) Si x = $\frac{22}{2}$, la distancia d es

$$da\frac{12}{2 \text{ segundo}} = \text{segundo un}\frac{12}{2 \text{ segundo}}^{4} - a\frac{12}{2 \text{ segundo}}^{2} + 1 = B\,1\,\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{13}{2}$$

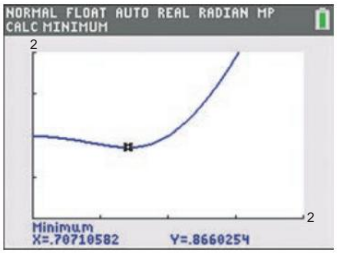


Figura 68
d1x2 = 2x4 - x2 + 1

(e) La Figura 68 muestra la gráfica de Y1 = 2x4 - x2 + 1. Usando la función MÍNIMO en una TI-84 Plus C, encontramos que cuando x ≈ 0,71 el valor de d es más pequeño. El valor mínimo local es d ≈ 0,87 redondeado a dos decimales. Dado que d(x) es par, se deduce por simetría que cuando x ≈ - 0,71, el valor de d es el mismo valor mínimo local. Dado que 1 {0.712 - 1 ≈ - 0.50, los puntos 1 - 0.71, - 0.502 y 10.71, - 0.502 en la gráfica de y = x2 - 1 son los más cercanos al origen.

Ahora trabaja el problema 1

EJEMPLO 2

Área de un rectángulo

Un rectángulo tiene una esquina en el cuadrante I de la gráfica de y = 25 - x2, otro en el origen, un tercero en el eje y positivo y el cuarto en el eje x positivo. Ver Figura 69.

(a) Exprese el área A del rectángulo como función de x.

(b) ¿Cuál es el dominio de A?

(c) Grafica A = A1x2.

(d) ¿ Para qué valor de x es mayor el área A ?

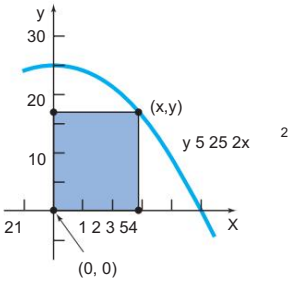


Figura 69

Solución (a) El área A del rectángulo es A = xy, donde y = 25 - x2 . Sustituyendo y en esta expresión, obtenemos A1x2 = x125 - x22 = 25x - x3 .

(b) Como (x, y) está en el cuadrante I, tenemos x 7 0. Además, y = 25 - x2 7 0, lo que implica que x2 6 25, por lo que - 5 6 x 6 5. Combinando estas restricciones, la El dominio de A es 5x· 0 6 x 6 56, o (0, 5) usando notación de intervalo.

Machine Translated by Google

(c) Consulte la Figura 70 para ver el gráfico de A = A1x2 en una TI-84 Plus C.

(d) Usando MÁXIMO, encontramos que el área máxima es 48,11 unidades cuadradas en x = 2,89 unidades, cada una redondeada a dos decimales. Ver Figura 71.

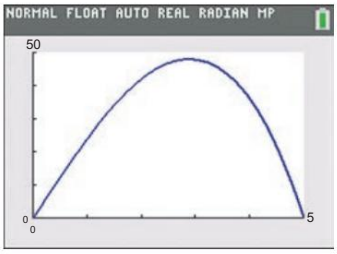


Figura 70 A1x2 = 25x - x3

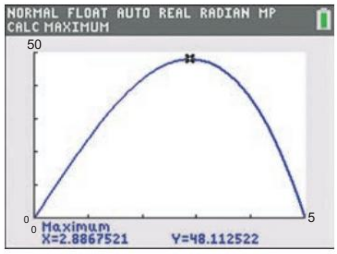


Figura 71

Ahora trabaja el problema 7

EJEMPLO 3

¿Cerrar llamada?

Supongamos que dos aviones que vuelan a la misma altitud se dirigen el uno hacia el otro. Un avión vuela hacia el sur a una velocidad terrestre de 400 millas por hora y está a 600 millas del posible punto de intersección de los aviones. El otro avión vuela hacia el oeste con una velocidad terrestre de 250 millas por hora y está a 400 millas del posible punto de intersección de los aviones. Ver Figura 72.

(a) Construya un modelo que exprese la distancia d entre los planos en función de tiempo t.

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente d = d1t2. ¿Qué tan cerca están los aviones entre sí? ¿otro? ¿A qué hora están más cerca los aviones?

Solución

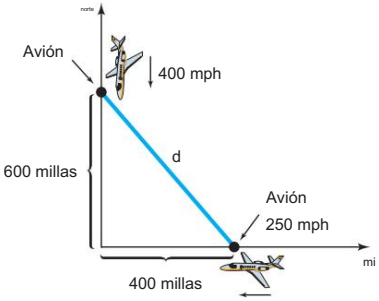


Figura 72

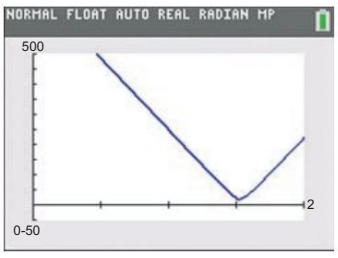
(a) Consulte la Figura 72. La distancia d entre los dos planos es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. En cualquier momento t, la longitud del cateto norte/sur del triángulo es 600 - 400t. En cualquier momento t, la longitud del cateto este/oeste del triángulo es 400 - 250t. Usa el teorema de Pitágoras para encontrar que el cuadrado de la distancia entre los dos planos es

$$d2 = 1600 - 400t22 + 1400 - 250t22$$

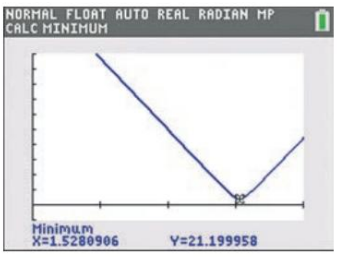
Por tanto, la distancia entre los dos planos en función del tiempo viene dada por el modelo

$$d1t2 = 21600 - 400t22 + 1400 - 250t22$$

(b) La Figura 73(a) muestra la gráfica de d = d1t2 en una TI-84 Plus C. Usando MINIMUM, la distancia mínima entre los aviones es 21.20 millas, y el momento en el que los aviones están más cerca es después de 1.53 horas, cada uno redondeado a dos decimales. Véase la Figura 73(b).



(a)



(b)

Figura 73

Ahora problema de trabajo 1 9

Machine Translated by Google

2.6 Evalúe su comprensión

Aplicaciones y extensiones

1. Sea P = 1x, y2 un punto en la gráfica de y = x2 - 8.

(a) Exprese la distancia d desde P al origen como función de x.

(b) ¿Cuál es d si x = 0?

(c) ¿Cuál es d si x = 1?

(d) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente d = d1x2.

(e) ¿Para qué valores de x es d más pequeño?

2. Sea P = 1x, y2 un punto en la gráfica de y = x2 - 8.

(a) Exprese la distancia d desde P hasta el punto 10, - 12 en función de x.

(b) ¿Cuál es d si x = 0?

(c) ¿Cuál es d si x = - 1?

(d) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente d = d1x2.

(e) ¿Para qué valores de x es d más pequeño?

3. Sea P = 1x, y2 un punto en la gráfica de y = 1x.

(a) Exprese la distancia d desde P hasta el punto (1, 0) como función de x.

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente d = d1x2.

(c) ¿Para qué valores de x es d más pequeño?

(d) ¿Cuál es la distancia más pequeña?

4. Sea P = 1x, y2 un punto en la gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

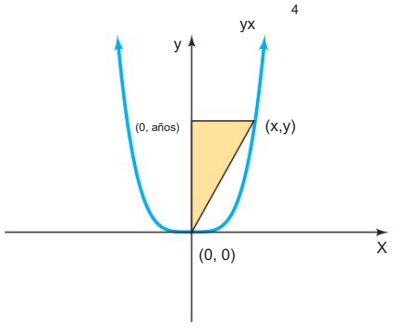
(a) Exprese la distancia d desde P al origen como función de x.

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente d = d1x2.

(c) ¿Para qué valores de x es d más pequeño?

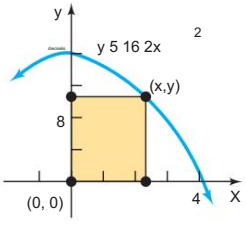
(d) ¿Cuál es la distancia más pequeña?

5. Un triángulo rectángulo tiene un vértice en la gráfica de y = x4 x7 0, en 1x, y2, otro en el origen y el tercero en el eje y positivo en 10, y2, como se muestra en la figura. Expresa el área A del triángulo en función de x.



6. Un triángulo rectángulo tiene un vértice en la gráfica x 7 de y = 9 - x2 , 0, en (x, y), otro en el origen, y el tercero en el eje x positivo en (x, 0). Expresa el área A del triángulo en función de x.

7. Un rectángulo tiene una esquina en el cuadrante I de la gráfica de y = 16 - x2 , otro en el origen, un tercero en el eje y positivo y el cuarto en el eje x positivo. Ver la figura.



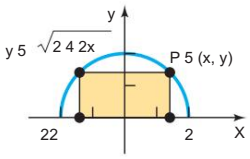
(a) Exprese el área A del rectángulo como función de x.

(b) ¿Cuál es el dominio de A?

(c) Grafica A = A1x2. ¿Para qué valor de x es A mayor?

(d) ¿Cuál es el área más grande?

8. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 2. Ver la figura. Sea P = 1x, y2 el punto en el cuadrante I que es un vértice del rectángulo y está en el círculo.



(a) Exprese el área A del rectángulo como una función. de x.

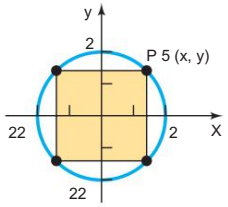
(b) Exprese el perímetro p del rectángulo como una función de x.

(c) Grafica A = A1x2. ¿Para qué valor de x es A mayor?

(d) Grafique p = p1x2. ¿Para qué valor de x es p mayor?

(e) ¿Cuál es el área más grande? ¿Cuál es el perímetro más grande?

9. Un rectángulo está inscrito en un círculo de radio 2. Mira la figura. Sea P = 1x, y2 el punto en el cuadrante I que es un vértice del rectángulo y está en el círculo.



(a) Exprese el área A del rectángulo como función de x.

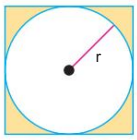
(b) Exprese el perímetro p del rectángulo en función de x.

2x_ 1 año2 5 4

(c) Grafica A = A1x2. ¿Para qué valor de x es A mayor?

(d) Grafique p = p1x2. ¿Para qué valor de x es p mayor?

10. Un círculo de radio r está inscrito en un cuadrado. Ver la figura.



(a) Exprese el área A del cuadrado como función del radio r del círculo.

(b) Exprese el perímetro p del cuadrado como función de r.

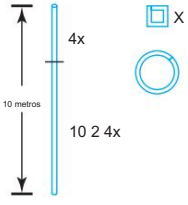
11. Geometría Se va a cortar en dos trozos un alambre de 10 metros de largo. Una pieza tendrá forma de triángulo equilátero y la otra pieza tendrá forma de círculo.

(a) Exprese el área total A encerrada por los trozos de alambre en función de la longitud x de un lado del triángulo equilátero.

(b) ¿Cuál es el dominio de A?

(c) Grafica A = A1x2. ¿Para qué valor de x es A el más pequeño?

12. Geometría Se va a cortar en dos trozos un alambre de 10 metros de largo. Una pieza tendrá forma de cuadrado y la otra pieza tendrá forma de círculo. Ver la figura.



(a) Exprese el área total A encerrada por los trozos de alambre en función de la longitud x de un lado del cuadrado.

(b) ¿Cuál es el dominio de A?

(c) Grafica A = A1x2. ¿Para qué valor de x es A el más pequeño?

Machine Translated by Google

13. Geometría Un alambre de longitud 6x se dobla en forma de círculo.

(a) Exprese la circunferencia del círculo en función de x.

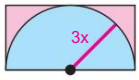
(b) Exprese el área del círculo en función de x.

14. Geometría Un alambre de longitud 6x se dobla en forma de círculo.

(a) Exprese la circunferencia del círculo como función de x.

(b) Exprese el área del círculo en función de x.

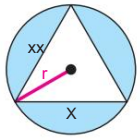
15. Geometría Un semicírculo de radio r = 3x está inscrito en un rectángulo de modo que el diámetro del semicírculo es la longitud del rectángulo.
(Ver figura.)



(a) Exprese el área A del rectángulo como función de x.

(b) Exprese el perímetro P del rectángulo en función de x.

16. Geometría Un triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio r. Ver la figura.
Expresa la circunferencia C del círculo en función de la longitud x de un lado del triángulo.

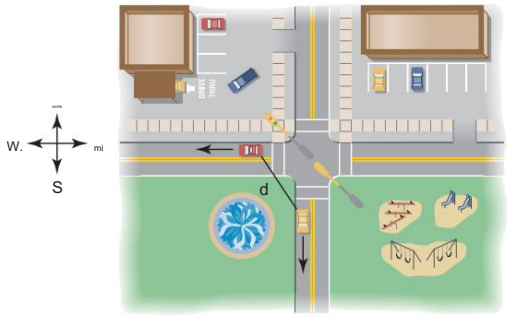


c Sugerencia: Primero demuestre que r $= \frac{x2}{3}$. d

17. Geometría Un triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio r. Vea la figura del Problema 16. Exprese el área A dentro del círculo, pero fuera del triángulo, en función de la longitud x de un lado del triángulo.

18. Movimiento uniforme Dos automóviles salen de una intersección al mismo tiempo. Uno se dirige hacia el sur a una velocidad constante de 30 millas por hora y el otro se dirige hacia el oeste a una velocidad constante de 40 millas por hora (consulte la figura). Construya un modelo que exprese la distancia d entre los autos en función del tiempo t.

[Pista: En t = 0, los autos abandonan la intersección.]



19. Movimiento uniforme Dos automóviles se acercan a una intersección. Uno está a 2 millas al sur de la intersección y se mueve a una velocidad constante de 30 millas por hora. Al mismo tiempo, el otro automóvil está a 3 millas al este de la intersección y se mueve a una velocidad constante de 40 millas por hora.

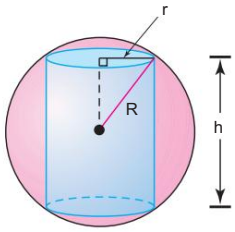
(a) Construya un modelo que exprese la distancia d entre los automóviles en función del tiempo t.

[Sugerencia: en t = 0, los automóviles están 2 millas al sur y 3 millas al este de la intersección, respectivamente.]

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente d = d1t2. ¿Por qué valor? ¿De t es d el más pequeño?

20. Inscribir un cilindro en una esfera Inscribe un cilindro circular recto de altura h y radio r en una esfera de radio fijo R. Mira la figura. Exprese el volumen V del cilindro en función de h.

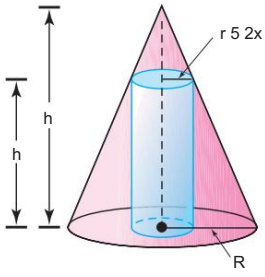
[Pista: V = pr 2h. Note también el triángulo rectángulo.]



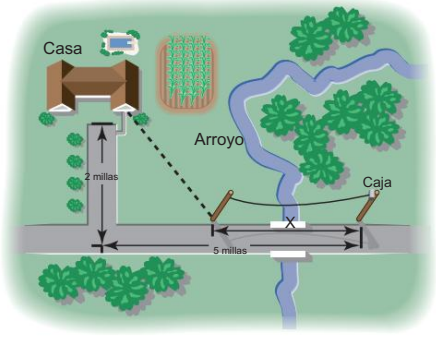
Esfera

21. Inscribir un cilindro en un cono Inscribe un cilindro circular recto de altura h y radio r = 2x en un cono de radio fijo R y altura fija H. Mira la ilustración. Exprese el volumen V del cilindro en función de x.

[Pista: V = pr 2h. Note también los triángulos semejantes.]



22. Instalación de TV por cable Se solicita a MetroMedia Cable que brinde servicio a un cliente cuya casa está ubicada a 2 millas de el camino a lo largo del cual está enterrado el cable. La caja de conexión del cable más cercana se encuentra a 5 millas de la carretera. Ver la figura.



(a) Si el costo de instalación es de $500 por milla a lo largo de la carretera y $700 por milla fuera de la carretera, construya un modelo que exprese el costo total C de instalación como función de la distancia x (en millas) desde la caja de conexiones hasta la Punto donde la instalación del cable sale de la carretera. Encuentre el dominio de C = C1x2.

(b) Calcule el costo si x = 1 milla.

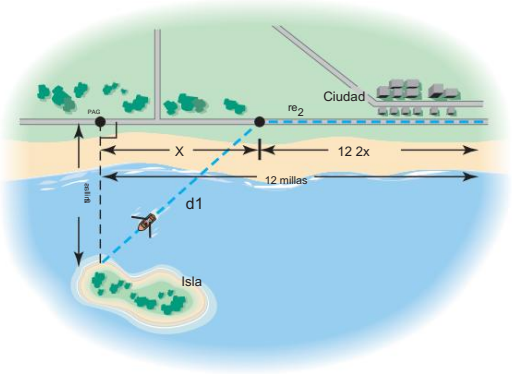
(c) Calcule el costo si x = 3 millas.

(d) Grafique la función C = C1x2. Utilice TRACE para ver cómo varía el costo C cuando x cambia de 0 a 5.

(e) ¿Qué valor de x resulta en el menor costo?

Machine Translated by Google

23. Tiempo necesario para ir de una isla a un pueblo Una isla está a 2 millas del punto P más cercano en una costa recta. Un pueblo está a 12 millas costa abajo desde P. Vea la figura.



(a) Si una persona puede remar en un bote a una velocidad promedio de 3 millas por hora y la misma persona puede caminar 5 millas por hora, construya un modelo que exprese el tiempo T que le toma ir de la isla al pueblo como función de la distancia x desde P hasta donde la persona desembarca el bote.

(b) ¿ Cuál es el dominio de T?

(c) ¿ Cuánto tiempo tardará en viajar de la isla al pueblo si la persona desembarca el bote a 4 millas de P?

(d) ¿Cuánto tiempo tomará si la persona aterriza el bote a 8 millas? de P?

24. Construcción de una caja abierta Se requiere que una caja abierta con base cuadrada tenga un volumen de 10 pies cúbicos.

(a) Exprese la cantidad A de material utilizado para fabricar dicha caja en función de la longitud x de un lado de la base cuadrada.

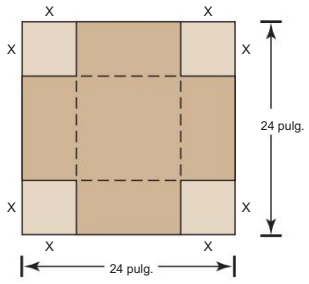
(b) ¿Cuánto material se requiere para tal caja con una base de 1 pie por 1 pie?

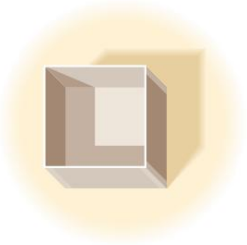
(c) ¿Cuánto material se requiere para tal caja con una base de 2 pies por 2 pies?

(d) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente A = A1x2. ¿ Para qué valor de x es A el más pequeño?

(e) ¿Cuál es la menor cantidad de material necesaria?

25. Construir una caja abierta Se va a hacer una caja abierta con una base cuadrada a partir de un trozo de cartón cuadrado de 24 pulgadas de lado cortando un cuadrado de cada esquina y doblando los lados. Ver la figura.





(a) Exprese el volumen V de la caja en función de la longitud x del lado del cuadrado cortado de cada esquina.

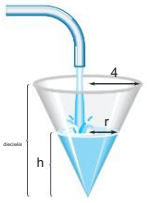
(b) ¿Cuál es el volumen si se corta un cuadrado de 3 pulgadas?

(c) ¿Cuál es el volumen si se corta un cuadrado de 10 pulgadas?

(d) Grafique V = V1x2. ¿ Para qué valor de x es V mayor?

(e) ¿Cuál es el volumen más grande?

26. Problema de desafío al llenar un tanque cónico Se vierte agua en un recipiente en forma de cono circular recto con un radio de 4 pies y una altura de 16 pies. Ver la figura. Exprese el volumen V del agua en el cono en función de la altura h del agua.



27. Desafío Problema Gestión de inventario Un minorista compra 600 unidades flash USB por año a un distribuidor. El minorista quiere determinar cuántas unidades pedir, x, por envío, de modo que su inventario se agote justo cuando llegue el siguiente envío. La tarifa de procesamiento es de $15 por envío, el costo de almacenamiento anual es de $1,60x y cada unidad le cuesta al minorista $4,85.

(a) Exprese el costo total anual C en función del número x de unidades en cada envío.

(b) Utilice una utilidad gráfica para determinar el costo mínimo anual y el número de unidades por pedido que produce el costo mínimo.

Conserve su conocimiento

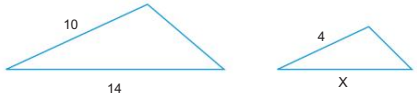
Los problemas 28 a 37 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

28. Resuelve: · 2x - 3· - 5 = - 2

29. Un Ford Fusion de 16 pies de largo quiere adelantar a un camión de 50 pies que viaja a 55 mi/h. ¿A qué velocidad debe viajar el automóvil para rebasar completamente al camión en 5 segundos?

30. Encuentra la pendiente de la recta que contiene los puntos 13, - 22. y (1, 6).

31. Encuentra la longitud x que falta para el par dado de similares triangulos.



Machine Translated by Google

32. Dados y = y u = $\frac{x}{x+1}$, expresa y en términos de u. x + 1

Escribe $\frac{x+5+}{3x2/3}$ x1/3 como un cociente único con solo 33 positivo. exponentes.

34. Resuelve - 23x - 2 Ú 4.

35. Si el punto 13, - 22 está en la gráfica de una ecuación que es simétrica con respecto al origen, ¿qué otro punto debe estar en la gráfica?

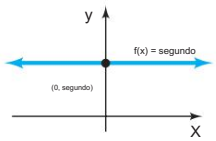
36. Resuelve v = $\frac{2.6t}{d2}$ $\overline{AE_{PAG}}$ para p.

37. Encuentra el discriminante de la ecuación cuadrática 3x2 - 7x = 4x - 2.

Revisión del capítulo

Biblioteca de funciones Función constante (p. 124) f1x2 = b

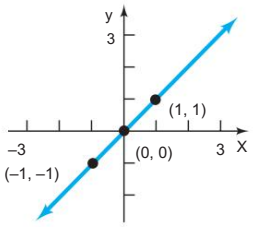
La gráfica es una línea horizontal con intersección en y b.



Función de identidad (p. 124)

f1x2 = x

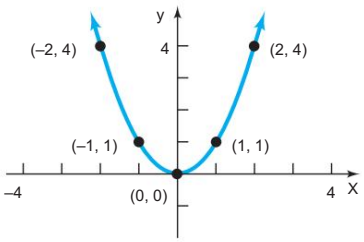
La gráfica es una recta con pendiente 1 e intersección con el eje y 0.



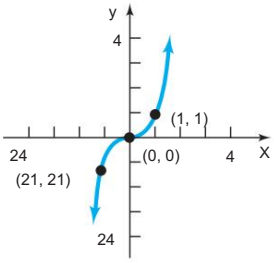
Función cuadrada (p. 124)

f1x2 = x2

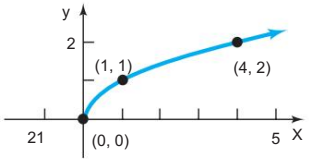
La gráfica es una parábola con intersección en (0, 0)



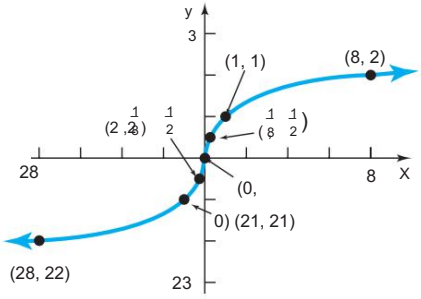
Función cubo (p. 125) f1x2 = x3



Función de raíz cuadrada (p. 125) f1x2 = 1x

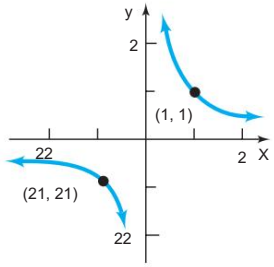


Función raíz cúbica (p. 125) f1x2 = 23 x

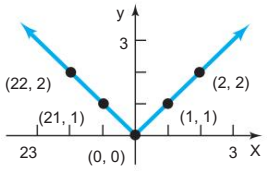


Función recíproca (p. 125)

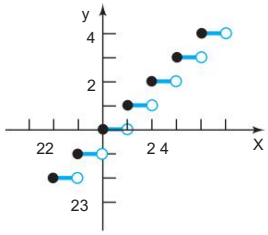
1 f1x2 = $\frac{}{x}$



Función de valor absoluto (p. 125) f1x2 = 0 x 0



Función entera mayor (p. 126) f1x2 = int1x2



Machine Translated by Google

Cosas que saber

Función (págs. 85 a 87)

- Una relación entre dos conjuntos no vacíos de modo que a cada elemento x del primer conjunto, el dominio, le corresponde exactamente un elemento y del segundo conjunto. El rango es el conjunto de imágenes de los elementos del dominio.
- Una función también puede describirse como un conjunto de pares ordenados (x, y) en los que no El primer elemento se combina con dos segundos elementos diferentes.

Notación de funciones (págs. 87 a 90)

- y = f1x2
- f es un símbolo de la función.
- x es el argumento o variable independiente.
- y es la variable dependiente.
- f(x) es el valor de la función en x.
- Una función f puede definirse implícitamente mediante una ecuación que incluya xey o explícitamente escribiendo y = f1x2.

Cociente de diferencias de f (p. 90)

$$\frac{f1x + h2 - f1x2}{h} \qquad h \cdot 0$$

Dominio (págs. 91 a 93)

Si no se especifica, el dominio de una función f definida por una ecuación es el conjunto más grande de números reales para los cuales f1x2 es un número real.

Prueba de línea vertical (p. 100)

Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si y solo si cada línea vertical corta la gráfica en como máximo un punto.

Función par f (p. 109)

f1 - x2 = f1x2 para cada x en el dominio (- x también debe estar en el dominio).

Función impar f (pág. 109)

f1 - x2 = - f1x2 para cada x en el dominio (- x también debe estar en el dominio).

Función creciente (p. 111)

Una función f es creciente en un intervalo I si, para cualquier elección de x1 y x2 en I, con x1 6 x2, entonces f1x12 6 f1x22.

Función decreciente (p. 111)

Una función f es decreciente en un intervalo I si, para cualquier elección de x1 y x2 en I, con x1 6 x2, entonces f1x12 7 f1x22.

Función constante (p. 111)

Una función f es constante en un intervalo I si, para todas las elecciones de x en I, los valores de f1x2 son iguales.

Máximo local (pág. 112)

Una función f, definida en algún intervalo I, tiene un máximo local en c si hay un intervalo abierto en I que contiene c de modo que f1c2 Ú f1x2, para todo x en este intervalo abierto. El valor máximo local es f1c2.

Mínimo local (pág. 112)

Una función f, definida en algún intervalo I, tiene un mínimo local en c si hay un intervalo abierto en I que contiene c de modo que f1c2 … f1x2, para todo x en este intervalo abierto. El valor mínimo local es f1c2.

Máximo absoluto y mínimo absoluto (p. 113)

Sea f una función definida en algún intervalo I.

- Si hay un número u en I para el cual f1u2 Ú f1x2 para todo x en I, entonces f tiene un máximo absoluto en u, y el número f1u2 es el máximo absoluto de f en I.
- Si hay un número v en I para el cual f1v2 … f1x2, para todo x en I, entonces f tiene un mínimo absoluto en v, y el número f1v2 es el mínimo absoluto de f en I.

Tasa de cambio promedio de una función (págs. 115 y 116)

La tasa de cambio promedio de f de a a b es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f1b2 - f1a2}{\text{segundo - un}} \qquad a \cdot b$$

Objetivos

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplos	Ejercicios de revisión
2.1	1 Describe una relación (p. 83)	1	1
	2 Determinar si una relación representa una función (p. 85)	2–5	2–5
	3 Utilice notación de funciones; encontrar el valor de una función (p. 87)	6, 7	6–8, 43
	4 Encuentra el cociente de diferencias de una función (p. 90)	8	18
	5 Encuentra el dominio de una función definida por una ecuación (p. 91)	9, 10	9-14
	6 Formar la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones (pág. 93)	11	15-17

Machine Translated by Google

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplos	Ejercicios de revisión
2.2	1 Identifica la gráfica de una función (p. 100)	1	31, 32
	2 Obtener información de o sobre la gráfica de una función (pág. 100) 2–4		19(a)–(e), 20(a), 20(e), 20(g)
2.3	1 Identificar funciones pares e impares a partir de una gráfica (p. 109)	1	20(f)
	2 Identificar funciones pares e impares a partir de una ecuación (p. 110)	2	21-24
	3 Usa una gráfica para determinar dónde está aumentando una función, decreciente o constante (p. 111)	3	20(b)
	4 Utilice una gráfica para localizar máximos y mínimos locales (p. 112)	4	20c)
	5 Utilice una gráfica para localizar el máximo absoluto y el mínimo absoluto (p. 113)	5	20(d)
	6 Usar una utilidad gráfica para aproximar máximos y mínimos locales y determinar dónde una función aumenta o disminuye (p. 115)	6	25, 26, 44(d), 45(b)
	7 Encuentra la tasa de cambio promedio de una función (p. 115)	7, 8	27–30
2.4	1 Grafique las funciones enumeradas en la biblioteca de funciones (p. 122)	1, 2	33, 34
	2 Analizar una función definida por partes (p. 127)	3–5	41, 42
2.5	1 Funciones gráficas usando desplazamientos verticales y horizontales (p. 134)	1–5, 11–13	19(f), 35, 37–40
	2 Funciones gráficas usando compresiones y estiramientos (p. 138)	6–8, 12	19(g), 36, 40
	3 Graficar funciones usando reflexiones sobre el eje x y el eje y (p. 140)	9, 10, 13	19(h), 36, 38, 40
2.6	1 Construir y analizar funciones (p. 147)	1–3	44, 45

Ejercicios de revisión

1. Mientras compraba pilas AA en línea, Masoud descubrió que podía pedir un paquete de 8 pilas por $6,30, un paquete de 16 por $13,99, un paquete de 20 por $12,32 o un paquete de 24 por $13,99. Defina una relación utilizando el número de baterías como entrada y el precio como salida.
   (a) ¿Cuál es el dominio y rango de la relación?
   (b) Exprese la relación como un conjunto de pares ordenados.
   (c) Exprese la relación como una aplicación.
   (d) Exprese la relación como una gráfica.

En los problemas 2 a 5, encuentre el dominio y el rango de cada relación. Luego determina si la relación representa una función.

2. 5 1 - 2, 02, 13, 42, 11, 42 6

3. 5 14, - 12, 12, 12, 14, 22 6

5. y = 4 x - 3 2

En los problemas 6 a 8, encuentre lo siguiente para cada función:

(a) f122 (b) f1 - 22 (c) f1- x2 (d) -f1x2 (e) f1x - 22 x2 - (f) f12x2

6. f1x2 = x2 $\frac{3x}{-1}$

7. f1x2 = 2x2 - 4

8. f1x2 = x2 $\frac{4}{\quad}$

En los problemas 9 a 14, encuentre el dominio de cada función.

9. f1x2 = x2 $\frac{x}{-9}$

10. f1x2 = 27 - 2x 2x + 1

11. g1x2 = $\frac{}{x}$

12. f1x2 = x2 $\frac{2x}{+4x-5}$

13. f1x2 = x2 $\frac{}{-4}$

14. g(x) = $\frac{x}{23x+10}$

En los problemas 15 a 17, encuentre f + g, f - g, f # g y para cada par de funciones. Indique el dominio de cada una de estas funciones.

15. f1x2 = 2 - x; g1x2 = 3x + 1

16. f1x2 = 4x2 + 3; g1x2 = x - 2

17. f1x2 = $\frac{x+1}{\quad}$; g1x2 = x - 1 $\frac{1}{x}$

Machine Translated by Google

18. Encuentra el cociente de diferencias de f1x2 = - x2 + 7x + 3; f1x +
es decir, encontrar $\frac{h2 - f1x2}{h}$, h · 0.

19. Considere la gráfica de la función f a continuación.

(a) Encuentre el dominio y el rango de f.

(b) Enumere las intersecciones.

(c) Encuentre f1 - 22.

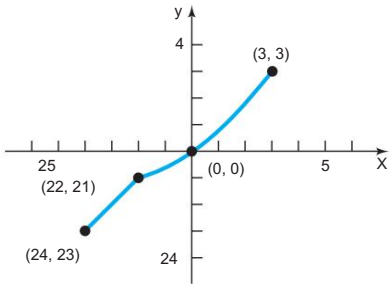
(d) ¿Para qué valor de x f1x2 = - 3?

(e) Resuelva f1x2 7 0.

(f) Grafique y = f1x - 32.

(g) Gráfica y = f a 1 2xb .

(h) Grafique y = - f1x2.



20. Utilice la gráfica de la función f que se muestra a continuación para encontrar:

(a) El dominio y el rango de f.

(b) Los intervalos en los que f aumenta, disminuye, o constante.

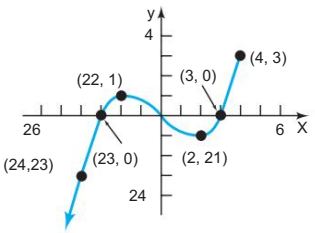
c) Los valores mínimos locales y los valores máximos locales.

d) El máximo absoluto y el mínimo absoluto.

(e) Si la gráfica es simétrica con respecto al eje x, el eje y, el origen o ninguno de estos.

(f) Si la función es par, impar o ninguna de las dos.

g) Las intersecciones, si las hubiere.



En los problemas 21 a 24, determine (algebraicamente) si la función dada es par, impar o ninguna de las dos.

21. f1x2 = x3 - 4x

22. g1x2 = 3 $\frac{5 + 2x2}{+ x6}$

23. G1x2 = 1 - x + x3

24. f1x2 = 2 $\frac{3x3}{+ x2 + 2x4}$

En los problemas 25 y 26, utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente cada función en el intervalo indicado. Aproximar los valores máximos locales y los valores mínimos locales. Determine dónde la función crece y dónde decrece.

25. f1x2 = 2x3 - 5x + 1 1 - 3, 32

26. f1x2 = 2x4 - 5x3 + 2x + 1 1 - 2, 32

27. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = 8x2 - x:

(a) De 1 a 2

(b) De 0 a 1

(c) De 2 a 4

En los problemas 28 y 29, encuentre la tasa de cambio promedio de 2 a 3 para cada función f. Asegúrate de simplificar.

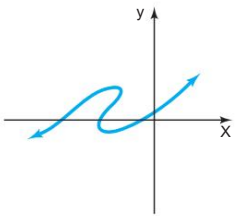
28. f1x2 = 2 - 5x

30. Si f1x2 = 3x - 4x2, encontrar una ecuación de la recta secante de f de 2 a 3.

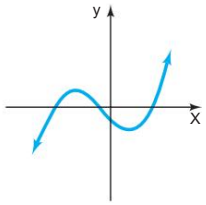
29. f1x2 = 3x - 4x2

En los problemas 31 y 32, ¿la gráfica que se muestra es la gráfica de una función?

31.



32.



En los problemas 33 y 34, grafica cada función. Asegúrese de etiquetar al menos tres puntos.

33. f1x2 = 0x0 _ _

34. f1x2 = 1x

En los problemas 35 a 40, represente gráficamente cada función utilizando las técnicas de desplazamiento, compresión o estiramiento y reflexiones. Identifica cualquier intersección de la gráfica. Indique el dominio y, basándose en la gráfica, encuentre el rango.

35. F1x2 = 0 x 0 - 4 37.

36. g1x2 = - 2 0 x 0

h1x2 = 2x - 1

38. f1x2 = 21- x

39. h1x2 = 1x - 12 2 + 2

40. g1x2 = - 21x + 22 3 - 8

En los problemas 41 y 42:

(a) Encuentre el dominio de cada función.

(b) Localice cualquier intercepción.

(c) Grafique cada función.

(d) Con base en la gráfica, encuentre el rango.

41. f1x2 = b 3x x + 1 si - 2 6 x … 1 si x 7 1

42. f1x2 = cx 1 si - 4... x 6 0 3x si x = 0 si x 7 0

43. Una función f está definida por

$$f1x2 = \frac{\text{Hacha} + 5}{6x - 2}$$

Si f112 = 4, encuentre A.

44. Construcción de una caja cerrada Se requiere que una caja cerrada con base cuadrada tenga un volumen de 10 pies cúbicos.

(a) Construya un modelo que exprese la cantidad A de material usado para hacer dicha caja en función de la longitud x de un lado de la base cuadrada.

(b) ¿Cuánto material se requiere para una base de 1 pie por 1 pie?

(c) ¿Cuánto material se requiere para una base de 2 pies por 2 pies?

(d) Gráfica A = A1x2. ¿Para qué valor de x es A el más pequeño?

45. Área de un rectángulo Un rectángulo tiene un vértice en el cuadrante en la gráfica de y = 10 - x2, I, otro en el origen, uno en el eje x positivo y uno en el eje y positivo.

(a) Exprese el área A del rectángulo como función de x.

(b) Encuentre el área A más grande que puede encerrar el rectángulo.

Machine Translated by Google

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

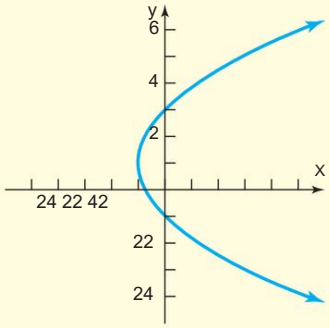
Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

1. Encuentra el dominio y rango de cada relación. Luego determina si cada relación representa una función.

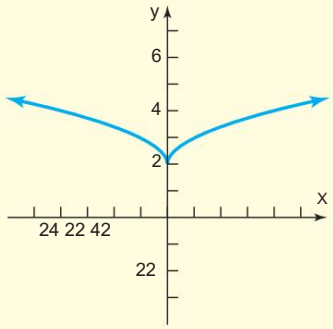
(a) 5 12, 52, 14, 62, 16, 72, 18, 82 6

(b) 5 11, 32, 14, - 22, 1 - 3, 52, 11, 72 6

(C)



(d)



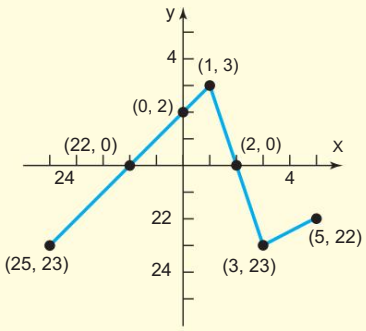
En los problemas 2 a 4, encuentre el dominio de cada función y evalúe cada función en x = - 1.

2. f1x2 = 24 - 5x

3. g1x2 = $\frac{x + 2}{0x + 2\ 0}$

4. h1x2 = $\frac{x - 4}{x2 + 5x - 36}$

5. Considere la gráfica de la función f a continuación.



(a) Encuentre el dominio y el rango de f.

(b) Enumere las intersecciones.

(c) Encuentre f112.

(d) ¿Para qué valor(es) de x f1x2 = - 3?

(e) Resuelva f1x2 6 0.

6. Grafica la función f1x2 = - x4 + 2x3 + 4x2 - 2 en el intervalo 1 - 5, 52 usando una utilidad gráfica. Luego, aproxime los valores máximos locales y los valores mínimos locales redondeados a dos decimales. Determine dónde la función crece y dónde decrece.

7. Considere la función g1x2 = b 2x + 1 si x 6 - 1 / x - 4 si x Ú - 1

(a) Grafique la función.

(b) Enumere las intersecciones.

(c) Encuentre g1 - 52.

(d) Encuentre g(2).

8. Para la función f1x2 = 3x2 - 3x + 4,

(a) Encuentre la tasa de cambio promedio de f de 3 a 4.

(b) Encuentre una ecuación de la recta secante de 3 a 4.

9. Para las funciones f1x2 = 2x2 + 1 y g1x2 = 3x - 2, encuentra lo siguiente y simplifica.

(a) 1f - g2 1x2

(b) 1f # g2 1x2

(c) f1x + h2 - f1x2

10. Grafique cada función usando las técnicas de desplazamiento, compresión o estiramiento y reflexión. Comienza con la gráfica de la función básica y muestra todos los pasos.

(a) h1x2 = - 21x + 123 + 3

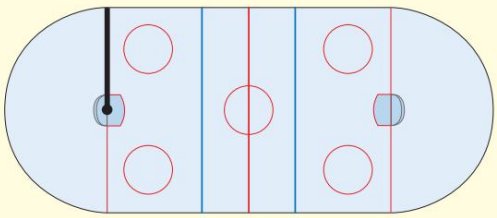
(b) g1x2 = 0x + 4 0 + 2

11. Encuentra el cociente de diferencias de f1x2 = x2 - 3x.

12. Una pista de patinaje comunitaria tiene forma de rectángulo con semicírculos unidos en los extremos. La longitud del rectángulo es 20 pies menos que el doble del ancho. El espesor del hielo es de 2 pulgadas.

(a) Construya un modelo que exprese el volumen de hielo V en función del ancho, x.

(b) ¿Cuánto hielo hay en la pista si el ancho es de 90 pies?



13. Determina si la función f1x2 = - x2 - 7 es par, impar, o ninguno.

Machine Translated by Google

Revisión acumulativa

En los problemas 1 a 6, encuentre las soluciones reales de cada ecuación.

1. 3x - 8 = 10
2. 3x2 - x = 0
3. x2 - 8x - 9 = 0
4. 6x2 - 5x + 1 = 0
5. 0 2x + 3 0 = 4
6. $\sqrt{2x + 3} = 2$

En los problemas 7 a 9, resuelve cada desigualdad. Grafique el conjunto solución.

7. 2-3x 7 6
8. 0 2x - 5 0 6 3
9. 0 4x + 1 0 Ú 7

10. (a) Encuentre la distancia desde P1 = 1 - 2, - 32 a P2 = 13, - 52.
    (b) ¿Cuál es el punto medio del segmento de recta de P1 a P2?
    (c) ¿Cuál es la pendiente de la recta que contiene los puntos P1 ? y P2?

En los problemas 11 a 14, grafica cada ecuación.

11. 3x - 2y = 12
12. x = y2 _
13. x2 + 1y - 32
14. $y = 2^x$
15. y = x16

Para la ecuación 3x2 - 4y = 12, encuentra las intersecciones y comprobar la simetría.

16. Encuentra la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que contiene los puntos 1 - 2, 42 y (6, 8).

En los problemas 17 a 19, grafique cada función.

17. f1x2 = 1x + 22 2 - 3
18. f1x2 = $\frac{1}{x}$
19. f1x2 = e 2 - x si x … 2 si x 7 2

Proyectos del Capítulo

Proyecto basado en Internet

I. Elegir un plan de datos Recopile información de su familia, amigos o agencias de consumidores como Consumer Reports. Luego elija un proveedor de servicios y elija la empresa que considere que ofrece el mejor servicio. Una vez que haya seleccionado un proveedor de servicios, investigue los distintos tipos de planes individuales que ofrece la empresa visitando el sitio web del proveedor. Muchos proveedores de telefonía móvil ofrecen planes familiares que incluyen llamadas, mensajes de texto y datos ilimitados. Sin embargo, una vez que se alcanza un límite de datos, el servicio puede ralentizarse, lo que impide la transmisión de medios. Por lo tanto, muchos clientes todavía compran planes de solo datos para dispositivos como tabletas o computadoras portátiles. El costo mensual está determinado principalmente por la cantidad de datos utilizados y la cantidad de dispositivos solo de datos.

1. Suponga que espera utilizar 10 gigabytes de datos para una sola tableta. ¿Cuál sería el costo mensual de cada plan que estás considerando?
2. Suponga que espera utilizar 30 gigabytes de datos y desea un punto de acceso personal, pero todavía tiene una sola tableta. ¿Cuál sería el costo mensual de cada plan que estás considerando?
3. Suponga que espera utilizar 20 gigabytes de datos con tres tabletas compartiendo los datos. ¿Cuál sería el costo mensual de cada plan que estás considerando?
4. Suponga que espera utilizar 20 gigabytes de datos con una sola tableta y un punto de acceso personal. ¿Cuál sería el costo mensual de cada plan que estás considerando?
5. Construya un modelo que describa el costo mensual C, en dólares, en función del número g de gigabytes de datos utilizados, suponiendo una sola tableta y un punto de acceso personal para cada plan que esté considerando.
6. Grafica cada función del Problema 5.
7. Según su uso particular, ¿qué plan es mejor para usted?

Machine Translated by Google

8. Ahora, desarrolle una hoja de cálculo de Excel para analizar los distintos planes que está considerando. Suponga que desea un plan que ofrezca 50 gigabytes de datos compartidos y cueste $60 por mes. Los gigabytes adicionales de datos cuestan $15 por gigabyte, se pueden agregar tabletas adicionales al plan por $10 cada una al mes y cada hotspot o computadora portátil cuesta $20 al mes. Debido a que estos planes de datos tienen una estructura de costos basada en funciones definidas por partes, necesitamos una declaración "si/entonces" dentro de Excel para analizar el costo del plan.
Utilice la hoja de cálculo de Excel adjunta como guía para desarrollar su hoja de cálculo. Ingrese en su hoja de cálculo una variedad de posibles cantidades de datos y varios números de tabletas, computadoras portátiles y puntos de acceso adicionales.

	A	B	C	D	
1					
2	Cuota mensual	$60			
3	Datos asignados por mes (GB)	50			
4	Datos utilizados (GB)	12			
5	Costo por GB adicional de datos	$15			
6					
7	Costo mensual del hotspot o computadora portátil	$20			
8	Número de puntos de acceso o portátiles	1			
9	Costo mensual de tableta adicional	$10			
10	Número de tabletas adicionales	2			
11					
12	Costo de los datos	=SI(B4<B3,B2,B2+B5*(B4-B3))			
13	Costo de dispositivos/puntos de acceso adicionales	=B8*B7+B10*B9			
14					
15	Coste total	=B12+B13			
dieciséis					

9. Escriba un párrafo que respalde la elección de los planes que mejor satisface sus necesidades.

10. ¿ En qué se parecen los bucles “si/entonces” a un bucle definido por partes? ¿función?

Fuente: Excel © 2018 Microsoft Corporation. Usado con permiso de Microsoft.

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC).

II. Proyecto en Motorola: Servicio de Internet inalámbrico Utilice funciones y sus gráficas para analizar el costo total de varios servicios de Internet inalámbrico. planes de servicio.

III. Costo del cable Cuando las regulaciones gubernamentales y las preferencias de los clientes influyen en el recorrido de una nueva línea de cable, la teoría pitagórica El teorema se puede utilizar para evaluar el costo de instalación.

IV. Las funciones de derrames de petróleo se utilizan para analizar el tamaño y la propagación de un derrame de petróleo de un petrolero con fugas.

Machine Translated by Google

3 Lineal y Cuadrático Funciones

La beta de una acción

Invertir en el mercado de valores puede ser gratificante y divertido, pero ¿cómo se selecciona qué acciones comprar? Las empresas de inversión financiera contratan miles de analistas que rastrean acciones individuales (acciones) y evalúan el valor de la empresa subyacente. Una medida que consideran los analistas es la beta de la acción. Beta mide el riesgo del capital de una empresa individual en relación con el de una cesta de acciones del mercado, como el Standard & Poor's 500. Pero ¿cómo se calcula la beta?

—Ver el Proyecto del Capítulo I basado en Internet—

Describir

3.1 Propiedades de funciones lineales y Modelos lineales

3.2 Construyendo modelos lineales a partir de datos

3.3 Funciones cuadráticas y sus propiedades

3.4 Construcción de modelos cuadráticos a partir de Descripciones verbales y a partir de datos.

3.5 Desigualdades que involucran cuadráticas Funciones

Revisión del capítulo

Prueba de capítulo

Revisión acumulativa

Proyectos del Capítulo

Una mirada atras

Hasta ahora, nuestra discusión se ha centrado en ecuaciones y funciones y sus gráficas. Graficamos ecuaciones trazando puntos, usando intersecciones y probando simetría. Aprendimos a identificar si una relación representa una función y analizamos las propiedades de las funciones, como dominio/rango, creciente/decreciente, par/impar y tasa de cambio promedio. Utilizando esta información, desarrollamos una biblioteca de funciones y analizamos funciones definidas por partes.

Finalmente, utilizamos transformaciones para graficar nuevas funciones a partir de las gráficas de funciones familiares enumeradas en la biblioteca de funciones.

Una mirada hacia el futuro

Ahora comenzamos a mirar clases de funciones. Este capítulo se centra en funciones lineales y cuadráticas, sus propiedades y sus aplicaciones.

Machine Translated by Google

3.1 Propiedades de funciones lineales y modelos lineales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Líneas (Sección 1.3, págs. 56–67)
- Gráficas de Ecuaciones en Dos Variables; Intercepciones; Simetría (Sección 1.2, págs. 45–53)
- Resolver ecuaciones (Sección A.6, págs. A44–A51)
- Funciones (Sección 2.1, págs. 83–95)
- La gráfica de una función (sección 2.2, págs. 99-103)
- Propiedades de las funciones (Sección 2.3, págs. 109–117)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 167.

OBJETIVOS 1 Graficar funciones lineales (p. 161)

2 Utilice la tasa de cambio promedio para identificar funciones lineales (p. 161)

3 Determinar si una función lineal es creciente, decreciente o constante (p. 164)

4 Construya modelos lineales a partir de descripciones verbales (p. 165)

1 Graficar funciones lineales

En la Sección 1.3 analizamos las líneas. En particular, para rectas no verticales desarrollamos la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, y = mx + b. Cuando la forma pendiente-intersección de una línea se escribe usando notación de función, el resultado es una función lineal.

DEFINICIÓN Función lineal

Una función lineal es una función de la forma

f1x2 = mx + b

La gráfica de una función lineal es una recta con pendiente m y intersección en y b. Su dominio es el conjunto de todos los números reales.

Las funciones que no son lineales se dicen no lineales.

EJEMPLO 1 Graficar una función lineal

Grafica la función lineal f1x2 = - 3x + 7. ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?

Solución

Esta es una función lineal con pendiente m = - 3 e intersección con el eje y b = 7. Para graficar esta función, traza el punto (0, 7), la intersección con el eje y y usa la pendiente para encontrar un punto adicional moviéndose hacia la derecha. 1 unidad y abajo 3 unidades. Consulte la Figura 1. El dominio y el rango de f son cada uno el conjunto de todos los números reales.

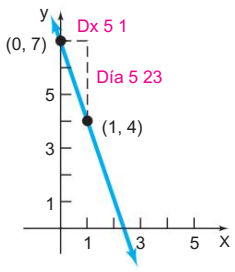


Figura 1 f1x2 = -3x + 7

Alternativamente, se puede encontrar un punto adicional evaluando la función en algún x · 0. Para x = 1, f112 = - 3 # 1 + 7 = 4, entonces el punto (1, 4) se encuentra en la gráfica.

Ahora resuelva los problemas 1 3 (a) y (b)

2 Utilice la tasa de cambio promedio para identificar funciones lineales

Mire la Tabla 1 en la página siguiente, que muestra varios valores de la variable independiente x y los valores correspondientes de la variable dependiente y para la función f1x2 = - 3x + 7. Observe que a medida que el valor de la variable independiente x aumenta en 1, el valor de la variable dependiente y disminuye en 3. Es decir, la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es una constante, - 3.

Machine Translated by Google

tabla 1

x	y · f(x) · ·3x · 7 Tasa de cambio promedio ·	$\frac{y}{x}$
-2	13	
		$\frac{10 - 13}{-1 - 1 -22} = \frac{-3}{1} = -3$
-1	10	
		$\frac{7 - 10}{0-1-12} = \frac{-3}{1} = -3$
0	7	
		-3
1	4	
		-3
2	1	
		-3
3	-2	

No es una coincidencia que la tasa de cambio promedio de la función lineal Δy f1x2 = - 3x + 7 es la pendiente de la función lineal. Es decir, el siguiente $\frac{}{\text{teorema}}$ = metro = - 3. El Δx establece este hecho.

TEOREMA Tasa de cambio promedio de una función lineal

Las funciones lineales tienen una tasa de cambio promedio constante. Es decir, la tasa de cambio promedio de una función lineal f1x2 = mx + b es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{metro}$$

Prueba La tasa de cambio promedio de f1x2 = mx + b de x1 a x2, x1 · x2, es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f1x22 - f1x12}{x2 - x1} = \frac{1mx2 + b2 - 1mx1 + b2}{x2 - x1}$$

$$= \frac{mx2 - mx1}{x2 - x1} = \frac{m1x2 - x12}{x2 - x1} = \text{metro}$$

■

Con base en el teorema recién demostrado, la tasa de cambio promedio de la función g1x2 = - x + 5 es $\frac{2}{-5}$ $\frac{2}{5}$.

Ahora resuelve el problema 1 3 (c)

Resulta que sólo las funciones lineales tienen una tasa de cambio promedio constante. Debido a esto, la tasa de cambio promedio se puede utilizar para determinar si una función es lineal. Esto es especialmente útil si la función está definida por un conjunto de datos.

EJEMPLO 2 Uso de la tasa de cambio promedio para identificar funciones lineales

(a) Se coloca una cepa de E. coli conocida como Beu 397-recA441 en una placa de Petri a 30° Celsius y se la deja crecer. Se recopilan los datos que se muestran en la Tabla 2. La población se mide en gramos y el tiempo en horas. Traza los pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano y usa la tasa de cambio promedio para determinar si la función es lineal.

Machine Translated by Google

(b) Los datos de la Tabla 3 representan el número máximo de latidos del corazón que un individuo sano de diferentes edades debe tener durante un intervalo de tiempo de 15 segundos mientras hace ejercicio. Traza los pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano y usa la tasa de cambio promedio para determinar si la función es lineal.

Tabla 2

Tiempo (horas), x	Población (gramos), años	(x,y)
0	0,09	(0, 0,09)
1	0,12	(1, 0,12)
2	0,16	(2, 0,16)
3	0,22	(3, 0,22)
4	0,29	(4, 0,29)
5	0,39	(5, 0,39)

Tabla 3

Edad, x	Número máximo de latidos del corazón, y	(x,y)
20	50	(20, 50)
30	47,5	(30, 47,5)
40	45	(40, 45)
50	42,5	(50, 42,5)
60	40	(60, 40)
70	37,5	(70, 37,5)

Fuente: Asociación Estadounidense del Corazón

Solución

Calcule la tasa de cambio promedio de cada función. Si la tasa de cambio promedio es constante, la función es lineal. Si la tasa de cambio promedio no es constante, la función no es lineal.

(a) La Figura 2 muestra los puntos enumerados en la Tabla 2 trazados en el plano cartesiano. Tenga en cuenta que es imposible trazar una línea recta que contenga todos los puntos. El Cuadro 4 muestra la tasa promedio de cambio de la población.

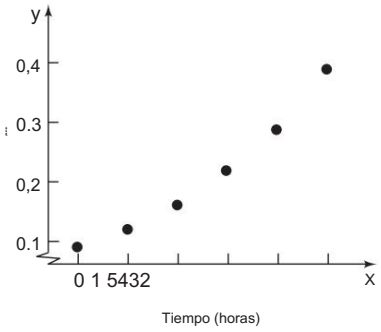


Figura 2

Tabla 4

Tiempo (horas), x	Población (gramos), años	Tasa de cambio promedio · $\frac{y}{x}$
0	0,09	
		$\frac{0,12 - 0,09}{1 - 0} = 0,03$
1	0,12	
		0,04
2	0,16	
		0,06
3	0,22	
		0,07
4	0,29	
		0,10
5	0,39	

Como la tasa de cambio promedio no es constante, la función no es lineal. De hecho, debido a que la tasa de cambio promedio aumenta a medida que aumenta el valor de la variable independiente, la función aumenta a una tasa creciente. Así que no sólo la población aumenta con el tiempo, sino que también crece más rápidamente a medida que pasa el tiempo.

(b) La Figura 3 en la página siguiente muestra los puntos enumerados en la Tabla 3 trazados en el plano cartesiano. La Tabla 5 en la página siguiente muestra la tasa promedio de cambio del número máximo de latidos. La tasa de cambio promedio de los datos de los latidos del corazón es constante: 0,25 latidos por año, por lo que la función es lineal y los puntos de la Figura 3 se encuentran en una línea.

Machine Translated by Google

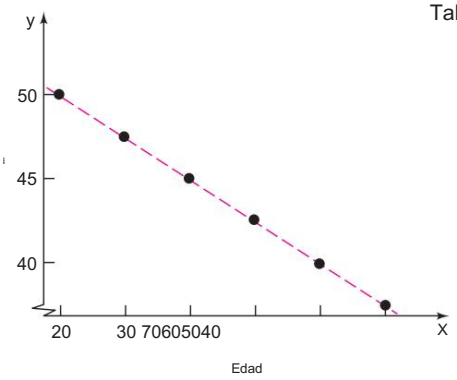


figura 3

Tabla 5

Edad, x	Número máximo de latidos, años	Tasa de cambio promedio · $\frac{y}{x}$
20	50	
		$\frac{47,5 - 50}{30 - 20} = -0,25$
30	47,5	
		-0,25
40	45	
		-0,25
50	42,5	
		-0,25
60	40	
		-0,25
70	37,5	

Ahora resuelve el problema 2 1

3 Determinar si una función lineal es creciente, decreciente o constante

Cuando la pendiente m de una función lineal es positiva (m 7 0), la línea se inclina hacia arriba de izquierda a derecha. Cuando la pendiente m de una función lineal es negativa (m 6 0), la línea se inclina hacia abajo de izquierda a derecha. Cuando la pendiente m de una función lineal es cero (m = 0), la línea es horizontal.

TEOREMA Funciones lineales crecientes, decrecientes y constantes

Una función lineal f1x2 = mx + b es creciente en su dominio si su pendiente, m, es positiva. Es decreciente en su dominio si su pendiente, m, es negativa. Es constante en su dominio si su pendiente, m, es cero.

EJEMPLO 3

Determinar si una función lineal es creciente, decreciente o Constante

Determine si las siguientes funciones lineales son crecientes, decrecientes o constantes.

(a) f1x2 = 5x - 2

(b) g1x2 = - 2x + 8

(c) s1t2 = t - 4 4 3

(d) h1z2 = 7

Solución

(a) La función lineal f1x2 = 5x - 2 tiene pendiente 5, que es positiva. La función f es creciente en el intervalo 1 - q, q 2.

(b) La función lineal g1x2 = - 2x + 8 tiene pendiente - 2, que es negativa. La función g es decreciente en el intervalo 1 - q, q 2.

(c) La función lineal s1t2 = t - 4 tiene pendiente $\frac{3}{4}$, la función s es $\frac{3}{4}$, lo cual es positivo. El creciente en el intervalo 1 - q, q 2.

(d) La función lineal h se puede escribir como h1z2 = 0z + 7. Como la pendiente es 0, la función h es constante en el intervalo 1 - q, q 2.

Ahora resuelve el problema 1 3 (d)

Machine Translated by Google

4 Construya modelos lineales a partir de descripciones verbales

Cuando la tasa de cambio promedio de una función es constante, una función lineal puede modelar la relación entre las dos variables. Por ejemplo, si una empresa de reciclaje paga $0,52 por libra de latas de aluminio, entonces la relación entre el precio p pagado y las libras recicladas x se puede modelar como la función lineal p1x2 = 0,52x,

con pendiente m = $\frac{0{,}52 \text{ dólares}}{1 \text{ libra}}$.

En palabras

Una tasa de cambio constante que involucra dos variables indica una función lineal.

Modelado con una función lineal

Si la tasa de cambio promedio de una función es una constante m, una función lineal f se puede utilizar para modelar la relación entre las dos variables de la siguiente manera:

$$f1x2 = mx + b$$

donde b es el valor de f en 0; es decir, b = f102.

EJEMPLO 4 Depreciación fija

El valor contable es el valor de un activo que una empresa utiliza para crear su balance. Algunas empresas deprecian sus activos mediante una depreciación lineal, de modo que el valor del activo disminuye en una cantidad fija cada año. El monto de la disminución depende de la vida útil que la empresa asigne al activo. Supongamos que una empresa acaba de comprar una flota de automóviles nuevos para su fuerza de ventas a un costo de 31 500 dólares por automóvil.
La empresa opta por depreciar cada vehículo por el método de línea recta +31.500

más de 7 años. Esto significa que cada automóvil se depreciará = +4500 por año.
7

(a) Escriba una función lineal que exprese el valor contable V de cada automóvil en función de su edad, x, en años.

(b) Grafique la función lineal.

(c) ¿Cuál es el valor en libros de cada automóvil después de 3 años?

(d) Interprete la pendiente.

(e) ¿Cuándo será el valor contable de cada automóvil de $9 000?

Solución

(a) Si dejamos que V(x) represente el valor de cada automóvil después de x años, entonces V(0) representa el valor original de cada automóvil, por lo que V102 = +31,500. La intersección con el eje y de la función lineal es $31,500. Debido a que cada automóvil se deprecia $4500 por año, la pendiente de la función lineal es -4500. La función lineal que representa el valor en libros V de cada automóvil después de x años es

$$V1x2 = - 4500x + 31.500$$

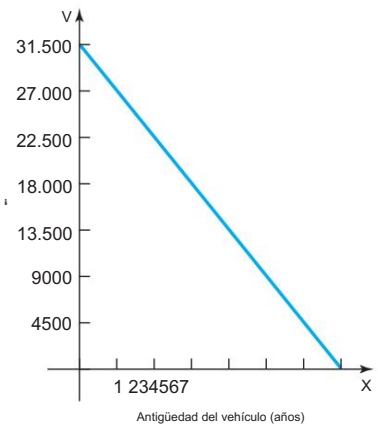


Figura 4 V1x2 = -4500x + 31,500

(b) La figura 4 muestra la gráfica de V.

(c) El valor en libros de cada automóvil después de 3 años es

$$V132 = - 4500 \# 3 + 31.500$$

$$= +18.000$$

(d) Dado que la pendiente de V1x2 = - 4500x + 31 500 es - 4500, la tasa de cambio promedio del valor contable es - +4500/año. Entonces, por cada año adicional que pasa, el valor contable del automóvil disminuye en $4500.

(continuado)

Machine Translated by Google

(e) Para encontrar cuándo el valor en libros será $9000, resuelva la ecuación

$$V1x2 = 9000$$

$$- 4500x + 31,500 = 9000$$

$$- 4500x = - 22,500 \qquad \text{Resta 31,500 de ambos lados.}$$

$$x = \frac{- 22.500}{- 4500} = 5 \qquad \text{Dividir por ·4500.}$$

El automóvil tendrá un valor contable de $9000 cuando tenga 5 años.

Ahora problema de trabajo 4 7

EJEMPLO 5 Oferta y demanda

La cantidad ofrecida de un bien es la cantidad de producto que una empresa está dispuesta a poner a la venta a un precio determinado. La cantidad demandada de un bien es la cantidad de producto que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio determinado p. Supongamos que la cantidad ofrecida, S, y la cantidad demandada, D, de teléfonos inteligentes cada mes vienen dadas por las siguientes funciones:

$$T1p2 = 15p - 900$$

$$D1p2 = - 3,75p + 2850$$

donde p es el precio (en dólares) del teléfono inteligente.

(a) El precio de equilibrio de un producto se define como el precio al que la cantidad ofrecida es igual a la cantidad demandada. Es decir, el precio de equilibrio es el precio al que S1p2 = D1p2. Encuentre el precio de equilibrio de los teléfonos inteligentes. ¿Cuál es la cantidad de equilibrio, la cantidad demandada (o ofrecida) al precio de equilibrio?

(b) Determine los precios para los cuales la cantidad ofrecida es mayor que la cantidad exigió. Es decir, resuelve la desigualdad S1p2 7 D1p2.

(c) Grafique S = S1p2 y D = D1p2 y etiquete el punto de equilibrio, el punto de intersección de S y D.

Solución

(a) Para encontrar el precio de equilibrio, resuelva la ecuación S1p2 = D1p2.

$$15p - 900 = - 3,75p + 2850 \qquad \text{S 1p2 · 15p·900; D1p2 · ·3.75p · 2850}$$

$$15p = - 3,75p + 3750 \qquad \text{Agrega 900 a ambos lados.}$$

$$18,75p = 3750 \qquad \text{Agregue 3,75p a ambos lados.}$$

$$p = 200 \qquad \text{Divide ambos lados por 18,75.}$$

El precio de equilibrio es de 200 dólares por teléfono inteligente. Para encontrar la cantidad de equilibrio, evalúe S(p) o D(p) en p = 200.

$$S12002 = 15 \# 200 - 900 = 2100$$

La cantidad de equilibrio es 2100 teléfonos inteligentes. A un precio de $200 por teléfono, la empresa producirá y venderá 2100 teléfonos cada mes y no tendrá escasez ni exceso de inventario.

(b) La desigualdad S1p2 7 D1p2 es

$$15p - 900 \ 7 - 3,75p + 2850 \qquad \text{T1p2 + D1p2}$$

$$15p \ 7 - 3,75p + 3750 \qquad \text{Agrega 900 a ambos lados.}$$

$$18.75p \ 7 \ 3750 \qquad \text{Agregue 3,75p a ambos lados.}$$

página 7 200 — Divide ambos lados por 18,75.

Si la empresa cobra más de 200 dólares por teléfono, la cantidad ofrecida superará la cantidad demandada. En este caso, la empresa tendrá un exceso de teléfonos en inventario.

Machine Translated by Google

(c) La Figura 5 muestra las gráficas de S = S1p2 y D = D1p2 con el equilibrio punto etiquetado.

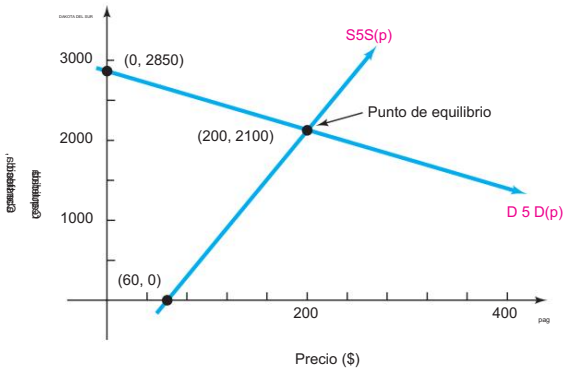


Figura 5 Funciones de oferta y demanda

Ahora resuelve el problema 4 1

3.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Grafica y = 3x - 1. (págs. 61 y 62)
2. Encuentra la pendiente de la recta que une los puntos (2, 5) y 1 - 1, 32. (págs. 56 y 57)
3. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = - 4x + 3, de 2 a 4. (págs. 115 y 116)
4. Resuelva: 60x - 900 = - 15x + 2850. (págs. A44–A45)
5. Si f1x2 = 7,5x + 15, encuentre f1 - 22. (págs. 87–89)
6. Verdadero o Falso La función $f1x2 = x^2 + 15$ es creciente en 3 el intervalo 1 - q, q 2. (págs. 111-112)

Conceptos y vocabulario

7. Para la gráfica de la función lineal f1x2 = mx + b, m es y b es el el _____ _____.
8. Si la pendiente m de la gráfica de una función lineal es _____, la función aumenta en su dominio.
9. Verdadero o Falso La pendiente de una recta no vertical es la tasa de cambio promedio de la función lineal.
10. Verdadero o Falso La tasa de cambio promedio de f1x2 = 2x + 8 es 8.
11. Opción múltiple ¿ Cuál es el único tipo de función que tiene una tasa de cambio promedio constante?
    (a) función lineal (b) función cuadrática
    (c) función escalonada (d) función de valor absoluto
12. Opción múltiple Un automóvil tiene 12,500 millas en su odómetro. Digamos que el automóvil se conduce un promedio de 40 millas por día. Elija el modelo que exprese el número de millas N que habrá en su odómetro después de x días.
    (a) N(x) = - 40x + 12,500 (b) N(x) = 40x - 12,500
    (c) N(x) = 12,500x + 40 (d) N(x) = 40x + 12,500

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 20 se da una función lineal.

(a) Encuentre la pendiente y la intersección con el eje y de cada función.

(b) Utilice la pendiente y la intersección con el eje y para representar gráficamente cada función.

(c) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de cada función?

(d) Determine si cada función es creciente, decreciente o constante.

13. f1x2 = 2x + 3 14. g1x2 = 5x - 4
15. p1x2 = - x + 6
16. h1x2 = - 3x + 4
17. $h1x2 = -\frac{2}{3}x + 4$
18. $f1x2 = \frac{1}{4}x - 3$
19. G1x2 = - 2
20. F1x2 = 4

En los problemas 21 a 28, determine si cada función es lineal o no lineal. Si es lineal, determine la pendiente.

21.

x	y · f(x)
-2	4
-1	1
0	-2
1	-5
2	-8

22.

x	y · f(x)
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4

23.

x	y · f(x)
-2	-4
-1	0
0	4
1	8
2	12

24.

x	y · f(x)
-2	-8
-1	-3
0	0
1	1
2	0

Machine Translated by Google

25.

xy · f(x)	
-2	-4
-1	-3.5
0	-3
1	-2.5
2	-2

26.

xy · f(x)	
-2	-26
-1	-4
0	2
1	-2
2	-10

27.

xy · f(x)	
-2	0
-1	1
0	4
1	9
2	dieciséis

28.

xy · f(x)	
-2	8
-1	8
0	8
1	8
2	8

Aplicaciones y extensiones

29. Supongamos que f1x2 = 4x - 1 y g1x2 = - 2x + 5.

(a) Resuelva f1x2 = 0. (b) Resuelva f1x2 7 0.

(c) Resuelva f1x2 = g1x2. (d) Resuelva f1x2 … g1x2.

(e) Grafique y = f1x2 e y = g1x2 y etiquete el punto que representa la solución de la ecuación f1x2 = g1x2.

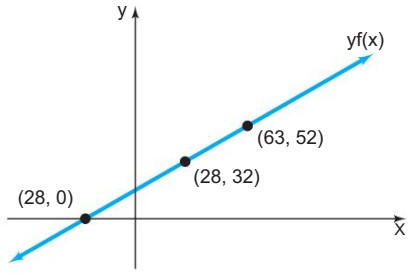
30. Supongamos que f1x2 = 3x + 5 y g1x2 = - 2x + 15.

(a) Resuelva f1x2 = 0. (b) Resuelva f1x2 6 0.

(c) Resuelva f1x2 = g1x2. (d) Resuelva f1x2 Ú g1x2.

(e) Grafique y = f1x2 e y = g1x2 y etiquete el punto que representa la solución de la ecuación f1x2 = g1x2.

31. En las partes (a) a (f), utilice la figura dada.

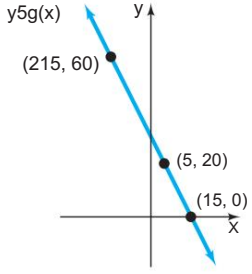


(a) Resuelva f1x2 = 32. (b) Resuelva f1x2 = 52.

(c) Resuelva f1x2 = 0. (d) Resuelva f1x2 7 32.

(e) Resuelva f1x2 … 52. (f) Resuelva 0 6 f1x2 6 52.

32. En las partes (a) a (f), utilice la siguiente figura.

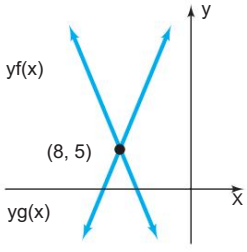


(a) Resuelva g1x2 = 20. (b) Resuelva g1x2 = 60.

(c) Resuelva g1x2 = 0. (d) Resuelva g1x2 7 20.

(e) Resuelva g1x2 … 60. (f) Resuelva 0 6 g1x2 6 60.

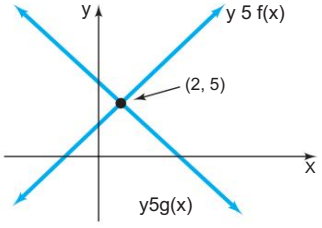
33. En las partes (a) y (b), utilice la figura dada.



(a) Resuelva la ecuación: f1x2 = g1x2.

(b) Resuelva la desigualdad: f1x2 7 g1x2.

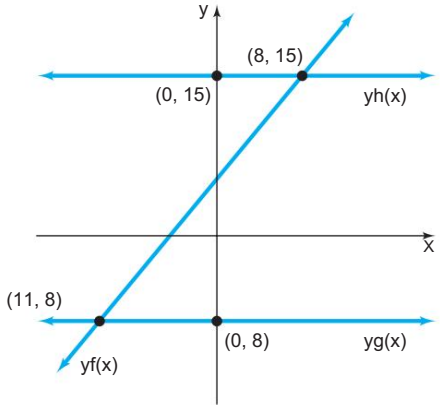
34. En las partes (a) y (b), utilice la siguiente figura.



(a) Resuelva la ecuación: f1x2 = g1x2.

(b) Resuelva la desigualdad: f1x2 … g1x2.

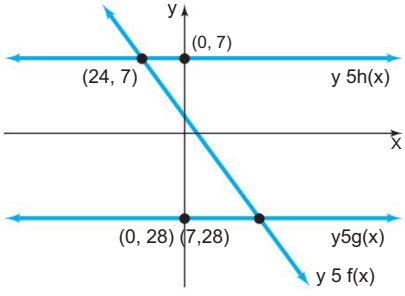
35. En las partes (a) y (b), utilice la figura dada.



(a) Resuelva la ecuación: f1x2 = g1x2.

(b) Resuelva la desigualdad: g1x2 … f1x2 6 h1x2.

36. En las partes (a) y (b), utilice la siguiente figura.



(a) Resuelva la ecuación: f1x2 = g1x2.

(b) Resuelva la desigualdad: g1x2 6 f1x2 … h1x2.

37. Cómo ser remolcado El costo C, en dólares, de remolcar un automóvil se modela mediante la función C1x2 = 2.5x + 85, donde x es el número de millas remolcadas.

(a) ¿Cuál es el costo de remolcar un automóvil 40 millas?

(b) Si el costo de remolcar un automóvil es $245, ¿cuántas millas recorrieron?

¿remolcado?

(c) Suponga que tiene sólo $150. ¿Cuál es la cantidad máxima de millas que puede ser remolcado?

(d) ¿ Cuál es el dominio de C?

Machine Translated by Google

38. Cargos telefónicos El costo mensual C, en dólares, de las llamadas de Estados Unidos a Alemania con un determinado plan inalámbrico se modela mediante la función C1x2 = 0,26x + 5, donde x es el número de minutos utilizados.

(a) ¿Cuál es el costo si habla por teléfono durante 50 minutos?

(b) Suponga que su factura mensual es de $21,64. Cuántos minutos usaste el teléfono?

(c) Suponga que tiene un presupuesto de 50 dólares al mes para llamadas a Alemania. ¿Cuál es el número máximo de minutos que puedes hablar?

(d) ¿Cuál es el dominio de C si hay 30 días en el ¿mes?

39. Ciencias Forenses La relación entre la altura H de una mujer adulta y la longitud x de su fémur, en centímetros, se puede modelar mediante la función lineal H(x) = 2,47x + 54,10.

(a) Si los restos esqueléticos incompletos de una mujer adulta incluyen un fémur que mide 46,8 centímetros, aproxime la altura de esta mujer a la décima más cercana.

(b) Si una mujer adulta mide 152,4 centímetros de altura, aproxime la longitud de su fémur a la décima más cercana.

40. Ciencias Forenses La relación entre la altura H de un varón adulto y la longitud x de su húmero, en centímetros, se puede modelar mediante la función lineal H(x) = 2,89x + 78,10.

(a) Si los restos esqueléticos incompletos de un macho adulto incluyen un húmero que mide 37,1 centímetros, aproxime la altura de este macho a la décima más cercana.

(b) Si un varón adulto mide 175,3 centímetros de altura, aproxime la longitud de su húmero a la décima más cercana.

41. Oferta y demanda Supongamos que la cantidad ofrecida S y la cantidad demandada D de camisetas en un concierto vienen dadas por las siguientes funciones donde p es el precio:

$$T1p2 = - 250 + 50p$$

$$D1p2 = 1000 - 75p$$

(a) Encuentre el precio de equilibrio de las camisetas en este concierto.

(b) Determine los precios para los cuales la cantidad demandada es mayor que la cantidad ofrecida.

(c) ¿Qué pasará finalmente con el precio de las camisetas si la cantidad demandada es mayor que la cantidad ofrecida?

42. Oferta y demanda Supongamos que la cantidad ofrecida S y la cantidad demandada D de hot dogs en un partido de béisbol están dadas por las siguientes funciones:

$$T1p2 = - 2000 + 3000p$$

$$D1p2 = 10.000 - 1.000p$$

donde p es el precio de un hot dog.

(a) Encuentre el precio de equilibrio de los hot dogs en el partido de béisbol. ¿Cuál es la cantidad de equilibrio?

(b) Determine los precios para los cuales la cantidad demandada es menor que la cantidad ofrecida.

(c) ¿ Qué crees que sucederá eventualmente con el precio de los hot dogs si la cantidad demandada es menor que la cantidad ofrecida?

43. Impuestos La función T1x2 = 0,121x - 95252 + 952,50 representa la factura de impuestos T de una sola persona cuyo ingreso bruto ajustado es x dólares para ingresos superiores a $9525 pero no superiores a $38,700, en 2018.

Fuente: Servicio de Impuestos Internos

(a) ¿Cuál es el dominio de esta función lineal?

(b) ¿Qué es la factura de impuestos de un contribuyente único si el ingreso bruto ajustado son $20,000?

(c) ¿ Qué variable es independiente y cuál es dependiente?

(d) Grafique la función lineal sobre el dominio especificado en parte (a).

(e) ¿Cuál es el ingreso bruto ajustado de un contribuyente soltero si la factura de impuestos es de $3109,50?

44. Impuesto al equilibrio competitivo Según el acuerdo laboral 2017-2021 entre la Major League Baseball y los jugadores, cualquier equipo cuya nómina excediera los $195 millones en 2017 tenía que pagar un impuesto al equilibrio competitivo del 50%. La función lineal T1p2 = 0,501p - 1952 describe el impuesto al equilibrio competitivo T para un equipo cuya nómina era p (en millones de dólares).

Fuente: Liga Mayor de Béisbol

(a) ¿Cuál es el dominio de esta función lineal?

(b) ¿Cuál fue el impuesto al equilibrio competitivo para los Yankees de Nueva York, cuya nómina en 2017 fue de $209,3 millones?

(c) Grafique la función lineal.

(d) ¿Cuál fue la nómina de 2017 de los Dodgers de Los Ángeles, que pagaron un impuesto al saldo competitivo de $24,5 millones?

El punto en el que los beneficios de una empresa son iguales a cero se denomina punto de equilibrio de la empresa. Para los problemas 45 y 46, represente R los ingresos de una empresa, C represente los costos de la empresa y x represente el número de unidades producidas y vendidas cada día.

(a) Encuentre el punto de equilibrio de la empresa; es decir, encuentre x tal que R = C.

(b) Resuelva la desigualdad R1x2 7 C1x2 para encontrar las unidades que representan una ganancia para la empresa.

45. R1x2 = 12x C1x2 = 10x + 15.000

46. R(x) = 200x
C(x) = 110,5x + 89.500

47. Depreciación lineal Supongamos que una empresa acaba de comprar una computadora nueva por $2400. La empresa opta por depreciar por el método de línea recta durante 4 años.

(a) Escriba una función lineal que exprese el valor contable de la computadora en función de su antigüedad.

(b) ¿Cuál es el dominio implícito de la función encontrada en parte (a)?

(c) Utilice la herramienta gráfica para representar gráficamente la ecuación lineal.

(d) ¿Cuál es el valor en libros de la computadora después de 2 años?

(e) ¿Cuándo valdrá la computadora $600?

48. Depreciación lineal Supongamos que una empresa acaba de comprar una nueva máquina para sus instalaciones de fabricación por 120 000 dólares. La empresa opta por depreciar la máquina mediante el método lineal durante 10 años.

(a) Escriba un modelo lineal que exprese el valor contable V de la máquina en función de su edad x.

(b) ¿Cuál es el dominio de la función encontrada en el inciso (a)?

(c) Grafique la función lineal.

(d) ¿Cuál es el valor en libros de la máquina después de 4 años?

(e) ¿Cuándo tendrá la máquina un valor contable de $72 000?

Machine Translated by Google

49. Función de costo La función de costo C más simple es una función de costo lineal, C1x2 = mx + b, donde la intersección con b representa los costos fijos de operar un negocio y la pendiente m representa el costo de cada artículo producido. Supongamos que un pequeño fabricante de bicicletas tiene costos fijos diarios de $1800 y que fabricar cada bicicleta cuesta $90.
(a) Escriba un modelo lineal que exprese el costo C de fabricar x bicicletas en un día.
(b) Grafique el modelo.
(c) ¿Cuál es el costo de fabricar 14 bicicletas en un día?
(d) ¿Cuántas bicicletas podrían fabricarse por $3780?

50. Función de costo Consulte el problema 49. Suponga que el propietario del edificio aumenta el alquiler del fabricante de bicicletas en $100 por mes.
(a) Suponiendo que el fabricante está abierto al público 20 días al mes, ¿cuáles son los nuevos costos fijos diarios?
(b) Escriba un modelo lineal que exprese el costo C de fabricar x bicicletas en un día con el alquiler más alto.
(c) Grafique el modelo.
(d) ¿Cuál es el costo de fabricar 14 bicicletas en un día?
(e) ¿Cuántas bicicletas se pueden fabricar por $3780?

51. Ley de Hooke Según la ley de Hooke, existe una relación lineal entre la distancia que se estira un resorte y la fuerza que lo estira. Supongamos que un peso de 0,5 kilogramos hace que un resorte se estire 2,75 centímetros y un peso de 1,2 kilogramos hace que el mismo resorte se estire 6,6 centímetros.
(a) Encuentre un modelo lineal que relacione la distancia d del estiramiento y el peso w.
(b) ¿Qué estiramiento causa un peso de 2,4 kilogramos?
(c) ¿Qué peso provoca un estiramiento de 19,8 centímetros?

52. Ley de Hooke La distancia d entre la parte inferior de un Un resorte suspendido y una encimera es una función lineal del peso w sujeto a la parte inferior del resorte. La parte inferior del resorte está a 9 pulgadas de la encimera cuando el peso adjunto es de 1,5 libras y está a 5 pulgadas de la encimera cuando el peso adjunto es de 2,5 libras.
(a) Encuentre un modelo lineal que relacione la distancia d desde el encimera y el peso w.
(b) Encuentre la distancia entre la parte inferior del resorte y la encimera si no hay ningún peso colocado.
(c) ¿Cuál es el peso más pequeño que hará que la parte inferior del resorte llegue a la encimera? (Ignore el grosor del peso).

53. Desafío Problema Conversión de temperatura El lineal 9 función $F(C) = C + \frac{32}{5}$ convierte grados Celsius a grados Fahrenheit y la función lineal R(F) = F + 459,67 convierte grados Fahrenheit a grados Rankine. Encuentre una función lineal que convierta grados Rankine a grados Celsius.

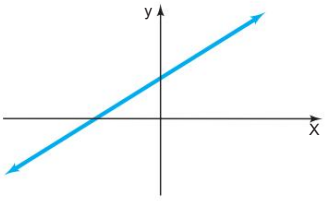
54. Práctica mixta Construcción de un modelo lineal a partir de datos Los siguientes datos representan las diversas combinaciones de refrescos y hot dogs que Yolanda puede comprar en un partido de béisbol con $60.

refresco, s	Perritos calientes, h
20	0
15	3
10	6
5	9

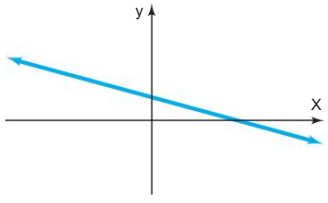
(a) Trace los pares ordenados (s, h) en un plano cartesiano.
(b) Demuestre que el número h de hot dogs comprados es una función lineal del número s de refrescos comprados.
(c) Determine la función lineal que describe la relación entre s y h.
(d) ¿Cuál es el dominio de la función lineal?
(e) Grafique la función lineal en el plano cartesiano dibujado en el inciso (a).
(f) Interprete la pendiente.
(g) Interprete las intersecciones.

Explicar conceptos: discusión y escritura

55. ¿ Qué funciones podrían tener la gráfica mostrada? (Es posible más de una respuesta).
(a) f1x2 = 2x - 7
(b) g1x2 = - 3x + 4
(c) H1x2 = 5
(d) F1x2 = 3x + 4
(mi) G1x2 = $\frac{1}{2}x + 2$



56. ¿ Qué funciones podrían tener la gráfica mostrada? (Es posible más de una respuesta).
(a) f1x2 = 3x + 1
(b) g1x2 = - 2x + 3
(c) H1x2 = 3
(d) F1x2 = - 4x - 1
(e) G1x2 = $- x + 3\frac{2}{3}$



57. ¿ En qué circunstancias una función lineal f1x2 = mx + b es impar? ¿Puede una función lineal ser par?

58. Explica cómo se puede usar la gráfica de f1x2 = mx + b para resolver mx + b 7 0.

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 59 a 68 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

59. Grafica x2 - 4x + y2 + 10y - 7 = 0.

60. Si f1x2 = $\frac{2x + B}{x - 3}$ y f152 = 8, ¿cuál es el valor de B?

61. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = 3x2 - 5x del 1 al 3.

62. Gráfica g1x2 = e $\frac{x2}{2x + 1}$ si x ... 0 si x 7 0

En los problemas 63 y 64, completa el cuadrado de cada función cuadrática.

63. f1x2 = x2 - 10x + 7

64. g(x) = 3x2 + 15x + 13

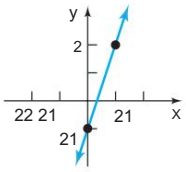
65. Encuentra las intersecciones en x y en y de la gráfica de 4x2 + 9y = 72.

66. Encuentra el dominio de f1x2 = $\frac{\sqrt{2x + 2}}{x - 4}$.

67. Supongamos f1x2 = x2 - 3x + 7. Encuentre una ecuación de la recta secante que contenga los puntos 1 - 1, f1 - 12 2 y 12, f122 2.

68. Utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente f1x2 = x3 - 8x2 + 13x - 2 durante el intervalo [- 2, 8]. Luego, aproxime los valores máximos locales y los valores mínimos locales y determine dónde f aumenta y dónde f disminuye. Redondea las respuestas a dos decimales.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 

2. $\frac{2}{3}$ 3. - 4 4. 5506 5. 0 6. Verdadero

3.2 Construyendo modelos lineales a partir de datos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Coordenadas rectangulares (Sección 1.1, págs. 38 y 39)
- Funciones (Sección 2.1, págs. 83–95)
- Líneas (Sección 1.3, págs. 56–67)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 175.

OBJETIVOS 1 Dibujar e interpretar diagramas de dispersión (p. 171)
2 Distinguir entre relaciones lineales y no lineales (p. 172)
3 Utilice una utilidad gráfica para encontrar la línea de mejor ajuste (p. 174)

1 Dibujar e interpretar diagramas de dispersión

En la Sección 3.1, construimos modelos lineales a partir de descripciones verbales. Los modelos lineales también se pueden construir ajustando una función lineal a datos que se pueden representar como pares ordenados. El primer paso es trazar los pares ordenados usando coordenadas rectangulares. El gráfico resultante es un diagrama de dispersión.

EJEMPLO 1 Dibujar e interpretar un diagrama de dispersión

En béisbol, el porcentaje de embase de un equipo representa el porcentaje de tiempo que los jugadores llegan a la base de manera segura. Los datos proporcionados en la Tabla 6 en la página siguiente representan el número de carreras anotadas y y el porcentaje de embase x para los equipos de la Liga Nacional durante la temporada regular de béisbol de 2017.

(a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos, tratando el porcentaje de embase como el factor independiente. variable.

(b) Utilice una herramienta gráfica para dibujar un diagrama de dispersión.
(c) Describa qué sucede con las carreras anotadas a medida que aumenta el porcentaje de embase.

Machine Translated by Google

Tabla 6

Equipo	En base Porcentaje, x	Carreras Anotado, y	(x,y)
Arizona	32,9	812	(32.9, 812)
Atlanta	32,6	732	(32.6, 732)
Cachorros de Chicago	33,8	822	(33.8, 822)
Cincinnati	32,9	753	(32.9, 753)
Colorado	33,8	824	(33.8, 824)
Dodgers de Los Ángeles	33.4	770	(33.4, 770)
miami	33.1	778	(33.1, 778)
milwaukee	32.2	732	(32.2, 732)
Mets de Nueva York	32.0	735	(32,0, 735)
Filadelfia	31,5	690	(31.5, 690)
pittsburgh	31,8	668	(31.8, 668)
San Diego	29,9	604	(29.9, 604)
San Francisco	30,9	639	(30.9, 639)
San Louis	33.4	761	(33.4, 761)
Washington	33.2	819	(33.2, 819)

Fuente: espn.com

Solución (a) Para dibujar un diagrama de dispersión, trace los pares ordenados enumerados en la Tabla 6, con el porcentaje de embase como la coordenada x y las carreras anotadas como la coordenada y. Consulte la Figura 6(a). Observe que los puntos en el diagrama de dispersión no están conectados.

(b) La Figura 6(b) muestra un diagrama de dispersión utilizando una calculadora gráfica TI-84 Plus C.

(c) Los diagramas de dispersión muestran que a medida que aumenta el porcentaje de embase, el número de Las carreras anotadas también aumentan.

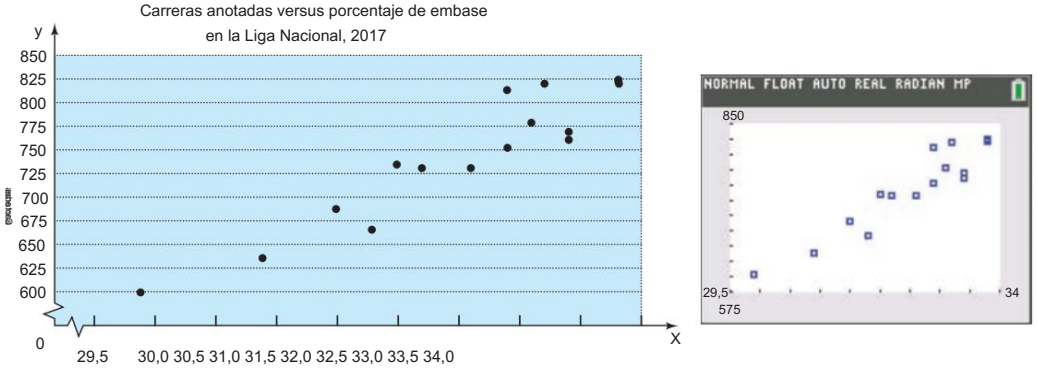


Figura 6

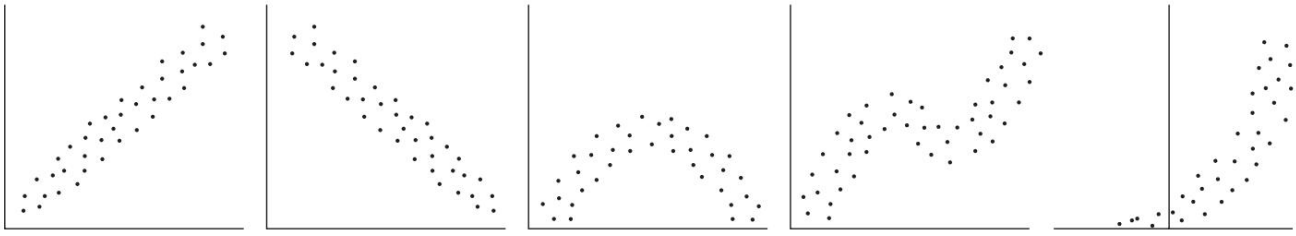
Ahora resuelve el problema 1 1 (a)

2 Distinguir entre relaciones lineales y no lineales

Observe que los puntos de la Figura 6 no siguen una relación lineal perfecta. Sin embargo, los datos muestran un patrón lineal. Existen numerosas explicaciones posibles por las que los datos no son perfectamente lineales, pero una explicación fácil es el hecho de que otras variables además del porcentaje de embase (como el número de jonrones) desempeñan un papel en la determinación de las carreras anotadas.

Los diagramas de dispersión se utilizan para ayudarnos a ver el tipo de relación que existe entre dos variables. En este texto, analizamos una variedad de relaciones diferentes que pueden existir entre dos variables. Por ahora nos concentraremos en distinguir entre relaciones lineales y no lineales. Ver Figura 7.

Machine Translated by Google

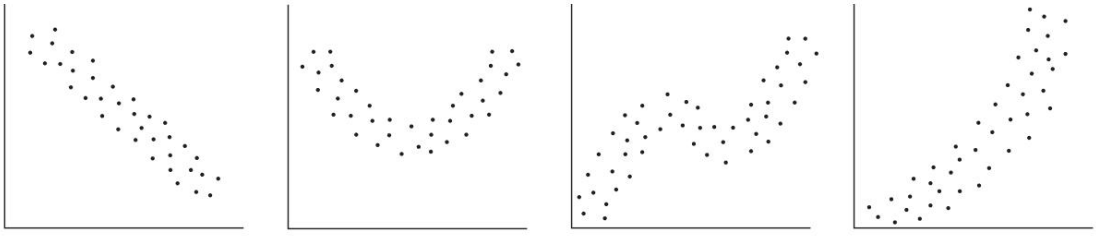


(a) lineal y 5 mx 1 b, m . 0 (b) Lineal y 5 mx 1 b, m , 0 (c) No lineal (d) No lineal (e) No lineal

Figura 7

EJEMPLO 2 Distinguir entre relaciones lineales y no lineales

Determine si la relación entre las dos variables en cada diagrama de dispersión de la Figura 8 es lineal o no lineal.



(a) (b) (C) (d)

Figura 8

Solución (a) Lineal (b) No lineal (c) No lineal (d) No lineal

Ahora resuelve el problema 5

Supongamos que el diagrama de dispersión de un conjunto de datos indica una relación lineal, como en la Figura 7(a) o (b). Es posible que deseemos modelar los datos encontrando una ecuación de una recta que relacione las dos variables. Una forma de obtener un modelo para dichos datos es trazar una línea que pase por dos puntos en el diagrama de dispersión y determinar una ecuación de la línea.

EJEMPLO 3 Encontrar un modelo para datos linealmente relacionados

Utilice los datos de la Tabla 6 del Ejemplo 1.

(a) Seleccione dos puntos y encuentre una ecuación de la recta que contiene los puntos.

(b) Grafique la recta en el diagrama de dispersión obtenido en el ejemplo 1(a).

Solución (a) Seleccione dos puntos, digamos (31.5, 690) y (33.1, 778). La pendiente de la línea que une la puntos (31.5, 690) y (33.1, 778) es

$$\text{metro} = \frac{778 - 690}{33{,}1 - 31{,}5} = \frac{88}{1.6} = 55$$

Se encuentra una ecuación de la recta con pendiente 55 y que contiene el punto (31.5, 690) usando la forma punto-pendiente con m = 55, x1 = 31.5 e y1 = 690.

y - y1 = m1x - x12 Forma punto-pendiente de una línea

y - 690 = 551x - 31,52 x1 = 31,5, y1 = 690, m = 55

y - 690 = 55x - 1732,5

y = 55x - 1042,5 El modelo

(continuado)

Machine Translated by Google

(b) La Figura 9 muestra el diagrama de dispersión con la gráfica de la recta encontrada en el inciso (a).

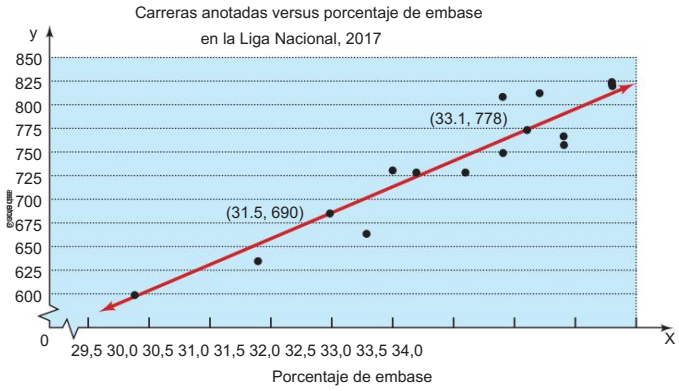


Figura 9 y = 55x - 1042,5

Selecciona otros dos puntos y completa la solución. Grafique la línea en el diagrama de dispersión obtenido en la Figura 6.

Ahora resuelva los problemas 1 1 (b) y (c)

3 Utilice una utilidad gráfica para encontrar la línea de mejor ajuste

El modelo obtenido en el Ejemplo 3 depende de la selección de puntos, que varía de persona a persona. Entonces, el modelo que encontramos puede ser diferente del modelo que usted encontró. Aunque el modelo del Ejemplo 3 parece ajustarse bien a los datos, puede haber un modelo que "se ajuste mejor a ellos". ¿Crees que tu modelo se ajusta mejor a los datos? ¿ Existe una línea de mejor ajuste? Resulta que existe un método para encontrar el modelo que mejor se ajuste a los datos relacionados linealmente (llamado línea de mejor ajuste).*

EJEMPLO 4 Encontrar la línea de mejor ajuste para datos linealmente relacionados

Utilice los datos de la Tabla 6 del Ejemplo 1.

(a) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la línea de mejor ajuste que modele la relación entre el porcentaje de embase y las carreras anotadas.

(b) Grafique la línea de mejor ajuste en el diagrama de dispersión obtenido en el ejemplo 1(b).

(c) Interprete la pendiente.

(d) Utilice la línea de mejor ajuste para predecir el número de carreras que anotará un equipo si su El porcentaje de embase es 32,2.

Solución (a) Las utilidades gráficas contienen programas integrados que encuentran la línea de mejor ajuste para una colección de puntos en un diagrama de dispersión. La ejecución del programa LINEar REGression en una TI-84 Plus C proporciona los resultados que se muestran en la Figura 10. Este resultado muestra la ecuación y = ax + b, donde a es la pendiente de la línea y b es la intersección con el eje y. La línea de mejor ajuste que relaciona el porcentaje de embase con las carreras anotadas puede expresarse como la línea

y = 57,35x - 1120,75 El modelo

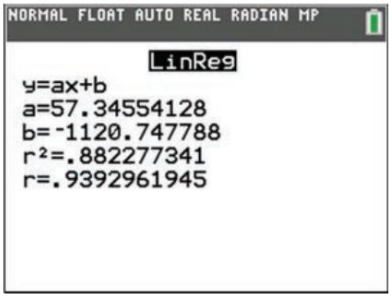


Figura 10 Regresión lineal

* En este texto no analizamos las matemáticas subyacentes de las líneas de mejor ajuste.

Machine Translated by Google

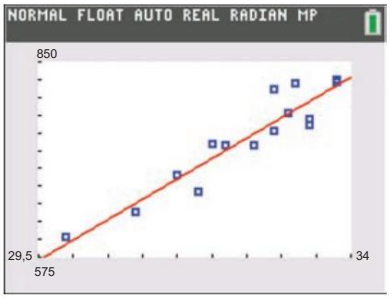


Figura 11 y = 57,35x - 1120,75

(b) La Figura 11 muestra la gráfica de la línea de mejor ajuste, junto con el diagrama de dispersión.

(c) La pendiente de la línea de mejor ajuste es 57,35, lo que significa que, por cada aumento del 1 por ciento en el porcentaje de embase, las carreras anotadas aumentan en 57,35, en promedio.

(d) Si x = 32,2 en la ecuación de la recta de mejor ajuste, obtenemos

$$y = 57{,}35 \# 32{,}2 - 1120{,}75 \approx 726 \text{ carreras}$$

Ahora resuelva los problemas 1 1 (d) y (f)

¿Parece que la línea de mejor ajuste encaja bien? En otras palabras, ¿parece ¿Describir con precisión la relación entre el porcentaje de embase y las carreras anotadas?

¿Y qué tan "buena" es esta línea de mejor ajuste? Mire nuevamente la Figura 10. La última línea de salida es r = 0,939. Este número, llamado coeficiente de correlación, r, - 1… r … 1, es una medida de la fuerza de la relación lineal que existe entre dos variables. Cuanto más cerca esté ·r· de 1, más perfecta será la relación lineal. Si r es cercano a 0, hay poca o ninguna relación lineal entre las variables. Un valor negativo de r, r 6 0, indica que a medida que x aumenta, y disminuye; un valor positivo de r, r 7 0, indica que a medida que x aumenta, y también lo hace. Los datos dados en la Tabla 6, que tienen un coeficiente de correlación de 0,939, indican una relación lineal con pendiente positiva.

3.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Traza los puntos (1, 5), (2, 6), (3, 9), (1, 12) en el plano cartesiano. ¿Es la relación {(1, 5), (2, 6), (3, 9), (1, 12)} una función? ¿Por qué? (págs. 38 y 83–87)

2. Encuentra una ecuación de la recta que contiene los puntos (1, 4) y (3, 8). (pág. 63)

Conceptos y vocabulario

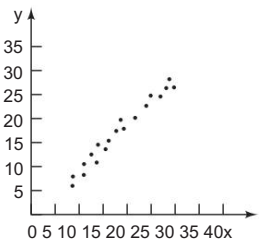
3. Un _____ Se utiliza para ayudarnos a ver qué tipo de relación, si la hay, puede existir entre dos variables.

4. Verdadero o Falso El coeficiente de correlación es una medida de la fuerza de una relación lineal entre dos variables y debe estar entre -1 y 1, inclusive.

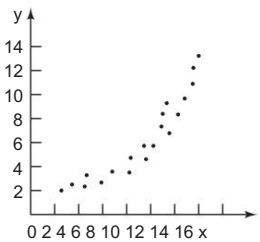
Desarrollo de habilidades

En los problemas 5 a 10, examine cada diagrama de dispersión y determine si la relación es lineal o no lineal.

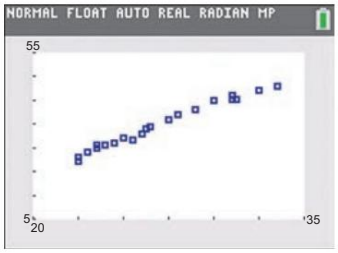
5.



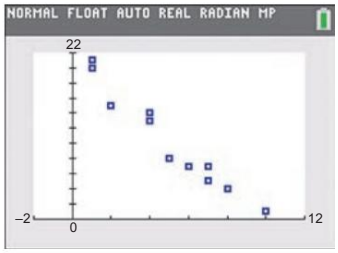
6.

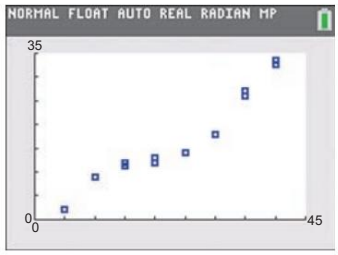


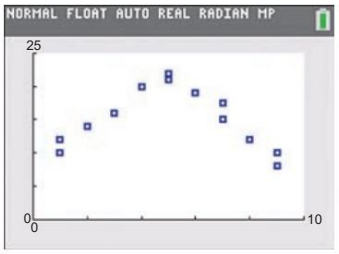
7.



Machine Translated by Google

8. 

9. 

10. 

En los problemas 11 a 16:

(a) Trace un diagrama de dispersión.

(b) Seleccione dos puntos del diagrama de dispersión y encuentre una ecuación de la recta que contiene los puntos seleccionados.

(c) Grafique la recta encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la recta de mejor ajuste.

(e) ¿Cuál es el coeficiente de correlación r?

(f) Utilice una herramienta gráfica para dibujar el diagrama de dispersión y representar gráficamente la línea de mejor ajuste.

11.

x	3	4	5	6	7	8	9
y	4	6	7	10	12	14	16

12.

x	3	5	7	9	11	13
y	0	2	3	6	9	11

13.

x	-2	-1	0	1	2
y	7	6	3	2	0

14.

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	0	1	4	5

15.

	-30	-27	-25	-20	-14
y	10	12	13	13	18

dieciséis.

	-20	-17	-15	-14	-10
años	100	120	118	130	140

Aplicaciones y extensiones

17. Dulces Los siguientes datos representan el peso (en gramos) de varias barras de chocolate y la cantidad correspondiente de calorías.

Barra de caramelo	Peso, x	Calorías, y
Chocolate con leche Hershey®	44.28	230
Nestlé's Crunch®	44,84	230
Dedo de mantequilla®	61.30	270
Bebé Ruth®	66,45	280
Almendra Alegría®	47,33	220
Twix® (con caramelo)	58.00	280
Snickers®	61.12	280
Salud®	39,52	210

Fuente: Megan Pocius, estudiante de Joliet Junior College

(a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos, tratando el peso como variable independiente.

(b) ¿Qué tipo de relación parece existir entre el peso de una barra de chocolate y el número de calorías?

(c) Seleccione dos puntos y encuentre un modelo lineal que contenga los puntos.

(d) Grafique la línea en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso (a).

(e) Utilice el modelo lineal para predecir la cantidad de calorías en una barra de chocolate que pesa 62,3 gramos.

(f) Interprete la pendiente de la recta encontrada en el inciso (c).

18. Tornados Los siguientes datos representan el ancho (en yardas) y el largo (en millas) de varios tornados.

Ancho (yardas), w	Largo (millas), L
200	2.5
350	4.8
180	2.0
300	2.5
500	5.8
400	4.5
500	8.0
800	8.0
100	3.4
50	0,5
700	9.0
600	5.7

Fuente: NOAA

(a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos, tratando el ancho como la variable independiente.

(b) ¿Qué tipo de relación parece existir entre el ancho y la longitud de los tornados?

(c) Seleccione dos puntos y encuentre un modelo lineal que contenga los puntos.

(d) Grafique la línea en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso (a).

(e) Utilice el modelo lineal para predecir la duración de un tornado. que tiene un ancho de 450 yardas.

(f) Interprete la pendiente de la recta encontrada en el inciso (c).

Machine Translated by Google

19. Videojuegos y promedio de calificaciones El profesor Grant Alexander quería encontrar un modelo lineal que relacionara el número h de horas que un estudiante juega videojuegos cada semana con el promedio de calificaciones acumulativo G del estudiante. Seleccionó al azar a 10 estudiantes de tiempo completo en su universidad y pidió a cada estudiante que revelara la cantidad de horas que pasaba jugando videojuegos y el promedio de calificaciones acumulativo del estudiante.

Horas de videojuegos por semana, horas	Punto de calificación Promedio, G
0	3.49
0	3.05
2	3.24
3	2,82
3	3.19
5	2.78
8	2.31
8	2.54
10	2.03
12	2.51

(a) Explique por qué el número de horas dedicadas a jugar videojuegos es la variable independiente y el promedio de calificaciones acumulativo es la variable dependiente.

(b) Utilice una herramienta gráfica para dibujar un diagrama de dispersión.

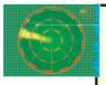
(c) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la línea de mejor ajuste que modele la relación entre el número de horas de juego de videojuegos cada semana y el promedio de calificaciones. Exprese el modelo usando notación de funciones.

(d) Interprete la pendiente de la línea de mejor ajuste.

(e) Prediga el promedio de calificaciones de un estudiante que juega videojuegos durante 8 horas cada semana.

(f) ¿ Cuántas horas de juego de video crees que juega un estudiante cuyo promedio de calificaciones es 2.40?

20. Huracanes Los datos en la parte superior de la siguiente columna representan la presión atmosférica p (en milibares) y la velocidad del viento w (en nudos) medidas durante varios sistemas tropicales en el Océano Atlántico.



Presión atmosférica (milibares), p	Velocidad del viento (nudos), w
993	50
994	60
997	45
1003	45
1004	40
1000	55
994	55
942	105
1006	40
942	120
986	50
983	70
940	120
966	100
982	55

Fuente: Centro Nacional de Huracanes

(a) Utilice una herramienta gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos, tratando la presión atmosférica como la variable independiente.

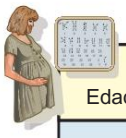
(b) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la línea de mejor ajuste que modele la relación entre la presión atmosférica y la velocidad del viento. Exprese el modelo usando notación de funciones.

(c) Interprete la pendiente.

(d) Predecir la velocidad del viento de una tormenta tropical si la atmósfera La presión mide 990 milibares.

(e) ¿Cuál es la presión atmosférica de un huracán si la velocidad del viento es de 85 nudos?

21. Edad materna versus síndrome de Down A un biólogo le gustaría saber cómo la edad de la madre afecta la incidencia del síndrome de Down. Los siguientes datos representan la edad de la madre y la incidencia del síndrome de Down por cada 1000 embarazos. Trace un diagrama de dispersión tratando la edad de la madre como variable independiente. ¿Tendría sentido encontrar la línea que mejor se ajuste a estos datos? ¿Por qué o por qué no?



Edad de la madre, x	Incidencia de Down Síndrome, años
33	2.4
34	3.1
35	4
36	5
37	6.7
38	8.3
39	10
40	13.3
41	16.7
42	22.2
43	28.6
44	33.3
45	50

Fuente: Hook, EB, Journal of the American Asociación Médica, 249, 2034–2038, 1983.

Machine Translated by Google

22. Publicidad en EE. UU. Los siguientes datos representan los porcentajes del gasto publicitario en EE. UU. para anuncios en Internet, n, y anuncios de revistas, m, a lo largo del tiempo.

internet, sustantivo, masculino	Revista, m
8,2%	14,5%
10.7	13.9
14.0	12.5
15.5	12.3
17.2	12.0
19.4	11.1
22.0	10.7
24.8	10.1
28.3	9.5
31,7	8.7
35.1	7.8

Fuente: Paquete de datos de marketing 2018. The Ad Age Centro de datos, 18/12/2017

(a) Trace un diagrama de dispersión de los datos, tratando el porcentaje de gasto en publicidad en Internet como variable independiente. ¿La relación parece ser lineal?

(b) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la línea de mejor ajuste que modele la relación entre los porcentajes de gasto en anuncios de Internet y anuncios de revistas. Exprese el modelo usando notación de funciones.

(c) ¿Cuál es el coeficiente de correlación? ¿El coeficiente de correlación respalda su conclusión del inciso (a)?

(d) Interprete la pendiente de la línea de mejor ajuste.

(e) ¿Cuál es el dominio de la función?

(f) Prediga el porcentaje de gasto en anuncios en revistas cuando los anuncios en Internet representen el 26,0% del gasto en publicidad.

Explicar conceptos: discusión y escritura

23. Encuentra la recta de mejor ajuste para los pares ordenados (1, 5) y (3, 8). ¿Cuál es el coeficiente de correlación para estos datos? ¿Por qué es razonable este resultado?

24. ¿Qué implica un coeficiente de correlación de 0?

25. Explique por qué no tiene sentido interpretar la intersección y en el problema 17.

26. Consulte el problema 19. Resuelva G1h2 = 0 y proporcione una interpretación de este resultado. Encuentre G102 y proporcione una interpretación de este resultado.

Conserve su conocimiento

Los problemas 27 a 36 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

27. Encuentra una ecuación para la recta que contiene los puntos (- 1, 5) y (3, - 3). Escribe la ecuación usando la forma general o la forma pendiente-intersección, según prefieras.

28. Encuentra el dominio de $f1x2 = x2 \dfrac{x - 1}{- 25.}$

29. Para f1x2 = 5x - 8 y g1x2 = x2 - 3x + 4, encuentre 1g - f2 1x2.

30. Encuentra una función cuya gráfica sea la gráfica de y = x2 , pero Se desplazó 3 unidades hacia la izquierda y 4 unidades hacia abajo.

31. Resuelve: x2 - 4x = 3

32. Resolver. Escribe la respuesta en notación de intervalo.

5(2x + 7) - 6x Ú 10 - 3(x + 9)

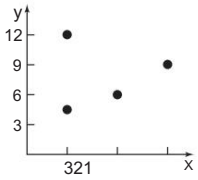
33. Determina algebraicamente si la función f1x2 = 5 - 2x2 es par, $\dfrac{x2}{\text{impar o}}$ ninguna de las dos.

34. Encuentra la (s) intersección (es) en x y en y de la gráfica de 3x - 8y = 6.

35. Racionaliza el numerador: $x - 35 \dfrac{\sqrt{6 - 2x + 1}}{}$ x Ú - 1, x · 35

Escribe $12 \dfrac{4x}{+ x21/2}$ + 312 + x21/2, x 7 - 2, como un solo cociente en el que solo aparezcan exponentes positivos.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 

No es una función porque la entrada, 1, corresponde a dos salidas diferentes.

2. y = 2x + 2

Machine Translated by Google

3.3 Funciones cuadráticas y sus propiedades

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Intersecciones (Sección 1.2, págs. 48–49)
- Técnicas gráficas: Transformaciones (Sección 2.5, págs. 134–143)
- Completar el cuadrado (Sección A.3, pág. A29; Sección A.6, Ejemplo 6, págs. A48–A49)
- Ecuaciones cuadráticas (Sección A.6, págs. A47–A51)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 188.

OBJETIVOS 1 Graficar una función cuadrática usando transformaciones (p. 180)
2 Identificar el vértice y el eje de simetría de una parábola (p. 182)
3 Grafique una función cuadrática usando su vértice, eje y Intercepciones (pág. 183)
4 Encuentre una función cuadrática dado su vértice y otro punto (p. 186)
5 Encuentre el valor máximo o mínimo de una función cuadrática (p. 186)

Funciones cuadráticas A

continuación se muestran algunos ejemplos de funciones cuadráticas.

$$f(x) = x^2 \qquad F(x) = 3x^2 - 5x + 1 \qquad g(x) = -6x^2 + 1 \qquad H(x) = \frac{1}{3}(2x^2 + x - 2)$$

DEFINICIÓN Función Cuadrática

Una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, byc son números reales y $a \neq 0$. El dominio de una función cuadrática es el conjunto de todos los números reales .

En palabras
Una función cuadrática es una función definida por un polinomio de segundo grado en una variable.

Muchas aplicaciones requieren conocimientos de funciones cuadráticas. Por ejemplo, suponga que Texas Instruments recopila los datos que se muestran en la Tabla 7, que relacionan la cantidad de calculadoras vendidas con el precio p (en dólares) por calculadora. Dado que el precio de un producto determina la cantidad que se comprará, tratamos el precio como la variable independiente. La relación entre el número x de calculadoras vendidas y el precio p por calculadora viene dada por la ecuación lineal

$$x = 21.000 - 150p$$

Tabla 7

Precio p por Calculadora, (en dólares)	Número de Calculadoras, x
60	12.000
...	11.250
70	10.500
75	9.750
80	9.000
85	8.250
90	7.500

Machine Translated by Google

Entonces, el ingreso R derivado de la venta de x calculadoras al precio p por calculadora es igual al precio de venta unitario p de la calculadora multiplicado por el número x de unidades realmente vendidas. Eso es,

$$R = XP$$

$$R1p2 = 121.000 - 150p2p \qquad x \cdot 21.000 \cdot 150p$$

$$= - 150p2 + 21.000p$$

Entonces el ingreso R es una función cuadrática del precio p. La Figura 12 ilustra la gráfica de esta función de ingresos, cuyo dominio es 0... p ... 140, ya que tanto x como p deben ser no negativos.

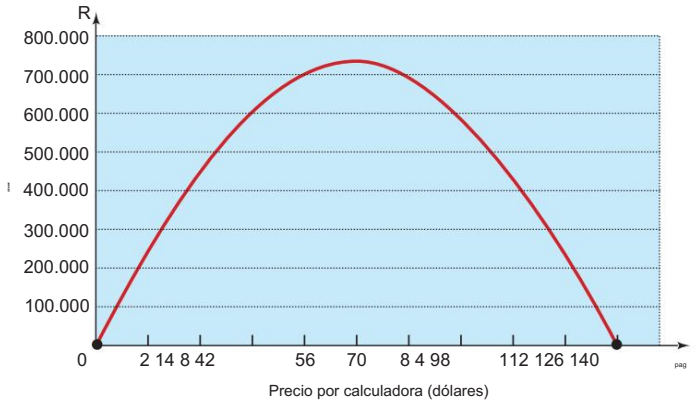


Figura 12 R1p2 = -150p2 + 21.000p

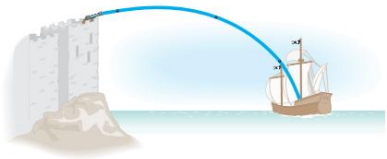


Figura 13 Trayectoria de una bala de cañón

Una función cuadrática también modela el movimiento de un proyectil. Con base en la Segunda Ley del Movimiento de Newton (la fuerza es igual a la masa por la aceleración, F = ma), se puede demostrar que, ignorando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil impulsado hacia arriba con una inclinación hacia la horizontal es la gráfica de una función cuadrática. Consulte la Figura 13 para ver una ilustración.

1 Graficar una función cuadrática usando transformaciones

La Figura 14 muestra la gráfica de tres funciones de la forma f1x2 = ax2 , un 7 0, para a = 1, a = 2 $\frac{1}{2}$, y a = 3. La Figura 15 muestra las gráficas de f1x2 = ax2 para a 6 0.

Observe que estas gráficas son reflexiones sobre el eje x de las gráficas de la Figura 14.

Las gráficas de las Figuras 14 y 15 son típicas de las gráficas de todas las funciones cuadráticas, que se llaman parábolas.

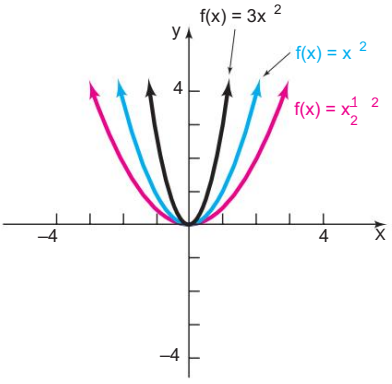


Figura 14 y = ax2 a 7 0

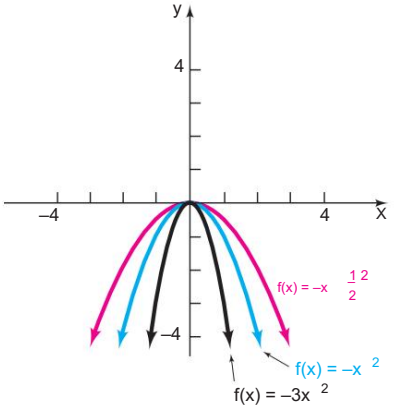


Figura 15 y = ax2 a 6 0

Machine Translated by Google

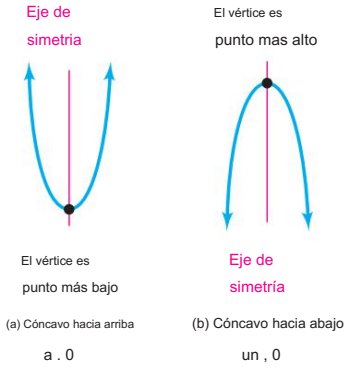


Figura 16 Gráficas de una función cuadrática, f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0

Se pueden sacar dos conclusiones sobre la gráfica de f1x2 = ax2 .

- A medida que 0 a 0 aumenta, la gráfica se estira verticalmente (se vuelve “más alta”), y a medida que 0 a 0 se acerca a cero, el gráfico se comprime verticalmente (se vuelve “más corto”).
- Si es 7 0, el gráfico se abre “hacia arriba” y si es 6 0, el gráfico se abre “abajo”.

Consulte la Figura 16, donde se muestran dos parábolas.

- La parábola de la izquierda se abre. Describimos esto diciendo que la gráfica es cóncava hacia arriba. Observe que el gráfico tiene un punto más bajo, donde hay un mínimo absoluto.
- La parábola de la derecha se abre hacia abajo. Describimos esto diciendo que la gráfica es cóncava hacia abajo. Observe que el gráfico tiene un punto más alto, donde hay un máximo absoluto.

El punto más bajo o más alto de una parábola se llama vértice. La línea vertical que pasa por el vértice de cada parábola se llama eje de simetría (generalmente abreviado como eje) de la parábola. El eje de una parábola se puede utilizar para encontrar puntos adicionales en la parábola.

Las parábolas que se muestran en la Figura 16 son las gráficas de una función cuadrática f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0. Observe que los ejes de coordenadas no están incluidos en la figura. Dependiendo de los números a, b y c, los ejes podrían ubicarse en cualquier lugar. El hecho importante es que la forma de la gráfica de una función cuadrática se parecerá a una de las parábolas de la Figura 16.

En el siguiente ejemplo, se utilizan técnicas de la Sección 2.5 para graficar una función cuadrática f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0. El método de completar el cuadrado se usa para escribir la función f en la forma f1x2 = a1x - h2 2 + k.

EJEMPLO 1 Graficar una función cuadrática usando transformaciones

Grafica la función f1x2 = 2x2 + 8x + 5. Encuentra el vértice y el eje de simetría.

Solución

Recuerda que para completar el cuadrado, el coeficiente de x2 debe ser igual a 1. Entonces factorizamos 2 en el lado derecho.

¿Necesita revisar?
Completar el cuadrado se analiza en la Sección A.3, p. A29, y Sección A.6, págs. A48-A49.

f1x2 = 2x2 + 8x + 5

= 21x2 + 4x2 + 5 Factoriza el 2 de 2x2 · 8x.

= 21x2 + 4x + 42 + 5 - 8 Completa el cuadrado de x2 · 4x sumando 4. Observa que el factor de 2 requiere que se sume y reste 8.

= 21x + 22 2 - 3

La gráfica de f se puede obtener a partir de la gráfica de y = x2 usando transformaciones como se muestra en la Figura 17. Ahora compare esta gráfica con la gráfica de la Figura 16(a). La gráfica de f1x2 = 2x2 + 8x + 5 es una parábola que es cóncava hacia arriba y tiene su vértice (punto más bajo) en 1 - 2, - 32. Su eje de simetría es la recta x = - 2.

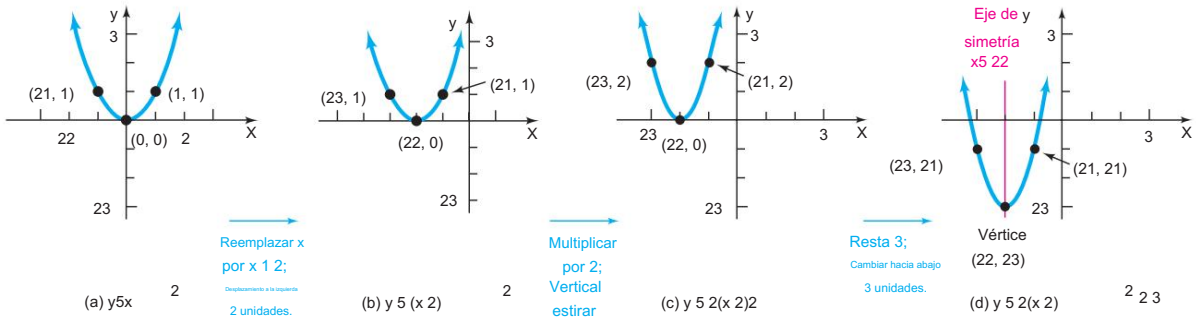


Figura 17

Ahora resuelve el problema 3 5

Machine Translated by Google

El método utilizado en el Ejemplo 1 se puede utilizar para graficar cualquier función cuadrática f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0, de la siguiente manera:

f1x2 = ax2 + bx + c

= aax2 + $\frac{b}{a}$ xb + c — Factoriza a desde ax2 · bx.

= aax2 + $\frac{b}{a}$x + $\frac{b2}{4a2b}$ + c - a # $\frac{b2}{4a2}$ — Completa el cuadrado sumando 4a2 b2 $\frac{b2}{}$ paréntesis, y restando un # 4a2.

= aax + $\frac{b}{2a\,b}^2$ + c - $\frac{b2}{4a}$ — Factor ; simplificar.

= aax + $\frac{b}{2a\,b}^2$ + $\frac{4ac - b2}{4a}$ — c - $\frac{b2}{4a}$ · c ~ $\frac{4a}{4a}$ · $\frac{b2}{4a}$ · $\frac{4ac \cdot b2}{4a}$

Estos resultados llevan a la siguiente conclusión:

DEFINICIÓN Forma de vértice de una función cuadrática

Supongamos que f es la función cuadrática f1x2 = ax2 + bx + c. Si f se escribe como

$$f1x2 = a1x - h2^2 + k \qquad (1)$$

donde h = - 2a $\frac{b}{}$ y k = $\frac{4ac - b2}{4a}$, entonces la función cuadrática f está en forma de vértice.

La gráfica de f1x2 = a1x - h2 ^{2} + k es la parábola y = ax2 desplazada horizontalmente h unidades (reemplazar x por x - h) y verticalmente k unidades (agregar k). El vértice de la parábola es (h, k), y la función es cóncava hacia arriba si a 7 0 y es cóncava hacia abajo si a 6 0. El eje de simetría es la línea vertical x = h.

Por ejemplo, compare la ecuación (1) con la solución dada en el Ejemplo 1.

f1x2 = 21x + 22 = ^{2} - 3

21x - 1 - 22 2 cc ^{2} + 1 - 32

= a1x - h2 c

Como a = 2, ^{2} + k

la gráfica es cóncava hacia arriba. Además, como h = - 2 y k = - 3, su vértice es 1 - 2, - 32, el punto más bajo de la gráfica.

2 Identificar el vértice y el eje de simetría de una parábola

No necesitamos completar el cuadrado para identificar el vértice de una parábola. es b

Generalmente es más fácil obtener el vértice recordando que su coordenada x es h = - 2a $\frac{}{}$.

La coordenada y k se encuentra luego evaluando f en - 2a $\frac{b}{}$. Es decir, k = f a - 2a $\frac{b}{}$ b.

Propiedades de la gráfica de una función cuadrática (una parábola)

f1x2 = ax2 + bx + c un · 0

- Vértice = a - $\frac{b}{2a}$, f a - 2a $\frac{b}{}$ bb
- Eje de simetría: la línea vertical x = - 2a $\frac{b}{}$
- Una parábola es cóncava hacia arriba si a 7 0; el vértice es el punto mínimo.
- Una parábola es cóncava hacia abajo si a 6 0; el vértice es el punto máximo.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2

Localizar el vértice de una parábola sin representar gráficamente

Sin representar gráficamente, localiza el vértice y el eje de simetría de la parábola definida por f1x2 = - 3x2 + 6x + 1. ¿Es cóncava hacia arriba o hacia abajo?

Solución

Para esta función cuadrática, a = - 3, b = 6 y c = 1.
La coordenada x del vértice es

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{21 - 32} = 1$$

La coordenada y del vértice es

$$k = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f112 = -3 \# 1^2 + 6 \# 1 + 1 = 4$$

El vértice está situado en el punto (1, 4). El eje de simetría es la recta x = 1.
Como a = - 3 6 0, la parábola es cóncava hacia abajo.

Ahora resuelve el problema 4 3 (a)

3 Graficar una función cuadrática usando su vértice, eje e intersecciones

La ubicación del vértice y las intersecciones, junto con el conocimiento de si la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo, suele ser información suficiente para graficar f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0.

- La intersección con el eje y es el valor de f en x = 0; es decir, la intersección con el eje y es f102 = c.
- Las intersecciones con el eje x, si las hay, se encuentran resolviendo la ecuación cuadrática

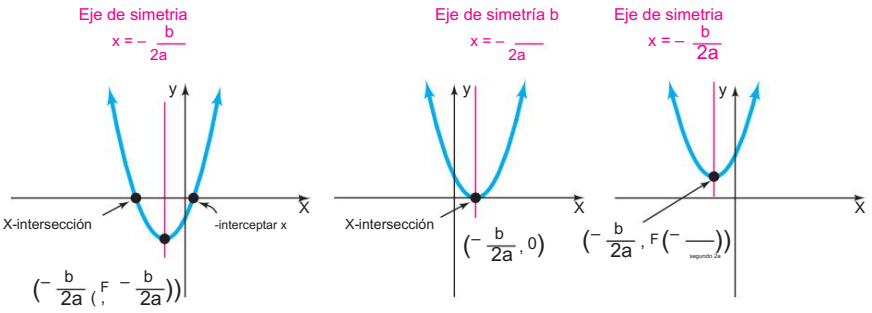
$$ax2 + bx + c = 0$$

Una ecuación cuadrática tiene dos, una o ninguna solución real, dependiendo de si el discriminante b2 - 4ac es positivo, 0 o negativo.

Las intersecciones x de una función cuadrática

- Si el discriminante b2 - 4ac 7 0, la gráfica de f1x2 = ax2 + bx + c tiene dos intersecciones en x distintas, por lo que cruza el eje x en dos lugares.
- Si el discriminante b2 - 4ac = 0, la gráfica de f1x2 = ax2 + bx + c tiene una intersección con el eje x de modo que toque el eje x en su vértice.
- Si el discriminante b2 - 4ac 6 0, la gráfica de f1x2 = ax2 + bx + c no tiene intersecciones en x, por lo que no cruza ni toca el eje x.

La Figura 18 ilustra estas posibilidades para parábolas que son cóncavas hacia arriba.



(a) b 2 – 4ac . 0 — Dos intersecciones x

(b) b 2 – 4ac = 0 — Una intercepción x

(c)b 2 – 4ac < 0 — Sin intersecciones x

Figura 18
f(x) = ax2 + bx + c, a 7 0

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Graficar una función cuadrática usando su vértice, eje e intersecciones

(a) Grafique f1x2 = - x2 + 6x - 5 determinando si la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, eje de simetría, intersección con el eje y e intersección con el eje x, si las hubiera.

(b) Encuentre el dominio y el rango de f.

(c) Determine dónde f aumenta y dónde disminuye.

(d) Determine dónde f 1x2 7 0 y dónde f 1x2 6 0.

Solución

(a) Para f1x2 = - x2 + 6x - 5, a = - 1, b = 6 y c = - 5. Como a = - 1 6 0, la parábola es cóncava hacia abajo. La coordenada x del vértice es

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3$$

La coordenada y del vértice es

$$k = f(3) = -3^2 + 6 \# 3 - 5 = -9 + 18 - 5 = 4$$

El vértice es (3, 4). El eje de simetría es x = 3. La intersección con el eje y es f 102 = - 5. Las intersecciones en x se encuentran resolviendo f 1x2 = 0. Esto da como resultado la ecuación - x2 + 6x - 5 = 0, que resolvemos factorizando:

$$-x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$-(x - 1)(x - 5) = 0 \quad x - 1 = 0$$ Factor.

$$o \quad x - 5 = 0$$ Utilice la propiedad de producto cero.

$$x = 1 \text{ o } x = 5$$

Las intersecciones con el eje x son 1 y 5.

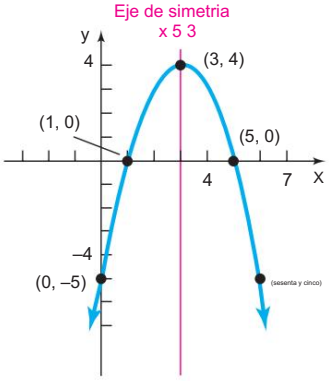


Figura 19 f1x2 = - x2 + 6x - 5

Vea la Figura 19. Observe que usamos la intersección con el eje y y el eje de simetría, x = 3, para obtener el punto adicional 16, - 52 en la gráfica.

(b) El dominio de f es el conjunto de todos los números reales. Según el gráfico, el rango de f es el intervalo 1 - q, 44.

(c) La función f aumenta en el intervalo 1 - q, 34 y decrece en el intervalo 33, - q 2.

(d) Tenga en cuenta que f 1x2 7 0 donde la gráfica de f está por encima del eje x, y f 1x2 6 0 donde la gráfica de f está debajo del eje x. Entonces, f 1x2 7 0 en el intervalo (1, 5) o para 1 6 x 6 5, y f 1x2 6 0 en 1 - q, 12 15, q 2 o para x 6 1, x 7 5.

Grafica la función del Ejemplo 3 completando el cuadrado y usando transformaciones. ¿Qué método prefieres?

Ahora resuelva los problemas 2 7 y 4 3 (b) — (f)

Si la gráfica de una función cuadrática tiene solo una intersección con el eje x o ninguna intersección con el x, normalmente es necesario trazar un punto adicional para obtener la gráfica.

EJEMPLO 4 Graficar una función cuadrática usando su vértice, eje e intersecciones

(a) Grafique f1x2 = x2 - 6x + 9 determinando si la parábola es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo y encontrando su vértice, eje de simetría, intersección con el eje y e intersección con el eje x, si las hubiera.

(b) Encuentre el dominio y el rango de f.

(c) Determine dónde f aumenta y dónde disminuye.

(d) Determine dónde f 1x2 7 0 y dónde f 1x2 6 0.

Solución

(a) Para f1x2 = x2 - 6x + 9, a = 1, b = - 6 y c = 9. Como a = 1 7 0, la la parábola es cóncava hacia arriba. La coordenada x del vértice es

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \# 1} = 3$$

Machine Translated by Google

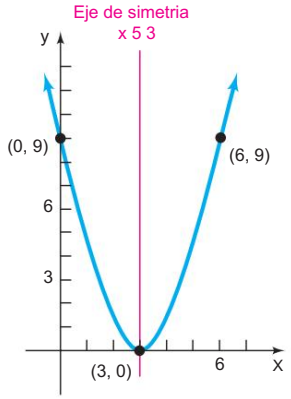


Figura 20 f 1x2 = x2 - 6x + 9

La coordenada y del vértice es

$$k = f132 = 32 - 6 \# 3 + 9 = 0$$

El vértice es (3, 0). El eje de simetría es la recta x = 3. La intersección con el eje y es f102 = 9. Dado que el vértice (3, 0) se encuentra en el eje x, la gráfica toca el eje x en la intersección con el eje x. Usando el eje de simetría y la intersección con el eje y en (0, 9), podemos ubicar el punto adicional (6, 9) en la gráfica. Ver Figura 20.

(b) El dominio de f es el conjunto de todos los números reales. Según el gráfico, el rango de f es el intervalo 30, q 2.

(c) La función f es decreciente en el intervalo 1 - q, 34 y creciente en el intervalo 33, q 2.

(d) La gráfica de f está por encima del eje x en todas partes excepto en el vértice (3, 0). Entonces, f 1x2 7 0 en 1 - q, 32 13, q 2 o para x 6 3, x 7 3, y f 1x2 nunca es negativo.

Ahora problema de trabajo 4 9

EJEMPLO 5 Graficar una función cuadrática usando su vértice, eje e intersecciones

(a) Grafique f1x2 = 2x2 + x + 1 determinando si la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, eje de simetría, intersección con el eje y e intersección con el eje x, si las hubiera.

(b) Encuentre el dominio y el rango de f.

(c) Determine dónde f aumenta y dónde disminuye.

(d) Determine dónde f 1x2 7 0 y dónde f 1x2 6 0.

Solución

(a) Para f1x2 = 2x2 + x + 1, tenemos a = 2, b = 1 y c = 1. Como a = 2 7 0, la parábola es cóncava hacia arriba. La coordenada x del vértice es

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4}$$

La coordenada y del vértice es

$$k = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \# \frac{1}{\text{dieciséis}} + \left(-\frac{1}{4}\right) \text{segundo} \frac{7}{8}$$

El vértice es un $-\frac{1}{4}, \frac{7}{8}$ + 1 = 8 segundo. El eje de simetría es la recta $x = -\frac{1}{4}$. La intersección y 4 es f102 = 1. Las intersecciones con el eje x, si las hay, satisfacen la ecuación 2x2 + x + 1 = 0. El discriminante b2 - 4ac = 1 ^{2} - 4 # 2 # 1 = - 7 6 0. Esta ecuación no tiene soluciones reales, lo que significa que la gráfica no tiene intersecciones en el eje x. Usa el punto (0, 1) y el eje de simetría x = $-\frac{1}{4}$ para localizar el punto adicional a $-\frac{1}{2}$, 1b en el gráfica. Ver Figura 21.

NOTA En el ejemplo 5, dado que el vértice está por encima del eje x y la parábola es cóncava hacia arriba, podemos concluir que la gráfica de la función cuadrática no tiene intersecciones en x. j ■

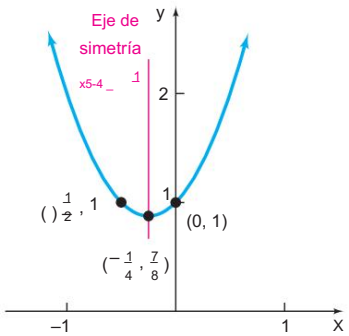


Figura 21 f 1x2 = 2x2 + x + 1

(b) El dominio de f es el conjunto de todos los números reales. Según el gráfico, el rango de f es el intervalo c $7\overline{8}$, qb.

(c) La función f es decreciente en el intervalo a - q, - 4 d y creciente en el intervalo c $-\frac{1}{4}$, qb.

(d) La gráfica de f siempre está por encima del eje x. Entonces, f 1x2 7 0 en el intervalo (- q, q) o para todos los números reales x.

Ahora resuelve el problema 5 3

Machine Translated by Google

4 Encuentre una función cuadrática dado su vértice y otro punto

Si se conocen el vértice (h, k) y un punto adicional en la gráfica de una función cuadrática f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0, entonces la forma del vértice de f,

$$f1x2 = a1x - h2 \quad ^{2} + k \qquad (2)$$

se puede utilizar para obtener la función cuadrática.

EJEMPLO 6 Encontrar la función cuadrática dado su vértice y otro punto

Determina la función cuadrática cuyo vértice es 11, - 52 y cuya intersección con el eje y es - 3.

Solución

El vértice es 11, - 52, entonces h = 1 y k = - 5. Sustituye estos valores en la ecuación (2).

$$f1x2 = a1x - h2 \quad ^{2} + k \qquad \text{Ecuación (2)}$$

$$f1x2 = a1x - 12 \quad ^{2} - 5 \qquad h \cdot 1,\ k \cdot\cdot 5$$

Para determinar el valor de a, utilice el hecho de que f102 = - 3 (la intersección con el eje y).

$$f1x2 = a1x - 12 \quad ^{2} - 5$$

$$- 3 = a10 - 12 \quad ^{2} - 5 \qquad x \cdot 0,\ y \cdot f\,102 \cdot \cdot 3$$

$$- 3 = un - 5$$

$$un = 2$$

La función cuadrática que buscamos es

$$f1x2 = a1x - h2 \quad ^{2} + k = 21x - 12 \quad ^{2} - 5 = 2x2 - 4x - 3$$

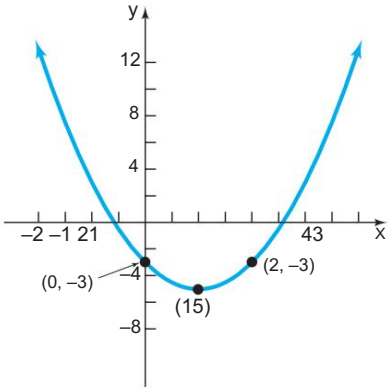


Figura 22 f1x2 = 2x2 - 4x - 3

Ver Figura 22.

Ahora problema de trabajo 5 9

5 Encuentre el valor máximo o mínimo de una función cuadrática

La gráfica de una función cuadrática.

$$f1x2 = ax2 + bx + ca \cdot 0$$

es una parábola con vértice ¢ $-\frac{b}{2a}$, f ¢ $-\frac{b}{2a}$ ≤ ≤. El vértice es el punto más alto de la gráfica si a 6 0 y el punto más bajo en la gráfica si a 7 0. Si el vértice es el punto más alto punto 1a 6 02, luego f ¢ $-\frac{b}{2a}$ ≤ es el valor máximo de f. Si el vértice es el 2a ≤ es el punto más bajo 1a 7 02, luego f ¢ $-\frac{b}{}$ valor mínimo de f.

EJEMPLO 7 Encontrar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Determinar si la función cuadrática

$$f1x2 = x2 - 4x - 5$$

tiene un valor máximo o mínimo. Luego encuentre el valor máximo o mínimo.

Solución

Para f1x2 = x2 - 4x - 5, a = 1, b = - 4 y c = - 5. Como a 7 0, la gráfica de f es cóncava hacia arriba, lo que significa que el vértice es un punto mínimo. El mínimo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \# 1} = \frac{4}{2} = 2$$

C

un · 1, segundo · ·4

Machine Translated by Google

El valor mínimo de f es

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(22) = 22 - 4(2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$$

Ahora resuelve el problema 67

EJEMPLO 8 Analizando el movimiento de un proyectil

Se dispara un proyectil desde un acantilado a 500 pies sobre el agua con una inclinación de 45° con respecto a la horizontal, con una velocidad inicial de 400 pies por segundo. Desde la física, la altura h del proyectil sobre el agua se puede modelar mediante

$$h(x) = -\frac{32}{4002}x^2 + x + 500$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil desde la base del acantilado. Ver Figura 23.

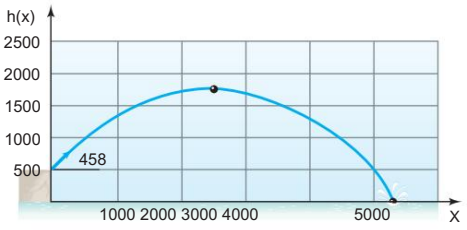


Figura 23

(a) Encuentre la altura máxima del proyectil.

(b) ¿A qué distancia de la base del acantilado impactará el proyectil en el agua?

Solución

(a) La altura del proyectil está dada por la función cuadrática

$$h(x) = -\frac{32}{4002}x^2 + x + 500 = -\frac{1}{5000}x^2 + x + 500$$

Buscamos el valor máximo de h. Debido a que a < 0, el vértice es el punto máximo y ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{5000}\right)} = \frac{5000}{2} = 2500$$

La altura máxima del proyectil es

$$h(2500) = -\frac{1}{5000}(2500)^2 + 2500 + 500 = -1250 + 2500 + 500 = 1750 \text{ pies}$$

(b) El proyectil golpea el agua cuando la altura h es cero. Para encontrar la distancia x viajó, resuelve la ecuación

$$h(x) = -\frac{1}{5000}x^2 + x + 500 = 0$$

El discriminante de esta ecuación cuadrática es

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4\left(-\frac{1}{5000}\right)(500) = 1.4$$

Entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1.4}}{2\left(-\frac{1}{5000}\right)}$$

$$x \approx -458 \text{ o } x \approx 5458$$

Deseche la solución negativa. El proyectil impacta en el agua a unos 5458 pies de la base del acantilado.

Ahora problema de trabajo 85

Ver el concepto

Utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente

$$h_1(x) = -\frac{1}{5000}x^2 + x + 500$$

$$0 \le x \le 5500$$

Usa los comandos adecuados para encontrar la altura máxima del proyectil y la distancia desde la base del acantilado hasta donde impacta.

el agua. Compare sus resultados con los obtenidos en el Ejemplo 8.

Machine Translated by Google

RESUMEN

Pasos para graficar una función cuadrática f(x) · ax2 · bx · c, a · 0

Opción 1

Paso 1: Completa el cuadrado en x para escribir la función cuadrática en la forma de vértice f1x2 = a1x - h2 Paso 2: ^{2} + k.

Grafica la función usando transformaciones.

opcion 2

Paso 1: Determina si la parábola es cóncava hacia arriba 1a 7 02 o hacia abajo 1a 6 02.

Paso 2: Encuentra el vértice ¢ - $\frac{b}{2a}$, f ¢ - 2a $\frac{b}{}$ ≤ ≤.

Paso 3: Encuentra el eje de simetría, x = - 2a $\frac{b}{}$.

Paso 4: Encuentra la intersección con el eje y, f 102, y las intersecciones con el eje x, si las hay.

- Si b2 - 4ac 7 0, la gráfica de la función cuadrática tiene dos intersecciones en el eje x, que se encuentran resolviendo la ecuación ax2 + bx + c = 0.
- Si b2 - 4ac = 0, el vértice es la intersección con el eje x.
- Si b2 - 4ac 6 0, no hay intersecciones con el eje x.

Paso 5: Encuentra un punto adicional usando la intersección con el eje y y el eje de simetría.

Paso 6: traza los puntos y dibuja la gráfica.

3.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Encuentra las intersecciones de la ecuación y = x2 - 9. (págs. 48 y 49)
2. Encuentra las soluciones reales de la ecuación 2x2 + 7x - 4 = 0. (págs. A47–A51)
3. Para completar el cuadrado de x2 - 5x, suma el número _____. (pág. A29)
4. graficar y = 1x - 42 _____ ^{2}, desplaza la gráfica de y = x2 a 4. Para _____ una distancia de _____ unidades. (págs. 134-138)
5. Encuentra el discriminante de 2x2 - 5x - 8 = 0. Luego identifica el número de soluciones reales de la ecuación. (pág. A50)
6. Completa el cuadrado de 3x2 + 7x. factorizar lo nuevo expresión. (pág. A29)

Conceptos y vocabulario

7. La gráfica de una función cuadrática se llama _____.
8. La línea vertical que pasa por el vértice de una parábola es llamó al _____.
9. La coordenada x del vértice. de f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0, es _____.
10. Verdadero o Falso La gráfica de f1x2 = 2x2 + 3x - 4 es cóncava hacia arriba.
11. Verdadero o Falso La coordenada y del vértice de f1x2 = - x2 + 4x + 5 es f122.
12. Verdadero o Falso Si el discriminante b2 - 4ac = 0, la gráfica de f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0, toca el eje x en su vértice.
13. Opción múltiple Si b2 - 4ac 7 0, ¿qué conclusión se puede sacar sobre la gráfica de f 1x2 = ax2 + bx + c, a · 0?

    (a) La gráfica tiene dos intersecciones en el eje x distintas.

    (b) La gráfica no tiene intersecciones en x.

    (c) La gráfica tiene tres intersecciones en el eje x distintas.

    (d) La gráfica tiene una intersección con el eje x.
14. Opción múltiple Si la gráfica de f 1x2 = ax2 + bx + c, a · 0, tiene un valor máximo en su vértice, ¿qué condición debe ser verdadera?

    (un) - $\frac{b}{2a}$ 7 0

    (b) - 2a $\frac{b}{}$ 6 0

    (c) un 7 0

    (d) un 6 0

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

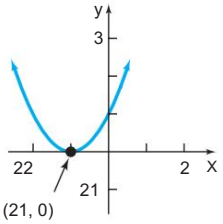
En los problemas 15 a 22, relacione cada gráfica con una de las siguientes funciones.

15. f1x2 = - x2 - 1 16. f1x2 = x2 - 1 19. f1x2 = x2 + 2x 20. f1x2 = x2 - 2x + 2

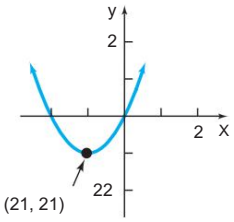
17. f1x2 = x2 + 2x + 1 21. f1x2 = x2 + 2x + 2

18. f1x2 = x2 - 2x + 1 22. f1x2 = x2 - 2x

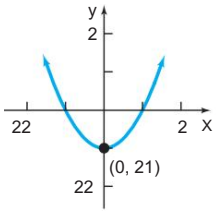
A.



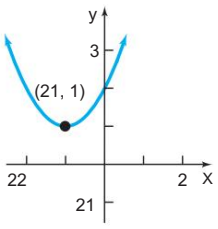
B.



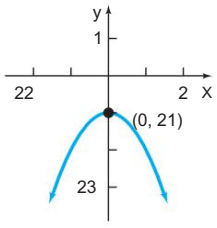
C.



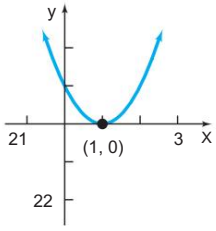
D.

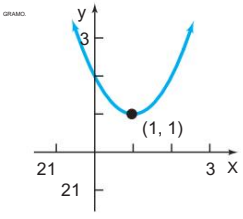


MI.

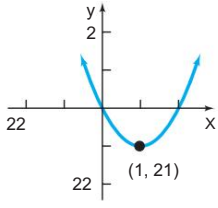


F.





h.



En los problemas 23 a 30, (a) encuentre el vértice y el eje de simetría de cada función cuadrática. (b) Determine si la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo. (c) Grafique la función cuadrática.

23. f1x2 = - 1x + 42 ^{2} - 1

24. f 1x2 = 1x - 32 ^{2} - 2

25. f 1x2 = 31x + 12 ^{2} - 4

26. f 1x2 = - 21x - 32 ^{2} + 5

27. f 1x2 = 21x - 62 ^{2} + 3

28.f 1x2 = 2 _ $\frac{1}{}$ 1x + 12 ^{2} - 3

29. f 1x2 = - 1x + 52 ^{2}

30. f 1x2 = - $\frac{1}{3}$ ¢x - $\frac{1}{2}$ ≤ 2 - $\frac{7}{6}$

En los problemas 31 a 42, grafique la función f comenzando con la gráfica de y = x2 y usando transformaciones (desplazamiento, compresión, estiramiento y/o reflexión).

[Pista: Si es necesario, escriba f en la forma f1x2 = a1x - h2 ^{2} + k.]

31. f1x2 = 2x2 + 4

32. f1x2 = $\frac{1}{4}$x2

33. f1x2 = 1x - 32 ^{2} - 10

34. f1x2 = 1x + 22 ^{2} - 2

35. f1x2 = x2 + 4x + 2

36. f1x2 = x2 - 6x - 1

37. f1x2 = 3x2 + 6x

38. f1x2 = 2x2 - 4x + 1

39. f1x2 = - 2x2 + 6x + 2

40. f1x2 = - x2 - 2x

41. f1x2 = $\frac{2}{3}$x2 + $\frac{4}{}$x - 1 3

42. f1x2 = $\frac{1}{2}$x2 + x - 1

En los problemas 43 a 58, (a) encuentre el vértice y el eje de simetría de cada función cuadrática y determine si la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo. (b) Encuentre las intersecciones con el eje y y el eje x, si las hay. (c) Utilice los incisos (a) y (b) para representar gráficamente la función. (d) Encuentre el dominio y el rango de la función cuadrática. (e) Determine dónde aumenta y dónde decrece la función cuadrática. (f) Determine dónde f 1x2 7 0 y dónde f 1x2 6 0.

43. f1x2 = x2 + 2x 47. f1x2 = x2 - 2x - 3 51. f1x2 = 4x2 - 2x + 1 55. f1x2 = 2x2 + 5x + 3

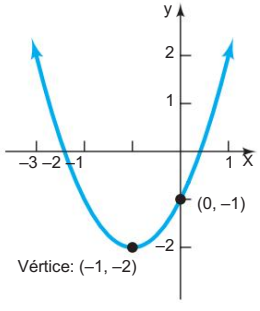
44. f1x2 = x2 - 4x 48. f1x2 = x2 + 2x - 8 52. f1x2 = 2x2 - x + 2 56. f1x2 = 3x2 + 6x + 2

45. f1x2 = - x2 + 4x 49. f1x2 = x2 + 2x + 1 53. f1x2 = - 2x2 + 2x - 3 57. f1x2 = 3x2 - 8x + 2

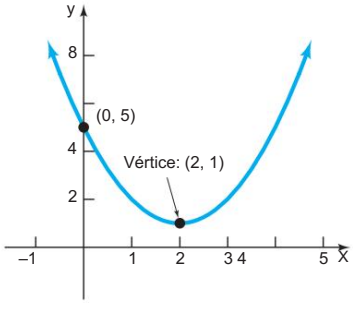
46. f1x2 = - x2 - 6x 50. f1x2 = x2 + 6x + 9 54. f1x2 = - 3x2 + 3x - 2 58. f1x2 = - 4x2 - 6x + 2

En los problemas 59 a 64, determine la función cuadrática cuya gráfica se da.

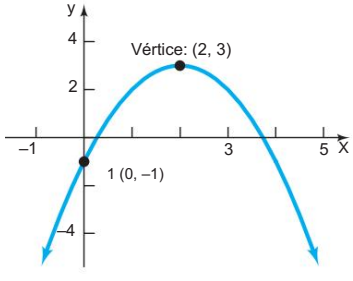
59.



60.

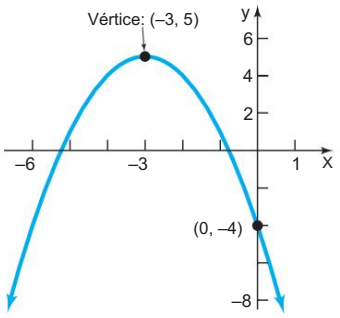


61.

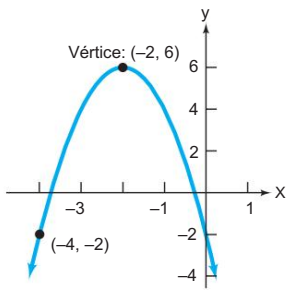


Machine Translated by Google

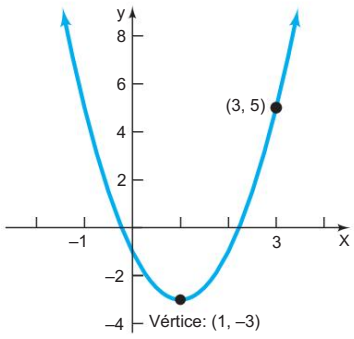
62.



63.



64.



En los problemas 65 a 72, determine, sin representar gráficamente, si la función cuadrática dada tiene un valor máximo o un valor mínimo y luego encuentre el valor.

65. f1x2 = - 2x2 + 12x 69.

f1x2 = - 2x2 + 8x + 3

66. f1x2 = 3x2 + 24x 70.

f1x2 = - x2 + 6x - 1

67. f1x2 = 2x2 + 12x - 3 71. f1x2

= 4x2 - 4x

68. f1x2 = 4x2 - 8x + 3

72. f1x2 = - 5x2 + 20x + 3

Aplicaciones y extensiones

73. La gráfica de la función f1x2 = ax2 + bx + c tiene su vértice en 10, 52 y pasa por el punto 11, 62. Encuentre a, b y c.

74. La gráfica de la función f1x2 = ax2 + bx + c tiene vértice en (1, 4) y pasa por el punto 1 - 1, - 82. Encuentre a, b y c.

En los problemas 75 a 80, para las funciones dadas f y g:

(a) Grafique f y g en el mismo plano cartesiano.

(b) Resuelva f1x2 = g1x2.

(c) Utilice el resultado del inciso (b) para etiquetar los puntos de intersección de las gráficas de f y g.

(d) Sombree la región para la cual f1x2 7 g1x2; es decir, la región por debajo de f y por encima de g.

75. f1x2 = - 2x - 1; g1x2 = x2 - 9 77. f1x2 = - x2 + 9; g1x2 = 2x + 1 79. f1x2 = - x2 + 7x - 6; g1x2 = x2 + x - 6

76. f1x2 = 2x - 1; g1x2 = x2 - 4

78. f1x2 = - x2 + 4; g1x2 = - 2x + 1

80. f1x2 = - x2 + 5x; g1x2 = x2 + 3x - 4

Para los problemas 81 y 82, utilice el hecho de que una función cuadrática de la forma f1x2 = ax2 + bx + c con b2 - 4ac 7 0 también se puede escribir en la forma f1x2 = a1x - r12 1x - r22, donde r1 y r2 son las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función cuadrática.

81. (a) Encuentre una función cuadrática cuyas intersecciones en x sean - 4 y 2 con a = 1, a = 2, a = - 2 y a = 6.

(b) ¿Cómo afecta el valor de a a las intersecciones? (c) ¿Cómo afecta el valor de a al eje de simetría?

(d) ¿Cómo afecta el valor de a al vértice?

(e) Compare la coordenada x del vértice con el punto medio de las intersecciones x. ¿Qué podrías concluir?

82. (a) Encuentre funciones cuadráticas cuyas intersecciones en x sean - 5 y 3 con a = 1; a = 2; un = - 2; un = 5.

(b) ¿Cómo afecta el valor de a a las intersecciones?

(c) ¿Cómo afecta el valor de a al eje de simetría?

(d) ¿Cómo afecta el valor de a al vértice?

(e) Compare la coordenada x del vértice con el punto medio de las intersecciones x. ¿Qué podrías concluir?

83. Supongamos que f1x2 = x2 + 4x - 21.

(a) ¿ Cuál es el vértice de f ?

(b) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de f?

(c) Resuelva f1x2 = - 21 para x. ¿Qué puntos hay en la gráfica?

apagado ? _

(d) Utilizar la información obtenida en las partes (a) a (c) para gráfica f1x2 = x2 + 4x - 21.

84. Supongamos que f1x2 = x2 + 2x - 8.

(a) ¿ Cuál es el vértice de f?

(b) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de f?

(c) Resuelva f1x2 = - 8 para x. ¿Qué puntos hay en la gráfica?

apagado ? _

(d) Utilice la información obtenida en los incisos (a) a (c) para representar gráficamente f1x2 = x2 + 2x - 8.

85. Análisis del movimiento de un proyectil Se dispara un proyectil desde un acantilado a 200 pies sobre el agua con una inclinación de 45° con respecto a la horizontal, con una velocidad inicial de 50 pies por segundo. La altura h del proyectil sobre el agua se modela mediante

$$h(x) = x + \frac{-32x^2}{50^2} + 200$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil desde la cara del acantilado.

(a) ¿A qué distancia horizontal desde la cara del acantilado es máxima la altura del proyectil?

(b) Encuentre la altura máxima del proyectil.

(c) ¿A qué distancia horizontal desde la cara del acantilado se ¿El proyectil impactó en el agua?

(d) Grafique la función h, 0… x … 200.

(e) Utilice una herramienta gráfica para verificar las soluciones encontradas en partes (b) y (c).

(f) Cuando la altura del proyectil es de 100 pies sobre el agua, ¿a qué distancia está del acantilado?

86. Análisis del movimiento de un proyectil Se dispara un proyectil con una inclinación de 45° con respecto a la horizontal, con una velocidad inicial de 100 pies por segundo. La altura h del proyectil está modelada por

$$h(x) = \frac{-32x^2}{100^2} + x$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil desde el punto de disparo.

Machine Translated by Google

(a) ¿ A qué distancia horizontal desde el punto de disparo es máxima la altura del proyectil?

(b) Encuentre la altura máxima del proyectil.

(c) ¿A qué distancia horizontal desde el puesto de tiro estará el ¿El proyectil impacta en el suelo?

(d) Grafique la función h, 0… x … 350.

(e) Utilice una herramienta gráfica para verificar los resultados obtenidos en partes (b) y (c).

(f) Cuando la altura del proyectil es de 50 pies sobre el suelo, ¿qué distancia ha recorrido horizontalmente?

87. Maximización de los ingresos Un fabricante de cortadoras de césped ha descubierto que los ingresos, en dólares, de las ventas de cortadoras de césped de giro cero son función del precio unitario p, en dólares, que cobra. Si el ingreso R es

$$R1p2 = -\frac{1}{2}p2 + 2900p$$

¿Qué precio unitario p se debe cobrar para maximizar los ingresos? ¿Cuál es el ingreso máximo?

88. Maximización de los ingresos Supongamos que el fabricante de una secadora de ropa a gas ha descubierto que, cuando el precio unitario es p dólares, el ingreso R (en dólares) es

$$R1p2 = - 9p2 + 81.000p$$

¿Qué precio unitario se debe establecer para que la secadora maximice los ingresos? ¿Cuál es el ingreso máximo?

89. Minimizar el costo marginal El costo marginal de un producto puede considerarse como el costo de producir una unidad adicional de producción. Por ejemplo, si el costo marginal de producir el producto número 50 es $6,20, cuesta $6,20 aumentar la producción de 49 a 50 unidades. Supongamos que el costo marginal C (en dólares) para producir x mil reproductores de música digital viene dado por la función

$$C1x2 = x2 - 140x + 7400$$

(a) ¿Cuántos jugadores deberían producirse para minimizar el costo marginal?

(b) ¿Cuál es el costo marginal mínimo?

90. Minimizar el costo marginal (consulte el problema 89). El costo marginal C (en dólares) de fabricar x teléfonos inteligentes (en miles) está dado por

$$C1x2 = 5x2 - 200x + 4000$$

(a) ¿Cuántos teléfonos inteligentes deberían fabricarse para ¿Minimizar el costo marginal?

(b) ¿Cuál es el costo marginal mínimo?

91. Negocios El ingreso diario R obtenido al vender x cajas de dulces es R1x2 = 9.5x - 0.04x2 . El costo diario C de vender x cajas de dulces es C1x2 = 1.25x + 250.

(a) ¿Cuántas cajas de dulces debe vender la empresa para maximizar los ingresos? ¿Cuál es el ingreso máximo?

(b) La ganancia se expresa como P1x2 = R1x2 - C1x2. ¿Qué es la función de beneficio?

(c) ¿Cuántas cajas de dulces debe vender la empresa para maximizar las ganancias? ¿Cuál es el beneficio máximo?

(d) Proporcione una explicación razonable de por qué difieren las respuestas encontradas en las partes (a) y (c). Explique por qué una función cuadrática es un modelo razonable para los ingresos.

92. Negocios Se calcula que el ingreso mensual R obtenido al vender x relojes de pulsera es R1x2 = 75x - 0.2x2 . El costo mensual C de vender x relojes de pulsera es

$$C1x2 = 32x + 1600$$

(a) ¿Cuántos relojes de pulsera debe vender la empresa para maximizar los ingresos? ¿Cuál es el ingreso máximo?

(b) La ganancia se expresa como P1x2 = R1x2 - C1x2. ¿Qué es la función de beneficio?

(c) ¿Cuántos relojes de pulsera debe vender la empresa para maximizar ¿ganancia? ¿Cuál es el beneficio máximo?

(d) Proporcione una explicación razonable de por qué difieren las respuestas encontradas en las partes (a) y (c). Explique por qué una función cuadrática es un modelo razonable para los ingresos.

93. Distancia de frenado Una relación aceptada entre la distancia de frenado, d en pies, y la velocidad de un automóvil, en mph, es d(v) = 1.1v + 0.06v2 sobre concreto seco y nivelado.

(a) ¿ Cuántos pies tardará un automóvil que viaja a 40 mph para ¿Parar sobre concreto seco y nivelado?

(b) Si ocurre un accidente 250 pies más adelante, ¿cuál es la velocidad máxima a la que se puede viajar para evitar verse involucrado en el accidente?

(c) ¿Qué podría representar el término 1,1v ?

94. Tasa de natalidad de mujeres solteras En Estados Unidos, la tasa de natalidad B de mujeres solteras (nacimientos por cada 1.000 mujeres solteras) para mujeres cuya edad es a se modela mediante la función B1a2 = - 0,33a2 + 19,17a - 213,37.

(a) ¿Cuál es la edad de las mujeres solteras con la tasa de natalidad más alta?

(b) ¿Cuál es la tasa de natalidad más alta entre mujeres solteras?

(c) Evalúe e interprete B(40).

Fuente: Informes de Estadísticas Vitales Nacionales, 31/01/2018

95. Reacciones químicas Una reacción química autocatalítica da como resultado la formación de un compuesto que hace que aumente la proporción de formación. Si la velocidad de reacción V se modela mediante

$$V1x2 = kx1a - x2, \qquad 0... x ... a$$

donde k es una constante positiva, a es la cantidad inicial del compuesto y x es la cantidad variable del compuesto, ¿para qué valor de x es máxima la velocidad de reacción?

96. Práctica mixta Calcula la distancia desde el vértice de la parábola f1x2 = 21x - 322 + 5 al centro del círculo 1x + 322 + 1y - 122 = 4.

97. Práctica mixta Calcula la distancia desde el vértice de la parábola g1x2 = - 3x2 + 6x + 1 al centro del círculo x2 + y2 + 10x + 8y + 32 = 0.

98. Sea f1x2 = ax2 + bx + c donde a, byc son números enteros pares. Si x es un número entero, compruebe si f1x2 es un número entero par o impar.

[Pista: x es un número entero par o impar.]

99. Problema de desafío Encuentra el punto en la recta y = x + 1 que está más cerca del punto 14, 12.

100. Encuentra el punto de la recta y = x que está más cerca del punto 15, - 12.

[Sugerencia: Exprese la distancia d desde el punto a la recta como una función de x, y luego encuentre el valor mínimo de 3d1x2 4 ^{2}.]

101. Problema de desafío Prueba de función creciente/decreciente Supongamos que f1x2 = x3 - 7x2 - 5x + 35. Del cálculo, la derivada de f viene dada por f′1x2 = 3x2 - 14x - 5. La función f es creciente donde f′1x2 7 0 y decreciente donde f′1x2 6 0 Determine dónde f aumenta y dónde f disminuye.

102. Prueba de desafío y problema para la concavidad Supongamos f1x2 = 3x4 - 8x3 + 6x + 1. Del cálculo, la segunda derivada de f viene dada por f ″1x2 = 36x2 - 48x. La función f es cóncava hacia arriba donde f ″1x2 7 0 y cóncava hacia abajo donde f ″1x2 6 0. Determine dónde f es cóncava hacia arriba y dónde f es cóncava hacia abajo.

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

103. Inventa una función cuadrática que se abra hacia abajo y tenga solo una intersección con el eje x. Compara el tuyo con el de otros de la clase. ¿Cuáles son las similitudes? ¿Cuáles son las diferencias?

104. En un conjunto de ejes de coordenadas, grafica la familia de parábolas f1x2 = x2 + 2x + c para c = - 3, c = 0 y c = 1. Describe las características de un miembro de esta familia.

105. En un conjunto de ejes de coordenadas, grafica la familia de parábolas f1x2 = x2 + bx + 1 para b = - 4, b = 0 y b = 4. Describe las características generales de esta familia.

106. Indique las circunstancias que causan que la gráfica de una función cuadrática f1x2 = ax2 + bx + c no tenga intersecciones en x.

107. ¿Por qué la gráfica de una función cuadrática es cóncava hacia arriba si a 7 0 y cóncavo hacia abajo si un 6 0?

108. ¿Puede una función cuadrática tener un rango de 1 - q, q 2? Justificar Tu respuesta.

109. ¿ Cuáles son las posibilidades para el número de veces que se cruzan las gráficas de dos funciones cuadráticas diferentes?

Conserve su conocimiento

Los problemas 110 a 119 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

110. Determina si x2 + 4y2 = 16 es simétrico con respecto al eje x, al eje y y/o al origen.

111. Resuelve la desigualdad 27 - x Ú 5x + 3. Escribe la solución tanto en notación de conjuntos como en notación de intervalos.

112. Encuentra el centro y el radio del círculo.

$$x2 + y2 - 10x + 4y + 20 = 0$$

113. Encuentra la función cuya gráfica es la gráfica de y = 2x, pero reflejado sobre el eje y.

114. Encuentra una ecuación de la recta que contiene el punto (14, - 3) y es paralela a la recta 5x + 7y = 35. Escribe la ecuación en forma pendiente-intersección.

115. Indique el dominio y rango de la relación que se indica a continuación. Es ¿La relación es una función?

$$5(5, - 3), (4, - 4), (3, - 5), (2, - 6), (1, - 7)6$$

116. Si f1x2 = 3x2 - 25x + 28, encuentre f172.

117. Si $g1x2 = \frac{2}{3}x - 8$, encuentre $g¢\frac{2}{3}x + 12\leq$.

118. escribir $\frac{4x2}{522/3 \text{ con}}$ + 8x13x + 521/3 como cociente único 13x + exponentes positivos.

119. Si f1x2 = x2 + 5x, encuentra y simplifica $\frac{f1x2 - f1c2}{x - c}$, x · c.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 10, - 92, 1 - 3, 02, 13, 02 2. e - 4, 2 f $\frac{1}{}$ 3. $\frac{25}{4}$ 4. derecho; 4 5. 89; dos soluciones reales 6. $3¢x2 + \frac{7}{3}x +$ $\frac{49}{}$ $36 \leq = 3¢x +$ $\frac{7}{}$ $6 \leq 2$

3.4 Construcción de modelos cuadráticos a partir de descripciones verbales y datos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Resolución de problemas (Sección A.8, págs. A62–A69)
- Construcción de modelos lineales a partir de datos (Sección 3.2, págs. 171–175)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 197.

OBJETIVOS 1 Construir modelos cuadráticos a partir de descripciones verbales (p. 193)

2 Construya modelos cuadráticos a partir de datos (p. 196)

En esta sección, primero analizamos modelos que conducen a una función cuadrática a partir de descripciones verbales. Luego ajustamos una función cuadrática a los datos, que es otra forma de modelado.

Cuando una función cuadrática modela un problema, las propiedades de la gráfica de la función pueden proporcionar información importante sobre el modelo. En particular, podemos determinar el valor máximo o mínimo de la función. El hecho de que la gráfica de una función cuadrática tenga un valor máximo o mínimo nos permite responder preguntas que involucran optimización, es decir, encontrar los valores máximos o mínimos en modelos.

Machine Translated by Google

1 Construya modelos cuadráticos a partir de descripciones verbales

En economía, el ingreso R, en dólares, se define como la cantidad de dinero recibida por la venta de un artículo y es igual al precio de venta unitario p, en dólares, del artículo multiplicado por el número x de unidades realmente vendidas. Eso es,

$$R = XP$$

La Ley de la Demanda establece que p y x están inversamente relacionados: cuando uno aumenta, el otro disminuye. La ecuación que relaciona p y x se llama ecuación de demanda. Cuando una ecuación de demanda es lineal, el modelo de ingresos es una función cuadrática.

EJEMPLO 1 Maximizar los ingresos

El departamento de marketing de Texas Instruments ha descubierto que cuando ciertas calculadoras se venden a un precio de p dólares por unidad, el número x de calculadoras vendidas está dado por la ecuación de la demanda.

$$x = 21.000 - 150p$$

(a) Encuentre un modelo que exprese el ingreso R en función del precio p.

(b) ¿Cuál es el dominio de R? Suponga que los ingresos no son negativos.

(c) ¿Qué precio unitario debería utilizarse para maximizar los ingresos?

(d) Si se cobra este precio, ¿cuál es el ingreso máximo?

(e) ¿Cuántas unidades se venden a este precio?

(f) Gráfica R.

(g) ¿Qué precio debería cobrar Texas Instruments para cobrar al menos $675,000 en ¿ganancia?

Solución

(a) El ingreso es R = xp, donde x = 21.000 - 150p.

$$R = xp = 121.000 - 150p2p = - 150p2 + 21.000p \text{ El modelo}$$

(b) Como x representa el número de calculadoras vendidas, tenemos x Ú 0, por lo que 21 000 - 150p Ú 0. Al resolver esta desigualdad lineal se obtiene p … 140.

También de R = (21,000 - 150p)p, dado que se supone que R no es negativo y 21,000 - 150p Ú 0, se deduce que p Ú 0. Combinando estas desigualdades se obtiene el dominio de R, que es 5 p· 0 … p … 1406.

(c) La función R es una función cuadrática con a = - 150, b = 21 000 y c = 0.
Como a 6 0, el vértice es el punto más alto de la parábola. El ingreso R es máximo cuando el precio p es

$$\text{pag} = -\frac{b}{2a\ c} = -\frac{21.000}{21 - 1502} = +70.00$$

a · ·150, b · 21.000

(d) El ingreso máximo R es

$$R1702 = - 150 \# 702 + 21\ 000 \# 70 = +735\ 000$$

(e) El número de calculadoras vendidas viene dado por la ecuación de demanda x = 21.000 - 150p.
A un precio de p = +70,

$$x = 21.000 - 150 \# 70 = 10.500$$

Se venden calculadoras.

(continuado)

Machine Translated by Google

(f) Para representar gráficamente R, trace las intersecciones (0, 0) y (140, 0) y el vértice (70, 735 000). Consulte la Figura 24 para ver el gráfico.

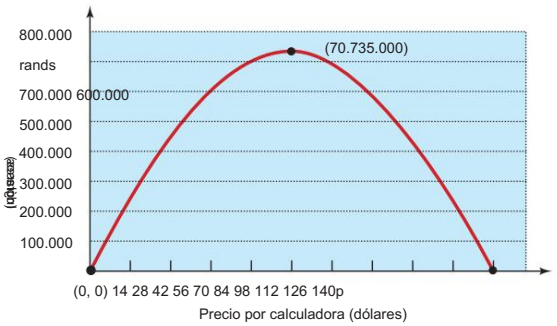


Figura 24

(g) Grafique R = 675 000 y R1p2 = - 150p2 + 21 000p en el mismo plano cartesiano. Vea la Figura 25. Encontramos dónde se cruzan las gráficas resolviendo

$$675.000 = -150p2 + 21.000p$$

$$150p2 - 21.000p + 675.000 = 0 \quad \text{Agregue } 150p2 \cdot 21{,}000p \text{ a ambos lados.}$$

$$140p + 4500 = 0 \quad 1p - 502 \quad \text{Divide ambos lados por 150.}$$

$$1p - 902 = 0 \quad \text{Factor.}$$

$$p = 50 \text{ o } p = 90 \quad \text{Utilice la propiedad de producto cero.}$$

Las gráficas se cruzan en (50, 675 000) y (90, 675 000). Según el gráfico de la Figura 25, Texas Instruments debería cobrar entre $50 y $90 para obtener al menos $675 000 en ingresos.

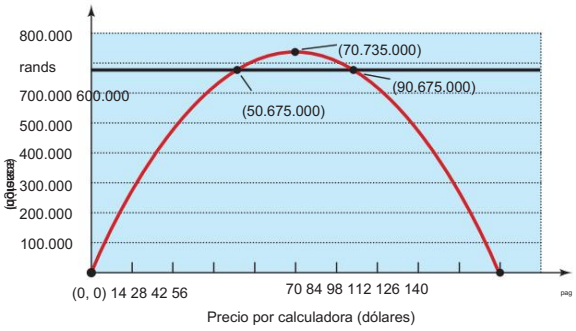


Figura 25

Ahora resuelve el problema 3

EJEMPLO 2

Maximización del área rodeada por una cerca Un agricultor tiene 2000 yardas de cerca para cercar un campo rectangular. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que encierra la mayor área?

Solución

La Figura 26 ilustra la situación. La valla disponible representa el perímetro del rectángulo. Si x es el largo y w es el ancho, entonces

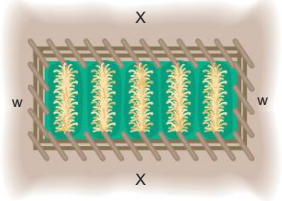


Figura 26

$$2x + 2w = 2000 \qquad (1)$$

El área A del rectángulo es

$$A = xw$$

Para expresar A en términos de una sola variable, resuelva la ecuación (1) para w y sustituya el resultado en A = xw. Entonces A involucra sólo la variable x. [También podrías resolver la ecuación (1) para x y expresar A solo en términos de w . ¡Intentalo!]

$$2x + 2w = 2000$$

$$2w = 2000 - 2x$$

$$w = \frac{2000 - 2x}{2} = 1000 - x$$

Machine Translated by Google

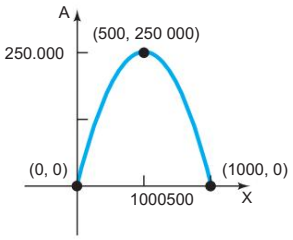


Figura 27 A(x) = - x2 + 1000x

Entonces el área A es

$$A = xw = x11000 - x2 = - x2 + 1000x$$

Ahora, A es una función cuadrática de x.

$$A = A1x2 = - x2 + 1000x$$ un · ·1, segundo · 1000, c · 0

La Figura 27 muestra la gráfica de A1x2 = - x2 + 1000x. Porque un 6 0, el vértice es un punto máximo en la gráfica de A. El valor máximo ocurre en

$$x = - 2a \frac{b}{} = - \frac{1000}{21 - 12} = 500$$

El valor máximo de A es

$$A¢ - 2a \frac{b}{} \leq = A15002 = - 5002 + 1000 \# 500 = - 250.000 + 500.000 = 250.000$$

El rectángulo más grande que puede estar rodeado por 2000 yardas de cerca tiene un área de 250 000 yardas cuadradas. Sus dimensiones son 500 yardas por 500 yardas.

Ahora trabaja el problema 7

EJEMPLO 3 El puente Golden Gate

El puente Golden Gate, un puente colgante, cruza la entrada a la Bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por 4200 pies. El puente está suspendido de dos enormes cables de más de 3 pies de diámetro; la carretera de 90 pies de ancho está a 220 pies sobre el agua. Los cables tienen forma parabólica* y tocan la superficie de la carretera en el centro del puente. Encuentre la altura del cable sobre la carretera a una distancia de 1000 pies del centro.

Solución

Comience eligiendo los ejes de coordenadas de modo que el eje x coincida con la superficie de la carretera y el origen coincida con el centro del puente. Vea la Figura 28. Como resultado, las torres de 746 pies serán verticales (altura 746 - 220 = 526 pies sobre la carretera) y estarán ubicadas a 2100 pies del centro. Además, el cable tiene forma de parábola cóncava hacia arriba. La parábola se extiende desde las torres y tiene su vértice en (0, 0). Esta elección de los ejes da como resultado que la ecuación de la parábola tenga la forma y = ax2 , a 7 0. Observa que los puntos 1 - 2100, 5262 y (2100, 526) están en la gráfica.

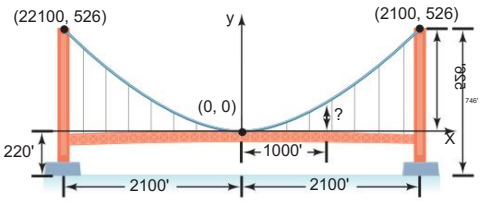


Figura 28

Usa estos datos para encontrar el valor de a en y = ax2 .

$$y = ax2$$
$$526 = un \# 21002$$ x · 2100, y · 526
$$un = \frac{526}{21002}$$

La ecuación de la parábola es

$$y = \frac{526}{21002}x2$$

(continuado)

*Un cable suspendido de dos torres tiene forma de catenaria, pero cuando se suspende una calzada horizontal del cable, el cable toma la forma de una parábola.

Machine Translated by Google

Cuando x = 1000, la altura del cable es

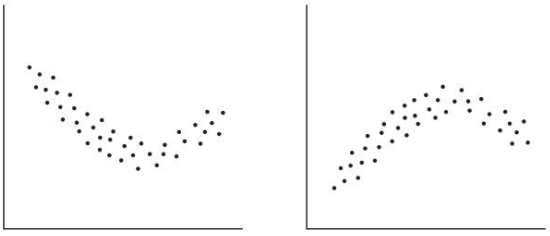
$$y = \frac{526}{21002} \# 10002 \approx 119{,}3 \text{ pies}$$

El cable está a 119,3 pies sobre la carretera a una distancia de 1000 pies del centro del puente.

Ahora problema de trabajo 1 1

2 Construya modelos cuadráticos a partir de datos

En la Sección 3.2, encontramos la línea de mejor ajuste para los datos que parecían estar relacionados linealmente. Pero los datos también pueden seguir una relación no lineal. Las Figuras 29(a) y (b) muestran diagramas de dispersión de datos que siguen una relación cuadrática.



y 5 hacha2 1 bx 1 c, a . 0 (a)

y 5 hacha2 1 bx 1 c, a , 0 (b)

Figura 29

EJEMPLO 4 Ajustar una función cuadrática a los datos

Tabla 8

Edad, x	Promedio anual Gastos (en miles de dólares), E
21.4	34.4
29.6	52,8
39,5	66,4
49,5	71.2
59,4	61.3
68,9	50,9
74.3	45,8

Fuente: Encuesta de Gasto del Consumidor, agosto 2017

Los datos de la Tabla 8 representan el gasto anual promedio de consumidores de distintas edades en 2016.

(a) Trace un diagrama de dispersión de los datos, tratando la edad como variable independiente. Comente el tipo de relación que existe entre la edad y el gasto anual promedio.

(b) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función cuadrática de mejor ajuste que modele la relación entre la edad y el gasto medio anual.

(c) Utilice el modelo encontrado en el inciso (b) para aproximar la edad en la que los gastos es mayor.

(d) Utilice el modelo encontrado en el inciso (b) para aproximar el promedio anual más alto gasto.

(e) Utilice una herramienta gráfica para dibujar la función cuadrática que mejor se ajuste a la dispersión. trama.

Solución

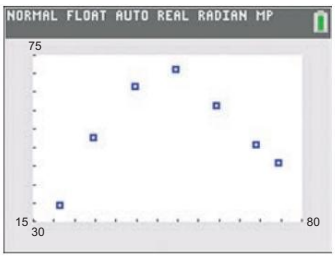


Figura 30 TI-84 Plus C

(a) La Figura 30 muestra el diagrama de dispersión en una calculadora gráfica TI-84 Plus C. Aparece los datos siguen una relación cuadrática, con un 6 0.

(b) Utilice el programa QUADratic REGresion para obtener los resultados que se muestran en la Figura 31 en la página siguiente. El resultado muestra la ecuación y = ax2 + bx + c.
La función cuadrática de mejor ajuste que modela la relación entre la edad y el gasto anual promedio es

$$E1x2 = - 0{,}0425x2 + 4{,}2056x - 34{,}9639$$ El modelo

donde x representa la edad y E representa el gasto anual promedio en miles de dólares.

Machine Translated by Google

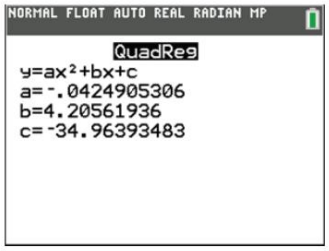


Figura 31 Regresión cuadrática

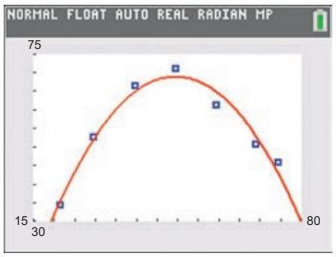


Figura 32
E(x) = -0,0425x2 + 4,2056x - 34,9639

(c) Con base en la función cuadrática de mejor ajuste, la edad de los consumidores con mayores gastos es

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4.2056}{21 - 0,04252} \approx 49,5 \text{ años}$$

(d) Evalúe la función E1x2 en x = 49,5.

$$E149,52 = - 0,0425 \# 49,52 + 4,2056 \# 49,5 - 34,9639 \approx 69,1$$

Según el modelo, las personas de 49,5 años tienen los mayores gastos. En promedio, una persona de 49,5 años gasta alrededor de 69.100 dólares al año.

(e) La figura 32 muestra la gráfica de la función cuadrática encontrada en el inciso (b) dibujada en el diagrama de dispersión.

Mire nuevamente la Figura 31. Observe que el resultado proporcionado por la calculadora gráfica no incluye r, el coeficiente de correlación. Recuerde que el coeficiente de correlación es una medida de la fuerza de una relación lineal que existe entre dos variables.
La calculadora gráfica no proporciona una indicación de qué tan bien se ajusta la función a los datos en términos de r, ya que una función cuadrática no es lineal.

Ahora resuelve el problema 1 7

3.4 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Traduce la siguiente oración a una ecuación matemática: El área A de un círculo es igual al producto del cuadrado de su radio r y la constante p. (págs. A62-A63)

2. Utilice una herramienta gráfica para encontrar la recta que mejor se ajuste a los siguientes datos: (págs. 174 y 175)

x	3	5	5	6	7	8
y	10	13	12	15	decisión	19

Aplicaciones y extensiones

3. Maximizar los ingresos El precio p (en dólares) y la cantidad x vendidos de un determinado producto satisfacen la ecuación de la demanda

$$x = - 6p + 600$$

(a) Encuentre un modelo que exprese el ingreso R en función de p. (Recuerde, R = xp.)
(b) ¿ Cuál es el dominio de R? Supongamos que R no es negativo.
(c) ¿Qué precio p maximiza el ingreso?
(d) ¿Cuál es el ingreso máximo?
(e) ¿Cuántas unidades se venden a este precio?
(f) Gráfica R.
g) ¿ Qué precio debería cobrar la empresa para obtener al menos 12 600 dólares de ingresos?

4. Maximizar los ingresos El precio p (en dólares) y la cantidad x vendida de un determinado producto satisfacen la ecuación de la demanda.

$$x = - 3p + 360$$

(a) Encuentre un modelo que exprese el ingreso R en función de p.
(b) ¿ Cuál es el dominio de R? Supongamos que R no es negativo.
(c) ¿Qué precio p maximiza el ingreso?
(d) ¿Cuál es el ingreso máximo?
(e) ¿Cuántas unidades se venden a este precio?
(f) Gráfica R.
(g) ¿ Qué precio debería cobrar la empresa para ganar ¿Al menos $9600 en ingresos?

5. Maximizar los ingresos El precio p (en dólares) y la cantidad x vendidos de un determinado producto satisfacen la ecuación de la demanda

$$x = - 20p + 500$$

(a) Encuentre un modelo que exprese el ingreso R en función de p.
(b) ¿ Cuál es el dominio de R? Supongamos que R no es negativo.
(c) ¿Qué precio p maximiza el ingreso?
(d) ¿Cuál es el ingreso máximo?
(e) ¿Cuántas unidades se venden a este precio?
(f) Gráfica R.
(g) ¿ Qué precio debería cobrar la empresa para ganar ¿Al menos $3000 en ingresos?

Machine Translated by Google

6. Maximizar los ingresos El precio p (en dólares) y la cantidad x vendida de un determinado producto satisfacen la ecuación de la demanda.

$$x = -5p + 100$$

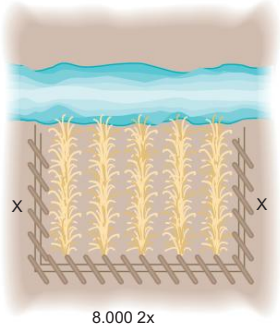
(a) Encuentre un modelo que exprese el ingreso R en función de p.
(b) ¿ Cuál es el dominio de R? Supongamos que R no es negativo.
(c) ¿Qué precio p maximiza el ingreso?
(d) ¿Cuál es el ingreso máximo?
(e) ¿Cuántas unidades se venden a este precio?
(f) Gráfica R.
(g) ¿ Qué precio debería cobrar la empresa para ganar ¿Al menos $480 en ingresos?

7. Cerrar un campo rectangular David tiene 480 yardas de cerca y desea encerrar un área rectangular.
(a) Exprese el área A del rectángulo como función del ancho W del rectángulo.
(b) ¿ Para qué valor de W el área es mayor?
(c) ¿Cuál es el área máxima?

8. Cerrar un campo rectangular Beth tiene 3000 pies de cerca disponible para encerrar un campo rectangular.
(a) Exprese el área A del rectángulo como función de x, donde x es la longitud del rectángulo.
(b) ¿Para qué valor de x es el área más grande?
(c) ¿Cuál es el área máxima?

9. Cerrar la mayor parte del área con una cerca Un agricultor con 2000 metros de cerca quiere cercar una parcela rectangular que bordea una carretera recta. Si el granjero no cerca el costado de la carretera, ¿cuál es el área más grande que se puede cercar?

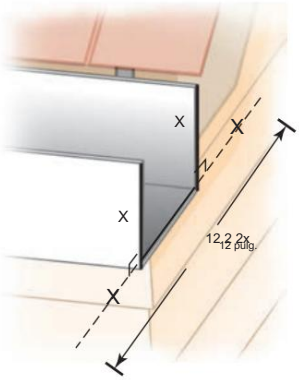
10. Cerrar la mayor parte del área con una cerca El granjero Ed tiene 8000 metros de cerca y quiere cercar una parcela rectangular que bordea un río. Si Farmer Ed no cerca el lado a lo largo del río, ¿cuál es el área más grande que se puede cercar?



11. Puente colgante Un puente colgante con peso distribuido uniformemente a lo largo de su longitud tiene torres gemelas que se extienden 75 metros sobre la superficie de la carretera y están separadas por 400 metros. Los cables tienen forma parabólica y están suspendidos de lo alto de las torres. Los cables tocan la superficie de la carretera en el centro del puente. Encuentre la altura de los cables en un punto a 100 metros del centro. (Suponga que el camino está nivelado).

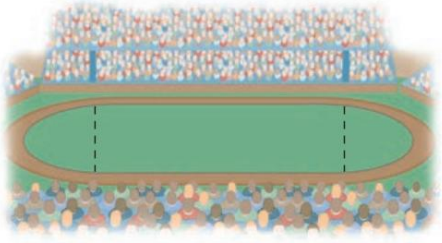
12. Arquitectura Un arco parabólico tiene una luz de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Elija ejes de coordenadas rectangulares adecuados y encuentre la ecuación de la parábola. Luego calcule la altura del arco en los puntos a 10 pies, 20 pies y 40 pies del centro.

13. Construcción de canaletas para la lluvia Se debe hacer una canaletas para la lluvia con láminas de aluminio de 12 pulgadas de ancho girando los bordes 90°. Vea la ilustración.
(a) ¿Qué profundidad proporcionará el área de sección transversal máxima y permitirá que fluya la mayor cantidad de agua?
(b) ¿Qué profundidades permitirán al menos 16 pulgadas cuadradas de agua? ¿fluir?



14. Ventanas normandas Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo de diámetro igual al ancho del rectángulo. Ver la figura. Si el perímetro de la ventana es de 20 pies, ¿qué dimensiones admitirán la mayor cantidad de luz (maximizarán el área)?

15. Construcción de un estadio Un área de juego de atletismo tiene la forma de un rectángulo con semicírculos en cada extremo. Ver la figura. El perímetro interior de la pista será de 1.500 metros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para que el área del rectángulo sea máxima?



16. Arquitectura Una ventana especial tiene la forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Ver la figura. Si el perímetro de la ventana es de 16 pies, ¿qué dimensiones dejarán pasar la mayor cantidad de luz?

[Pista: Área de un triángulo equilátero = la longitud $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, donde x es de un lado del triángulo.]

Machine Translated by Google

17. Hipótesis del ciclo de vida Los ingresos de un individuo varían con su edad. La siguiente tabla muestra el ingreso medio I de hombres de diferentes grupos de edad dentro de los Estados Unidos para 2016. Para cada grupo de edad, represente el punto medio de la clase la variable independiente, x. Para la clase "65 años y más", asumiremos que el punto medio de la clase es 69,5.

Edad	Clase Punto medio, x	Mediana ingresos, yo
15-24 años	19.5	$12,396
25-34 años	29,5	$38,152
35–44 años	39,5	$51,443
45–54 años	49,5	$51,476
55–64 años	59,5	$47,001
65 años y más	69,5	$31,618

Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

(a) Utilice una herramienta gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que puede existir entre las dos variables.

(b) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función cuadrática de mejor ajuste que modele la relación entre la edad y el ingreso medio.

(c) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para determinar la edad a la que un individuo puede esperar obtener el mayor ingreso.

(d) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para predecir el ingreso máximo obtenido.

(e) Con una utilidad gráfica, grafique la función cuadrática de mejor ajuste en el diagrama de dispersión.

18. Altura de una pelota Un lanzador de peso lanza una pelota con una inclinación de 45° con respecto a la horizontal. Los siguientes datos representan la altura de la pelota h, en pies, en el instante en que ha recorrido x pies horizontalmente.

Distancia, x	altura, h
20	25
40	40
60	55
80	...
100	71
120	77
140	77
160	75
180	71
200	64

(a) Utilice una herramienta gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que puede existir entre las dos variables.

(b) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función cuadrática de mejor ajuste que modele la relación entre distancia y altura.

(c) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para determinar qué distancia recorrerá la pelota antes de alcanzar su altura máxima.

(d) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para encontrar el máximo altura de la pelota.

(e) Con una utilidad gráfica, grafique la función cuadrática de mejor ajuste en el diagrama de dispersión.

19. Práctica mixta ¿Qué modelo? Un grillo emite un chirrido al juntar rápidamente sus alas. Quizás hayas notado que la cantidad de chirridos parece aumentar con la temperatura. Los siguientes datos enumeran la temperatura (en grados Fahrenheit) y el número de chirridos por segundo del grillo terrestre rayado.

Temperatura (ºF), x	Chirridos por segundo, C
88,6	20.0
93.3	19.8
80,6	17.1
69,7	14.7
69,4	15.4
79,6	15.0
80,6	16.0
76,3	14.4
75,2	15.5

Fuente: Pierce, George W. Las canciones de los insectos. Cambridge, MA Harvard University Press, 1949, págs. 12-21

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos, tratando la temperatura como la variable independiente. ¿Qué tipo de relación parece existir entre la temperatura y los chirridos por segundo?

(b) Según su respuesta al inciso (a), encuentre un modelo lineal o cuadrático que describa mejor la relación entre la temperatura y los chirridos por segundo.

(c) Utilice su modelo para predecir los chirridos por segundo si la temperatura es de 80°F.

20. Práctica mixta ¿Qué modelo? Los siguientes datos representan los pies cuadrados y los alquileres (dólares por mes) de apartamentos en el área de La Jolla en San Diego, California.

Pies cuadrados, x	alquiler por mes, R
520	$1630
625	$1820
710	$1860
765	$1975
855	$1985
925	$2200
1040	$2360

Fuente: apartamentos.com, 2018

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos tratando los pies cuadrados como variable independiente. ¿Qué tipo de relación parece existir entre los metros cuadrados y el alquiler?

(b) Con base en su respuesta al inciso (a), encuentre un modelo lineal o cuadrático que describa la relación entre los pies cuadrados y el alquiler.

(c) Utilice su modelo para predecir el alquiler de un apartamento en San Diego de 875 pies cuadrados.

Machine Translated by Google

21. Práctica mixta ¿Qué modelo? Los siguientes datos representan la tasa de natalidad (nacimientos por 1000 habitantes) para mujeres cuya edad es a, en 2016.

edad, un	Tasa de natalidad, B
decisis	8.8
19	37,5
22	73,8
27	102.1
32	102,7
37	52,7
42	11.4

Fuente: Estadísticas Vitales Nacionales Informes, 2018

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos, tratando la edad como variable independiente. ¿Qué tipo de relación parece existir entre edad y tasa de natalidad?

(b) Con base en su respuesta al inciso (a), encuentre un modelo lineal o cuadrático que describa la relación entre la edad y la tasa de natalidad.

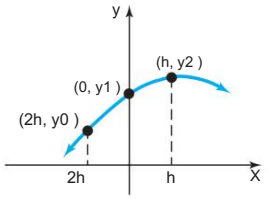
(c) Utilice su modelo para predecir la tasa de natalidad de mujeres de 35 años.

22. Problema de desafío Regla de Simpson La figura muestra la gráfica de y = ax2 + bx + c. Supongamos que los puntos 1 - h, y02, 10, y12 y 1h, y22 están en la gráfica. Se puede demostrar que el área encerrada por la parábola, el eje x y las rectas x = - h y x = h es

$$\text{Área} = \frac{h}{3}\ 12ah2 + 6c2$$

Demuestre que esta área también puede estar dada por

$$\text{Área} = \frac{h}{3}\ 1y0 + 4y1 + y22$$



23. Problema de desafío Utilice el resultado obtenido en el problema 22. para encontrar el área encerrada por f1x2 = 2x2 + 8, el eje x y las rectas x = - 2 y x = 2.

24. Problema de desafío Usa el resultado obtenido en el problema 22 para encontrar el área encerrada por f1x2 = - 5x2 + 8, el eje x y las rectas x = - 1 y x = 1.

25. Problema de desafío Utilice el resultado obtenido en el problema 22. para encontrar el área encerrada por f1x2 = - x2 + x + 4, el eje x y las rectas x = - 1 y x = 1.

26. Problema de desafío Usa el resultado obtenido en el problema 22 para encontrar el área encerrada por f1x2 = x2 + 3x + 5, el eje x y las rectas x = - 4 y x = 4.

Explicar conceptos: discusión y escritura

27. Consulte el Ejemplo 1 en esta sección. Observe que si el precio cobrado por las calculadoras es $0 o $140, entonces el ingreso es $0. Es fácil explicar por qué los ingresos serían $0 si el precio cobrado fue $0, pero ¿cómo pueden los ingresos ser $0 si el precio cobrado es $140?

Conserve su conocimiento

Los problemas 28 a 37 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

28. Encuentra la distancia entre los puntos P1 = (4, - 7) y P2 = (- 1, 5).

29. Encuentra la ecuación del círculo con centro 1 - 6, 02 y radio r = 27.

30. Resuelve: 5x2 + 8x - 3 = 0

31. Encuentra la intersección x y la intersección y de la gráfica de 5x + 7y = 140.

32. Resuelve: 2· 3x - 7· - 9 = 21

33. Calcula el cociente y el resto: x3 - 7x2 + 19x - 15 se divide por x - 3

34. Encuentra el dominio de $f1x2 = x3 \frac{5x - 1}{- 16x}$.

35. Encuentre la función que finalmente se representa gráficamente después de aplicar las tres transformaciones siguientes a la gráfica de f1x2 = 29 - x2 :

(1) Desplazamiento a la izquierda 3 unidades

(2) Estiramiento vertical por un factor de 2

(3) Bajar 4 unidades

36. Encuentra el cociente de diferencias de f: $f1x2 = x - \frac{3}{1}$

37. Factoriza completamente:

$$41x + 12\ ^{5}1x - 72\ ^{3} + 51x + 12\ ^{4}1x - 72\ ^{4}$$

'¿Estas preparado?' Respuestas

2 1. A = pr

2. y = 1,7826x + 4,0652

Machine Translated by Google

3.5 Desigualdades que involucran funciones cuadráticas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Resolver desigualdades (Sección A.9, págs. A76–A79)
- Utilice la notación de intervalos (Sección A9, págs. A73–A74)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 203.

OBJETIVO 1 Resolver desigualdades que involucran una función cuadrática (p. 201)

1 Resolver desigualdades que involucran una función cuadrática

En esta sección resolvemos desigualdades que involucran funciones cuadráticas.

- Resolver la desigualdad

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad a \cdot 0$$

Grafique la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y, a partir de la gráfica, determine dónde está la función por encima del eje x, es decir, donde $f(x) \geq 0$.

- Resolver la desigualdad

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \quad a \cdot 0$$

Grafique la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y, a partir de la gráfica, determine dónde está la función debajo del eje x, es decir, donde $f(x) \leq 0$.

- Si la desigualdad no es estricta, incluye las intersecciones con el eje x, si las hay, en la solución.

EJEMPLO 1 Resolver una desigualdad

Resuelve la desigualdad $x^2 - 4x - 12 \leq 0$ y grafica el conjunto solución.

Solución

Grafica la función $f(x) = x^2 - 4x - 12$.

- intersección con el eje y: $f(0) = -12$ — Evalúe f en 0.
- intersección con el eje x (si las hay): $x^2 - 4x - 12 = 0$ — Resuelve $f(x) \cdot 0$.

$(x - 6)(x + 2) = 0$ — Factor.

$x - 6 = 0$ o $x + 2 = 0$ — Utilice el producto cero Propiedad.

$x = 6$ o $x = -2$

La intersección con el eje y es -12; las intersecciones con el eje x son -2 y 6.

El vértice está en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$. Como $f(2) = -16$, el vértice es $(2, -16)$.

Consulte la Figura 33 para ver el gráfico.

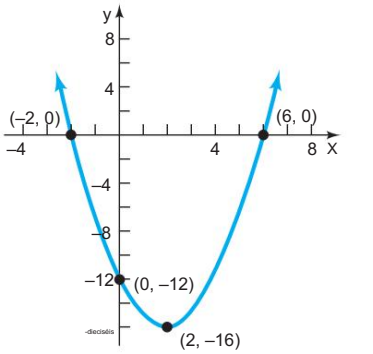


Figura 33 $f(x) = x^2 - 4x - 12$

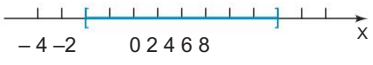


Figura 34

La gráfica está debajo del eje x para $-2 < x < 6$. Debido a que la desigualdad original no es estricta, la solución incluye las intersecciones en x. El conjunto solución es $\{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$ o, usando notación de intervalo, $[-2, 6]$. Consulte la Figura 34 para ver la gráfica del conjunto de soluciones.

Ahora trabaja el problema 9

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2

Resolver una desigualdad

Resuelve la desigualdad 2x2 6 x + 10 y grafica el conjunto solución.

Solución

Opción 1 Reorganiza la desigualdad para que 0 esté en el lado derecho.

2x2 6 x + 10

2x2 - x - 10 6 0 Resta x·10 de ambos lados.

Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad original.

Luego grafica la función f1x2 = 2x2 - x - 10 para encontrar dónde f1x2 6 0.

• Intersección con el eje y: f102 = - 10 • Intersección Evalúe f en 0.

con el eje x (si existe): 2x2 - x - 10 = 0 12x - 52 1x Resuelva f1x2 · 0.

+ 22 = 0 Factor.

2x - 5 = 0 o x + 2 = 0 Utilice el producto cero Propiedad.

$x = \frac{5}{2}$ o x = - 2

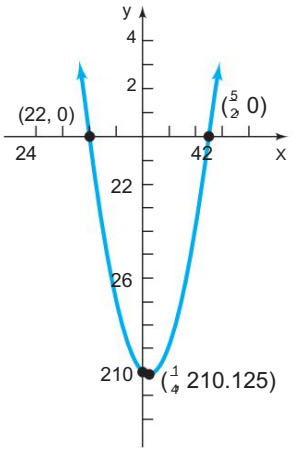


Figura 35 f 1x2 = 2x2 - x - 10

La intersección con el eje y es - 10; las intersecciones con el eje x son - 2 y $\frac{5}{2}$.

El vértice está en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$. Porque f ¢ 1 4≤ = - 10.125, el vértice - es ¢ 4 , 10.125≤. Consulte la Figura 35 para ver el gráfico.

5 La gráfica está debajo del eje x 1f1x2 6 02 entre x = - 2 y x = . porque 2

la desigualdad es estricta, el conjunto solución es e x ` - 2 6 x 6 2 f o, usando notación de intervalo, ¢ - 2, 2 ≤.

Opción 2 Si f1x2 = 2x2 y g1x2 = x + 10, entonces la desigualdad a resolver es f1x2 6 g1x2.

Grafique las funciones f1x2 = 2x2 y g1x2 = x + 10. Consulte la Figura 36.

Las gráficas se cruzan donde f1x2 = g1x2. Entonces

2x2 = x + 10 f1x2 · g1x2

2x2 - x - 10 = 0 12x

- 52 1x + 22 = 0 Factor.

2x - 5 = 0 o x + 2 = 0 Utilice el producto cero Propiedad.

$x = \frac{5}{2}$ o x = - 2

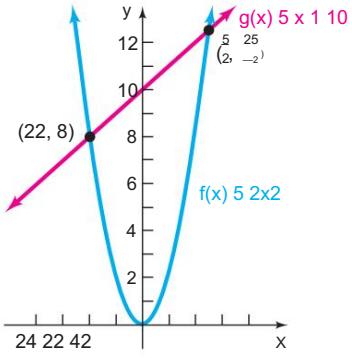


Figura 36

Las gráficas se cruzan en los puntos 1 - 2, 82 y ¢ 5 $\frac{5}{2}, \frac{25}{2}$ 2≤. Luego f1x2 6 g1x2 en el intervalo ¢- 2, 2 ≤, donde la gráfica de f está debajo de la gráfica de g.

Figura 37

Consulte la Figura 37 para ver la gráfica del conjunto de soluciones.

Ahora resuelve los problemas 5 y 1 3.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Resolver una desigualdad

Resuelve la desigualdad x2 + x + 1 7 0 y grafica el conjunto solución.

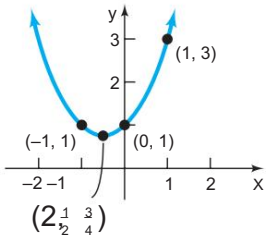


Figura 38 f1x2 = x2 + x + 1

Solución

La gráfica de la función f1x2 = x2 + x + 1 tiene el intercepto en y 1. Hay sin intersecciones con el eje x (¿Sabes por qué? Comprueba el discriminante). El vértice es ¢ - 1/2, 3/4≤. Como a 7 0, la parábola es cóncava hacia arriba y se encuentra sobre el eje x para todos los números reales x. Entonces x2 + x + 1 7 0 para todos los números reales. Ver Figura 38.

Figura 39

Consulte la Figura 39 para ver la gráfica del conjunto solución (- q, q).

Ahora resuelve el problema 1 7

3.5 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

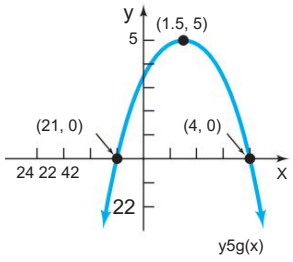
1. Resuelve la desigualdad - 3x - 2 6 7. (págs. A76–A77)

2. Escribe 1 - 2, 7] usando notación de desigualdad. (págs. A73-A74)

Desarrollo de habilidades

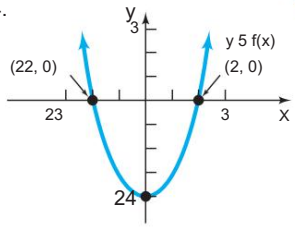
En los problemas 3 a 6, usa la figura para resolver cada desigualdad.

3.



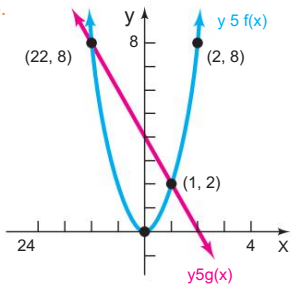
(a) g1x2 6 0
(b) g1x2 Ú 0

4.



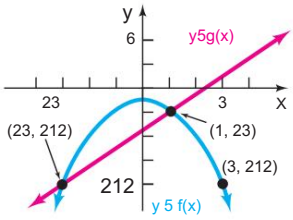
(a) f1x2 7 0
(b) f1x2 ... 0

5.



(a) g1x2 Ú f1x2
(b) f1x2 7g1x2

6.



(a) f1x2 6g1x2
(b) f1x2 Ú g1x2

En los problemas 7 a 22, resuelve cada desigualdad.

7. x2 + 3x - 10 7 0
11. x2 - 1 6 0
15. 6x2 6 6 + 5x
19. 25x2 + 16 6 40x

8. x2 - 3x - 10 6 0
12. x2 - 9 6 0
16. 2x2 6 5x + 3
20. 4x2 + 9 6 6x

9. x2 - 4x 7 0
13. x2 + x 7 12
17. x2 - x + 1 … 0
21. 212x2 - 3x2 7 - 9

10. x2 + 8x 7 0
14. x2 + 7x 6 - 12
18. x2 + 2x + 4 7 0
22. 61x2 - 12 7 5x

Práctica mixta En los problemas 23 a 30, utilice las funciones dadas f y g.
(a) Resuelva f1x2 = 0. (b) Resuelva g1x2 = 0. (c) Resuelva f1x2 = g1x2. (d) Resuelva f1x2 7 0. (e) Resuelva g1x2 … 0. (f) Resuelva f1x2 7 g1x2. (g) Resuelva f1x2 Ú 1.

23. f1x2 = - x2 + 3
g1x2 = - 3x + 3

24. f1x2 = x2 - 1
g1x2 = 3x + 3

25. f1x2 = - x2 + 4
g1x2 = - x - 2

26. f1x2 = - x2 + 1
g1x2 = 4x + 1

27. f1x2 = x2 - 2x + 1
g1x2 = - x2 + 1

28. f1x2 = x2 - 4
g1x2 = - x2 + 4

29. f1x2 = - x2 - x + 1
g1x2 = - x2 + x + 6

30. f1x2 = x2 - x - 2
g1x2 = x2 + x - 2

Aplicaciones y extensiones

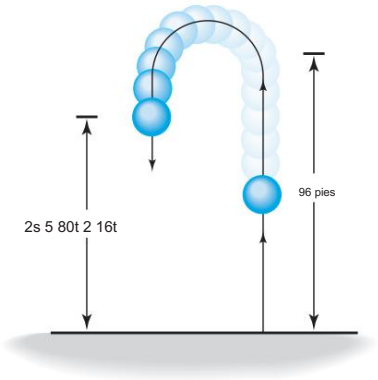
31. ¿Cuál es el dominio de la función f1x2 = 2x2 - 16?

32. ¿Cuál es el dominio de la función f1x2 = 2x - 3x2 ?

Machine Translated by Google

33. Física Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 96 pies por segundo. La distancia s (en pies) de la pelota al suelo después de t segundos es s1t2 = 96t - 16t 2.
(a) ¿ En qué momento t la pelota tocará el suelo?
(b) ¿ Para qué momentos t está la pelota a más de 128 pies por encima del ¿suelo?

34. Física Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La distancia s (en pies) de la pelota al suelo después de t segundos es s1t2 = 80t - 16t 2.
(a) ¿A qué hora t ¿La pelota tocará el suelo?
(b) ¿ Durante qué tiempo t la pelota se encuentra a más de 96 pies del suelo?



35. Ingresos La compañía John Deere ha descubierto que los ingresos por las ventas de tractores pesados son función del precio unitario p, en dólares, que cobra. El ingreso R, en dólares, está dado por

$$R1p2 = -\frac{1}{2}p2 + 1900p$$

(a) ¿ A qué precios p el ingreso es cero?
(b) ¿ Para qué rango de precios los ingresos excederán los $1 200 000?

36. Ingresos Supongamos que el fabricante de una secadora de ropa a gas ha descubierto que cuando el precio unitario es p dólares, el ingreso R (en dólares) es

$$R1p2 = -4p2 + 4000p$$

(a) ¿ A qué precios p el ingreso es cero?
(b) ¿ Para qué rango de precios los ingresos excederán los $800 000?

37. Artillería Un proyectil disparado desde el punto (0, 0) formando un ángulo con el eje x positivo tiene una trayectoria dada por

$$y = cx - 11 + c2\ 2¢\ g\ \overline{\quad}\ \overline{\quad}\ 2\leq¢\ xv \leq 2$$

dónde

x = distancia horizontal en metros

y = altura en metros

v = velocidad inicial de salida en metros por segundo (m/s)

g = aceleración debida a la gravedad = 9,81 metros por segundo al cuadrado (m/s2)

c 7 0 es una constante determinada por el ángulo de elevación.

Un obús dispara una bala de artillería con una velocidad inicial de 897 m/s.

(a) Si el proyectil debe superar una colina de 200 metros de altura a una distancia de 2000 metros frente al obús, ¿qué valores de c están permitidos en la ecuación de la trayectoria?
(b) Si el objetivo del inciso (a) es alcanzar un objetivo en el suelo a 75 kilómetros de distancia, ¿es posible hacerlo? Si es así, ¿para qué valores de c? Si no, ¿cuál es la distancia máxima que recorrerá la ronda?

Fuente: www.answers.com

38. Problema de desafío Auto fuera de control Usando la ley de Hooke, podemos demostrar que el trabajo W realizado al comprimir un resorte una distancia de x pies desde su posición en reposo es W = $\frac{1}{2}$ kx2 , donde k es una constante de rigidez que depende del resorte. También se puede demostrar que el trabajo realizado por un cuerpo en El movimiento antes de detenerse está dado por W. = $\frac{w}{2g}$ v2 , dónde w = peso del objeto (en libras), g = aceleración debida a la gravedad (32,2 pies/s2) y v = velocidad del objeto (en pies/s). Un estacionamiento tiene un amortiguador de resorte al final de una rampa para detener los autos fuera de control. El resorte tiene una constante de rigidez k = 9450 lb/pie y debe poder detener un automóvil de 4000 lb que viaja a 25 mph. ¿Cuál es la mínima compresión requerida del resorte? Expresa tu respuesta usando pies a la décima más cercana.

Fuente: www.sciforums.com

Explicar conceptos: discusión y escritura

39. Demuestre que la desigualdad 1x - 42 2 … 0 tiene exactamente una solución.

40. Demuestre que la desigualdad 1x - 22 número 2 7 0 tiene un real que no es solución.

41. Explica por qué la desigualdad x2 + x + 1 7 0 tiene todos los números reales como conjunto solución.

42. Explica por qué la desigualdad x2 - x + 1 6 0 tiene el conjunto vacío como conjunto solución.

43. Explique las circunstancias bajo las cuales las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función cuadrática se incluyen en el conjunto de soluciones de una desigualdad cuadrática.

Conserve su conocimiento

Los problemas 44 a 53 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

44. Encuentra el dominio de f 1x2 = 210 - 2x.

45. Determina algebraicamente si f 1x2 = es par, x2 + 9 $\frac{}{- x}$ extraño o ninguno de los dos.

46. Supongamos que f 1x2 = $\frac{2}{3}$x - 6.
(a) Encuentre las intersecciones de la gráfica de f.
(b) Gráfica f.

47. Determina si las gráficas de 3x + y = 4 y x + 3y = 6 son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

48. Encuentra los ceros de f(x) = x2 + 6x - 8.

49. Encuentre las intersecciones de la gráfica de y = $\frac{4x2 - 25}{x2 - 1 En}$.

los problemas 50 y 51, si f(x) = x2 + 2x - 7 y g(x) = 3x - 4,

encontrar:

50. 1g -f 2 1x2 _

51. 1f # g2 1x2

52. Encuentra el cociente de diferencias de f: f 1x2 = 3x2 - 5x

53. Simplifica: $\frac{5x4\ (2x + 7)4 - 8x5\ (2x + 7)3}{(2x + 7)8}$

Machine Translated by Google

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 5x 0 x 7 - 36 o 1 - 3, q 2 2. - 2 6 x … 7

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Función lineal (p. 161)

f1x2 = mx + b — Tasa de cambio promedio de f = m

La gráfica de f es una recta con pendiente m y intersección en y b.

Función cuadrática (págs. 179 a 183)

f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0 — La gráfica de f es una parábola que es cóncava hacia arriba si a 7 0 y es cóncava hacia abajo si a 6 0.

Vértice: ¢ - $\frac{b}{2a}$, f ¢ - $\frac{b}{2a}$ ≤ ≤

Eje de simetría: x = - $\frac{b}{2a}$

Intercepción y: f102 = c

Intersección(es) con el eje x: si la hay, se obtiene encontrando las soluciones reales de la ecuación ax2 + bx + c = 0

Objetivos

Sección	Deberías poder...	Ejemplos de ejercicios de repaso	
3.1	1 Graficar funciones lineales (p. 161)	1	1(a)–3(a), 1(c)–3(c)
	2 Usar la tasa de cambio promedio para identificar funciones lineales (p. 161)	2	1(b)–3(b), 4, 5
	3 Determinar si una función lineal es creciente, decreciente o constante (p. 164) 3 Construir modelos lineales		1(d)–3(d)
	4 a partir de descripciones verbales (p. 165) 4, 5 Dibujar e interpretar diagramas de dispersión (p. 171)		21
3.2	1	1	29(a), 30(a)
	2 Distinguir entre relaciones lineales y no lineales (p. 172)	2, 3	29(b), 30(a)
	3 Utilice una herramienta gráfica para encontrar la recta que mejor se ajuste (p. 174)	4	29c)
3.3	1 Graficar una función cuadrática usando transformaciones (p. 180)	1	6–8
	2 Identificar el vértice y el eje de simetría de una parábola (pág. 182)	2	9-13
	3 Grafique una función cuadrática usando su vértice, eje e intersecciones (p. 183)	3–5	9-13
	4 Encuentra una función cuadrática dado su vértice y otro punto (p. 186)	6	19, 20
	5 Encuentra el valor máximo o mínimo de una función cuadrática (p. 186)	7–8	14–16, 22–27
3.4	1 Construir modelos cuadráticos a partir de descripciones verbales (p. 193)	1–3	22–28
	2 Construir modelos cuadráticos a partir de datos (p. 196)	4	30
3.5	1 Resolver desigualdades que involucran una función cuadrática (p. 201)	1–3	17, 18

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 a 3:

(a) Encuentre la pendiente y la intersección con el eje y de cada función lineal.
(b) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de cada función?
(c) Grafique cada función. Etiqueta las intersecciones.
(d) Determine si la función es creciente, decreciente o constante.

1. f1x2 = 2x - 5 3. G1x2 = 4 2. h1x2 = x - 6 $\frac{4}{5}$

En los problemas 4 y 5, determine si la función es lineal o no lineal. Si la función es lineal, indique su pendiente.

4.

x	y · f (x)
-2	-4
-1	-1
0	2
1	5
2	8

5.

x	y · g(x)
-1	-3
0	4
1	7
2	6
3	1

Machine Translated by Google

En los problemas 6 a 8, grafique cada función cuadrática usando transformaciones (desplazamiento, compresión, estiramiento y/o reflexión).

6. f1x2 = 1x + 12 ^{2} - 4

7. f1x2 = - 1x - 42 ^{2}

8. f1x2 = - 31x + 22 ^{2} + 1

En los problemas 9 a 13, (a) grafique cada función cuadrática determinando si su gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, eje de simetría, intersección con el eje y e intersección con el eje x, si las hubiera. (b) Determine el dominio y el rango de la función. (c) Determine dónde la función aumenta y dónde disminuye.

9. f1x2 = 1x - 22 ^{2} + 2

10. f1x2 = 4 $\frac{1}{}$x2 - 16

11. f1x2 = - 4x2 + 4x

f1x2 = 2 $\frac{9}{}$x2 + 3x + 1 12.

13. f1x2 = 3x2 + 4x - 1

En los problemas 14 a 16, determine si la función cuadrática dada tiene un valor máximo o un valor mínimo y luego encuentre el valor.

14. f1x2 = 3x2 - 6x + 4 16. f1x2 = - 5x2 + 20x - 11

15. f1x2 = - 3x2 + 6x - 7

En los problemas 17 y 18, resuelve cada desigualdad cuadrática.

17. x2 + 6x - 16 6 0 18. 3x2 Ú 14x + 5

En los problemas 19 y 20, encuentre la función cuadrática para la cual:

19. El vértice es (3, 5); La intersección con el eje y es −13.

20. El vértice es 1 - 2, 22; contiene el punto 1−1, 52

21. Comisiones de ventas A Bill le acaban de ofrecer un puesto de ventas en una empresa de informática. Su salario sería de $25 000 por año más el 1% de sus ventas anuales totales.

(a) Encuentre una función lineal que relacione el salario anual de Bill, S, con sus ventas anuales totales, x.

(b) Si las ventas anuales totales de Bill fueran de $1.000.000, ¿cuál sería el salario de Bill?

(c) ¿Qué tendría que vender Bill para ganar $100 000?

(d) Determine las ventas requeridas de Bill para que su salario exceder los $150,000.

22. Ecuación de la demanda El precio p (en dólares) y la cantidad x vendidos de un determinado producto satisfacen la ecuación de la demanda

x = 1500 - 10p

(a) Encuentre un modelo que exprese el ingreso R en función del precio p.

(b) ¿ Cuál es el dominio de R? Supongamos que R no es negativo.

(c) ¿Qué precio unitario debería utilizarse para maximizar los ingresos?

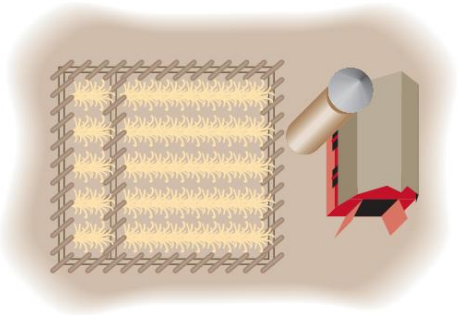
(d) Si se cobra este precio, ¿cuál es el ingreso máximo?

(e) ¿Cuántas unidades se venden a este precio?

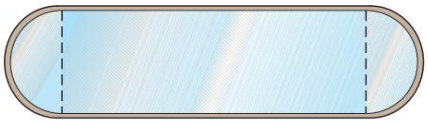
f) ¿ Qué precio se debe cobrar para recaudar al menos $56 000 en ingresos?

23. Paisajismo Un ingeniero paisajista tiene 500 pies de borde para encerrar un estanque rectangular. ¿Qué dimensiones resultarán en el estanque más grande?

24. Cerrar la mayor parte del área con una cerca Un agricultor con 10,000 metros de cerca quiere cercar un campo rectangular y luego dividirlo en dos parcelas con una cerca paralela a uno de los lados. Ver la figura. ¿Cuál es el área más grande que se puede encerrar?



25. Arquitectura Se va a construir una ventana especial en forma de rectángulo con semicírculos en cada extremo de modo que el perímetro exterior sea de 100 pies. Vea la ilustración. Encuentra las dimensiones del rectángulo que maximizan el área del rectángulo.



26. Minimización del costo marginal Callaway Golf Company ha determinado que el costo marginal C de fabricación x
Los palos de golf Big Bertha se pueden expresar mediante la función cuadrática

C1x2 = 4,9x2 - 617,4x + 19.600

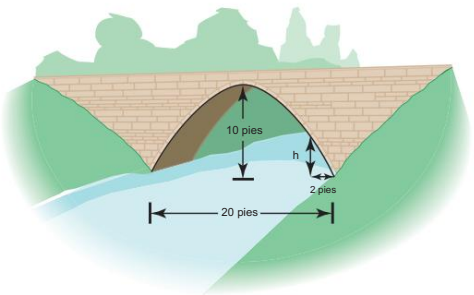
(a) ¿Cuántos palos deberían fabricarse para minimizar el costo marginal?

(b) A este nivel de producción, ¿cuál es el costo marginal?

27. Maximizar el área Un rectángulo tiene un vértice en la recta y = 10 - x, x 7 0, otro en el origen, uno en el eje x positivo y otro en el eje y positivo.

Expresa el área A del rectángulo en función de x. Encuentre el área A más grande que puede encerrar el rectángulo.

28. Puente de arco parabólico Un puente horizontal tiene forma de arco parabólico. Dada la información que se muestra en la figura, ¿cuál es la altura h del arco a 2 pies de la orilla?



29. La investigación sobre la longitud de los huesos realizada en la NASA, dirigida por la Dra. Emily R. Morey-Holton, midió la longitud del húmero derecho y la tibia derecha en 11 ratas que fueron enviadas al espacio en Spacelab Life Sciences 2. Los datos que se muestran en la siguiente página fueron recopiladas.

(a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos, tratando la longitud del húmero derecho como variable independiente.

Machine Translated by Google

(b) Con base en el diagrama de dispersión, ¿crees que existe una relación lineal entre la longitud del húmero derecho y la longitud de la tibia derecha?

(c) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la línea de mejor ajuste que relacione la longitud del húmero derecho y la longitud de la tibia derecha.

(d) Prediga la longitud de la tibia derecha de una rata cuyo húmero derecho mide 26,5 milímetros (mm).

Húmero derecho (mm), x	tibia derecha (mm), años
24.80	36.05
24,59	35,57
24,59	35,57
24.29	34,58
23,81	34.20
24,87	34,73
25,90	37,38
26.11	37,96
26,63	37,46
26.31	37,75
26,84	38,50

Fuente: Archivo de datos de ciencias biológicas de la NASA

30. Publicidad Una pequeña empresa manufacturera recopiló los siguientes datos sobre los gastos en publicidad A (en miles de dólares) y los ingresos totales R (en miles de dólares).

Publicidad Gastos ($1000)	Los ingresos totales ($1000)
20	6101
22	6222
25	6350
25	6378
27	6453
28	6423
29	6360
31	6231

(a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que puede existir entre las dos variables.

(b) La función cuadrática que mejor se ajusta a estos datos es

R1A2 = - 7,76A2 + 411,88A + 942,72

Utilice esta función para determinar el nivel óptimo de publicidad.

(c) Utilice la función para predecir los ingresos totales cuando se gasta el nivel óptimo de publicidad.

(d) Utilice una herramienta gráfica para verificar que la función dada en el inciso (b) es la función cuadrática de mejor ajuste.

(e) Utilice una herramienta gráfica para dibujar un diagrama de dispersión de los datos y luego grafique la función cuadrática de mejor ajuste en el diagrama de dispersión.

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

1. Para la función lineal f1x2 = - 4x + 3:
   (a) Encuentre la pendiente y la intersección con el eje y.
   (b) ¿ Cuál es la tasa de cambio promedio de f ?
   (c) Determine si f es creciente, decreciente o constante.
   (d) Gráfico f.

En los problemas 2 y 3, encuentre las intersecciones, si las hay, de cada función cuadrática.

2. f1x2 = 3x2 - 2x - 8 4.

3. G1x2 = - 2x2 + 4x + 1

Supongamos f1x2 = x2 + 3x y g1x2 = 5x + 3.
   (a) Resuelva f1x2 = g1x2.
   (b) Grafique cada función y etiquete los puntos de intersección.
   (c) Resuelva la desigualdad f1x2 6 g1x2 y represente gráficamente la solución colocar.

5. Grafica f1x2 = 1x - 32 - 2 usando transformaciones.

6. Considere la función cuadrática f1x2 = 3x2 - 12x + 4.
   (a) ¿La gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo?
   (b) Encuentre el vértice.
   (c) Encuentre el eje de simetría.
   (d) Encuentre las intersecciones.
   (e) Utilice la información de los incisos (a) a (d) para representar gráficamente f.

7. Determina si f1x2 = - 2x2 + 12x + 3 tiene un máximo o un mínimo. Luego encuentre el valor máximo o mínimo.

8. Resuelve x2 - 10x + 24 Ú 0.

9. Alquiler de vehículos recreativos El costo de alquiler semanal de un vehículo recreativo de 20 pies es de $129,50 más $0,15 por milla.
   (a) Encuentre una función lineal que exprese el costo C en función de las millas recorridas m.
   (b) ¿Cuál es el costo del alquiler si se recorren 860 millas?
   (c) ¿Cuántas millas recorrieron si el costo del alquiler es $213.80?

10. Maximizar los ingresos El precio p (en dólares) y la cantidad x vendidos de un determinado producto satisfacen la ecuación de la demanda

x = - 10p + 10.000

   (a) Encuentre un modelo que exprese el ingreso R como función de pág.
   (b) ¿ Cuál es el dominio de R? Supongamos que R no es negativo.
   (c) ¿Qué precio p maximiza el ingreso?
   (d) ¿Cuál es el ingreso máximo?
   (e) ¿Cuántas unidades se venden a este precio?
   (f) ¿ Qué precio debería cobrar la empresa para ganar ¿Al menos 1.600.000 dólares de ingresos?

Machine Translated by Google

Revisión acumulativa

1. Encuentra la distancia entre los puntos P = 1 - 1, 32 y Q = 14, -22. Encuentra el punto medio del segmento de recta de P a Q.

2. ¿Qué puntos están en la gráfica de y = x3 - 3x + 1?
   (a) 1 - 2, - 12 (b) (2, 3) (c) (3, 1)

3. Resuelve la desigualdad 5x + 3 Ú 0 y grafica el conjunto solución.

4. Encuentra la ecuación de la recta que contiene los puntos 1 - 1, 42. y 12, - 22. Expresa tu respuesta en forma pendiente-intersección y grafica la recta.

5. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta y = 2x + 1 y que contiene el punto (3, 5). Expresa tu respuesta en forma pendiente-intersección y grafica ambas rectas.

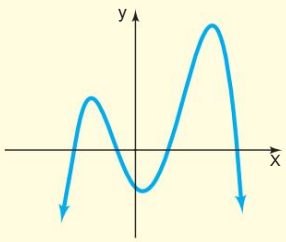
6. Grafica la ecuación x2 + y2 - 4x + 8y - 5 = 0.

7. ¿La siguiente relación representa una función?
   5 1 - 3, 82, 11, 32, 12, 52, 13, 82 6.

8. Para la función f definida por f1x2 = x2 - 4x + 1, encuentre:
   (a) f122 (b) f1x2 + f122
   (c) f1- x2 (d) -f1x2
   (e) f1x + 22 (f) $\frac{f\,1x + h2 - f1x2}{h}$, h · 0

9. Encuentra el dominio de h1z2 = $\frac{3z - 1}{6z - 7}$.

10. ¿La siguiente gráfica es la gráfica de una función?



11. Considere la función f 1x2 = x + 4 $\frac{x}{\quad}$.

    (a) ¿Es el punto ¢1, 1 $\overline{\ }$ 4 ≤ en la gráfica de f ?

    (b) Si x = - 2, ¿cuál es f 1x2? ¿Qué punto está en la gráfica de f ?

    (c) Si f1x2 = 2, ¿cuál es x? ¿Qué punto está en la gráfica de f ?

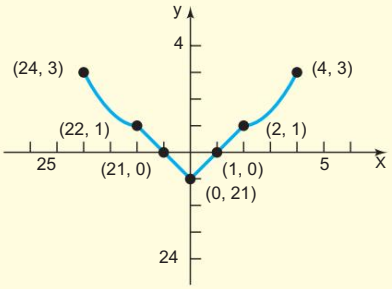
$\frac{x2}{\quad}$

12. ¿La función f 1x2 = par, impar o ninguna de las dos? 2x + 1

13. Calcule los valores máximos locales y los valores mínimos locales de f1x2 = x3 - 5x + 1 en 3 - 4, 44. Determine dónde aumenta y dónde decrece la función.

14. Si f1x2 = 3x + 5 y g1x2 = 2x + 1:
    (a) Resuelva f1x2 = g1x2.
    (b) Resuelva f1x2 7 g1x2.

15. Considere la siguiente gráfica de la función f.
    (a) Encuentre el dominio y el rango de f.
    (b) Encuentre las intersecciones.
    (c) ¿La gráfica de f es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen?
    (d) Encuentre f 122.
    (e) ¿Para qué valor(es) de x es f1x2 = 3?
    (f) Resuelva f1x2 6 0.
    (g) Grafique y = f1x2 + 2.
    (h) Grafique y = f1 - x2.
    (i) Grafique y = 2f1x2.
    (j) ¿Es f par, impar o ninguna de las dos cosas?
    (k) Encuentre el intervalo en el que f aumenta.



Machine Translated by Google

Proyectos del Capítulo

Proyecto basado en Internet

I. La beta de una acción Quiere invertir en el mercado de valores pero no está seguro de qué acciones comprar. La información es la clave para tomar una decisión de inversión informada. Un dato que utilizan muchos analistas bursátiles es la beta de la acción. Ir a Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Beta_(finanzas)) e investigar qué mide beta y qué representa.

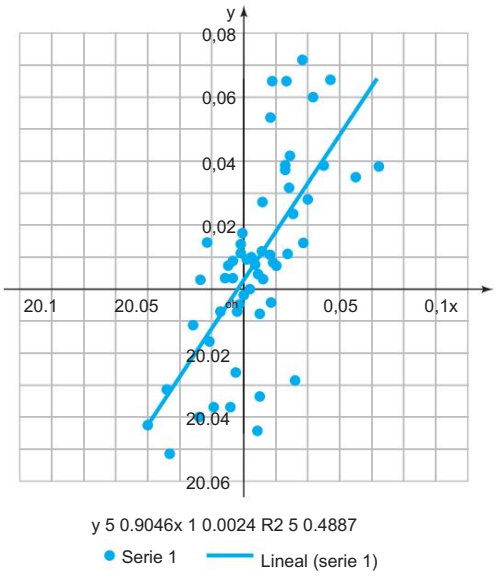
1. Aproximar la beta de una acción. Elija una empresa conocida como Google o Coca-Cola. Vaya a un sitio web como Yahoo! Finanzas (http://finance.yahoo.com/) y
Encuentre el precio de cierre semanal de las acciones de la empresa durante el año pasado. Luego encuentre el precio de cierre del Standard & Poor's 500 (S&P500) para el mismo período de tiempo.
Para obtener los precios históricos en Yahoo! Finanzas, seleccione Datos históricos en el menú. Elija el período de tiempo apropiado. Seleccione Semanal y Aplicar. Finalmente, seleccione Descargar datos y Abrir con Microsoft Excel. Repita esto para el S&P500 y copie los datos en la misma hoja de cálculo. Finalmente, reorganice los datos en orden cronológico. Asegúrese de expandir la selección para ordenar todos los datos.
Ahora, usando el precio de cierre ajustado, calcule el cambio porcentual en el precio para cada semana, usando la fórmula

$$\% \text{ de cambio} = \frac{P1 - P0}{P0}.$$

Por ejemplo, si el precio de la semana 1 está en la celda D1 y el precio de la semana 2 está en la celda D2, entonces % de cambio = $\frac{D2 - D1}{D1}$. Repita esto para los datos del S&P500.

2. Usar Excel para dibujar un diagrama de dispersión. Trate el cambio porcentual en el S&P500 como variable independiente y el cambio porcentual en la acción que eligió como variable dependiente. La forma más sencilla de dibujar un diagrama de dispersión en Excel es colocar las dos columnas de datos una al lado de la otra (por ejemplo, tenga el cambio porcentual en el S&P500 en la columna F y el cambio porcentual en la acción que eligió en la columna G). Luego resalte los datos y seleccione el ícono Gráfico de dispersión en Insertar. Comente el tipo de relación que parece existir entre las dos variables.

3. Encontrar beta. Para encontrar beta es necesario encontrar la línea de mejor ajuste mediante regresión de mínimos cuadrados. El método más sencillo es hacer clic dentro del diagrama de dispersión. Seleccione el icono Elementos del gráfico (+). Marque la casilla de Línea de tendencia, seleccione la flecha a la derecha y elija Más opciones. Seleccione Lineal y marque la casilla Mostrar ecuación en el gráfico. La línea de mejor ajuste aparece en el diagrama de dispersión. Vea abajo.



La línea de mejor ajuste para estos datos es y = 0,9046x + 0,0024. Puede hacer clic en Título del gráfico o en el título de cualquier eje e insertar los nombres apropiados. La beta es la pendiente de la línea de mejor ajuste, 0,9046. Interpretamos esto diciendo: "Si el S&P500 aumenta un 1%, entonces esta acción aumentará un 0,9%, en promedio". Encuentre la beta de su acción y proporcione una interpretación. NOTA: Otra forma de utilizar Excel para encontrar la línea que mejor se ajusta requiere utilizar el paquete de herramientas de análisis de datos en complementos.

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC):

II. Cañones El comandante de una batería utiliza el peso de un misil, su velocidad inicial y la posición de su arma para determinar dónde está el misil. viajará el misil.

III. Primera y segunda diferencias Las diferencias finitas proporcionan un método numérico que se utiliza para estimar la gráfica de una función desconocida.

IV. Experimento CBL La simulación por computadora se utiliza para estudiar las propiedades físicas de una pelota que rebota.

Machine Translated by Google

4 Polinomio y Funciones racionales

Dia largo

La duración del día es la duración de cada día desde el momento en que la rama superior del disco solar aparece sobre el horizonte durante el amanecer hasta el momento en que la rama superior desaparece debajo del horizonte durante la puesta del sol. La duración de un día depende del día del año y de la latitud del lugar. La latitud da la ubicación de un punto en la Tierra al norte o al sur del ecuador. En el Proyecto de Internet al final de este capítulo, utilizamos información del capítulo para investigar la relación entre la duración del día y la latitud para un día específico del año.

—Ver el Proyecto del Capítulo I basado en Internet—

Describir

4.1 Funciones polinómicas
4.2 Graficar funciones polinomiales; Modelos
4.3 Propiedades de las funciones racionales
4.4 La gráfica de una función racional
4.5 Desigualdades polinómicas y racionales
4.6 Los ceros reales de un polinomio Función
4.7 Ceros complejos; Teorema fundamental del álgebra
Revisión del capítulo
Prueba de capítulo
Revisión acumulativa
Proyectos del Capítulo

Una mirada atras

En el Capítulo 2, comenzamos nuestra discusión sobre funciones. Definimos dominio, rango y variables independientes y dependientes, encontramos el valor de una función y graficamos funciones. Continuamos nuestro estudio de funciones enumerando propiedades de funciones, como ser par o impar, y creamos una biblioteca de funciones, nombrando y graficando funciones clave y enumerando sus propiedades.

En el Capítulo 3, discutimos funciones lineales y funciones cuadráticas, que pertenecen a la Clase de funciones polinómicas.

Una mirada hacia el futuro

En este capítulo, analizamos dos clases generales de funciones, funciones polinomiales y funciones racionales, y examinamos sus propiedades. Podría decirse que las funciones polinómicas son las funciones más simples del álgebra. A menudo se utilizan para aproximar otras funciones más complicadas.
Las funciones racionales son razones de funciones polinómicas.

Machine Translated by Google

4.1 Funciones polinómicas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Polinomios (Sección A.3, págs. A22–A29)
- Obtener información de o sobre la gráfica de una función (Sección 2.2, págs. 100–103)
- Técnicas gráficas: transformaciones (Sección 2.5, págs. 134–143)
- Intercepciones (Sección 1.2, págs. 48–49)
- Biblioteca de funciones (Sección 2.4, págs. 122–126)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 223.

OBJETIVOS 1 Identificar funciones polinomiales y su grado (p. 211)
2 Graficar funciones polinomiales mediante transformaciones (p. 215)
3 Identificar los ceros reales de una función polinómica y su multiplicidad (p. 216)

1 Identificar funciones polinomiales y su grado

En el Capítulo 3, estudiamos la función lineal f1x2 = mx + b, que se puede escribir como

$$f1x2 = a1x + a0$$

y la función cuadrática f1x2 = ax2 + bx + c, a · 0, que se puede escribir como

$$f1x2 = a2x2 + a1x + a0 \qquad a2 \cdot 0$$

Ambas funciones son ejemplos de una función polinómica.

DEFINICIÓN Función polinómica

Una función polinómica en una variable es una función de la forma

$$f1x2 = anxn + an-1xn-1 + g + a1x + a0 \qquad (1)$$

donde an, an-1, c, a1, a0 son constantes, llamadas coeficientes del polinomio, n Ú 0 es un número entero y x es una variable. Si an · 0, se llama coeficiente principal y n es el grado del polinomio.

El dominio de una función polinómica es el conjunto de todos los números reales.

En palabras
Una función polinómica es una suma de monomios.

Los monomios que forman una función polinómica se llaman términos. Si an · 0, anxn se denomina término principal; a0 se llama término constante. Si todos los coeficientes son 0, el polinomio se llama polinomio cero y no tiene grado.

Las funciones polinomiales generalmente se escriben en forma estándar, comenzando con el término distinto de cero de mayor grado y continuando con los términos en orden descendente según el grado. Si falta una potencia de x es porque su coeficiente es cero.

Las funciones polinómicas se encuentran entre las más simples del álgebra. Son fáciles de evaluar: sólo se requieren sumas y multiplicaciones repetidas. Debido a esto, a menudo se utilizan para aproximar otras funciones más complicadas. En esta sección, investigamos las propiedades de esta importante clase de funciones.

EJEMPLO 1 Identificar funciones polinomiales

Determine cuáles de las siguientes son funciones polinómicas. En los que lo sean, indicar el grado; para aquellos que no lo son, indique por qué no. Escribe cada función polinómica en forma estándar y luego identifica el término principal y el término constante.

(a) $p1x2 = 5x3 - \frac{1}{-}x2 - 9$ (b) $f1x2 = x + 2 - 3x4$ (c) $g1x2 = 1x$ –

(d) $h1x2 = x3\,\frac{4x2 - 2}{-1}$ (e) $G1x2 = 8$ (f) $H1x2 = - 2x3\ 1x - 12$

Machine Translated by Google

Solución (a) p es una función polinómica de grado 3 y está en forma estándar. El término principal es 5x3. , y el término constante es - 9.

(b) f es una función polinómica de grado 4. Su forma estándar es f1x2 = - 3x4 + x + 2. El término principal es - 3x4 , y el término constante es 2.

(c) g no es una función polinómica porque g1x2 = 1x = x $\frac{1}{2}$, entonces la variable x es elevado a la $\frac{1}{2}$ potencia, que no es un número entero no negativo.

(d) h no es una función polinómica. Es la razón de dos polinomios distintos y el polinomio en el denominador es de grado positivo.

(e) G es una función polinómica constante distinta de cero, por lo que es de grado 0. El polinomio está en forma estándar. El término principal y el término constante son ambos 8.

(f) H1x2 = - 2x3 1x - 12 ^{2} = - 2x3 1x2 - 2x + 12 = - 2x5 + 4x4 - 2x3 . Entonces, H es una función polinómica de grado 5. El término principal es - 2x5 . Como no se muestra ningún término constante, el término constante es 0.

¿Ves una manera de encontrar el grado de H, en el inciso (f), sin multiplicarlo?

Ahora resuelva los problemas 1 5 y 1 9

Hemos analizado en detalle funciones polinómicas de grados 0, 1 y 2. Consulte Tabla 1 para un resumen de las propiedades de las gráficas de estas funciones polinómicas.

tabla 1

Grado	Forma	Nombre	Grafico
Sin grado f1x2 = 0		función cero	el eje x
0	f1x2 = a0, a0 · 0	función constante	Línea horizontal con intersección en y a0
1	f1x2 = a1x + a0, a1 · 0	Función lineal	Línea no vertical ni horizontal con pendiente a1 e intersección con el eje y a0
2	f1x2 = a2x2 + a1x + a0, a2 · 0 Función cuadrática		Parábola: la gráfica es cóncava hacia arriba si a2 7 0; la gráfica es cóncava hacia abajo si a2 6 0

Si tomas un curso de cálculo, aprenderás que la gráfica de cada función polinómica es suave y continua. Por suave queremos decir que el gráfico no contiene esquinas ni cúspides agudas; Por continuo queremos decir que el gráfico no tiene espacios ni agujeros y se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Véanse las Figuras 1(a) y (b).

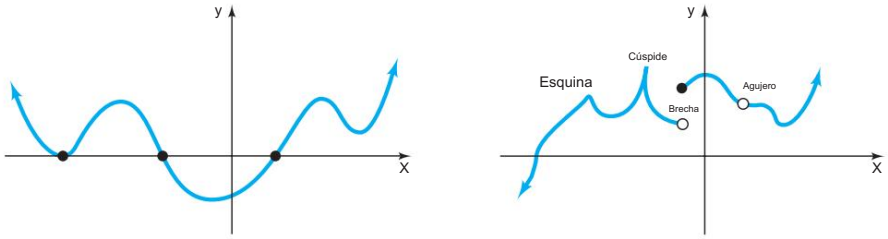


Figura 1 (a) Gráfica de una función polinómica: suave, continuo (b) No puede ser la gráfica de un función polinómica

Funciones de poder

Las funciones polinómicas de grado n, n 7 0, que tienen un solo término se llaman funciones potencia.

En palabras
Una función de potencia está definida por un solo monomio.

DEFINICIÓN Función de potencia

Una función potencia de grado n es una función monomio de la forma

$$f(x) = ax^n \quad (2)$$

donde a es un número real, a · 0 y n 7 0 es un número entero.

Machine Translated by Google

Ejemplos de funciones de potencia son

$$f(x) = 3x \quad f(x) = -5x^2 \quad f(x) = 8x^3 \quad f(x) = -2x^{\frac{1}{4}}$$

grado 1 grado 2 grado 3 grado 4

La gráfica de una función potencia de grado 1, $f(x) = ax$, es una recta con pendiente a que pasa por el origen. La gráfica de una función de potencia de grado 2, $f(x) = ax^2$, es una parábola con vértice en el origen. La parábola es cóncava hacia arriba si $a > 0$ y es cóncava hacia abajo si $a < 0$.

Si sabemos graficar una función potencia de la forma $f(x) = x^n$, una compresión, un estiramiento o, quizás, una reflexión respecto del eje x nos da la gráfica de $g(x) = ax^n$. En consecuencia, nos concentraremos en graficar funciones de potencia de la forma $f(x) = x^n$.

Comenzamos con funciones de potencia de grado par de la forma $f(x) = x^n$, $n \geq 2$ y n par. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales y el rango es el conjunto de los números reales no negativos. Esta función de potencia es una función par. (¿Ves por qué?) Su gráfica es simétrica con respecto al eje y. La gráfica de una función de potencia $f(x) = x^n$, n par, siempre contiene el origen (0, 0) y los puntos (−1, 1) y (1, 1).

Si $n = 2$, la gráfica es la conocida parábola $y = x^2$ que es cóncava hacia arriba, con vértice en el origen. Si $n > 4$, la gráfica de $f(x) = x^n$, n par, estará más cerca del eje x que la parábola $y = x^2$ si $-1 < x < 1$, $x \neq 0$, y más lejos del eje x que la parábola $y = x^2$ si $x < -1$ o si $x > 1$. La Figura 2(a) ilustra esta conclusión.
La Figura 2(b) muestra las gráficas de $y = x^4$ e $y = x^8$ para una mayor comparación.

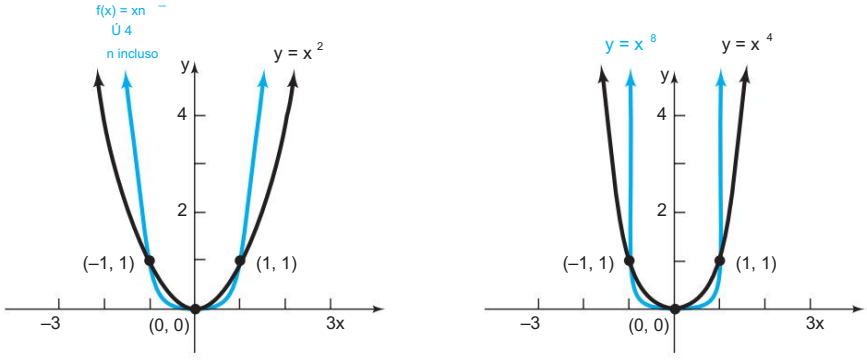


Figura 2 (a) (b)

RECUERDE El infinito, ∞, no es un número real, sino un símbolo utilizado para indicar que no hay límites en la dirección positiva. De manera similar, $-\infty$ es un símbolo utilizado para indicar que no hay límites en la dirección negativa.

La Figura 2 muestra que a medida que n aumenta, la gráfica de $f(x) = x^n$, $n \geq 2$ y n par, tiende a aplanarse cerca del origen y es más pronunciado cuando x está lejos de 0. Para n grande, puede parecer que la gráfica coincide con el eje x cerca del origen, pero no es así; la gráfica en realidad toca el eje x solo en el origen. Además, para n grande, puede parecer que para $x < -1$ o para $x > 1$ la gráfica es vertical, pero no lo es; sólo aumenta muy rápidamente en estos intervalos. Si los gráficos se ampliaran muchas veces, estas distinciones serían claras.

La Figura 2 también muestra que cuando x se vuelve ilimitado en la dirección negativa, $x \to -\infty$, o cuando x se vuelve ilimitado en la dirección positiva, $x \to \infty$, la función de potencia $f(x) = x^n$, n par, se vuelve ilimitado en la dirección positiva, $f(x) \to \infty$.
Ver Tabla 2.

Tabla 2

	$x < -10\,000$	$x < -100\,000$	$x \to -\infty$	$x > 10\,000$	$x > 100\,000$	$x \to \infty$
$f(x) = x^2$	10^8	10^{10}	∞	10^8	10^{10}	∞
$f(x) = x^4$	10^{16}	10^{20}	∞	10^{16}	10^{20}	∞
$f(x) = x^6$	10^{24}	10^{30}	∞	10^{24}	10^{30}	∞

Definimos el comportamiento de la gráfica de una función para valores grandes de x, ya sea positivo o negativo, según su comportamiento final.

Machine Translated by Google

Ver el concepto

Grafique Y1 = x4, Y2 = x8 e Y3 = x12 usando el rectángulo de visualización -2 … x … 2, -4 … y … 16. Luego, grafique cada uno nuevamente usando el rectángulo de visualización -1 … x … 1, 0 … y … 1. Vea la Figura 3. TRAZA a lo largo de una de las gráficas para confirmar que para x cerca de 0 la gráfica está por encima del eje x y que para x 7 0 la gráfica está aumentando.

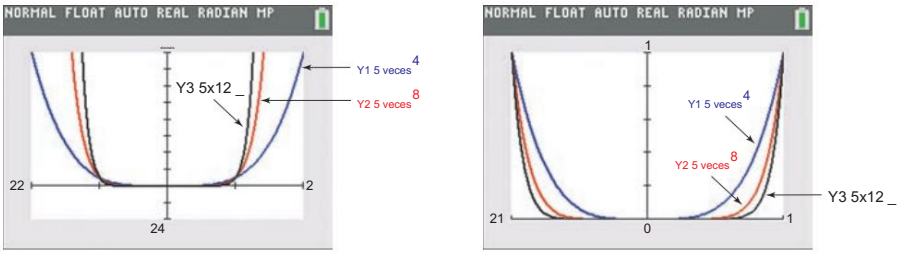


figura 3 (a) (b)

Propiedades de las funciones de potencia, f 1x2 · x n, n es un entero par positivo

- f es una función par, por lo que su gráfica es simétrica con respecto al eje y.
- El dominio es el conjunto de todos los números reales. El rango es el conjunto de no negativos. numeros reales.
- La gráfica siempre contiene los puntos 1 - 1, 12, (0, 0) y (1, 1).
- A medida que el exponente n aumenta en magnitud, la gráfica es más pronunciada cuando x 6 - 1 o x 7 1; pero para x cerca del origen, la gráfica tiende a aplanarse y quedar más cerca del eje x.
- Comportamiento final:
  - Como x S - q, f1x2 = xn S q.
  - Como x S q, f1x2 = xn S q.

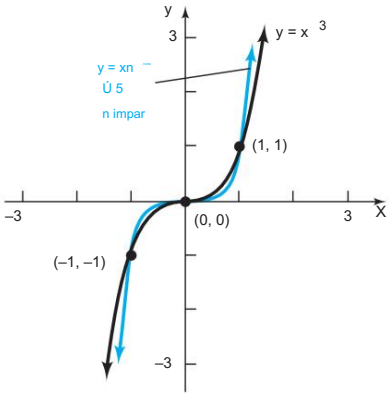


Figura 4

Ahora considere las funciones de potencia f1x2 = xn , n Ú 3, y n impar. El dominio y el rango de f son el conjunto de los números reales. Esta función de potencia es una función impar. (¿Ves por qué?) Su gráfica es simétrica con respecto al origen. La gráfica de una función de potencia f1x2 = xn , n impar, siempre contiene el origen (0, 0) y los puntos 1 - 1, - 12 y (1, 1).

La función de potencia f1x2 = x3 es la función cúbica. Su gráfico se muestra en la Figura 4. Si n Ú 5, la gráfica de f1x2 = xn , n impar, estará más cerca del eje x que el de y = x3 si - 1 6 x 6 1 y más lejos del eje x que el de y = x3 si x 6 - 1 o si x 7 1. Figura 4 ilustra este hecho. La figura 5 muestra las gráficas de y = x5 e y = x9 para una mayor comparación.

Parece que cada gráfico en la Figura 5 coincide con el eje x cerca del origen, pero no es así. En realidad, cada gráfica cruza el eje x en el origen. Además, parece que a medida que x aumenta, las gráficas se vuelven verticales, pero no es así; cada gráfico está aumentando muy rápidamente.

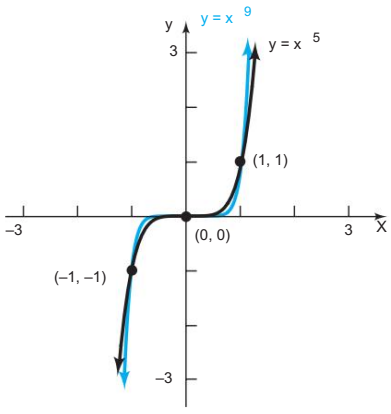


Figura 5

Las figuras 4 y 5 muestran el comportamiento final de la función de potencia f1x2 = xn, n impar. Cuando x se vuelve ilimitada en la dirección negativa, x S - q, la función de potencia se vuelve ilimitada en la dirección negativa, es decir, f1x2 S - q. Pero, cuando x se vuelve ilimitada en la dirección positiva, x S q, la función de potencia se vuelve ilimitada en la dirección positiva, es decir, f1x2 S q.

Ver el concepto

Grafique Y1 = x3, Y2 = x7 e Y3 = x11 usando el rectángulo de visualización -2 … x … 2, -16 … y … 16. Luego, grafique cada uno nuevamente usando el rectángulo de visualización -1 … x … 1, -1 … y … 1. Vea la Figura 6. TRAZA a lo largo de una de las gráficas para confirmar que la gráfica está aumentando y cruza el eje x en el origen.

Machine Translated by Google

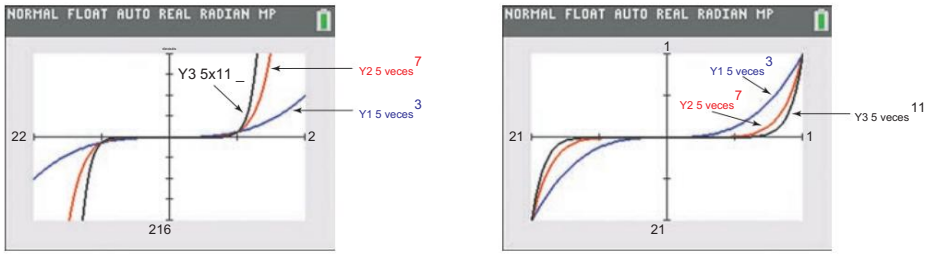


Figura 6 (a) (b)

Para resumir:

Propiedades de las funciones de potencia, f 1x2 · x n, n es un entero impar positivo

- f es una función impar, por lo que su gráfica es simétrica con respecto al origen.
- El dominio y el rango son el conjunto de todos los números reales.
- La gráfica siempre contiene los puntos 1 - 1, - 12, (0, 0) y (1, 1).
- A medida que el exponente n aumenta en magnitud, la gráfica es más pronunciada cuando x 6 - 1 o x 7 1; pero para x cerca del origen, la gráfica tiende a aplanarse y quedar más cerca del eje x.
- Comportamiento final:
  - Como x S - q, f1x2 = xn S - q.
  - Como x S q, f1x2 = xn S q.

2 Graficar funciones polinómicas mediante transformaciones

Los métodos de desplazamiento, compresión, estiramiento y reflexión estudiados en la sección 2.5, cuando se usan con los hechos que acabamos de presentar, nos permiten graficar funciones polinomiales que son transformaciones de funciones de potencia.

EJEMPLO 2 Graficar una función polinómica mediante transformaciones

Gráfica: f1x2 = 1 - x5

Solución

Es útil reescribir f como f1x2 = - x5 + 1. La Figura 7 muestra los pasos requeridos.

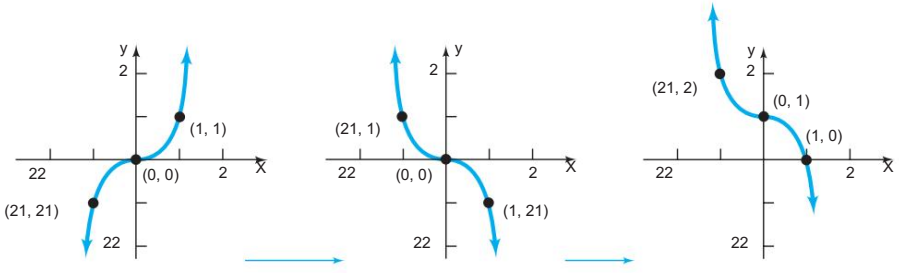


Figura 7 (a) y5x 5 (b) y 5 2x 5 (c) y 5 2x 1 1 5 5f 2x

EJEMPLO 3 Graficar una función polinómica mediante transformaciones

Gráfica: $f(x) = 1x - \frac{1}{2}12^4$

Machine Translated by Google

Solución La Figura 8 muestra los pasos necesarios.

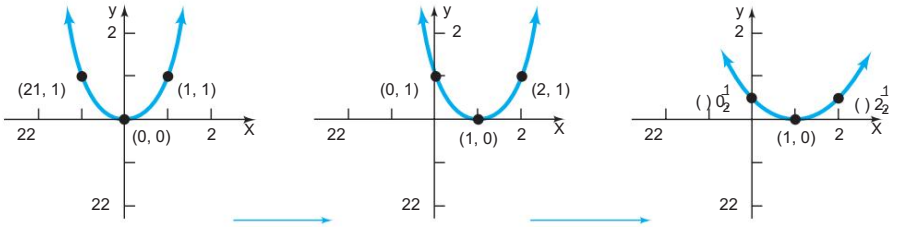


Figura 8 (a) y5x 4 (b) y 5 (x 2 1)4 (c) y 5 (x 2 1/2) 4

Ahora resuelve los problemas 2 7 y 3 3

3 Identificar los ceros reales de una función polinómica y su multiplicidad

La Figura 9 muestra la gráfica de una función polinómica con cuatro intersecciones en el eje x. Observe que en las intersecciones con el eje x, la gráfica debe cruzar el eje x o tocar el eje x. En consecuencia, entre intersecciones x consecutivas la gráfica está por encima del eje x o por debajo del eje x.

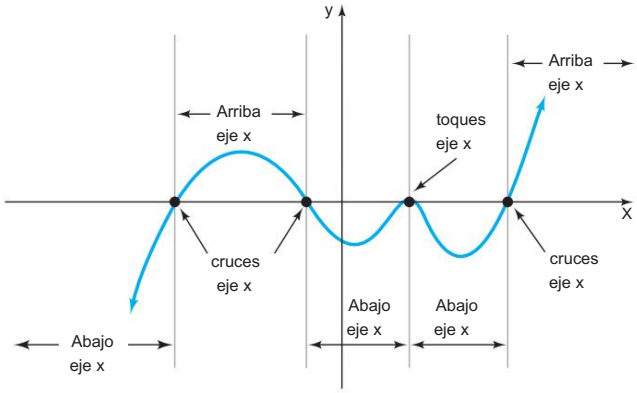


Figura 9 Gráfica de una función polinómica

Si una función polinómica f se factoriza completamente, es fácil localizar las intersecciones con el eje x de la gráfica resolviendo la ecuación f1x2 = 0 usando la propiedad del producto cero. Por ejemplo, si f1x2 = 1x - 12 2 1x + 32, entonces las soluciones de la ecuación

$$f1x2 = 1x - 12 \quad ^{2} 1x + 32 = 0$$

son 1 y - 3. Es decir, f112 = 0 y f1 - 32 = 0.

DEFINICIÓN Cero real

Si f es una función y r es un número real para el cual f1r2 = 0, entonces r se llama cero real de f.

Como consecuencia de esta definición, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- r es un cero real de una función polinómica f.
- r es una intersección con el eje x de la gráfica de f.
- x - r es un factor de f.
- r es una solución real de la ecuación f1x2 = 0.

Entonces, los ceros reales de una función polinómica son las intersecciones en x de su gráfica y se encuentran resolviendo la ecuación f1x2 = 0.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 4 Encontrar una función polinómica a partir de sus ceros reales

(a) Encuentre una función polinómica de grado 3 cuyos ceros reales sean - 3, 2 y 5.

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente el polinomio encontrado en el inciso (a) para verificar su resultado.

Solución

(a) Si r es un cero real de una función polinómica f, entonces x - r es un factor de f. Esto significa que x - 1 - 32 = x + 3, x - 2 y x - 5 son factores de f. Como resultado, cualquier función polinómica de la forma

$$f1x2 = a1x + 32\ 1x - 22\ 1x - 52$$

donde a es un número real distinto de cero, califica. El valor de a provoca un estiramiento, compresión o reflexión, pero no afecta las intersecciones con el eje x de la gráfica. ¿Sabes por qué?

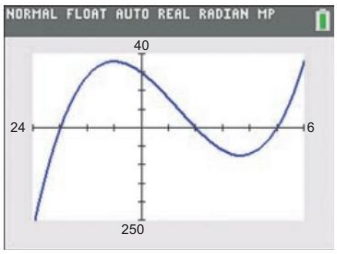


Figura 10
f1x2 = 1x + 32 1x - 22 1x - 52

(b) Elegimos graficar f con a = 1. Entonces

$$f1x2 = 1x + 32\ 1x - 22\ 1x - 52$$

La Figura 10 muestra la gráfica de f. Observe que las intersecciones con el eje x son - 3, 2 y 5.

Ver el concepto

Grafique la función encontrada en el ejemplo 4 para a = 2 y a = -1. ¿El valor de a afecta los ceros reales de f ? ¿ Cómo afecta el valor de a a la gráfica de f ?

Ahora resuelve el problema 4 1

Si, cuando se factoriza f , el factor x - r ocurre más de una vez, r se llama repetido, o cero real múltiple de f. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN Cero Real de Multiplicidad m

Si 1x - r2 m es factor de un polinomio f y 1x - r2 entonces r se llama cero real de multiplicidad m de f.* $^{m+1}$ no es un factor de f,

EJEMPLO 5 Identificar ceros reales y sus multiplicidades

Para el polinomio

$$f1x2 = 5x2\ 1x + 22\ \text{hacha} - 2\ b^{\frac{1}{4}}$$

- 0 es un cero real de multiplicidad 2 porque el exponente del factor x es 2.
- - 2 es un cero real de multiplicidad 1 porque el exponente del factor x + 2 es 1.
- $\frac{1}{2}$ es un cero real de multiplicidad 4 porque el exponente del factor x - $\frac{1}{2}$ es 4.

En palabras
La multiplicidad de un cero real es el número de veces que
ocurre su factor correspondiente.

Ahora resuelve el problema 5 9 (a)

Supongamos que es posible factorizar completamente una función polinómica y, como resultado, localizar todas las intersecciones con el eje x de su gráfica (los ceros reales de la función). Estas intersecciones con el eje x dividen el eje x en intervalos abiertos y, en cada intervalo, la gráfica del polinomio está por encima o por debajo del eje x en todo el intervalo. Veamos un ejemplo.

*Algunos textos utilizan los términos raíz múltiple y raíz de multiplicidad m.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 Graficar una función polinómica usando sus intersecciones en el eje x

Considere la función polinómica: f1x2 = 1x + 12 (a) Encuentre^2 1x - 22

las intersecciones x e y de la gráfica de f.

(b) Utilice las intersecciones con el eje x para encontrar los intervalos en los que la gráfica de f está por encima del eje x y los intervalos en los que la gráfica de f está por debajo del eje x.

(c) Ubique otros puntos en la gráfica y conéctelos con una curva suave y continua.

Solución

(a) La intersección con el eje y es f102 = 10 + 12 ^{2} 10 - 22 = - 2.

Las intersecciones x satisfacen la ecuación

$$f1x2 = 1x + 12 \quad ^2 1x - 22 = 0$$

de donde encontramos

$$1x + 12 \quad ^2 = 0 \text{ o } x - 2 = 0$$

$$x = - 1 \text{ o } \quad x = 2$$

Las intersecciones con el eje x son - 1 y 2.

(b) Las dos intersecciones con el eje x dividen el eje x en tres intervalos:

$$1 - q, - 12 \qquad 1 - 1, 22 \qquad 12, q 2$$

Dado que la gráfica de f cruza o toca el eje x sólo en x = - 1 y x = 2, se deduce que la gráfica de f está por encima del eje x 3 f1x2 7 04 o por debajo del eje x 3 f1x2 6 04 en cada uno de estos tres intervalos. Para ver dónde se encuentra la gráfica, solo necesitamos elegir un número en cada intervalo, evaluar f en el número y ver si el valor es positivo (por encima del eje x) o negativo (por debajo del eje x). Ver Tabla 3.

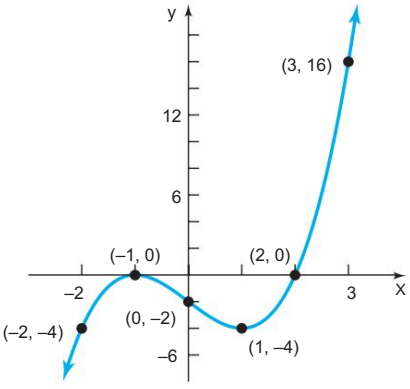
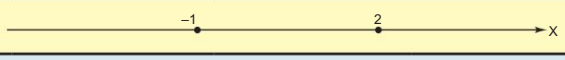


Figura 11 f1x2 = 1x + 12 21x - 22

(c) Al construir la Tabla 3, obtuvimos tres puntos adicionales en la gráfica: 1 - 2, - 42, 11, - 42 y (3, 16). La Figura 11 muestra estos puntos, las intersecciones y una curva suave y continua (la gráfica de f) que los conecta.

Tabla 3

			
Intervalo	1 - q, -12	1-1, 22	12, q 2
Número elegido	-2	1	3
Valor de f	f1 -22 = -4	f112 = -4	f132 = 16
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	1 -2, -42	11, -42	(3, 16)

Mire nuevamente la Tabla 3. Dado que la gráfica de f1x2 = 1x + 12 ^{2} 1x - 22 está debajo del eje x a ambos lados de - 1, la gráfica de f toca el eje x en x = - 1, un cero real de multiplicidad 2. Dado que la gráfica de f está debajo del eje x para x 6 2 y por encima del eje x para x 7 2, la gráfica de f cruza el eje x en x = 2, un cero real de multiplicidad 1.

RESUMEN

Si r es un cero real de multiplicidad par

- Numéricamente: El signo de f(x) no cambia de un lado al otro de r.
- Gráficamente: la gráfica de f toca el eje x en r.

Si r es un cero real de multiplicidad impar

- Numéricamente: El signo de f(x) cambia de un lado al otro de r.
- Gráficamente: la gráfica de f cruza el eje x en r.

Ahora resuelve el problema 5 9 (b)

Machine Translated by Google

¿Necesita revisar?
El máximo y el mínimo locales se analizan en la Sección 2.3, págs. 112 y 113.

Puntos de inflexión

Mire nuevamente la Figura 11. No podemos estar seguros de qué tan bajo llega realmente la gráfica entre x = - 1 y x = 2. Pero sí sabemos que en algún lugar del intervalo1 - 1, 22 la gráfica de f debe cambiar de dirección (de decreciente a creciente). Los puntos en los que la gráfica de una función cambia de dirección se llaman puntos de inflexión.* Cada punto de inflexión da como resultado un máximo local o un mínimo local de f. El siguiente teorema de cálculo nos dice el número máximo de puntos de inflexión que puede tener la gráfica de una función polinómica.

TEOREMA Puntos de inflexión

- Si f es una función polinómica de grado n, entonces la gráfica de f tiene como máximo n - 1 puntos de inflexión.
- Si la gráfica de una función polinómica f tiene n - 1 puntos de inflexión, entonces el grado de f es al menos n.

Según el primer punto del teorema, una función polinómica de grado 5 tendrá como máximo 5 - 1 = 4 puntos de inflexión. Según el segundo punto del teorema, si la gráfica de una función polinómica tiene tres puntos de inflexión, entonces el grado de la función debe ser al menos 4.

Exploración

Se puede utilizar una utilidad gráfica para localizar los puntos de inflexión de un gráfico. Grafica Y1 = 1x + 12 21x - 22. Utilice MÍNIMO para encontrar la ubicación del punto de inflexión para 0... x ... 2. Consulte la Figura 12.

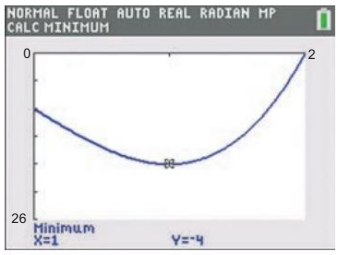


Figura 12 Y1 = 1x + 12 21x - 22

Ahora resuelve el problema 5 9 (c)

EJEMPLO 7 Identificar la gráfica de una función polinómica

¿Qué gráficas de la Figura 13 podrían ser la gráfica de una función polinómica? Para aquellos que puedan, enumere los ceros reales e indique el menor grado que puede tener el polinomio. Para aquellos que no pudieron, digan por qué no.

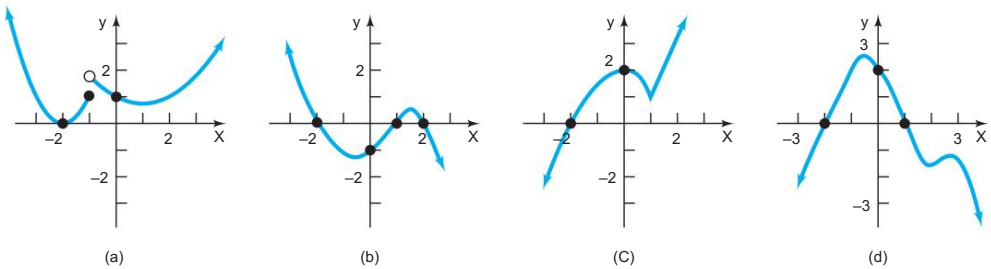


Figura 13

*Se pueden utilizar utilidades de gráficos para aproximar los puntos de inflexión. Para la mayoría de los polinomios, se necesita cálculo para encontrar los puntos de inflexión exactos.

Machine Translated by Google

Solución

(a) La gráfica de la Figura 13(a) no puede ser la gráfica de una función polinómica porque hay un espacio en x = - 1. La gráfica de una función polinómica es siempre continua, sin espacios ni agujeros. (Consulte nuevamente la Figura 1.)

(b) La gráfica de la Figura 13(b) podría ser la gráfica de una función polinómica porque es suave y continua. Tiene tres ceros reales: - 2, 1 y 2. Como la gráfica tiene dos puntos de inflexión, el grado de la función polinómica debe ser al menos 3.

(c) La gráfica de la Figura 13(c) no puede ser la gráfica de una función polinómica porque tiene una esquina en x = 1. La gráfica de una función polinómica es suave.

(d) La gráfica de la Figura 13(d) podría ser la gráfica de una función polinómica. Tiene dos ceros reales: - 2 y 1. Como la gráfica tiene tres puntos de inflexión, el grado de la función polinomial es al menos 4.

Ahora problema de trabajo 7 1

Comportamiento final

Eche un último vistazo a la Figura 11. Para valores grandes de x, ya sean positivos o negativos, gráfica de f1x2 = 1x + 12 2 1x - 22 se parece a la gráfica de y = x3 . Para ver por qué, escribe f en la forma

$$f1x2 = 1x + 12^2 1x - 22 = x3 - 3x - 2 = x3\,a1 - \frac{3}{x2} - \frac{2}{x3b}$$

Para valores grandes de x, ya sean positivos o negativos, los términos $\frac{3}{x2}$ y $\frac{2}{x3}$ son cercanos a 0. Entonces, para valores grandes de x,

$$f1x2 = x3 - 3x - 2 = x3\,a1 - \frac{3}{x2} - \frac{2}{x3}\,b \approx x3$$

En palabras
El comportamiento final de la gráfica de una función polinómica se asemeja al de su término principal.

TEOREMA Comportamiento final de la gráfica de una función polinómica

El comportamiento final de la gráfica de la función polinómica.

$$f1x2 = anxn + an-1xn-1 + g + a1x + a0\ an \cdot 0$$

es la misma que la de la gráfica de la función de potencia

$$y = anxn$$

Por ejemplo, el comportamiento final de la gráfica de la función polinómica.

$$f1x2 = - 2x3 + 5x2 + x - 4$$

es la misma que la de la gráfica de la función potencia y = - 2x3 . Podemos ver que los gráficos "se comportan" de manera similar al considerar la Tabla 4 y la Figura 14.

Tabla 4

x	f(x)	y · ·2x3
10	-1,494	-2.000
100	-1.949.904	-2.000.000
500	-248.749.504	-250.000.000
1.000	-1.994.999.004	-2.000.000.000

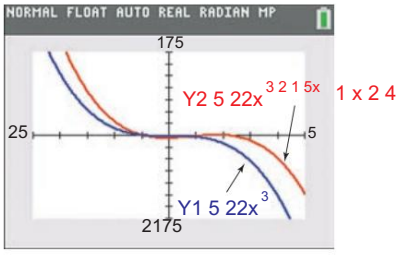
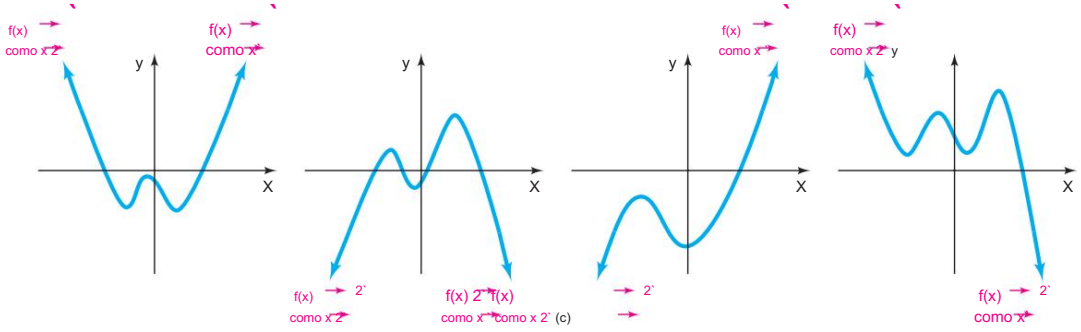


Figura 14

Machine Translated by Google

En cálculo, los límites se utilizan para transmitir la idea de comportamiento final. Allí el simbolismo $\lim_{x \to q} f(x) = -q$, se lee "el límite cuando x se acerca al infinito de f(x) es igual a negativo infinito", significa que $f(x) \to -q$ como $x \to q$.

Vuelva a mirar las Figuras 2 y 4. Según el teorema anterior y la discusión sobre las funciones de potencia, el comportamiento final de una función polinómica sólo puede ser de cuatro tipos. Ver Figura 15.



n ≥ 2 par; un > 0 | n ≥ 2 par; un < 0 | n ≥ 3 impar; un > 0 | n ≥ 3 impar; un < 0

Figura 15 Comportamiento final de $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Ahora resuelve el problema 5 9 (d)

EJEMPLO 8 Identificar la gráfica de una función polinómica

¿Cuál gráfica de la Figura 16 podría ser la gráfica de

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 5x - 6$$

donde a 7 0, b 7 0?

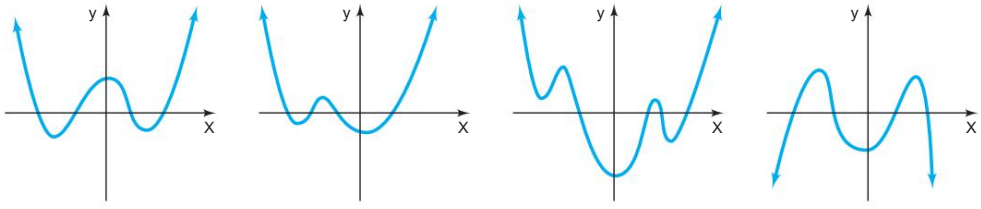


Figura 16

Solución

La intersección con el eje y de f es f102 = - 6. Podemos eliminar la gráfica de la Figura 16(a), cuya intersección con el eje y es positiva.

Ahora nos fijamos en el comportamiento final. Para valores grandes de x, la gráfica de f se comportará como la gráfica de $y = x^4$. Esto elimina la gráfica de la Figura 16(d), cuyo comportamiento final es como la gráfica de $y = -x^4$.

No podemos resolver f1x2 = 0 para encontrar las intersecciones de f en x , por lo que pasamos a investigar los puntos de inflexión de cada gráfica. Como f es de grado 4, la gráfica de f tiene como máximo 3 puntos de inflexión. Eliminamos el gráfico de la Figura 16(c) porque ese gráfico tiene 5 puntos de inflexión.

Sólo la gráfica de la Figura 16(b) podría ser la gráfica de

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 5x - 6$$

donde a 7 0, b 7 0.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 9 Encontrar una función polinómica a partir de una gráfica

Encuentre una función polinómica cuya gráfica se muestra en la Figura 17 (use el grado más pequeño posible).

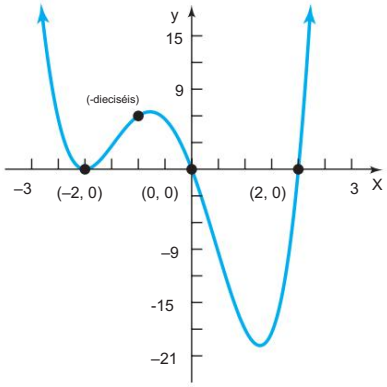


Figura 17

Solución Las intersecciones con el eje x son - 2, 0 y 2. Por lo tanto, el polinomio debe tener los factores 1x + 22, x y 1x - 22, respectivamente. Hay tres puntos de inflexión, por lo que el grado del polinomio debe ser al menos 4. La gráfica toca el eje x en x = - 2, por lo que - 2 tiene una multiplicidad par. La gráfica cruza el eje x en x = 0 y x = 2, por lo que 0 y 2 tienen multiplicidades impares. Usando el menor grado posible (1 para multiplicidad impar y 2 para multiplicidad par), escribimos f1x2 = ax1x + 222 1x - 22

Todo lo que queda es encontrar el coeficiente principal, a. De la Figura 17, el punto 1 - 1, 62 está en la gráfica de f.

6 = a1 - 12 1 - 1 + 222 1 - 1 - 22 f 1 ·12 · 6

6 = 3a

2 = un

La función polinómica f1x2 = 2x1x + 222 1x - 22 tiene la gráfica de la Figura 17.

Verifica: Grafica Y1 = 2x1x + 22 ^{2} 1x - 22 usando una utilidad gráfica para verificar esto resultado.

Ahora resuelva los problemas 7 5 y 7 9

RESUMEN

Gráfica de una función polinómica f 1x2 · an xn · an-1 xn-1 · g · a1x · a0 an 3 0

• El dominio de una función polinómica es el conjunto de todos los números reales. • Grado de la función polinómica f : n • Intersección con el eje y: f102 = a0 • La gráfica es suave y continua. • Número máximo de puntos de inflexión: n - 1 • En un cero real de multiplicidad par: La gráfica de f toca el eje x. • En un cero real de multiplicidad impar: la gráfica de f cruza el eje x. • Entre ceros reales, la gráfica de f está por encima o por debajo del eje x. • Comportamiento final: Para 0 x 0 grande , la gráfica de f se parece a la gráfica de y = anxn .

Machine Translated by Google

4.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Las intersecciones de la gráfica de 9x2 + 4y = 36 son (págs. _____. 48 y 49)
2. ¿Es la expresión 4x3 - 3,6x2 - 12 un polinomio? En ese caso, ¿cual es su grado? (págs. A22–A29)
3. Para graficar y = x2 - 4, desplazarías la gráfica de y = x2 una distancia de unidades. (págs. 134-143)
4. Verdadero o Falso Las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función y = f1x2 son las soluciones reales de la ecuación f1x2 = 0. (págs. 100-103)
5. Elección múltiple La función cúbica f1x2 = x3 es (a) par _____. (b) impar (c) ninguna

   La gráfica de la función cúbica (a) _____. no tiene simetría.
   (b) es simétrica con respecto al eje y
   (c) es simétrica con respecto al origen
   (d) es simétrica con respecto a la recta y = x (págs. 122-126)

Conceptos y vocabulario

6. La gráfica de cada función polinómica es a la vez _____ y _____.
7. Elección múltiple Si r es un cero real de multiplicidad par de una función polinómica f, entonces la gráfica de f _____ el eje x en r. (a) cruza (b) toca
8. Las gráficas de funciones de potencia de la forma f1x2 = xn , donde n es un número entero par, siempre contiene los puntos _____, _____, y _____.
9. Si r es una solución real de la ecuación f1x2 = 0, enumere tres afirmaciones equivalentes con respecto a f y r.
10. Los puntos en los que una gráfica cambia de dirección (de aumentar a disminuir o de disminuir a aumentar) son llamado _____ _____.
11. La gráfica de la función f1x2 = 3x4 - x3 + 5x2 - 2x - 7 se parece a la gráfica de _____ para valores grandes de · x ·.
12. Si f1x2 = - 2x5 + x3 - 5x2 + 7, entonces f1x2 S _____ como x S - q, y f1x2 S _____ como x S q.
13. Opción múltiple Las _____ de un cero real es el número de veces que ocurre su factor correspondiente.
    (a) grado (b) multiplicidad (c) punto de inflexión (d) límite
14. Opción múltiple La gráfica de y = 5x6 - 3x4 + 2x - 9 tiene ¿Cuántos puntos de inflexión como máximo?
    (a) - 9 (b) 14 (c) 6 (d) 5

Desarrollo de habilidades

En los problemas 15 a 26, determine qué funciones son funciones polinómicas. En el caso de que lo sean indicar la titulación. Para aquellos que no lo son, indique por qué no. Escribe cada polinomio en forma estándar. Luego identifica el término principal y el término constante.

15. f1x2 = 4x + x3
16. f1x2 = 5x2 + 4x4
17. h1x2 = 3 - $\frac{1}{2}x$
18. g1x2 = $\frac{2 + 3x2}{5}$
19. f1x2 = 1 - $\frac{1}{x}$
20. f1x2 = x1x - 12
21. h1x2 = 1x1 1x - 12
22. g1x2 = x2/3 - x1/3 + 2
23. F1x2 = x3 $\frac{x2 - 5}{}$
24. F1x2 = 5x4 - px3 + $\frac{1}{2}$
25. G1x2 = - 3x2 1x + 22 3
26. G1x2 = 21x - 12 2 1x2 + 12

En los problemas 27 a 40, utilice transformaciones de la gráfica de y = x4 o y = x5 para representar gráficamente cada función.

27. f1x2 = 1x + 12 4
28. f1x2 = 1x - 22 5
29. f1x2 = x4 + 2
30. f1x2 = x5 - 3
31. f1x2 = 3x5
32. f1x2 = $\frac{1}{2}$x4
33. f1x2 = -x5
34. f1x2 = -x4
35. f1x2 = 1x + 22 4 - 3
36. f1x2 = 1x - 12 5 + 2
37. f1x2 = $\frac{1}{2}$1x - 12 5 - 2
38. f1x2 = 21x + 12 4 + 1
39. f1x2 = 3 - 1x + 22 4
40. f1x2 = 4 - 1x - 22 5

Machine Translated by Google

En los problemas 41 a 48, encuentre una función polinómica cuyos ceros reales y grado estén dados. Las respuestas variarán según la elección del coeficiente principal.

41. Ceros: - 1, 1, 3; grado 3 42. Ceros: - 2, 2, 3; grado 3 44. Ceros: - 5, 0, 6; grado 3 45. Ceros: - 3, - 1, 2, 5; grado 4 47. Ceros: - 2, multiplicidad 2; 4, multiplicidad 1; grado 3

43. Ceros: - 4, 0, 2; grado 3

46. Ceros: - 5, - 2, 3, 5; grado 4

48. Ceros: - 1, multiplicidad 1; 3, multiplicidad 2; grado 3

En los problemas 49 a 58, encuentre una función polinómica con los ceros reales dados cuya gráfica contenga el punto dado.

49. Ceros: - 2, 0, 2
Grado 3
Punto: 1 - 4, 162

50. Ceros: - 2, 3, 5
Grado 3
Punto: (2, 36)

51. Ceros: - 5, - 1, 2, 6
Grado 4
Punto: ¢ 2, 15≤

52. Ceros: - 2, 0, 1, 3
Grado 4
Punto: ¢ - 1/2, - 63≤

53. Ceros: - 4, - 1, 2
Grado 3
intercepción y: 16

54. Ceros: - 3, 1, 4
Grado 3
intercepto en y: 36

55. Ceros: 0 (multiplicidad 1), - 1 (multiplicidad 2), 3 (multiplicidad 2)
Grado 5
Punto: 11, - 482

56. Ceros: - 1 (multiplicidad 2), 1 (multiplicidad 2)
Grado 4
Punto: 1 - 2, 452

57. Ceros: - 4 (multiplicidad 1), 0 (multiplicidad 3), 2 (multiplicidad 1); grado 5; contiene el punto 1 - 2, 642

58. Ceros: - 5 (multiplicidad 2), 2 (multiplicidad 1), 4 (multiplicidad 1); grado 4; contiene el punto (3, 128)

En los problemas 59 a 70, para cada función polinómica:

(a) Enumere cada cero real y su multiplicidad.
(b) Determine si la gráfica cruza o toca el eje x en cada intersección con el eje x.
(c) Determine el número máximo de puntos de inflexión en la gráfica.
(d) Determinar el comportamiento final; es decir, encuentre la función de potencia a la que se asemeja la gráfica de f para valores grandes de · x ·.

59. f1x2 = 31x - 72 1x + 32 2

60. f1x2 = 41x + 42 1x + 32 3

61. f1x2 = 21x - 32 1x2 + 42 3

62. f1x2 = 71x2 + 42 2 1x - 52 3

63. f1x2 = hacha - 3 1/b 2 1x - 12 3

64. f1x2 = - 2ax + 1/2 segundo 2 1x + 42 3

65. f1x2 = 1x + 132 2 1x - 22 4

66. f1x2 = 1x - 52 3 1x + 42 2

67. f1x2 = - 21x2 + 32 3

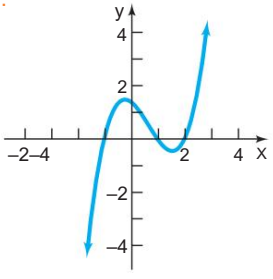
68. f1x2 = 1/2 12x2 + 92 2 1x2 + 72

69. f1x2 = 4x1x2 - 32

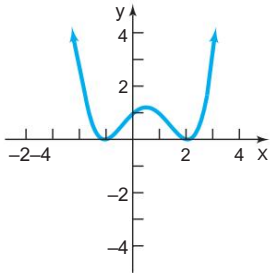
70. f1x2 = - 2x2 1x2 - 22

En los problemas 71 a 74, identifica cuál de las gráficas podría ser la gráfica de una función polinómica. Para aquellos que puedan, enumere los ceros reales e indique el menor grado que puede tener el polinomio. Para aquellos que no pudieron, digan por qué no.

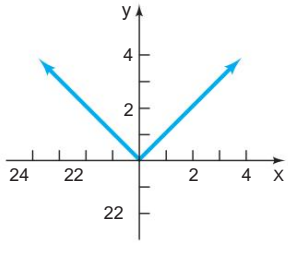
71.



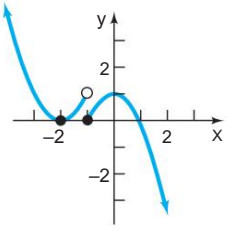
72.



73.

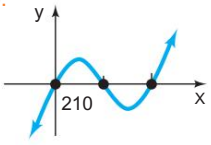


74.

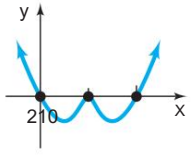


En los problemas 75 a 78, encuentre una función polinómica que pueda tener la gráfica dada. (Es posible más de una respuesta.)

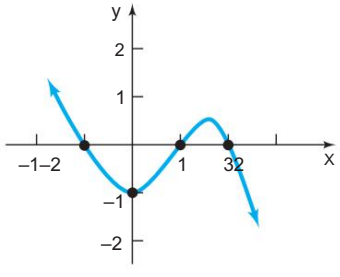
75.



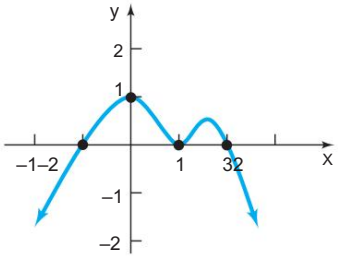
76.



77.



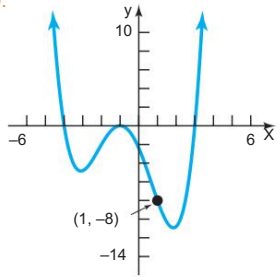
78.



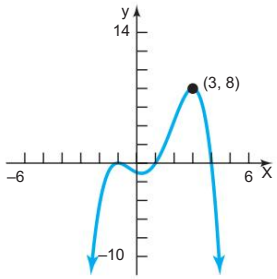
Machine Translated by Google

En los problemas 79 a 82, escriba una función polinómica cuya gráfica se muestra (use el grado más pequeño posible).

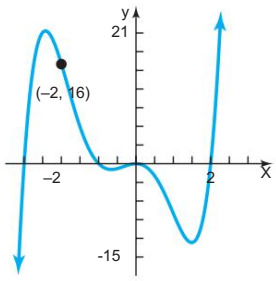
79.



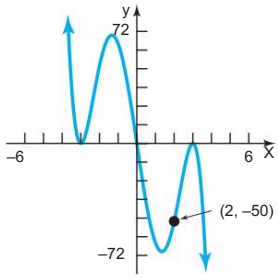
80.



81.



82.



83. Práctica Mixta $h(x) = (x + 2)^2 (x - 4)^3$

(a) Identifique las intersecciones con el eje x de la gráfica de h.

(b) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = h(x - 2)$?

84. Práctica mixta $G(x) = (x + 3)^2 (a)(x - 2)$

Identifique las intersecciones con el eje x de la gráfica de G.

(b) ¿Cuáles son las intersecciones x de la gráfica? de $y = G(x + 3)$?

85. Problema de desafío Determine la función de potencia que se parece al comportamiento final de

$$g(x) = -(4x^2 - 1)^4 (5x^2 - 1)^2 (2x - 3)^3 a\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^b$$

86. Problema de desafío Encuentra los ceros reales de

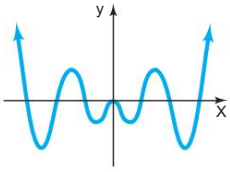
$$f(x) = (3x^2 - 1)^2 (x^2 + 4x + 3)^2$$

y su multiplicidad.

Explicar conceptos: discusión y escritura

87. ¿Puede la gráfica de una función polinómica no tener intersección con el eje y? ¿No puede tener intersecciones con el eje x? Explicar.

88. La ilustración muestra la gráfica de una función polinómica.



(a) ¿El grado del polinomio es par o impar?

(b) ¿El coeficiente principal es positivo o negativo?

(c) ¿La función es par, impar o ninguna de las dos?

(d) ¿Por qué x^2 es necesariamente un factor del polinomio?

(e) ¿Cuál es el grado mínimo del polinomio?

(f) Formule cinco polinomios diferentes cuyas gráficas podrían parecerse a la que se muestra. Compara los tuyos con los de otros estudiantes. ¿Qué similitudes ves? ¿Qué diferencias?

89. ¿ Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas con respecto a la gráfica de la función polinómica $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$? (Razone sus conclusiones.)

(a) Interseca al eje y en un solo punto.

(b) Interseca al eje x en como máximo tres puntos.

(c) Intersecta al eje x al menos una vez.

(d) Para $|x|$ muy grande, se comporta como la gráfica de $y = x^3$.

(e) Es simétrico con respecto al origen.

(f) Pasa por el origen.

90. La gráfica de una función polinómica siempre es suave y continua. Nombra una función estudiada anteriormente que sea suave pero no continua. Nombra uno que sea continuo pero no suave.

91. Construya dos funciones polinómicas, que no sean del mismo grado, con las siguientes características: cruza el eje x en - 2, toca el eje x en 1 y está por encima del eje x entre - 2 y 1. Entrega tus polinomios a un compañero de clase y pídele una crítica por escrito.

92. Inventa una función polinómica que tenga las siguientes características: cruza el eje x en - 1 y 4, toca el eje x en 0 y 2, y está por encima del eje x entre 0 y 2. Dale tu polinomio a un compañero de clase y pedirle una crítica escrita.

93. Escribe algunos párrafos que proporcionen una estrategia general para graficar una función polinómica. Asegúrese de mencionar lo siguiente: grado, intersecciones, comportamiento final y puntos de inflexión.

94. Diseñe una función polinómica con las siguientes características: grado 6; cuatro ceros reales distintos, uno de multiplicidad 3; intercepción y 3; se comporta como $y = -5x^6$ para valores grandes de $|x|$. ¿Es este polinomio único? Compara tu polinomio con el de otros estudiantes. ¿Qué términos serán los mismos que los de todos los demás? Añade algunas características más, como la simetría o nombrar los ceros reales. ¿Cómo modifica esto el polinomio?

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 95 a 104 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

95. Encuentra una ecuación de la recta que contiene el punto 12, - 32 y es perpendicular a la recta 5x - 2y = 6.

96. Encuentra el dominio de la función $h(x) = x + 5\sqrt{\frac{x - 3}{\quad}}$.

97. Usa la fórmula cuadrática para encontrar los ceros reales de la función f1x2 = 4x2 + 8x - 3.

98. Resuelve: · 5x - 3· = 7

99. Determina si la función f1x2 = - 3x + 2 es creciente, decreciente o constante.

100. Encuentra la función que finalmente se grafica si la gráfica de f1x2 = x2 se desplaza 2 unidades hacia la izquierda y 5 unidades hacia arriba.

101. La función f1x2 = 2x3 - 3x2 + 4 es creciente donde su derivada f' 1x2 = 6x2 - 6x 7 0. ¿Dónde está f? ¿creciente?

1 102. Encuentra el cociente de diferencias de f1x2 = - x + 2. 3

103. El punto medio de un segmento de línea es 13, - 52 y un punto final es 1 - 2, 42. Encuentra el otro punto final.

104. Calcula el cociente y el resto si 4x3 - 7x2 + 5 se divide por x2 - 1.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 1 - 2, 02, 12, 02, 10, 92 2. Sí; 3 3. Abajo; 4 4. Verdadero 5. b; C

4.2 Graficar funciones polinomiales; Modelos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente: • Máximos y mínimos locales (Sección 2.3, págs. 112 y 113) • Uso de una utilidad gráfica para aproximar máximos y mínimos locales (Sección 2.3, pág. 115) • Intersecciones (Sección 1.2, págs. 48–49) • Construir modelos cuadráticos a partir de datos (Sección 3.4, págs. 196–197) • Polinomios (Sección A.3, págs. A22–A29)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 231.

OBJETIVOS 1 Graficar una función polinómica (p. 226)

2 Graficar una función polinómica usando una utilidad gráfica (p. 228)

3 Construya modelos cúbicos a partir de datos (p. 230)

1 Graficar una función polinómica

EJEMPLO 1 **Graficar una función polinómica**

Grafique la función polinómica $f(x) = 12x + 12\,1x - 32^{\,2}$.

Solución paso-a-paso

Paso 1 Determina el comportamiento final de la gráfica de la función.

Expande el polinomio:

$$f(x) = 12x + 12\,1x - 32^{\,2} =$$

$$12x + 12\,1x^2 - 6x + 92 = \quad \text{Multiplica } 1x \cdot 32\,2.$$

$$2x^3 - 12x^2 + 18x + x^2 - 6x + 9 \quad \text{Multiplicar.}$$

$$= 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 \quad \text{Combina términos semejantes.}$$

La función polinómica f es de grado 3. La gráfica de f se parece a la gráfica de y = 2x3 para valores grandes de · x·.

Machine Translated by Google

Paso 2 Encuentra las intersecciones x e y de la gráfica de la función.

La intersección con el eje y es f102 = 9. Para encontrar las intersecciones con el eje x, resuelve f1x2 = 0.

$$f(x) = 0$$

$$12x + 12(x - 3)^2 = 0$$

$$2x + 1 = 0 \text{ o } (x - 3)^2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ o } x = 3$$

Las intersecciones en x son $-\frac{1}{2}$ y 3.

Paso 3 Determina los ceros reales de la función y su multiplicidad. Utilice esta información para determinar si la gráfica cruza o toca el eje x en cada intersección con el eje x.

Los ceros reales de f son $-\frac{1}{2}$ y 3. El cero $-\frac{1}{2}$ es un cero real de multiplicidad 1, por lo que la gráfica de f cruza el eje x en $x = -\frac{1}{2}$. El cero 3 es un cero real de multiplicidad 2, entonces la gráfica de f toca el eje x en x = 3.

Paso 4 Determina el número máximo de puntos de inflexión en la gráfica de la función.

Debido a que la función polinómica es de grado 3 (Paso 1), la gráfica de la función tiene como máximo 3 - 1 = 2 puntos de inflexión.

Paso 5 Reúna toda la información de los pasos 1 al 4 para obtener la gráfica de f. Para ayudar a establecer la escala del eje y, encuentre puntos adicionales en la gráfica a cada lado de cualquier intersección con el eje x.

La Figura 18(a) ilustra la información obtenida de los Pasos 1 a 4. Evaluamos f en - 1, 1 y 4 para ayudar a establecer la escala en el eje y.

Encontramos que f1 - 12 = - 16, f112 = 12 y f142 = 9, por lo que trazamos el puntos 1 - 1, - 162, (1, 12) y (4, 9). La gráfica de f se muestra en la Figura 18(b).

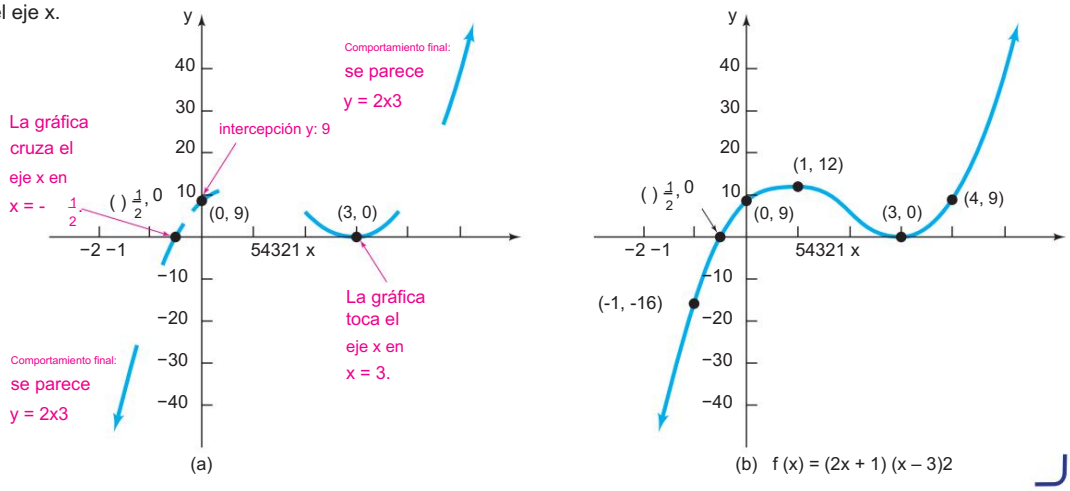


Figura 18

RESUMEN

Pasos para graficar una función polinómica

Paso 1: Determinar el comportamiento final de la gráfica de la función.

Paso 2: Encuentra las intersecciones x e y de la gráfica de la función.

Paso 3: Determina los ceros reales de la función y su multiplicidad. Utilice esta información para determinar si la gráfica cruza o toca el eje x en cada intersección con el eje x.

Paso 4: Determina el número máximo de puntos de inflexión en la gráfica de la función.

Paso 5: Utilice la información de los Pasos 1 al 4 para dibujar una gráfica completa de la función. Para ayudar a establecer la escala del eje y, encuentre puntos adicionales en la gráfica a cada lado de cualquier intersección con el eje x.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Graficar una función polinómica

Grafica la función polinómica f1x2 = 1x - 22 1x + 32 Paso 1: f1x2 = ^{2} 1x -52.

Solución

1x2 - 7x + 102 1x + 32 = 1x2 - 7x + 102 1x2 + 6x + ^{2} Multiplica 1x · 22 1x · 52.

92 Multiplica 1x · 32 2.

= x4 - x3 - 23x2 - 3x + 90 Multiplicar.

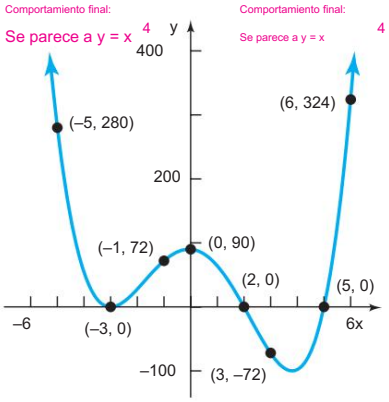


Figura 19
f1x2 = 1x - 22 1x + 32 ^{2} 1x - 52

La función polinómica es de grado 4. La gráfica de f se comporta como y = x4 para valores grandes de · x· . Entonces, f1x2 S q cuando x S - q y como x S q.

Paso 2: La intersección con el eje y es f102 = 90. Las intersecciones con el eje x se encuentran resolviendo f1x2 = 0. Usando la propiedad del producto cero, resuelve 1x - 22 = 0, 1x + 32 = 0 y 1x - 52 = 0. Las intersecciones con el eje x son 2, - 3 y 5.

Paso 3: Los ceros reales de la función son 2, - 3 y 5. Los ceros 2 y 5 tienen cada uno multiplicidad 1, por lo que la gráfica de f cruza el eje x en 2 y 5. El cero - 3 tiene multiplicidad 2, por lo que la gráfica de f toca el eje x en -3.

Paso 4: La gráfica de f tiene como máximo n - 1 = 4 - 1 = 3 puntos de inflexión.

Paso 5: Para ayudar a establecer la escala y, evalúe f en - 5, - 1, 3 y 6.

f1 - 52 = 280 f1 - 12 = 72 f132 = - 72 f162 = 324

Traza los puntos adicionales 1 - 5, 2802, 1 - 1, 722, 13, - 722 y (6, 324). Luego conecte los puntos con una curva suave como se muestra en la Figura 19.

Ahora resuelve el problema 5

2 Graficar una función polinómica usando una utilidad gráfica

Para funciones polinomiales que tienen coeficientes no enteros y para polinomios que no se factorizan fácilmente, utilizamos una utilidad gráfica al principio del análisis. Esto se debe a que la información que se puede obtener del análisis algebraico es limitada.

EJEMPLO 3 Graficar una función polinómica usando una utilidad gráfica

Analizar la gráfica de la función polinómica.

f1x2 = x3 + 2,48x2 - 4,3155x + 2,484406

Solución paso-a-paso

Paso 1 Determina el comportamiento final de la gráfica de la función.

La función polinómica f es de grado 3. La gráfica de f se comporta como y = x3 para valores grandes de · x·.

Paso 2 Grafica la función usando una utilidad gráfica.

Consulte la Figura 20 para ver el gráfico de f usando una TI-84 Plus C.

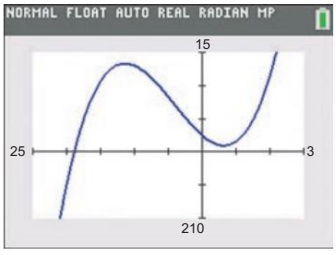


Figura 20 Y1 = x3 + 2,48x2 - 4,3155x + 2,484406

Machine Translated by Google

Paso 3 Utilice la utilidad de gráficos para aproximar las intersecciones x e y del gráfico.

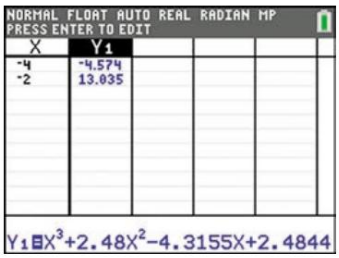
La intersección con el eje y es f102 = 2,484406.

Dado que no es evidente cómo factorizar f, utilice la función CERO (o RAÍZ o RESOLVER) de una utilidad gráfica y determine que la intersección con el eje x es - 3,79, redondeada a dos decimales.

Paso 4 Utilice la utilidad de gráficos para crear una TABLA para encontrar puntos en el gráfico alrededor de cada intersección con el eje x.

La Tabla 5 a continuación muestra los valores de x a cada lado de la intersección con el eje x usando una TI-84 Plus C. Los puntos 1 - 4, - 4,572 y 1 - 2, 13,042, redondeados a dos decimales, están en el gráfico.

Tabla 5



Paso 5 Aproxima los puntos de inflexión del gráfico.

En la gráfica de f que se muestra en la Figura 20, vemos que f tiene dos puntos de inflexión. El uso de MAXIMUM revela que un punto de inflexión está en 1 - 2,28, 13,362, redondeado a dos decimales. El uso de MÍNIMO muestra que el otro punto de inflexión está en (0,63, 1), redondeado a dos decimales.

Paso 6 Usa la información de los pasos 1 a 5 para dibujar a mano una gráfica completa de la función.

La Figura 21 muestra una gráfica de f dibujada a mano usando la información de los Pasos 1 a 5.

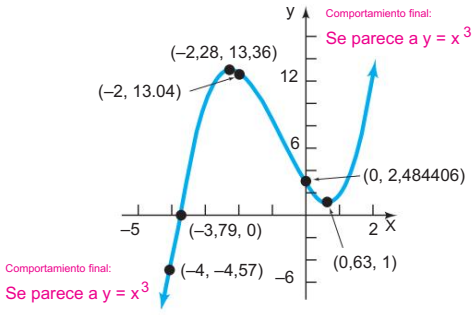


Figura 21

---

rango del **Paso 7** En la gráfica, encuentra el de la función polinómica.

El rango de f es el conjunto de todos los números reales.

Paso 8 Usa la gráfica para determinar dónde aumenta y dónde disminuye la función.

Según el gráfico, f aumenta en los intervalos 1 - q, - 2,284 y 30,63, q 2.
Además, f disminuye en el intervalo 3 - 2,28, 0,634.

RESUMEN

Pasos para utilizar una utilidad gráfica para analizar la gráfica de una función polinómica

Paso 1: Determinar el comportamiento final de la gráfica de la función.

Paso 2: Grafica la función usando una utilidad gráfica.

Paso 3: Utilice la utilidad de gráficos para aproximar las intersecciones x e y del gráfico.

Paso 4: Utilice la utilidad de gráficos para crear una TABLA para encontrar puntos en el gráfico alrededor de cada intersección con el eje x.

Paso 5: Aproxima los puntos de inflexión del gráfico.

Paso 6: Utilice la información de los Pasos 1 al 5 para dibujar a mano una gráfica completa de la función.

Paso 7: En la gráfica, encuentra el rango de la función polinómica.

Paso 8: Utilice la gráfica para determinar dónde aumenta y dónde disminuye la función.

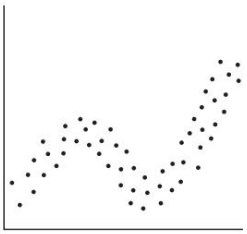
Ahora resuelve el problema 2 3

Machine Translated by Google

3 Construya modelos cúbicos a partir de datos

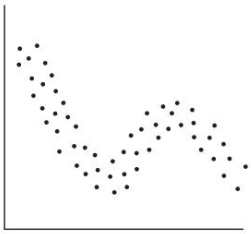
En la Sección 3.2 encontramos la línea de mejor ajuste a partir de los datos y en la Sección 3.4 encontramos la función cuadrática de mejor ajuste. También es posible encontrar otras funciones polinomiales de mejor ajuste. Sin embargo, la mayoría de los estadísticos no recomiendan encontrar polinomios de mejor ajuste de grado superior a 3.

Los datos que siguen una relación cúbica deberían verse como en la Figura 22(a) o (b).



y 5 ax3 1 bx2 1 cx 1 d, a . 0

(a)



y 5 ax3 1 bx2 1 cx 1 d, a , 0

(b)

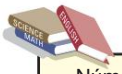
Figura 22 Relación cúbica

EJEMPLO 4

Una función cúbica de mejor ajuste

Los datos de la Tabla 6 representan el costo semanal C (en miles de dólares) de imprimir x mil libros de texto.

Tabla 6



Número de Libros de texto, x (miles)	Costo, C ($1000)
0	100
5	128.1
10	144
13	153,5
17	161.2
18	162,6
20	166,3
23	178,9
25	190.2
27	221,8

(a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos usando x como variable independiente y C como variable dependiente. Comente el tipo de relación que puede existir entre las dos variables x y C.

(b) Usando una herramienta gráfica, encuentre la función cúbica de mejor ajuste C = C1x2 que modela la relación entre el número de libros de texto y el costo.

(c) Grafique la función cúbica de mejor ajuste en su diagrama de dispersión.

(d) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para predecir el costo de imprimir 22 mil libros de texto por semana.

Solución

(a) La Figura 23 muestra el diagrama de dispersión. Puede existir una relación cúbica entre los dos variables.

(b) Al ejecutar el programa CUBIC REGresion en una TI-84 Plus C, obtenemos los resultados que se muestran en la Figura 24. El resultado muestra la ecuación y = ax3 + bx2 + cx + d. La función cúbica que mejor se ajusta a los datos es C1x2 = 0,0155x3 - 0,5951x2 + 9,1502x + 98,4327.

(c) La Figura 25 muestra el gráfico de la función cúbica de mejor ajuste en el diagrama de dispersión en una TI-84 Plus C, y la Figura 26 muestra el resultado usando Desmos.

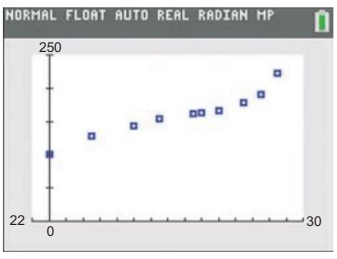


Figura 23

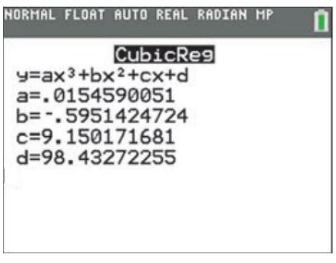


Figura 24

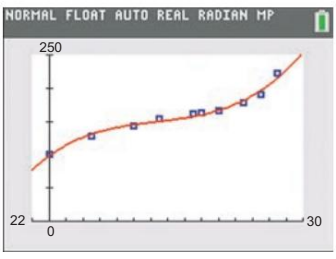


Figura 25

Machine Translated by Google

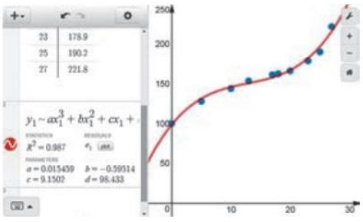


Figura 26

(d) Evalúe la función C(x) en x = 22.

C1222 = 0,0155 # 223 - 0,5951 # 222 + 9,1502 # 22 + 98,4327 ≈ 176,8

El modelo predice que el costo de imprimir 22 mil libros de texto en una semana será de 176,8 mil dólares, es decir, 176 800 dólares.

Ahora resuelve el problema 4 3

4.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. ¿Cuáles son las intersecciones de y = 5x + 10? (págs. 48 y 49)

2. Determina el término principal de 3 + 2x - 7x3 . (pág. A23)

3. Utilice una herramienta gráfica para aproximar (redondeado a dos decimales) cualquier valor máximo local y valor mínimo local de f1x2 = x3 - 2x2 - 4x + 5, para - 3 … x … 3. (p. 115)

4. Utilice una utilidad gráfica para encontrar la función cuadrática del mejor se ajusta a los datos siguientes. (págs. 196 y 197)

x	2	2.5	3	3.5	4
y	3.08	3.42	3.65	3,82	3.6

Desarrollo de habilidades

En los problemas 5 a 22, grafique cada función polinómica siguiendo los pasos 1 a 5 de la página 227.

5. f1x2 = x2 1x - 32

6. f1x2 = x1x + 22 1 ^{2}

7. f1x2 = 1x - 12 1x + 32 ^{2}

8. f1x2 = 1x + 42 ^{2} 11- x2

9. f1x2 = - 2 ^{3} 1x + 42 1x - 12

10. f1x2 = - 21x + 22 1x - 22 ^{3}

11. f1x2 = 1x - 12 1x + 42 1x - 32

12. f1x2 = 1x + 12 1x - 22 1x + 42

13. f1x2 = 13 - x2 12 + x2 1x + 12

14. f1x2 = x11 - x2 12 - x2

15. f1x2 = 1x - 42 ^{2} 1x + 22 ^{2}

16. f1x2 = 1x + 12 ^{2} 1x - 22 ^{2}

17. f1x2 = 1x + 12 ^{3} 1x - 32

18. f1x2 = - 21x - 12 2 1x2 - 162

19. f1x2 = 1x - 22 ^{2} 1x + 22 1x + 42

20. f1x2 = 5x1x2 - 42 1x + 32

21. f1x2 = x2 1x2 + 12 1x + 42

22. f1x2 = x2 1x - 22 1x2 + 32

En los problemas 23 a 30, utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente cada función polinómica f. Siga los pasos del 1 al 8 en la página 229.

23. f1x2 = x3 + 0,2x2 - 1,5876x - 0,31752

24. f1x2 = x3 - 0,8x2 - 4,6656x + 3,73248

25. f1x2 = x3 - 2,91x2 - 7,668x - 3,8151

26. f1x2 = x3 + 2,56x2 - 3,31x + 0,89

27. f1x2 = x4 - 18,5x2 + 50,2619

28. f1x2 = x4 - 2,5x2 + 0,5625

29. f1x2 = - 1,2x4 + 0,5x2 - 13x + 2

30. f1x2 = 2x4 - px3 + 15x - 4

En los problemas 31 a 42, grafique cada función polinómica f siguiendo los pasos 1 a 5 de la página 227.

31. f1x2 = x - x3

32. f1x2 = 4x - x3

33. f1x2 = x3 + 2x2 - 8x

34. f1x2 = x3 + x2 - 12x

35. f1x2 = 4x3 + 10x2 - 4x - 10

36. f1x2 = 2x4 + 12x3 - 8x2 - 48x

37. f1x2 = - x5 + 5x4 + 4x3 - 20x2

38. f1x2 = - x5 - x4 + x3 + x2

39. f1x2 = 3x6 + 6x5 - 12x4 - 24x3

40. f1x2 = 15x5 + 80x4 + 80x3

41. f1x2 = $\frac{3}{2}$x3 - x2 - $\frac{15}{4}$6x + 15

42. f1x2 = $\frac{1}{5}$x3 - x2 - $\frac{4}{5}$5x + 20

Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

43. Huracanes En 2012, el huracán Sandy azotó la costa este de los Estados Unidos, matando a 147 personas y causando daños estimados en 75 mil millones de dólares. Con un diámetro de aproximadamente 1.000 millas, fue el vendaval más grande que jamás se haya formado sobre la cuenca del Atlántico. Los datos adjuntos representan el número de huracanes importantes en la cuenca del Atlántico (categoría 3, 4 o 5) cada década desde 1921 hasta 2010.

Década, x	Grandes huracanes golpean Cuenca Atlántica, H
1921-1930, 1	17
1931-1940, 2	diecisiete
1941-1950, 3	29
1951-1960, 4	33
1961-1970, 5	27
1971–1980, 6	diecisiete
1981–1990, 7	diecisiete
1991-2000, 8	27
2001–2010, 9	33

Fuente: Nacional Oceánico y Atmosférico Administración

(a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que puede existir entre las dos variables.

(b) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función cúbica de mejor ajuste que modele la relación entre década y número de huracanes importantes.

(c) Utilice el modelo encontrado en el inciso (b) para predecir el número de huracanes importantes que azotaron la cuenca del Atlántico entre 1961 y 1970.

(d) Con una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y luego grafique la función cúbica de mejor ajuste en el diagrama de dispersión.

(e) Ha aumentado la preocupación por el aumento en el número y la intensidad de los huracanes, pero algunos científicos creen que se trata simplemente de una fluctuación natural que podría durar una década o dos más. Utilice su modelo para predecir la cantidad de huracanes importantes que azotarán la cuenca del Atlántico entre 2011 y 2020. ¿Es razonable su resultado? ¿Qué sugiere este resultado sobre la confiabilidad del uso de un modelo para predecir un evento fuera del dominio de los datos?

44. Tasas de pobreza Los datos (arriba, derecha) representan el porcentaje de familias con niños en los Estados Unidos cuyos ingresos está por debajo del nivel de pobreza.

Año, t	Porcentaje inferior Nivel de pobreza, pág.	Año, t	Porcentaje inferior Nivel de pobreza, pág.
2004, 1	14.8	2010, 7	18.5
2005, 2	14.5	2011, 8	18.5
2006, 3	14.6	2012, 9	18.4
2007, 4	15.0	2013, 10	18.1
2008, 5	15.7	2014, 11	17.6
2009, 6	17.1	2015, 12	16.3

Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

(a) Con una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que parece existir entre las dos variables.

(b) Decida cuál es la función que mejor se ajusta a estos datos (lineal, cuadrática o cúbica) y utilice esta función para predecir el porcentaje de familias estadounidenses con niños que estaban por debajo del nivel de pobreza en 2016 1t = 132. Compare su predicción al valor real de 15,0.

(c) Dibuje la función de mejor ajuste en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso (a).

45. Temperatura Los siguientes datos representan la temperatura T (°Fahrenheit) en Kansas City, Missouri, x horas después de la medianoche del 18 de marzo de 2018.

Horas después de la medianoche, x	Temperatura (°F), T
3	42.1
6	41.3
9	41.0
12	43.1
15	48,9
18	50.0
21	45.0
24	44.1

Fuente: The Weather Underground

(a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que puede existir entre las dos variables.

(b) Encuentre la tasa promedio de cambio de temperatura desde De 9 a 12 horas.

(c) ¿Cuál es la tasa promedio de cambio de temperatura desde ¿De 15 a 21 horas?

(d) Decida cuál es la función que mejor se ajusta a estos datos (lineal, cuadrática o cúbica) y utilice esta función para predecir la temperatura a las 5 pm.

(e) Con una utilidad gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos y luego grafique la función de mejor ajuste en el diagrama de dispersión.

(f) Interprete la intersección con el eje y.

46. Valor futuro del dinero Suponga que realiza depósitos de £4 000 al comienzo de cada año en su cuenta de jubilación, lo que genera un interés r (expresado como decimal). Al comienzo del primer año, el valor de la cuenta será de £4000; al inicio del segundo año, el valor de la cuenta será

$$£4000 + £4000r + £4000 = £4000r + £8000$$

(a) Verifique que el valor de la cuenta al comienzo del tercer año sea T(r) = £4000r2 + £12000r + £12000.

(b) El valor de la cuenta al comienzo del cuarto año es F(r) = £4000r3 + £16000r2 + £24000r + £16000.
Si la tasa de interés anual es 5, = 0,05, ¿cuál será el valor de la cuenta al comienzo del cuarto año?

Machine Translated by Google

47. Problema de desafío Una serie geométrica En cálculo, aprenderás que ciertas funciones se pueden aproximar mediante funciones polinómicas. Exploraremos una de esas funciones ahora.

(a) Utilizando una herramienta gráfica, cree una tabla de valores con

$$Y1 = f1x2 = \frac{1}{1- x} \quad y$$

Y2 = g2 1x2 = 1 + x + x2 + x3

para - 1 6 x 6 1 y ΔTbl = 0,1.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, cree una tabla de valores con

$$Y1 = f1x2 = \frac{1}{1- x} \quad y$$

Y2 = g3 1x2 = 1 + x + x2 + x3 + x4

para - 1 6 x 6 1 y ΔTbl = 0,1.

(c) Utilizando una herramienta gráfica, cree una tabla de valores con

$$Y1 = f1x2 = \frac{1}{x} \quad y\ 1-$$

Y2 = g4 1x2 = 1 + x + x2 + x3 + x4 + x5

para - 1 6 x 6 1 y ΔTbl = 0,1.

(d) ¿Qué notas acerca de los valores de la función a medida que se agregan más términos al polinomio? ¿Hay algunos valores de x para los cuales las aproximaciones son mejores?

48. ¿Alguien quiere desafiar al tenis problemático ? Supongamos que la probabilidad de ganar un punto con el servicio o la devolución se considera constante durante todo el partido. Supongamos además que x es la probabilidad de que el mejor jugador de un partido gane un set.

(a) La probabilidad P3 de que el mejor jugador gane un partido al mejor de tres es P3 1x2 = x2 31 + 211 - x2 4.

Supongamos que la probabilidad de que el mejor jugador gane un set es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de que este jugador gane un partido al mejor de tres?

(b) La probabilidad P5 de que el mejor jugador gane un partido al mejor de cinco es

$$P5\ 1x2 = x3\ 31 + 311 - x2 + 611 - x2 \qquad {}^{2}{}_{4}$$

Supongamos que la probabilidad de que el mejor jugador gane un set es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de que este jugador gane un partido al mejor de cinco?

(c) La diferencia entre la probabilidad de ganar y perder se conoce como ventaja de ganar. Para una partida al mejor de n , la ventaja de ganar es

$$Pn - 11 - Pn) = 2Pn - 1$$

La ventaja, E, se define como la diferencia en la ventaja de ganar entre un partido al mejor de cinco y al mejor de tres. Eso es,

$$E = 12P5 - 12 - 12P3 - 12 = 21P5 - P32$$

La ventaja en función de la probabilidad de ganar de un conjunto x es

$$E1x2 = 2x2\ b\ xJ1 + 311 - x2 + 611 - x2 \qquad 2R - ¢1 + 211 - x2 \le r$$

Grafique E = E1x2 para 0,5… x … 1.

(d) Encuentre la probabilidad de ganar un conjunto x que maximice la ventaja. ¿Cuál es la ventaja máxima?

(e) Explique el significado de E (0,5).

(f) Explique el significado de E (1).

Fuente: Stephanie Kovalchik, “Los Grand Slams son el tenis femenino que cambia poco”, Significance, octubre de 2015.

49. Problema de desafío Supongamos que f1x2 = - ax2 1x - b2 1x + c2 donde ^{2}, 0 6 a 6 b 6 c.

(a) Gráfica f.

(b) ¿En qué intervalo(s) hay un valor máximo local?

(c) ¿Qué números producen un valor mínimo local?

(d) ¿ Dónde está f1x2 6 0?

(e) ¿ Dónde está f1 - x - 42 6 0?

(f) ¿ F es creciente, decreciente o ninguna de las dos cosas en 1 - q, - c4?

Conserve su conocimiento

Los problemas 50 a 59 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

50. Resuelve 2· 3x - 1· + 4 7 10.

51. Determine la función que se representa gráficamente si la gráfica de f1x2 = 2x se refleja alrededor del eje x y luego verticalmente comprimido por un factor de 3 $\frac{1}{}$·.

52. Encuentra el vértice de la gráfica de f1x2 = - 2x2 + 7x - 3.

53. La deformación S sobre un objeto sólido depende de la fuerza de tensión externa F (en Newtons) que actúa sobre el sólido y del área de la sección transversal A (en m2) según el modelo.

$$S = 5^{*}\ 10\text{-}6\ \#\ \frac{F}{A}$$

Encuentre la deformación de una varilla con un área de sección transversal de 8,75 * 10-3 m2 y una fuerza de tensión de 2,45 * 105 N.

54. Dado f1x2 = 2x3 - 7x + 1, encuentre f a - $\frac{1}{2}$b.

55. Encuentra el dominio de f1x2 = - 92x - 4 + 1.

56. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = x2 + 4x - 3 de - 2 a 1.

57. Encuentra el centro y el radio del círculo.

$$x2 + 4x + y2 - 2y = 11$$

58. Determina si la función g1x2 = es par, impar o $\overline{23x}$ x3 - x ni.

59. ¿ Cuánto tiempo tomará $5000 para crecer a $7500 de una manera simple? tasa de interés del 8%?

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 10, 102, 1 - 2, 02 3. Valor máximo local 6,48 en x = - 0,67; valor mínimo local - 3 en x = 2 ^{2} 7x3

4. y = - 0,337x2 + 2,311x - 0,216

Machine Translated by Google

4.3 Propiedades de las funciones racionales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Expresiones racionales (Sección A.5, págs. A35–A42)
- División polinomial (Sección A.3, págs. A25–A27)
- Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ (Sección 1.2, Ejemplo 13, p. 53)
- Técnicas gráficas: transformaciones (Sección 2.5, págs. 134–143)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 242.

OBJETIVOS 1 Encontrar el dominio de una función racional (p. 234)
2 Encuentra las asíntotas verticales de una función racional (p. 237)
3 Encuentre una asíntota horizontal u oblicua de una función racional (p. 239)

Las razones de números enteros se llaman números racionales. De manera similar, las razones de funciones polinomiales se llaman funciones racionales. Ejemplos de funciones racionales son

$$R(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x + 1} \qquad F(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \qquad G(x) = \frac{3x^2}{x^4 - 1}$$

DEFINICIÓN Función Racional

Una función racional es una función de la forma

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde p y q son funciones polinomiales y q no es el polinomio cero.
El dominio de R es el conjunto de todos los números reales, excepto aquellos cuyo denominador q es 0.

1 Encuentra el dominio de una función racional

EJEMPLO 1

Encontrar el dominio de una función racional

(a) El dominio de $R(x) = \frac{2x^2 - 4}{\text{dominio}}$ es el conjunto de todos los números reales x excepto - 5; que x + 5 es, el es $\{x \mid x \neq -5\}$.

(b) El dominio de $R(x) = x^2 - 4 \frac{1}{1x + 2^2} = \frac{1}{1x - 2^2}$ es el conjunto de todos los números reales x excepto - 2 y 2; es decir, el dominio es $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2\}$.

(c) El dominio de $R(x) = x^2 + 1 \frac{x^3}{}$ es el conjunto de todos los números reales.

(d) El dominio de $R(x) = \frac{x^2 - 1}{\text{es } 5x}$ es el conjunto de todos los números reales x excepto 1; es decir, x - 1 el dominio $\{x \mid x \neq 1\}$.

Aunque se simplifica $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ a x + 1, es importante observar que las funciones

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{y} \quad f(x) = x + 1$$

no son iguales, ya que el dominio de R es $\{x \mid x \neq 1\}$ y el dominio de f es el conjunto de todos los números reales.

Ahora resuelve el problema 17

Machine Translated by Google

Si $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, y si p y q no tienen factores comunes, entonces se dice que la función racional R está en términos mínimos. Para una función racional $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ en su mínima expresión, los ceros reales, si los hay, del numerador, que son también en el dominio de R, están las intersecciones x de la gráfica de R. Los ceros reales del denominador de R [es decir, los números x, si los hay, para los cuales $q(x) = 0$], aunque no en el dominio de R, también juega un papel importante en la gráfica de R.

ADVERTENCIA Se debe encontrar el dominio de una función racional antes de escribir la función en sus términos más bajos.

Ya hemos discutido las propiedades de la función racional $y = \frac{1}{x}$. (Referirse al Ejemplo 13, página 53). La siguiente función racional que analizamos es $H(x) = \frac{1}{x^2}$.

EJEMPLO 2

Graficar $H(x) = \frac{1}{x^2}$

Analiza la gráfica de $H(x) = \frac{1}{x^2}$.

Solución

El dominio de $H(x) = \frac{1}{x^2}$ es el conjunto de todos los números reales x excepto 0. La gráfica no tiene intersección con el eje x, porque x no puede ser igual a 0. La gráfica no tiene intersección con el eje x porque la ecuación $H(x) = 0$ no tiene solución. Por lo tanto, la gráfica de H no cruza ni toca ninguno de los ejes coordenados. Porque

$$H(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = H(x)$$

H es una función par, por lo que su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

La Tabla 7 muestra valores de $H(x) = \frac{1}{x^2}$ para números positivos seleccionados x. (Usamos simetría para obtener valores de H cuando $x \neq 0$.) De las primeras tres filas de la Tabla 7, vemos que a medida que los valores de x se acercan (se acercan a) 0, los valores de H(x) se vuelven ilimitados. en la dirección positiva. Es decir, cuando $x \to 0$, $H(x) \to \infty$. (En cálculo usamos notación límite, $\lim_{x \to 0} H(x) = \infty$, para transmitir esto).

Observe las últimas cuatro filas de la Tabla 7. Como $x \to \infty$, entonces $H(x) \to 0$, tenemos el comportamiento final de la gráfica. La Figura 27 muestra el gráfico. Observe el uso de líneas discontinuas rojas para transmitir estas ideas.

Tabla 7

x	$H(x) = \frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{100}$	10.000
$\frac{1}{10.000}$	100.000.000
1	1
2	$\frac{1}{4}$
100	$\frac{1}{10.000}$
10.000	$\frac{1}{100.000.000}$

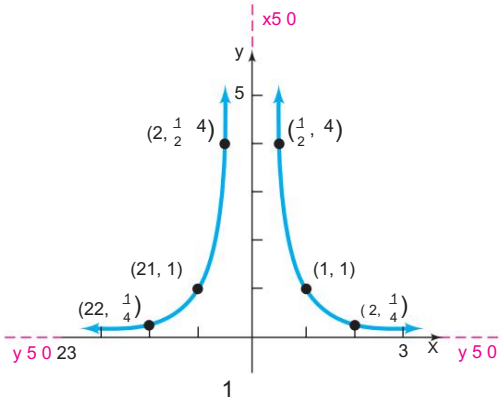


Figura 27 $H(x) = \frac{1}{x^2}$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Usar transformaciones para graficar una función racional

Grafica la función racional: $R(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$

Solución El dominio de R es el conjunto de todos los números reales excepto x = 2. Para graficar R, comience con la gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$. Consulte la Figura 28 para conocer los pasos.

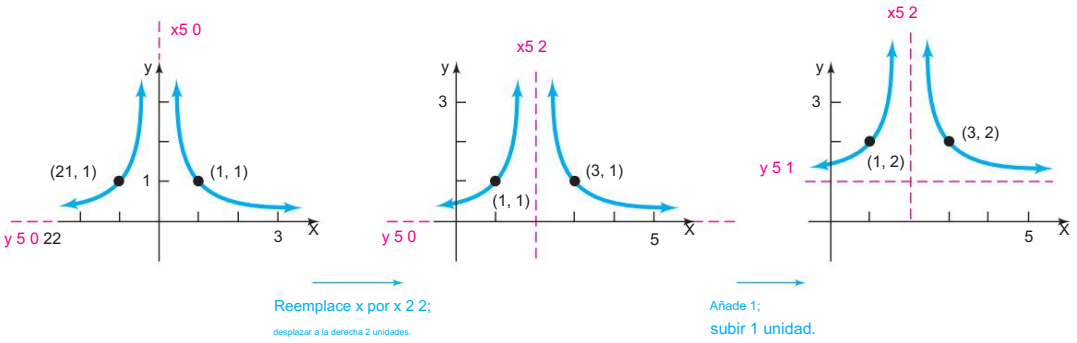


Figura 28 (a) $y = \frac{1}{x^2}$ (b) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$ (c) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$

Ahora resuelva los problemas 3 5 (a) y 3 5 (b)

Asíntotas

Investiguemos las funciones de la línea vertical x = 2 y la línea horizontal y = 1 en la Figura 28(c).

Primero, observamos el comportamiento final de $R(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$. La Tabla 8(a) muestra los valores de R en x = 10, 100, 1000 y 10,000. Tenga en cuenta que cuando x se vuelve ilimitado en la dirección positiva, los valores de R se acercan a 1. Es decir, cuando x S q, R1x2 S 1.
En la Tabla 8(b) vemos que a medida que x se vuelve ilimitado en la dirección negativa, los valores de R también se aproximan a 1. Es decir, cuando x S - q, R1x2 S 1.

Aunque x = 2 no está en el dominio de R, el comportamiento de la gráfica de R cerca de x = 2 es importante. La Tabla 8(c) muestra los valores de R en x = 1,5, 1,9, 1,99, 1,999 y 1,9999. Vemos que a medida que x se aproxima a 2 para x 6 2, denotado x S 2-, los valores de R aumentan sin límite. Es decir, como x S 2- (desde la izquierda), R1x2 S q. En la Tabla 8(d), vemos que cuando x tiende a 2 para x 7 2, denotado x S 2+, los valores de R también aumenta sin límite. Es decir, como x S 2+ (desde la derecha), R1x2 S q.

Tabla 8

X	R(x)
10	1.0156
100	1.0001
1000	1.000001
10.000	1.00000001

(a)

X	R(x)
-10	1.0069
-100	1.0001
-1000	1.000001
-10.000	1.00000001

(b)

X	R(x)
1.5	5
1.9	101
1,99	10.001
1.999	1.000.001
1.9999	100.000.001

(C)

X	R(x)
2.5	5
2.1	101
2.01	10.001
2.001	1.000.001
2.0001	100.000.001

(d)

La recta vertical x = 2 y la recta horizontal y = 1 se llaman asíntotas de la gráfica de R.

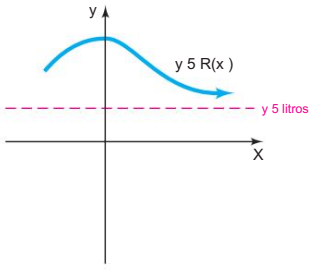
Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Asíntotas Horizontales y Verticales

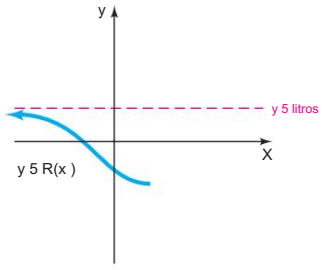
Sea R una función.

Si, cuando x S - q o como x S q, los valores de R(x) se aproximan a algún número fijo L, entonces la recta y = L es una asíntota horizontal de la gráfica de R.
[Consulte las Figuras 29(a) y (b).]

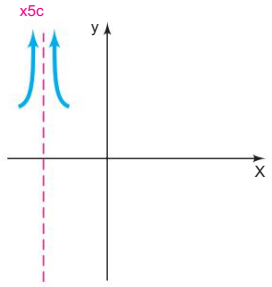
Si, cuando x se aproxima a algún número c, los valores · R1x2 · S q [es decir, R1x2 S - q o R1x2 S q], entonces la recta x = c es una asíntota vertical de la gráfica de R.
[Consulte las Figuras 29(c) y (d).]



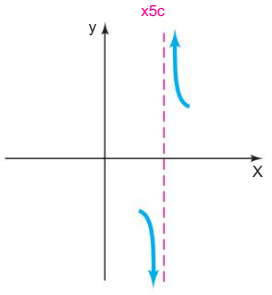
(a) Comportamiento final:
Como x S `, entonces R (x) S L.
Es decir, los puntos en la gráfica de R se están acercando a la línea y 5 L; y 5 L es un asíntota horizontal.



(b) Comportamiento final:
Como x S 2`, entonces R (x) S L.
Es decir, los puntos en el gráfico.
de R se están acercando a la línea y 5 L; y 5 L es un asíntota horizontal.



(c) Como x S c –, entonces R (x) S `;
como x S c +, entonces R (x) S `.
Es decir, los puntos sobre el
La gráfica de R se está acercando. a la línea x 5 c; x5c es un asíntota vertical.



(d) Como x S c -, entonces R (x) S 2`;
como x S c +, entonces R (x) S `.
Es decir, los puntos sobre el
La gráfica de R se está acercando. a la línea x 5 c; x5c es un asíntota vertical.

Figura 29

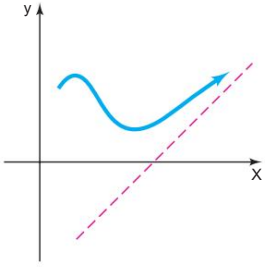


Figura 30 Asíntota oblicua

Una asíntota horizontal, cuando ocurre, describe el comportamiento final de la gráfica como x S q o como x S - q. La gráfica de una función puede cortar una asíntota horizontal.

Una asíntota vertical, cuando ocurre, describe el comportamiento de la gráfica cuando x está cerca de algún número c. La gráfica de una función racional nunca corta a una asíntota vertical.

Hay una tercera posibilidad. Si, como x S - q o como x S q, el valor de una función racional R(x) se aproxima a una expresión lineal ax + b, a · 0, entonces la recta y = ax + b, a · 0, es una asíntota oblicua (o inclinada) de R. La Figura 30 muestra una asíntota oblicua. Una asíntota oblicua, cuando ocurre, describe el comportamiento final del gráfico. La gráfica de una función puede cortar una asíntota oblicua.

Ahora resuelva los problemas 2 7 y 3 5 (c)

2 Encuentre las asíntotas verticales de una función racional

Las asíntotas verticales de una función racional R1x2 = q1x2 $\frac{p1x2}{}$, en términos más bajos, son ubicado en los ceros reales del denominador q(x). Supongamos que r es un cero real de q, por lo que x - r es un factor de q. Cuando x S r, los valores x - r S 0, hacen que la relación se vuelva ilimitada; es decir, · R1x2 · S q. Con base en la definición, concluimos que la recta x = r es una asíntota vertical.

TEOREMA Localización de asíntotas verticales

La gráfica de una función racional R1x2 = q1x2 $\frac{p1x2}{}$, en términos más bajos, tiene una vertical asíntota x = r si r es un cero real del denominador q. Es decir, si x - r es un factor del denominador q de la función racional R, en términos más bajos, la gráfica de R tiene una asíntota vertical x = r.

ADVERTENCIA Si una función racional no está en sus términos más bajos, este teorema puede dar como resultado una lista incorrecta de asíntotas verticales. j

Machine Translated by Google

EJEMPLO 4

Encontrar asíntotas verticales

Encuentra las asíntotas verticales, si las hay, de la gráfica de cada función racional.

(a) $F(x) = x - \frac{x+3}{x-1}$ (b) $R(x) = \frac{x}{x^2-4}$

(c) $H(x) = \frac{}{x^2+1}$ (d) $G(x) = \frac{x^2-9}{x^2+4x-21}$

Solución

(a) $F(x) = x - \frac{x+3}{x-1}$ está en sus términos más bajos y el único cero real del denominador es 1.

La recta $x = 1$ es la asíntota vertical de la gráfica de F.

ADVERTENCIA Al identificar una asíntota vertical, como en la solución del ejemplo 4(a), escriba la ecuación de la asíntota vertical como $x = 1$. No diga que la asíntota vertical es 1.

(b) $R(x) = \frac{x}{x^2-4}$ está en sus términos más bajos, y los ceros reales del denominador $x^2 - 4$ son - 2 y 2. Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son las asíntotas verticales de la gráfica de R.

(c) $H(x) = \frac{x^2}{}$ está en sus términos más bajos y el denominador no tiene ceros reales. El $x^2 + 1$

La gráfica de H no tiene asíntotas verticales.

(d) Factorice el numerador y denominador de $G(x) = \frac{x^2-9}{x^2+4x-21}$ para determinar si G está en sus términos más bajos.

$$G(x) = \frac{x^2-9}{x^2+4x-21} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+7)(x-3)} = \frac{x+3}{x+7} \quad x \cdot 3$$

El único cero real del denominador de G en términos más bajos es - 7. La recta $x = -7$ es la única asíntota vertical de la gráfica de G.

Como ilustra el Ejemplo 4, las funciones racionales no pueden tener asíntotas verticales, una asíntota vertical, o más de una asíntota vertical.

Ahora problemas de trabajo 45 , 47 y 49 (encontrar la vertical asíntotas , Si alguna .)

Multiplicidad y asíntotas verticales

Recuerde de la Figura 15 de la Sección 4.1 que el comportamiento final de una función polinómica es siempre uno de cuatro tipos. Para polinomios de grado impar, los extremos de la gráfica van en direcciones opuestas (uno hacia arriba y otro hacia abajo), mientras que para polinomios de grado par, los extremos van en la misma dirección (ambos hacia arriba o ambos hacia abajo).

Para una función racional en términos mínimos, las multiplicidades de los ceros reales en el denominador se pueden usar de manera similar para determinar el comportamiento de la gráfica alrededor de cada asíntota vertical. Considere las siguientes cuatro funciones, cada una con una única asíntota vertical, $x = 2$.

$$R_1(x) = \frac{1}{x-2} \quad R_2(x) = -\frac{1}{x-2} \quad R_3(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad R_4(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

La Figura 31 muestra las gráficas de cada función. Las gráficas de R1 y R2 son transformaciones 1

de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, y las gráficas de R3 y R4 son transformaciones de la gráfica

de $y = \frac{}{x^2}$.

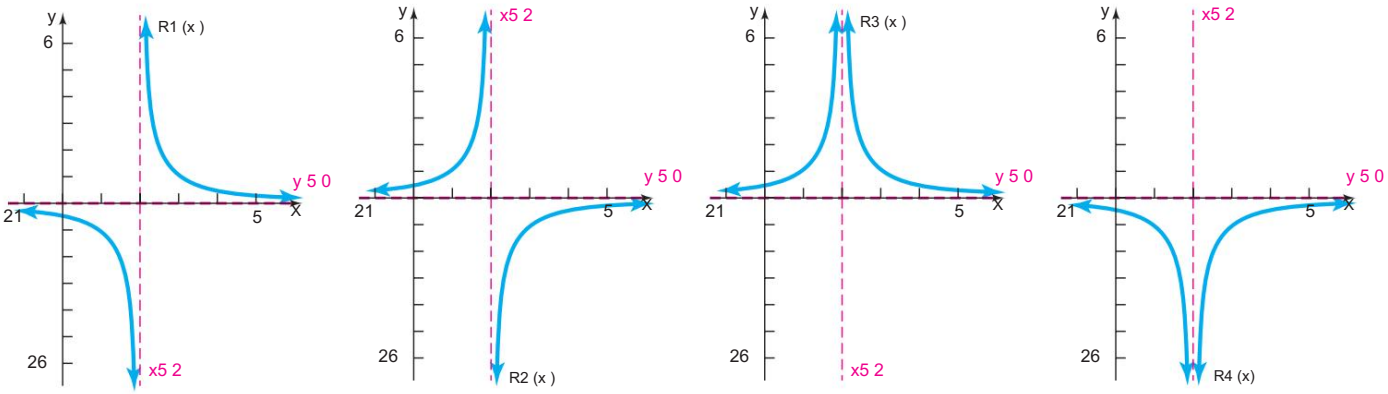
Con base en la Figura 31, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Si la multiplicidad del cero real que da lugar a una asíntota vertical es impar, la gráfica tiende a q en un lado de la asíntota vertical y tiende a -q en el otro lado.

- Si la multiplicidad del cero real que da lugar a la asíntota vertical es par, la gráfica se aproxima a q o - q en ambos lados de la asíntota vertical.

Estos resultados son verdaderos en general y serán útiles al graficar funciones racionales en la siguiente sección.

Machine Translated by Google



(a) Multiplicidad impar
Como x S 2- (desde la izquierda), R11x2 S - q.
Como x S 2+ (desde la derecha), R11x2 S q.

(b) Multiplicidad impar
Como x S 2- (desde la izquierda), R21x2 S q.
Como x S 2+ (desde la derecha), R21x2 S - q.

(c) Incluso multiplicidad
Como x S 2- (desde la izquierda), R31x2 S q.
Como x S 2+ (desde la derecha), R31x2 S q.

(d) Incluso multiplicidad
Como x S 2- (desde la izquierda), R41x2 S - q.
Como x S 2+ (desde la derecha), R41x2 S - q.

Figura 31

3 Encuentre una asíntota horizontal u oblicua de una función racional

Para encontrar asíntotas horizontales u oblicuas, necesitamos saber cómo se comporta la función como x S - q o como x S q. Es decir, necesitamos determinar el comportamiento final de la función. Esto se puede hacer examinando los grados del numerador y del denominador, y las respectivas funciones de potencia a las que se parece cada uno. Por ejemplo, considere la función racional

$$R1x2 = \frac{3x - 2}{5x2 - 7x + 1}$$

El grado del numerador, 1, es menor que el grado del denominador, 2. Cuando · x · es muy grande, el numerador de R se puede aproximar mediante la función de potencia y = 3x, y el denominador se puede aproximar mediante la función de potencia y = 5x2 . Esto significa

$$R1x2 = \frac{3x - 2}{5x2 - 7x + 1} \approx \frac{3x}{5x2c} = \frac{3}{5x} S 0$$

Para x muy grande — Como x u · ˆ o x u ˆ (C)

lo que muestra que la recta y = 0 es una asíntota horizontal. Este resultado es válido para todas las funciones racionales que sean propias (es decir, el grado del numerador es menor que el grado del denominador). Si una función racional es impropia (es decir, si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador), podría haber una asíntota horizontal, una asíntota oblicua o ninguna de las dos. El siguiente resumen detalla cómo encontrar asíntotas horizontales u oblicuas.

Encontrar una asíntota horizontal u oblicua de una función racional

Considere la función racional

$$R1x2 = \frac{p1x2}{q1x2} = \frac{anxn + an-1xn-1 + g + a1x + a0}{bmxm + bm-1xm-1 + g + b1x + b0}$$

en el que el grado del numerador es n y el grado del denominador es m.

- Si n 6 m (el grado del numerador es menor que el grado del denominador), la recta y = 0 es una asíntota horizontal.

(continuado)

Machine Translated by Google

- Si n = m (el grado del numerador es igual al grado del denominador), la recta y = un es una asíntota horizontal. (Es decir, el bm

  la asíntota horizontal es igual a la razón de los coeficientes principales.)
- Si n = m + 1 (el grado del numerador es uno más que el grado del denominador), la recta y = ax + b es una asíntota oblicua, que es el cociente que se encuentra usando la división polinomial.
- Si n Ú m + 2 (el grado del numerador es dos o más mayor que el grado del denominador), no hay asíntotas horizontales u oblicuas, y el comportamiento final de la gráfica se asemeja a la potencia función y = bm un xn-m.

Nota: Una función racional nunca tiene una asíntota horizontal y una asíntota oblicua. Una función racional no puede tener asíntota horizontal ni oblicua.

EJEMPLO 5 Encontrar una asíntota horizontal

Encuentre la asíntota horizontal, si existe, de la gráfica de

$$R1x2 = \frac{4x3 - 5x + 2}{7x5 + 2x4 - 3x}$$

Solución Como el grado del numerador, 3, es menor que el grado del denominador, 5, la función racional R es propia. La recta y = 0 es una asíntota horizontal de la gráfica de R.

EJEMPLO 6 Encontrar una asíntota horizontal u oblicua

Encuentre la asíntota horizontal u oblicua, si existe, de la gráfica de

$$H1x2 = \frac{3x4 - x2}{x3 - x2 + 1}$$

Solución Dado que el grado del numerador, 4, es exactamente uno mayor que el grado del denominador, 3, la función racional H tiene una asíntota oblicua. Encuentra la asíntota usando división polinómica.

$$\begin{array}{r} 3x + 3 \\ x3 - x2 + 1\overline{)\,3x4} \\ \underline{3x4 - 3x3 + 3x} \\ 3x3 - x2 - \\ \underline{3x3 - 3x2 + 3} \\ 2x2 - 3x - 3 \end{array}$$

Como resultado,

$$H1x2 = \frac{3x4 - x2}{x3 - x2 + 1} = 3x + 3 + \frac{2x2 - 3x - 3}{x3 - x2 + 1}$$

Como x S - q o como x S q,

$$\frac{2x2 - 3x - 3}{x3 - x2 + 1} \approx \frac{2x2}{x3} = \frac{2}{x} S\ 0$$

Como x S - q o como x S q, tenemos H1x2 S 3x + 3. La gráfica de la función racional H tiene una asíntota oblicua y = 3x + 3. Dicho de otra manera, como x S { q, la gráfica de H se parece a la gráfica de y = 3x + 3.

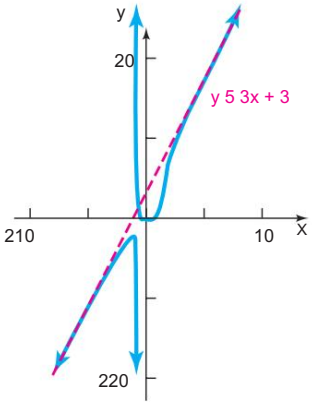


Figura 32 $H1x2 = \frac{3x4 - x2}{x3 - x2 + 1}$

La Figura 32 muestra la gráfica de $H1x2 = \frac{3x4 - x2}{x3 - x2 + 1}$.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Encontrar una asíntota horizontal u oblicua

Encuentre la asíntota horizontal u oblicua, si existe, de la gráfica de

$$R1x2 = \frac{8x2 - x + 2}{4x2 - 1}$$

Solución

Dado que el grado del numerador, 2, es igual al grado del denominador, 2, la función racional R tiene una asíntota horizontal igual a la razón de los coeficientes principales.

$$y = \frac{un}{bm} = \frac{8}{4} = 2$$

Para ver por qué la asíntota horizontal es igual a la razón de los coeficientes principales, investigue el comportamiento de R como x S - q o como x S q. Cuando · x · es muy grande, el numerador de R se puede aproximar mediante la función de potencia y = 8x2 , y el denominador se puede aproximar mediante la función de potencia y = 4x2 . Esto significa que como x S - q o como x S q,

$$R1x2 = \frac{8x2 - x + 2}{4x2 - 1} \approx \frac{8x2}{4x2} = \frac{8}{4} = 2$$

La gráfica de la función racional R tiene una asíntota horizontal y = 2. La gráfica de R se parece a la gráfica de y = 2 cuando x S { q.

EJEMPLO 8 Encontrar una asíntota horizontal u oblicua

Encuentre la asíntota horizontal u oblicua, si existe, de la gráfica de

$$G1x2 = \frac{2x5 - x3 + 2}{x3 - 1}$$

Solución

Dado que el grado del numerador, 5, es mayor que el grado del denominador, 3, en más de uno, la función racional G no tiene asíntota horizontal u oblicua. El comportamiento final del gráfico se asemeja a la función de potencia y = 2x5-3 = 2x2 .

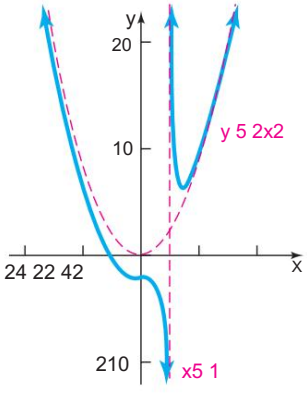


Figura 33 $G1x2 = \frac{2x5 - x3 + 2}{x3 - 1}$

Para ver por qué es así, investigue el comportamiento de G cuando x S - q o como x S q. Cuando · x · es muy grande, el numerador de G se puede aproximar mediante la función potencia y = 2x5 , y el denominador se puede aproximar mediante la función de potencia y = x3 . Esto significa como x S - q o como x S q,

$$G1x2 = \frac{2x5 - x3 + 2}{x3 - 1} \approx \frac{2x5}{x3} = 2x5\text{-}3 = 2x2$$

Como esto no es lineal, la gráfica de G no tiene asíntota horizontal u oblicua.

La Figura 33 muestra la gráfica de $G1x2 = \frac{2x5 - x3 + 2}{x3 - 1}$.

Ahora problemas de trabajo 4 5 , 4 7 y 4 9 (encuentra la horizontal oroblicuaasíntota , si uno existe .)

Machine Translated by Google

4.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Verdadero o Falso El cociente de dos expresiones polinómicas es una expresión racional. (págs. A35–A42)
2. ¿Cuáles son el cociente y el resto cuando 3x4 - x2 se divide por x3 - x2 + 1? (págs. A25-A27)
3. Grafica y = $\frac{1}{x}$. (pág.53)
4. Grafica y = 21x + 12 (págs.^{2} - 3 usando transformaciones. 134 y 143)

Conceptos y vocabulario

5. Verdadero o Falso El dominio de toda función racional es el conjunto de todos los números reales.
6. Si, cuando x S - q o como x S q, los valores de R(x) se aproximan a algún número fijo L, entonces la recta y = L es una de la gráfica de R. _____
7. Si, cuando x se aproxima a algún número c, los valores de · R1x2 · S q, entonces la recta x = c es una _____ de la gráfica de R.
8. Para una función racional R, si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, entonces R es 9. Verdadero o _____.

Falso La gráfica de una función racional puede cortar una asíntota horizontal.

10. Verdadero o Falso La gráfica de una función racional puede cortar una asíntota vertical.
11. Si una función racional es propia, entonces _____ es horizontal asíntota.
12. Verdadero o Falso Si el grado del numerador de una función racional es igual al grado del denominador, entonces la función racional tiene una asíntota horizontal.
13. Opción múltiple Si R1x2 = $\frac{p1x2}{q1x2}$ es una función racional y

Si p y q no tienen factores comunes, entonces R es _____.

(a) impropia (b) propia
(c) indefinido (d) en términos más bajos

14. Opción múltiple ¿ Qué tipo de asíntota, cuando ocurre, describe el comportamiento de una gráfica cuando x está cerca de algún número?

(a) vertical (b) horizontal (c) oblicuo (d) todos estos

Desarrollo de habilidades

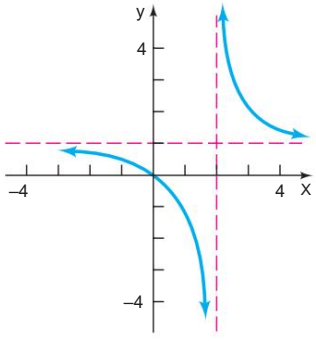
En los problemas 15 a 26, encuentre el dominio de cada función racional.

15. R1x2 = $\frac{5x2}{3+ x}$
16. R1x2 = x - $\frac{4x}{7}$
17. H1x2 = 1x $\frac{- 4x2}{- 22\ 1x + 42}$
18. G1x2 = 1x $\frac{6}{+ 32\ 14 - x2}$
19. Q1x2 = $\frac{- x11 - x2}{3x2 + 5x - 2}$
20. F1x2 = $\frac{3x1x - 12}{2x2 - 5x - 12}$
21. R1x2 = x4 $\frac{x}{- 1}$
22. R1x2 = x3 $\frac{x}{- 64}$
23. G1x2 = x4 $\frac{x - 3}{+ 1}$
24. H1x2 = x2 $\frac{3x2 + x}{+ 9}$
25. F1x2 = $\frac{- 21x2 - 42}{31x2 + 4x + 42}$
26. R1x2 = $\frac{31x2 - x -62}{51x2 - 42}$

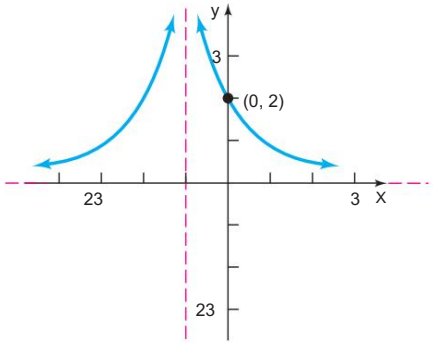
En los problemas 27 a 32, utilice la gráfica que se muestra para encontrar

(a) El dominio y rango de cada función.
(b) Las intersecciones, si las hay (e) Asíntotas oblicuas, si las hay
(c) Asíntotas horizontales, si las hay.
(d) Asíntotas verticales, si las hubiera

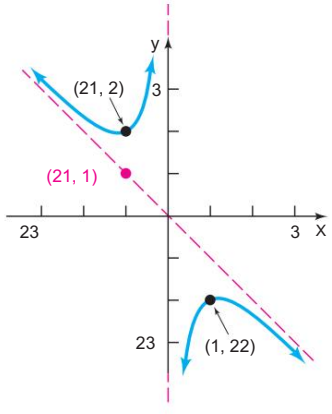
27.



28.

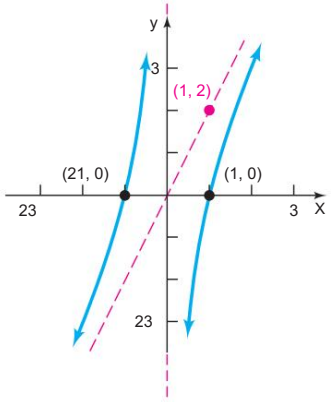


29.

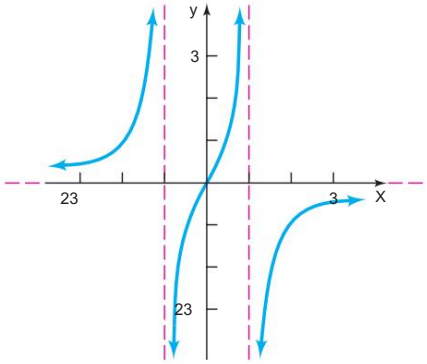


Machine Translated by Google

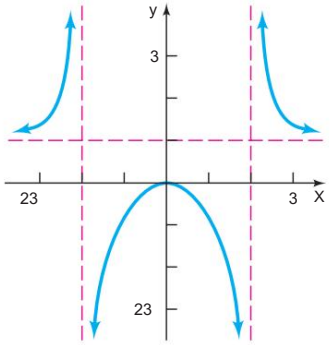
30.



31.



32.



En los problemas 33 a 44, (a) grafique la función racional usando transformaciones, (b) use la gráfica final para encontrar el dominio y el rango, y (c) use la gráfica final para enumerar las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

33. $Q1x2 = 3 + \frac{1}{x2}$

34. $F1x2 = 2 + \frac{1}{x}$

35. $R1x2 = 1x \frac{1}{- 12}^{2}$

36. $R1x2 = \frac{3}{x}$

37. $G1x2 = \frac{2}{1x + 22}^{2}$

38. $H1x2 = x \frac{- 2}{+ 1}$

39. $R1x2 = x \frac{1}{- 1} + 1$

40. $R1x2 = \frac{- 1}{x2 + 4x + 4}$

41. $F1x2 = 2 - x + 1 \frac{1}{}$

42. $G1x2 = 1 + \frac{2}{1x - 32}^{2}$

43. $R1x2 = \frac{x - 4}{x}$

44. $R1x2 = x2 \frac{x2 - 4}{}$

En los problemas 45 a 56, encuentre las asíntotas vertical, horizontal y oblicua, si las hay, de cada función racional.

45. $R1x2 = x \frac{3x}{+ 4}$

46. $R1x2 = \frac{3x + 5}{x - 6}$

47. $H1x2 = \frac{x3 - 8}{x2 - 5x + 6}$

48. $G1x2 = x2 \frac{x3 + 1}{- 5x - 14}$

49. $T1x2 = \frac{x3}{x4 - 1}$

50. $P1x2 = \frac{4x2}{x3 - 1}$

51. $F1x2 = \frac{x2 + 6x + 5}{2x2 + 7x + 5}$

52. $Q1x2 = \frac{2x2 - 5x - 12}{3x2 - 11x - 4}$

53. $R1x2 = \frac{8x2 + 26x - 7}{4x - 1}$

54. $R1x2 = \frac{6x2 + 19x - 7}{3x - 1}$

55. $F1x2 = \frac{x4 - 16}{x2 - 2x}$

56. $G1x2 = x2 \frac{x4 - 1}{- x}$

Aplicaciones y extensiones

57. Gravedad En física, se establece que la aceleración debida a la gravedad, g (en metros/seg2), a una altura h metros sobre el nivel del mar está dada por

$$g1h2 = \frac{3{,}99 * 1014}{16.374 * 106 + h2}^{2}$$

donde 6,374 * 106 es el radio de la Tierra en metros.

(a) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar?

(b) La Torre Willis en Chicago, Illinois, tiene 443 metros de altura. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en lo alto de la Torre Willis?

(c) La cima del Monte Everest está a 8848 metros sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en la cima del Monte Everest?

(d) Encuentre la asíntota horizontal de g(h).

(e) Resuelva g1h2 = 0. ¿Cómo interpreta su respuesta?

58. Modelo de población Se descubrió una especie rara de insecto en la selva amazónica. Para proteger la especie, los ambientalistas declararon que el insecto estaba en peligro de extinción y lo trasplantaron a un área protegida. La población P del insecto t meses después de ser trasplantado es

$$P1t2 = \frac{5011 + 0{,}5t2}{2 + 0{,}01t}$$

(a) ¿Cuántos insectos se descubrieron? En otras palabras, ¿cuál era la población cuando t = 0?

(b) ¿Cuál será la población después de 5 años?

(c) Determine la asíntota horizontal de P1t2. ¿Cuál es la población más grande que el área protegida puede sostener?

59. Resistencia en circuitos paralelos De la ley de Ohm para circuitos, se deduce que la resistencia total Rtot de dos componentes conectados en paralelo viene dada por la ecuación

$$Rtot = \frac{R1R2}{R1 + R2}$$

donde R1 y R2 son las resistencias individuales.

(a) Sea R1 = 10 ohmios y represente gráficamente Rtot como función de R2.

(b) Encuentre e interprete las asíntotas de la gráfica obtenida en el inciso (a).

(c) Si R2 = 21R1, ¿qué valor de R1 producirá un Rtot? de 17 ohmios?

Machine Translated by Google

60. Problema de desafío Método de Newton En cálculo aprenderás que si

$$p1x2 = anxn + an-1xn-1 + g+ a1x + a0$$

es una función polinómica, entonces la derivada de p(x) es

$$p' \ 1x2 = nanxn-1 + 1n - 12an-1xn-2 + g+ 2a2x + a1$$

El método de Newton es un método eficaz para aproximar las intersecciones con el eje x (o ceros reales) de una función, como p(x). Los siguientes pasos describen el método de Newton.

PASO 1: Seleccione un valor inicial x0 que esté algo cerca de la intersección x que se busca.

PASO 2: Encuentra valores para x usando la relación

$$xn+1 = xn - \frac{p1xn2}{p' \ 1xn2} \quad norte = 0, 1, 2, c$$

hasta que obtenga dos valores consecutivos xn y xn+1 que coincidan con la precisión del decimal que desee.

PASO 3: El cero aproximado será xn+1.

Considere el polinomio p1x2 = x3 - 7x - 40.

(a) Evalúe p132 y p(5). (b)
¿ Qué podríamos concluir acerca de un cero de p?

(c) Utilice el método de Newton para aproximar una intersección con el eje x, r, 3 6 r 6 5, de p1x2 con cuatro decimales.

61. Problema de desafío La forma estándar del racional.

función $R1x2 = \frac{mx + b}{cx + d}$, $c \cdot 0$, es $R1x2 = a\not\in 1 \quad \overline{x - h \le + k}$.

Para escribir una función racional en forma estándar se requiere división polinomial.

(a) Escriba la función racional $R1x2 = \frac{2x + 3}{x - 1}$ en estándar forma escribiendo R en la forma

$$\text{Cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

(b) Grafique R usando transformaciones.
(c) Encuentre la asíntota vertical y la asíntota horizontal de r.

62. Problema de desafío Repita el problema 61 para el racional $\frac{- 6x + 16}{2x - 7}$.

función R1x2 = .

63. Problema de desafío Inventa una función racional que tenga y = 2x + 1 como asíntota oblicua.

Explicar conceptos: discusión y escritura

64. Si la gráfica de una función racional R tiene la asíntota horizontal y = 2, el grado del numerador de R es igual al grado del denominador de R. Explica por qué.

65. La gráfica de una función racional no puede tener una asíntota tanto horizontal como oblicua. Explicar por qué.

66. Si la gráfica de una función racional R tiene la asíntota vertical x = 4, el factor x - 4 debe estar presente en el denominador de R. Explica por qué.

Conserve su conocimiento

Los problemas 67 a 76 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

67. Encuentra la ecuación de una recta vertical que pasa por el punto 15, - 32.

68. Resuelve: $\frac{2}{5}13x - 72 + 1 = \frac{x}{4} - 2$

69. ¿La gráfica de la ecuación 2x3 - xy2 = 4 es simétrica con respecto al eje x, al eje y, al origen o a ninguno de estos?

70. ¿Cuáles son los puntos de intersección de las gráficas de la funciones f1x2 = - 3x + 2 y g1x2 = x2 - 2x - 4?

71. Encuentra las intersecciones de la gráfica de $f1x2 = x + \frac{x - 6}{2}$.

72. Utilice una herramienta gráfica para encontrar el máximo local de

$$f1x2 = x3 + 4x2 - 3x + 1$$

73. ¿ Dónde está f1x2 = 5x2 - 13x - 6 6 0?

74. Determinar si la función f1x2 = es par, x2 + 6 $\overline{23x _}$ extraño o ninguno de los dos.

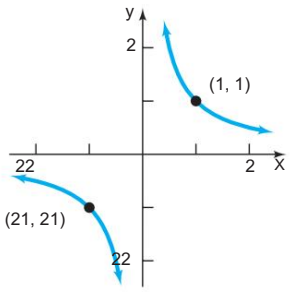
75. Simplifica: $\frac{3}{x2 - 9} - \frac{2}{x + 3}$

76. Resuelve: 3 - 12x + 42 7 5x + 13

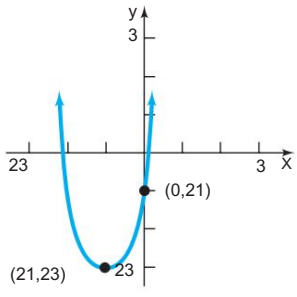
'¿Estas preparado?' Respuestas

1. Verdadero

2. Cociente: 3x + 3; resto: 2x2 - 3x - 3 3.



4.



Machine Translated by Google

4.4 La gráfica de una función racional

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Intercepciones (Sección 1.2, págs. 48–49)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problema en la página 256.

OBJETIVOS 1 Graficar una función racional (p. 245)

2 Resolver problemas aplicados que involucran funciones racionales (p. 255)

1 Graficar una función racional

Comentamos anteriormente que el cálculo proporciona las herramientas necesarias para graficar una función polinómica con precisión. Lo mismo ocurre con las funciones racionales. Sin embargo, podemos reunir bastante información sobre sus gráficas para tener una idea de la forma general y la posición de la gráfica.

EJEMPLO 1 Graficar una función racional

Grafica la función racional $R(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$.

Solución paso-a-paso

Paso 1 Factoriza el numerador y el denominador de R. Encuentra el dominio de la función racional.

$$R(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4} = \frac{x - 1}{(x + 2)(x - 2)}$$

El dominio de R es $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2\}$.

Paso 2 Escribe R en términos mínimos.

Como no hay factores comunes entre el numerador y el denominador, $R(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ está en términos más bajos.

Paso 3 Encuentra y traza las intersecciones de la gráfica. Utilice la multiplicidad para determinar el comportamiento de la gráfica de R en cada intersección con el eje x.

Como 0 está en el dominio de R, la intersección con el eje y es $R(0) = \dfrac{1}{4}$. Trazar el punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Las intersecciones con el eje x son los ceros reales del numerador de R escrito en términos mínimos. Resolviendo $x - 1 = 0$, encontramos que el único cero real del numerador es 1. Entonces, la única intersección con el eje x de la gráfica de R es 1. Traza el punto (1, 0). La multiplicidad de 1 es impar, por lo que la gráfica cruza el eje x en $x = 1$.

Paso 4 Encuentra las asíntotas verticales. Grafica cada asíntota vertical usando una línea discontinua. Determine el comportamiento de la gráfica a cada lado de cada asíntota vertical.

Las asíntotas verticales son los ceros del denominador con la función racional en términos mínimos. Con R escrito en términos mínimos, la gráfica de R tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Las multiplicidades de los ceros que dan lugar a las asíntotas verticales son ambas impares. Por lo tanto, la gráfica tiende a ∞ en un lado de cada asíntota vertical y tiende a $-\infty$ en el otro lado.

Paso 5 Encuentra la asíntota horizontal u oblicua, si existe. Grafique la asíntota usando una línea discontinua. Encuentre los puntos, si los hay, donde la gráfica de R intersecta la asíntota. Traza los puntos.

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, R es propia y la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica. La gráfica de R corta la asíntota horizontal en la (s) intersección(es) con el eje x de R. Es decir, la gráfica de R corta la asíntota horizontal en (1, 0).

Machine Translated by Google

Paso 6 Usa los ceros reales del numerador y denominador de R para dividir el eje x en intervalos. Determine dónde está la gráfica de R está por encima o por debajo del eje x eligiendo un número en cada intervalo y evaluando R. Traza los puntos encontrados.

El cero real del numerador, 1, y los ceros reales del denominador, - 2 y 2, dividen el eje x en cuatro intervalos:

1 - q, - 22 1 - 2, 12 11, 22 12, q 2

Ahora construya la Tabla 9.

Tabla 9

	–2 1 2 x			
Intervalo	1 - q, -22	1-2, 12	(1, 2)	12, q 2
Número elegido -3		-1	$\frac{3}{2}$	3
Valor de R	R1 -32 = -0,8 R1 -12 =	$\frac{2}{3}$	R un 2segundo = - $\frac{2}{7}$	R132 = 0,4
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x Sobre el eje x		Debajo del eje x Sobre el eje x	
Punto en el gráfico 1 -3, -0,82		a-1, 2 segundo	un 2, - $\frac{2}{7}$ segundo	(3, 0,4)

La Figura 34(a) muestra las asíntotas, los puntos de la Tabla 9, la intersección con el eje y y la intersección con el eje x.

Paso 7 Utilice los resultados obtenidos en los pasos 1 a 6 para representar gráficamente R.

- La gráfica cruza el eje x en x = 1, cambiando desde arriba del eje x para x 6 1 hasta debajo de él para x 7 1. Indíquelo en el gráfico. Véase la Figura 34(b).
- Dado que y = 0 (el eje x) es una asíntota horizontal y la gráfica se encuentra debajo del eje x para x 6 - 2, podemos dibujar una parte de la gráfica colocando una pequeña flecha en el extremo izquierdo y debajo de la eje x.
- Dado que la recta x = - 2 es una asíntota vertical y la gráfica se encuentra debajo del eje x para x 6 - 2, colocamos una flecha muy por debajo del eje x y acercándonos a la recta x = - 2 desde la izquierda. (Como x S - 2 desde la izquierda, R1x2 S - q.)
- Dado que la gráfica tiende a - q en un lado de x = - 2, y - 2 es un cero de multiplicidad impar, la gráfica se aproximará a q en el otro lado de x = - 2. Es decir, cuando x S - 2 de la derecha, R1x2 S q. De manera similar, cuando x S 2 desde la izquierda, R1x2 S - q y como x S 2 desde la derecha, R1x2 S q.
- Comportamiento final: Como x S - q, R1x2 S 0; y como x S q, R1x2 S 0.

La Figura 34(b) ilustra estas conclusiones y la Figura 34(c) muestra la gráfica de R.

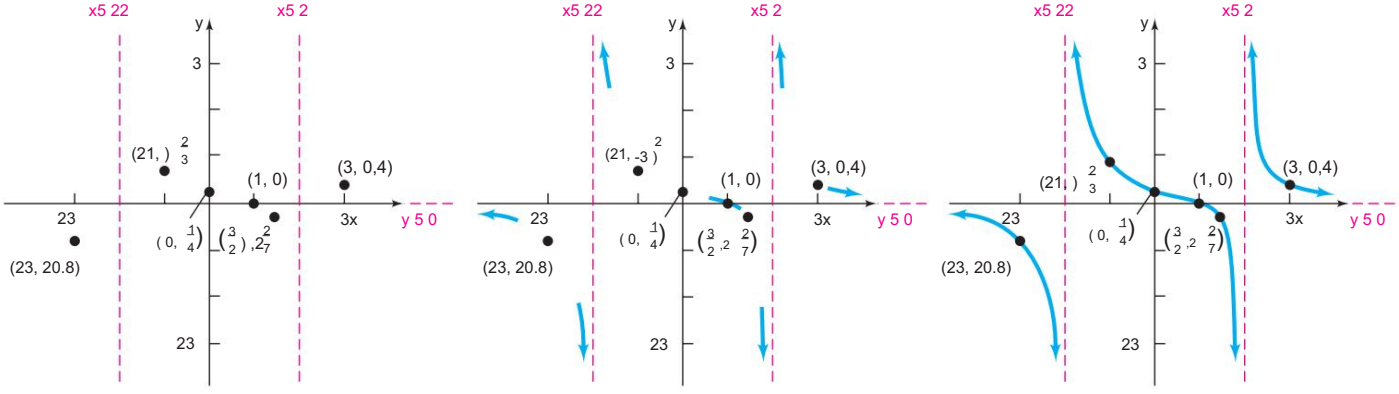


Figura 34 (a) (b) (c) R(x) = $\frac{x - 1}{X2 - 4}$

Machine Translated by Google

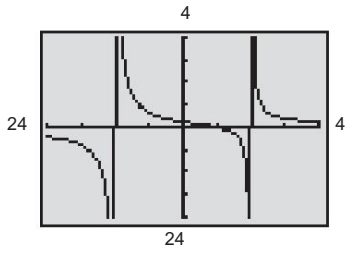
Exploración

Grafica la función racional: $R1x2 = x2 - \frac{x - 1}{4}$

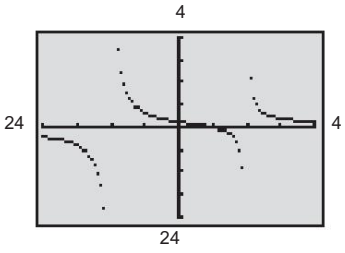
Resultado El análisis del Ejemplo 1 nos ayuda a configurar el rectángulo de visualización para obtener un gráfico completo. x - 1

La Figura 35(a) muestra la gráfica de R1x2 = en modo conectado, y la Figura 35(b) la muestra en x2 - 4

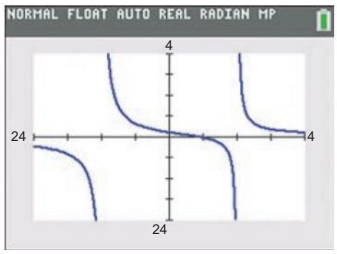
modo punto. Observe en la Figura 35(a) que el gráfico tiene líneas verticales en x = -2 y x = 2. Esto se debe al hecho de que cuando una utilidad gráfica está en modo conectado, algunas conectarán los puntos entre píxeles consecutivos y las verticales Pueden aparecer líneas. Sabemos que la gráfica de R no cruza las líneas x = -2 y x = 2, ya que R no está definida en x = -2 o x = 2. Entonces, al graficar funciones racionales, use el modo de puntos si hay líneas verticales extrañas están presentes en modo conectado. Es posible que otras utilidades de gráficos no tengan líneas verticales extrañas en el modo conectado. Consulte la Figura 35(c) y (d).



Modo conectado con extraños. líneas verticales



Modo punto



Modo conectado sin extraños líneas verticales

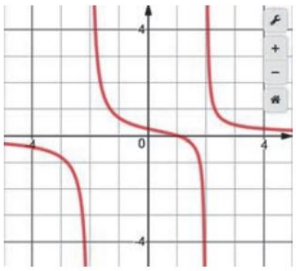


Figura 35 (a) TI-84 Plus (b) TI-84 Plus (c) TI-84 Plus C (d) Desmos

RESUMEN

Pasos para graficar una función racional R

Paso 1: factoriza el numerador y el denominador de R. Encuentra el dominio de la función racional.

Paso 2: Escribe R en términos mínimos.

Paso 3: Encuentra y traza las intersecciones de la gráfica. Utilice la multiplicidad para determinar el comportamiento de la gráfica de R en cada intersección con el eje x.

Paso 4: Encuentra las asíntotas verticales. Grafica cada asíntota vertical usando una línea discontinua. determinar el comportamiento de la gráfica de R a cada lado de cada asíntota vertical.

Paso 5: Encuentra la asíntota horizontal u oblicua, si existe. Grafique la asíntota usando una línea discontinua. Encuentre los puntos, si los hay, donde la gráfica de R intersecta la asíntota. Traza los puntos.

Paso 6: Usa los ceros reales del numerador y denominador de R para dividir el eje x en intervalos. Determinar donde la gráfica de R está por encima o por debajo del eje x eligiendo un número en cada intervalo y evaluando R. Traza los puntos encontrados.

Paso 7: Utilice los resultados obtenidos en los Pasos 1 a 6 para representar gráficamente R.

Ahora trabaja el problema 7

EJEMPLO 2 Graficar una función racional

Grafique la función racional: $R1x2 = \frac{x2 - 1}{x}$

Solución

Paso 1: $R1x2 = \frac{1x + 12\ 1x - 12}{x}$. El dominio de R es 5x· x · 06.

Paso 2: R está en términos más bajos.

Paso 3: Como x no puede ser igual a 0, no existe una intersección con el eje y. La gráfica tiene dos intersecciones en el eje x, - 1 y 1, cada una con multiplicidad impar. Traza los puntos 1 - 1, 02 y (1, 0). La gráfica cruza el eje x en ambos puntos.

Machine Translated by Google

Paso 4: El cero real del denominador con R en términos más bajos es 0, por lo que la gráfica de R tiene la recta x = 0 (el eje y) como asíntota vertical. Grafica x = 0 usando una línea discontinua. La multiplicidad de 0 es impar, por lo que la gráfica se aproxima a q a un lado de la asíntota x = 0 y - q al otro lado.

Paso 5: Dado que el grado del numerador, 2, es uno mayor que el grado del denominador, 1, la gráfica de R tiene una asíntota oblicua. Para encontrar la asíntota oblicua, usa la división polinómica.

$$x \cdot x^2 - 1 \;\big|\; \frac{x}{x^2} \;\big|\; -1$$

El cociente es x, por lo que la recta y = x es una asíntota oblicua de la gráfica. Grafica y = x usando una línea discontinua.

Para determinar si la gráfica de R interseca la asíntota y = x, resuelve la ecuación R1x2 = x.

$$R1x2 = \frac{x^2 - 1}{x} = x$$

$$x^2 - 1 = x^2$$

$$-1 = 0 \text{ Imposible}$$

La ecuación $\frac{x^2 - 1}{x} = x$ no tiene solución, por lo que la gráfica de R no corta a la recta y = x.

Paso 6: Los ceros reales del numerador son - 1 y 1; el cero real del denominador es 0. Utilice estos números para dividir el eje x en cuatro intervalos:

1 - q, - 12 1 - 1, 02 10, 12 11, q 2

Ahora construya la Tabla 10. Trace los puntos de la Tabla 10. Ahora debería tener la Figura 36(a).

Tabla 10

	–1 0 1 x			
Intervalo	1 - q, -12	1-1, 02	10, 12	11, q 2
Número elegido -2		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
Valor de R	R1 -22 = - 2 $\frac{3}{}$	ra - 2 $\frac{1}{}$ b = $\frac{3}{2}$	ra $\frac{1}{2}$ segundo = - $\frac{3}{2}$	R122 = $\frac{3}{2}$
Ubicación del gráfico debajo del eje x		Por encima del eje x	Debajo del eje x Sobre el eje x	
Punto en el gráfico	a-2, $\frac{3}{}$ - 2 segundo	un- $\frac{3}{2}$, $\frac{}{}$ 2 segundo	un $\frac{1}{2}$, - $\frac{3}{}$ 2 segundo	a2, $\frac{3}{}$ segundo

Paso 7: Para graficar la función, comience recordando que la gráfica cruza el eje x en ambas intersecciones x (Paso 3).

Dado que la gráfica de R está debajo del eje x para x 6 - 1 y está arriba del eje x para x 7 1, y dado que la gráfica de R no corta la asíntota oblicua y = x (Paso 5), la gráfica de R se aproxima a la recta y = x, como se muestra en la Figura 36(b).

Dado que la gráfica de R está por encima del eje x para - 1 6 x 6 0, la gráfica de R se acerca a q cuando R se acerca a la asíntota vertical x = 0 desde la izquierda. Dado que la gráfica de R está debajo del eje x para 0 6 x 6 1, la gráfica de R se acerca a - q cuando R se acerca a la asíntota vertical x = 0 desde la derecha. Véase la Figura 36(b).

NOTA Debido a que el denominador de la función racional es un monomio, también podemos encontrar la asíntota oblicua de la siguiente manera:

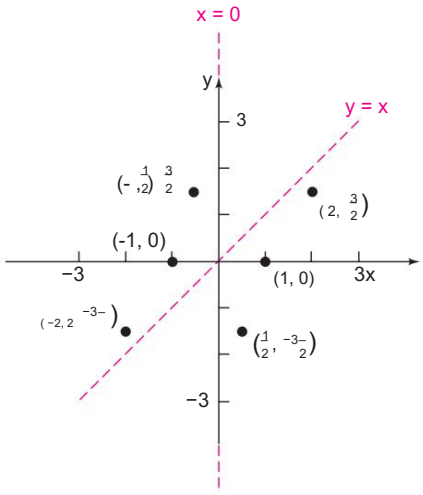
$$\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

Desde $\frac{1}{x}$ S 0 como x S q, y = x es el asíntota oblicua.

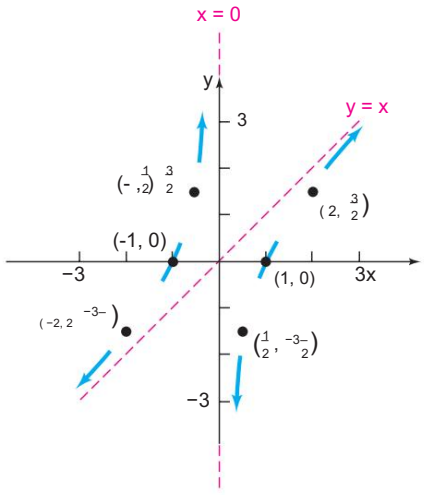
NOTA Observe que R en el ejemplo 2 es una función impar. ¿Ves la simetría con respecto al origen en la gráfica de R en la Figura 36(c)?

Machine Translated by Google

El gráfico completo se muestra en la Figura 36(c).



(a)



(b)

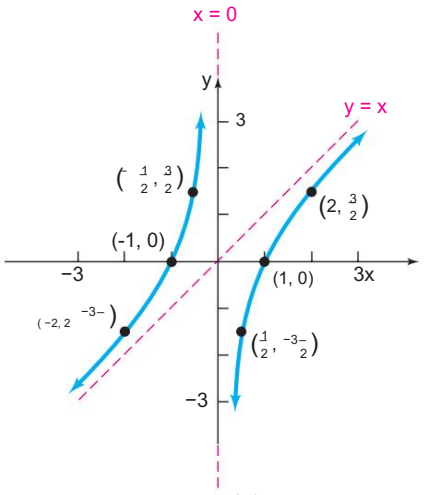


Figura 36

(C) R(x) = $\frac{x^2-1}{x}$

Ahora resuelve el problema 1 5

EJEMPLO 3 Graficar una función racional

Grafica la función racional: $R(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

Solución

Paso 1: R se factoriza completamente. El dominio de R es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Paso 2: R está en términos más bajos.

Paso 3: No hay intersección con el eje y. Como $x^4 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales, no hay intersecciones en x.

Paso 4: R está en términos más bajos, por lo que x = 0 (el eje y) es una asíntota vertical de R. Grafica la recta x = 0 usando guiones. La multiplicidad de 0 es par, por lo que la gráfica se aproxima a ∞ o $-\infty$ en ambos lados de la asíntota.

Paso 5: Dado que el grado del numerador, 4, es dos más que el grado del denominador, 2, la función racional no tiene asíntota horizontal u oblicua. Encuentre el comportamiento final de R. Como $|x| \to \infty$,

$$R(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2} \approx \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

La gráfica de R se aproxima a la gráfica de $y = x^2$ cuando $x \to -\infty$ y como $x \to \infty$.

La gráfica de R no corta a $y = x^2$. ¿Sabes por qué? Grafica $y = x^2$ usando guiones.

Paso 6: El numerador no tiene ceros reales y el denominador tiene un cero real en 0. Divida el eje x en los dos intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Construya la Tabla 11.

Tabla 11

	0 → x	
Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Número elegido	-1	1
Valor de R	R(-1) = 2	R(1) = 2
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(-1, 2)	(1, 2)

Machine Translated by Google

Paso 7: Dado que la gráfica de R está por encima del eje x y no corta a y = x2 , el
La gráfica de R se acerca a y = x2 desde arriba a la izquierda y a la derecha. Además, dado que la gráfica de R se encuentra completamente por encima del eje x, y la multiplicidad del cero que da lugar a la asíntota vertical, x = 0, es par, la gráfica de R se aproxima a q tanto por la izquierda como por la derecha de x = 0. Consulte la Figura 37.

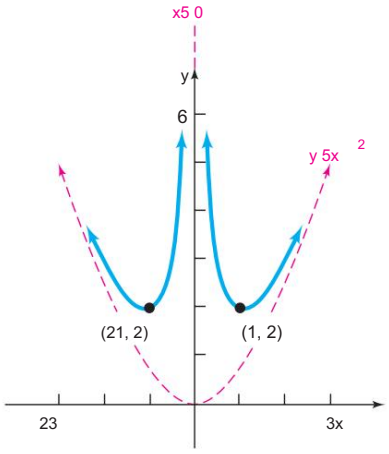


Figura 37 $R(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

NOTA Observe que R en el ejemplo 3 es una función par. ¿Ves la simetría con respecto al eje y en la gráfica de R? j ■

Ahora resuelve el problema 1 3

EJEMPLO 4 Graficar una función racional

Grafica la función racional: $R1x2 = x2 + x \frac{3x2 - 3x}{- 12}$

Solución

Paso 1: factorizar R.

$$R1x2 = \frac{3x1x - 12}{1x + 42\ 1x - 32}$$

El dominio de R es 5x· x · - 4, x · 36.

Paso 2: R está en términos más bajos.

Paso 3: La intersección con el eje y es R102 = 0. Traza el punto (0, 0). Dado que las soluciones reales de la ecuación 3x1x - 12 = 0 son x = 0 y x = 1, la gráfica tiene dos intersecciones en x, 0 y 1, cada una con multiplicidad impar. Traza los puntos (0, 0) y (1, 0); la gráfica cruza el eje x en ambos puntos.

Paso 4: R está en términos más bajos. Las soluciones reales de la ecuación 1x + 42 1x - 32 = 0 son x = - 4 y x = 3, por lo que la gráfica de R tiene dos asíntotas verticales, las líneas x = - 4 y x = 3. Grafica estas líneas usando guiones. Las multiplicidades que dan lugar a las asíntotas verticales son ambas impares, por lo que la gráfica tiende a q en un lado de cada asíntota vertical y a -q en el otro lado.

Paso 5: Dado que el grado del numerador es igual al grado del denominador, la gráfica tiene una asíntota horizontal. Para encontrarlo, forma el cociente del coeficiente principal del numerador, 3, y el coeficiente principal del denominador, 1. La gráfica de R tiene la asíntota horizontal y = 3.

Para saber si la gráfica de R interseca la asíntota, resuelve la ecuación R1x2 = 3.

$$R1x2 = \frac{3x2 - 3x}{x2 + x - 12} = 3$$

$$3x2 - 3x = 3x2 + 3x - 36$$

$$- 6x = - 36$$

$$x = 6$$

Machine Translated by Google

La gráfica intersecta la recta y = 3 en x = 6, por lo que (6, 3) es un punto en la gráfica de R. Traza el punto (6, 3) y grafica la recta y = 3 usando guiones.

Paso 6: Los ceros reales del numerador, 0 y 1, y los ceros reales del denominador, - 4 y 3, divide el eje x en cinco intervalos:

1 - q, - 42 1 - 4, 02 10, 12 11, 32 13, q 2

Construya la Tabla 12. Trace los puntos de la Tabla 12.

Paso 7: Analizamos el gráfico de izquierda a derecha. Sabemos que y = 3 es una asíntota horizontal cuando x S - q. Dado que la gráfica de R está por encima del eje x para x 6 - 4 e intersecta la recta y = 3 solo en (6, 3), cuando x se acerca a - q la gráfica de R se acerca a la asíntota horizontal y = 3 desde arriba. La gráfica de R se aproxima a q cuando x se aproxima a - 4 por la izquierda y se aproxima a - q cuando x se aproxima a - 4 por la derecha.

La gráfica cruza el eje x en x = 0, pasando de estar debajo del eje x a estar arriba. La gráfica también cruza el eje x en x = 1, pasando de estar por encima del eje x a estar por debajo.

A continuación, la gráfica de R se acerca a - q cuando x se acerca a 3 por la izquierda. y se acerca a q cuando x se acerca a 3 por la derecha. Ver Figura 38(a).

No sabemos si la gráfica de R cruza o toca la recta y = 3 en (6, 3). Para ver si la gráfica cruza o toca la recta y = 3, traza una punto adicional a la derecha de (6, 3). Usamos x = 7 para encontrar R172 = 6 3. $\frac{63}{22}$

La gráfica cruza y = 3 en x = 6. Debido a que (6, 3) es el único punto donde la gráfica de R intersecta la asíntota y = 3, la gráfica se aproxima a la recta y = 3 desde abajo como x S q.

Véase la Figura 38(b).

Tabla 12

	–4 0 1 3 x				
Intervalo	1-q, -42	1-4, 02	(0, 1)	(1, 3)	13, q 2
Número elegido	-5	-2	$\frac{1}{2}$	2	4
Valor de R	R1 -52 = 11,25	R1 -22 = -1,8 Ra 1	$\frac{1}{15}$ segundo = 2 segundo	R122 = -1	R142 = 4,5
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	1-5, 11.252	1 -2, -1,82	$\frac{1}{15}$ segundo, un 4 2	12, -12	(4, 4.5)

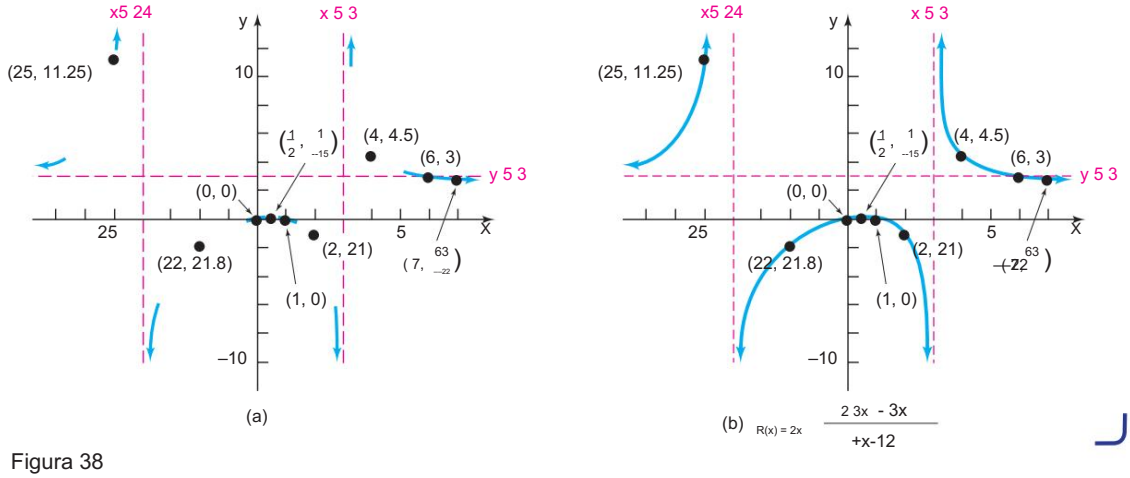


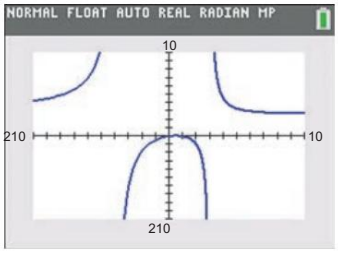
Figura 38

Machine Translated by Google

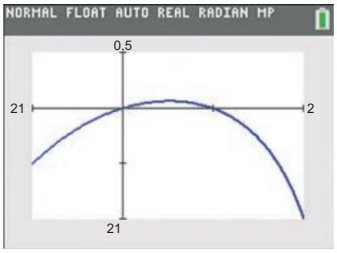
Exploración

Grafica la función racional: $R1x2 = x2 \dfrac{3x2 - 3x}{+ x - 12}$

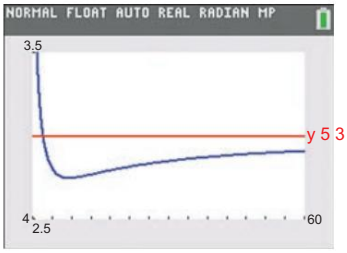
Resultado La Figura 39(a) muestra el gráfico en una TI-84 Plus C. El gráfico no muestra claramente el comportamiento de la función entre las dos intersecciones x, 0 y 1. Tampoco muestra claramente el hecho de que el gráfico cruza la asíntota horizontal en (6, 3). Para ver mejor estas partes, grafica R para -1... x ... 2 [Figura 39(b)] y para 4... x ... 60 [Figura 39(c)].



(a)



(b)



(C)

Figura 39

Los nuevos gráficos muestran el comportamiento esperado. Además, observamos dos puntos de inflexión, uno entre 0 y 1 y el otro a la derecha de 6. Redondeados a dos decimales, estos puntos de inflexión son (0,52, 0,07) y (11,48, 2,75).

Ahora resuelve el problema 3 1

EJEMPLO 5 Graficar una función racional con un agujero

Grafica la función racional: $R1x2 = x2 - 4 \dfrac{2x2 - 5x + 2}{}$

Solución

Paso 1: Factorizar R y obtener

$$R1x2 = \frac{12x - 12\ 1x - 22}{1x + 22\ 1x - 22}$$

El dominio de R es 5x· x · - 2, x · 26.

Paso 2: En términos más bajos,

$$R1x2 = \frac{2x - 1}{x + 2} \qquad x \cdot -2, x \cdot 2$$

Paso 3: La intersección con el eje y es $R102 = -\frac{1}{2}$. Traza el punto a0, - 2 b. La gráfica tiene una intersección con el eje $_{x,\ 2}^{1}$, multiplicidad impar. Trazar el punto ¢ 1 $\frac{}{2}$, 0≤. La gráfica cruzará el eje x en x = 2 $\frac{1}{}$.

Paso 4: Dado que x + 2 es el único factor del denominador de R(x) en términos más bajos, la gráfica tiene una asíntota vertical, x = - 2. Grafica la línea x = - 2 usando guiones. La multiplicidad de - 2 es impar, por lo que la gráfica tiende a q en un lado de la asíntota vertical y a - q en el otro lado.

Dado que 2 no está en el dominio de R, y x = 2 no es una asíntota vertical de la gráfica de R, la gráfica de R tiene un agujero en el punto a2, $\frac{}{4}$b. dibujar una abierta círculo en el punto a2, 3 $\frac{}{4}$ b como se muestra en la Figura 40(a) en la página 254.

NOTA Las coordenadas del agujero se obtienen evaluando R en términos mínimos 2x - 1 en x = 2. R en términos más bajos es $\frac{}{x + 2\ 3}$, que, en x = 2, es $\frac{2 \# 2 - 1}{2 + 2} = \frac{}{4}$. j ■

Machine Translated by Google

Paso 5: Dado que el grado del numerador es igual al grado del denominador, la gráfica tiene una asíntota horizontal. Para encontrarlo, forma el cociente del coeficiente principal del numerador, 2, y el coeficiente principal del denominador, 1. La gráfica de R tiene la asíntota horizontal y = 2. Grafica la línea y = 2 usando guiones.

Para saber si la gráfica de R corta la horizontal asíntota y = 2, resuelve la ecuación R1x2 = 2.

$$R1x2 = \frac{2x - 1}{x + 2} = 2$$

$$2x - 1 = 21x + 22$$

$$2x - 1 = 2x + 4$$

$$- 1 = 4$$ Imposible

La gráfica no corta la línea y = 2. Consulte la Figura 40(a).

Paso 6: Los ceros reales del numerador y denominador, - 2, 2 $\frac{1}{-}$, y 2, dividir el eje x en cuatro intervalos:

1 - q, - 22 un - 2, $\frac{1}{-}$ 2 segundo un $\frac{-}{2}$, 2b 12, q 2

Construya la Tabla 13. Trace los puntos en la Tabla 13.

Tabla 13

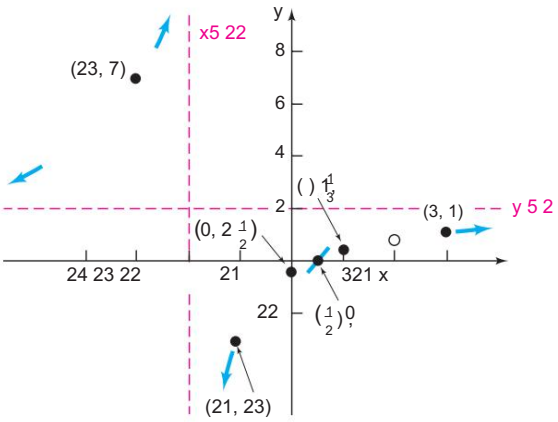
	–2 1/2 2 x			
Intervalo	1 - q, -22	a-2, $1\frac{-}{2 \text{ segundo}}$	un $\frac{-}{2}$, 2b	12, q 2
Número elegido	-3	-1	1	3
Valor de R	R1 -32 = 7	R1 -12 = -3	R112 = $\frac{1}{3}$	R132 = 1
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	1-3, 72	1 -1, -32	a1, $1\frac{-}{\text{segundo}}$	(3, 1)

Paso 7: De la Tabla 13 sabemos que la gráfica de R está por encima del eje x para x 6 - 2. Del paso 5 sabemos que la gráfica de R no intersecta la asíntota y = 2. Por lo tanto, la gráfica de R se acerca a y = 2 desde arriba cuando x S - q y se acerca a q cuando x se acerca a - 2 desde la izquierda.

Dado que la gráfica de R está debajo del eje x para - 2 6 x 6 $\frac{1}{2}$, la gráfica de R se acerca a - q cuando x se acerca a - 2 por la derecha. Finalmente, desde el la gráfica de R está por encima del eje x para x 7 $\frac{1}{2}$ y no cruza el asíntota horizontal y = 2, la gráfica de R se acerca a y = 2 desde abajo como x S q. La gráfica cruza el eje x en x = $\frac{1}{}$, pasando de estar por debajo de 2 el eje x para estar arriba. Véase la Figura 40(a).

Consulte la Figura 40(b) para ver el gráfico completo.

Machine Translated by Google



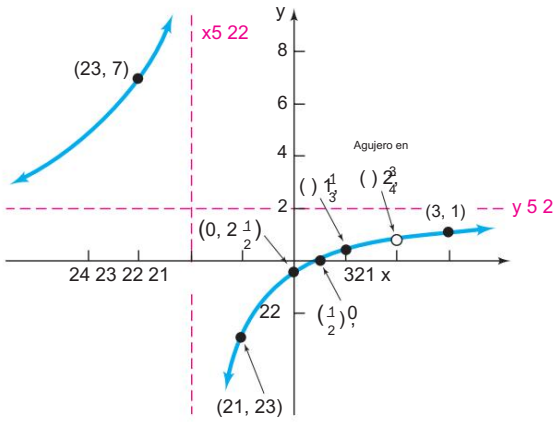


Figura 40 (a) (b) $R(x) = \frac{2\,2x\,2\,5x + 2}{X2 - 4}$

Exploración

Gráfica $R1x2 = \frac{2x2 - 5x + 2}{x2 - 4}$. ¿Ves el agujero en a2, 3 4b? TRAZA a lo largo del gráfico. ¿Obtuviste un ¿ERROR en x = 2? ¿Estás convencido de que se requiere un análisis algebraico de una función racional para interpretar con precisión la gráfica obtenida con una utilidad gráfica?

Como muestra el Ejemplo 5, los ceros del denominador de una función racional dan ascienden a asíntotas verticales o a huecos en el gráfico.

Ahora resuelve el problema 3 3

EJEMPLO 6 Construir una función racional a partir de su gráfica

Encuentre una función racional que pueda tener la gráfica que se muestra en la Figura 41.

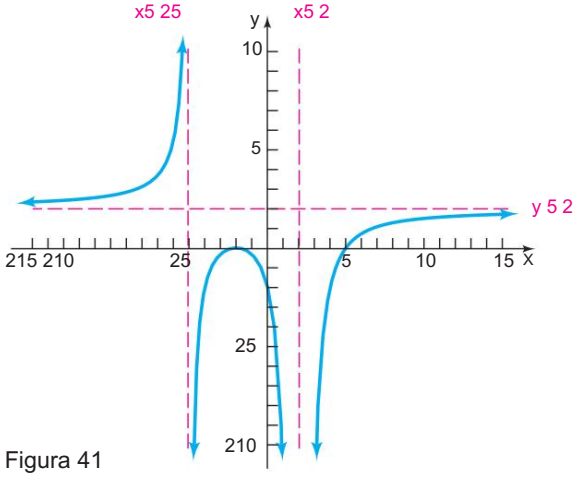


Figura 41

Solución El numerador de una función racional $R1x2 = \frac{p1x2}{q1x2}$ en términos más bajos determina las intersecciones x de su gráfica. La gráfica que se muestra en la Figura 41 tiene intersecciones en el eje x: 2 (multiplicidad par; la gráfica toca el eje x) y 5 (multiplicidad impar; la gráfica cruza el eje x). Entonces una posibilidad para el numerador es $p1x2 = 1x + 22^2\,1x - 52$.

El denominador de una función racional en términos mínimos determina las asíntotas verticales de su gráfica. Las asíntotas verticales de la gráfica son x = - 5 y x = 2. Dado que R(x) se acerca a q a la izquierda de x = - 5 y R(x) se acerca a - q a la derecha de x = - 5, sabemos que 1x + 52 es un factor de multiplicidad impar en q(x). Además, R(x) tiende a -q en ambos lados de x = 2, por lo que 1x - 22 es un factor de multiplicidad par en q(x). Una posibilidad para el denominador es $q1x2 = 1x + 52\,1x - 22^2\,1x - 52$.

Hasta ahora tenemos $R1x2 = \frac{1x + 22^2}{1x + 52\,1x - 22^2}$.

Machine Translated by Google

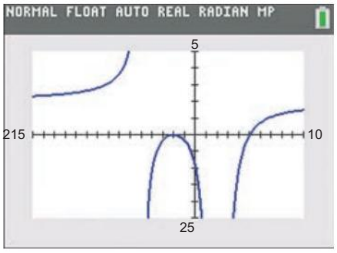


Figura 42

La asíntota horizontal de la gráfica dada en la Figura 41 es y = 2, por lo que sabemos que el grado del numerador debe ser igual al grado del denominador, que es 2

lo hace, y que el cociente de los coeficientes principales debe ser . Esto lleva a

$$R1x2 = \frac{21x + 22^{2}\ 1x - 52}{1x + 52\ 1x - 22^{2}}$$

Verifique: La Figura 42 muestra la gráfica de R en una TI-84 Plus C. Dado que la Figura 42 es similar a la Figura 41, hemos encontrado una función racional R para la gráfica de la Figura 41.

Ahora resuelve el problema 5 1

2 Resolver problemas aplicados que involucran funciones racionales

EJEMPLO 7 Encontrar el menor costo de una lata

Reynolds Metal Company fabrica latas de aluminio con forma de cilindro

con una capacidad de 500 centímetros cúbicos a 1 2 litros. La parte superior e inferior de la lata son hecho de una aleación especial de aluminio que cuesta 0,05 centavos por centímetro cuadrado. Los lados de la lata están hechos de un material que cuesta 0,02 centavos por centímetro cuadrado.

(a) Exprese el costo del material para la lata en función del radio r de la lata.
(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la función C = C1r2.
(c) ¿Qué valor de r dará como resultado el menor costo?
(d) ¿Cuál es este costo mínimo?

Solución

(a) La figura 43 ilustra los componentes de una lata en forma de cilindro circular recto. Observe que el material necesario para producir una lata cilíndrica de altura h y radio r consta de un rectángulo de área 2prh y dos círculos, cada uno de
área pr 2. El costo total C (en centavos) de fabricar la lata es

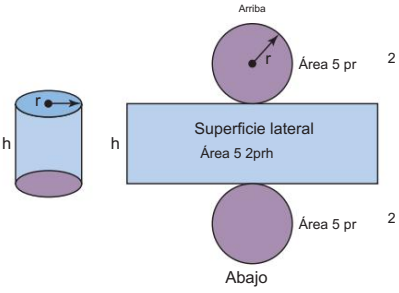


Figura 43

C = Costo de la parte superior e inferior + Costo del lado

2 = 2 #pr # 0,05 + 2prh # 0,02

Área total de arriba y abajo: Costo/unidad área; Total Area de lado: Costo/unidad área

2 = 0,10pr + 0,04phr

Existe una restricción adicional: la altura h y el radio r deben elegirse de modo que el volumen V de la lata sea de 500 centímetros cúbicos. Dado que V = pr 500 2h, tenemos

$$500 = pr^{2}h \text{ entonces } h = \frac{500}{pr^{2}}$$

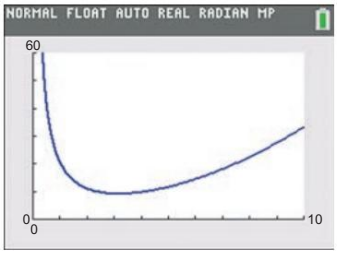


Figura 44

Sustituyendo h, encontramos que el costo C, en centavos, como función del
$\frac{500}{2\ pr}$
el radio r es

$$C1r2 = 0,10pr^{2} + 0.04pr \# \frac{500}{2\ pr} 2 = 0,10pr + \frac{20}{r} = \frac{3\ 0.10pr + 20}{r}$$

(b) Consulte la Figura 44 para ver la gráfica de C = C1r2.
(c) Usando el comando MÍNIMO, el costo es mínimo para un radio de aproximadamente 3,17 centímetros.

(d) El menor costo es C13,172 ≈ 9,47.

Ahora resuelve el problema 6 3

Machine Translated by Google

4.4 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' La respuesta se da al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Encuentra las intersecciones de la gráfica de la ecuación $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$. (págs. 48 y 49)

Conceptos y vocabulario

2. Verdadero o Falso La gráfica de toda función racional tiene al menos al menos una asíntota.
3. Elección múltiple ¿Qué tipo de asíntota nunca cortará la gráfica de una función racional?
   (a) horizontal (b) oblicuo
   (c) vertical (d) todos estos
4. Verdadero o Falso La gráfica de una función racional a veces tiene un agujero.
5. $R1x2 = \frac{x1x - 22^2}{x - 2}$
   (a) Encuentre el dominio de R.
   (b) Encuentre las intersecciones con el eje x de R.
6. Opción múltiple Identifica la intersección y de la gráfica de $R1x2 = \frac{61x - 12}{1x + 12\ 1x + 22}$.
   (un) - 3 (segundo) - 2 (c) - 1 (d) 1

Desarrollo de habilidades

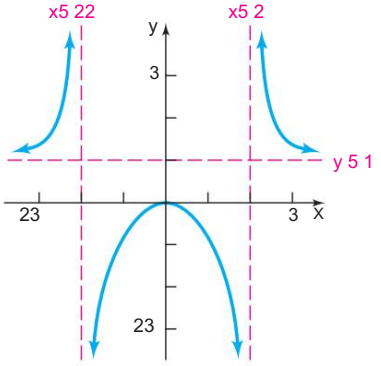
En los problemas 7 a 50, siga los pasos 1 a 7 de la página 247 para representar gráficamente cada función.

7. $R1x2 = \frac{x + 1}{x1x + 42}$
8. $R1x2 = \frac{x}{1x - 12\ 1x + 22}$
9. $R1x2 = \frac{2x + 4}{x - 1}$
10. $R1x2 = \frac{3x + 3}{2x + 4}$
11. $R1x2 = \frac{6}{x2 - x - 6}$
12. $R1x2 = \frac{3}{x2 - 4}$
13. $P1x2 = \frac{x4 + x2 + 1}{x2 - 1}$
14. $Q1x2 = \frac{x4 - 1}{x2 - 4}$
15. $H1x2 = \frac{x3 - 1}{x2 - 9}$
16. $G1x2 = \frac{x3 + 1}{x2 + 2x}$
17. $R1x2 = \frac{x2 + x - 12}{x2 - 4}$
18. $R1x2 = \frac{x2}{x2 + x - 6}$
19. $G1x2 = \frac{3x}{x2 - 1}$
20. $G1x2 = \frac{x}{x2 - 4}$
21. $R1x2 = 1x \frac{- 4}{+ 12\ 1x2 - 92}$
22. $R1x2 = 1x \frac{3}{- 12\ 1x2 - 42}$
23. $H1x2 = \frac{x2 + 4}{x4 - 1}$
24. $H1x2 = \frac{x2 - 1}{x4 - 16}$
25. $F1x2 = \frac{x2 + 3x + 2}{x - 1}$
26. $F1x2 = \frac{x2 - 3x - 4}{x + 2}$
27. $R1x2 = \frac{x2 - x - 12}{x + 5}$
28. $R1x2 = \frac{x2 + x - 12}{x - 4}$
29. $G1x2 = \frac{x2 - x - 12}{x + 1}$
30. $F1x2 = \frac{x2 + x - 12}{x + 2}$
31. $R1x2 = \frac{x1x - 12^2}{1x + 32^3}$
32. $R1x2 = \frac{1x - 12\ 1x + 22\ 1x - 32}{x1x - 42^2}$
33. $R1x2 = \frac{x2 + x - 12}{x2 - x - 6}$
34. $R1x2 = \frac{x2 + 3x - 10}{x2 + 8x + 15}$
35. $R1x2 = \frac{6x2 - 7x - 3}{2x2 - 7x + 6}$
36. $R1x2 = \frac{8x2 + 26x + 15}{2x2 - x - 15}$
37. $R1x2 = \frac{x2 + x - 30}{x + 6}$
38. $R1x2 = \frac{x2 + 5x + 6}{x + 3}$
39. $H1x2 = \frac{2 - 2x}{x2 - 1}$
40. $H1x2 = 4 - \frac{3x - 6}{x2}$
41. $F1x2 = \frac{x2 - 2x - 15}{x2 + 6x + 9}$
42. $F1x2 = \frac{x2 - 5x + 4}{x2 - 2x + 1}$
43. $G1x2 = \frac{2 - x}{1x - 12\ 16^2}$
44. $G1x2 = \frac{x}{1x + 22^2}$
45. $f1x2 = 2x + \frac{9}{x}$
46. $f1x2 = x + \frac{1}{x}$
47. $f1x2 = 2x2 + \frac{}{x}$
48. $f1x2 = x2 + \frac{1}{x}$
49. $f1x2 = 2x + \frac{9}{x3}$
50. $f1x2 = x + \frac{1}{x3}$

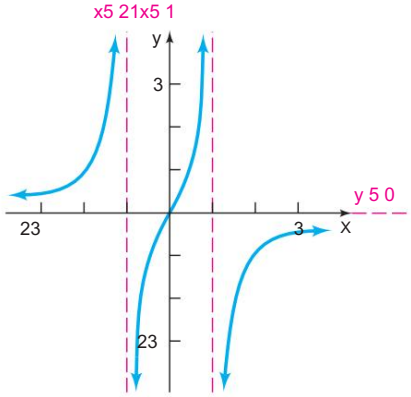
Machine Translated by Google

En los problemas 51 a 54, encuentre una función racional que pueda tener la gráfica dada. (Podría ser posible más de una respuesta).

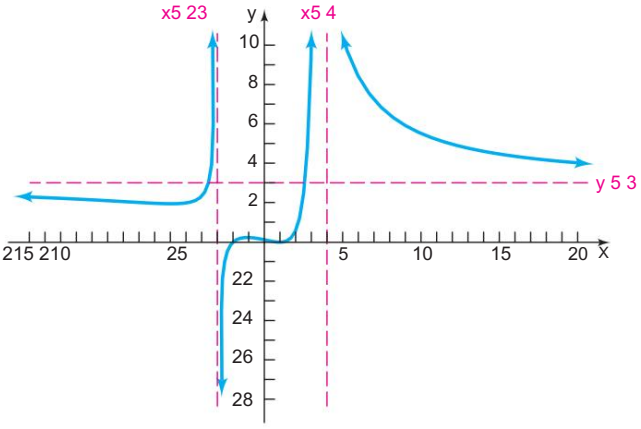
51.



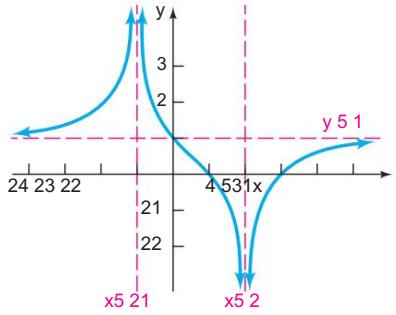
52.



53.



54.



Aplicaciones y extensiones

55. Probabilidad En una recaudación de fondos, a cada persona que asiste se le entrega una pelota marcada con un número diferente del 1 al x. Luego se colocan todas las bolas en una urna y se elige una bola al azar de la urna. La probabilidad de que se seleccione una bola en particular es $\frac{1}{x}$. Entonces la probabilidad de que un determinada bola no es elegida es $1 - \frac{1}{x}$. Grafica $P1x2 = 1 - \frac{1}{x}$ utilizando transformaciones. Comente la probabilidad de que una bola en particular no sea elegida a medida que x aumenta.

56. Esperando en la fila Supongamos que dos empleados en un restaurante de comida rápida pueden atender a los clientes a razón de 6 clientes por minuto. Supongamos además que los clientes llegan al restaurante a una velocidad de x clientes por minuto.
El tiempo promedio T, en minutos, empleado esperando en la fila y tomando y surtiendo su pedido está dado por la función 1

T1x2 = - x - 6 _____, donde 0 6 x 6 6. Grafica esta función

utilizando transformaciones.

57. Concentración del fármaco La concentración C de un determinado fármaco en el torrente sanguíneo de un paciente t minutos después de la inyección se administra mediante

$$C1t2 = \frac{50\ \text{toneladas}}{__ + 25}$$

(a) Encuentre la asíntota horizontal de C(t). ¿Qué sucede con la concentración del fármaco a medida que t aumenta?

(b) Utilizando una herramienta gráfica, grafique C = C1t2.

(c) Determine el momento en que la concentración es más alto.

58. Concentración del fármaco La concentración C de un determinado fármaco en el torrente sanguíneo de un paciente t horas después de la inyección se administra mediante

$$C1t2 = \frac{t}{2\,2t + 1}$$

(a) Encuentre la asíntota horizontal de C(t). ¿Qué sucede con la concentración del fármaco a medida que t aumenta?

(b) Utilizando una herramienta gráfica, grafique C = C1t2.

(c) Determine el momento en que la concentración es más alto.

59. Costo mínimo Se va a cercar un área rectangular adyacente a un río; no se necesita valla en el lado del río. El área cerrada será de 1000 pies cuadrados. El cercado para el lado paralelo al río cuesta $5 por pie lineal, y el cercado para los otros dos lados cuesta $8 por pie lineal; los cuatro postes de las esquinas cuestan $25 cada uno. Sea x la longitud de uno de los lados perpendicular al río.

(a) Escriba una función C(x) que describa el costo del proyecto.

(b) ¿ Cuál es el dominio de C?

(c) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente C = C1x2.

(d) Encuentre las dimensiones del recinto más barato.

Machine Translated by Google

60. Efecto Doppler El efecto Doppler (llamado así por Christian Doppler) es el cambio en el tono (frecuencia) del sonido de una fuente (s) tal como lo escucha un observador (o) cuando una o ambas están en movimiento. Si suponemos que tanto la fuente como el observador se mueven en la misma dirección, la relación es

$$f' = fa\,\frac{v - vo}{v - vs}b$$

donde f′ = tono percibido por el observador

fa = tono real de la fuente

v = velocidad del sonido en el aire (supongamos 772,4 mph)

vo = velocidad del observador

vs = velocidad de la fuente

Suponga que está viajando por una carretera a 45 mph y escucha una ambulancia (con sirena) que viene hacia usted desde atrás. El tono real de la sirena es de 600 hercios (Hz).

(a) Escriba una función f′ 1vs2 que describa este escenario.

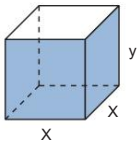
(b) Si f′ = 620 Hz, encuentre la velocidad de la ambulancia.

(c) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la función.

(d) Verifique su respuesta del inciso (b).

Fuente: www.acs.psu.edu/drussell/

61. Minimización del área de superficie United Parcel Service lo contrató para diseñar una caja abierta con una base cuadrada que tiene un volumen de 5000 pulgadas cúbicas. Vea la ilustración.



(a) Exprese el área de superficie S de la caja en función de x.

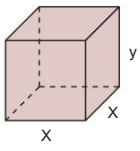
(b) Usando una herramienta gráfica, grafique la función encontrada en el inciso (a).

(c) ¿Cuál es la cantidad mínima de cartón que se puede usar para construir la caja?

(d) ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que minimizan el área de superficie?

(e) ¿Por qué podría interesarle a UPS diseñar una caja que ¿Minimiza la superficie?

62. Minimización del área de superficie United Parcel Service lo contrató para diseñar una caja cerrada con una base cuadrada que tiene un volumen de 10,000 pulgadas cúbicas. Vea la ilustración.



(a) Exprese el área de superficie S de la caja en función de x.

(b) Usando una herramienta gráfica, grafique la función encontrada en el inciso (a).

(c) ¿Cuál es la cantidad mínima de cartón que se puede usar para construir la caja?

(d) ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que minimizan el área de superficie?

(e) ¿Por qué podría interesarle a UPS diseñar una caja que ¿Minimiza la superficie?

63. Costo de una lata Se requiere que una lata con forma de cilindro circular recto tenga un volumen de 500 centímetros cúbicos. La parte superior e inferior están hechas de un material que cuesta 6 centavos por centímetro cuadrado, mientras que los lados están hechos de un material que cuesta 4 centavos por centímetro cuadrado.

(a) Exprese el costo total C del material en función del radio r del cilindro. (Consulte la Figura 43.)

(b) Gráfica C = C1r2. ¿ Para qué valor de r el costo C es mínimo?

64. Material necesario para fabricar un tambor Se requiere que un tambor de acero con forma de cilindro circular recto tenga un volumen de 100 pies cúbicos.

(a) Exprese la cantidad A de material requerido para fabricar el tambor en función del radio r del cilindro.

(b) ¿Cuánto material se requiere si el radio del tambor es ¿3 pies?

(c) ¿Cuánto material se requiere si el radio del tambor es ¿4 pies?

(d) ¿Cuánto material se requiere si el radio del tambor es ¿5 pies?

(e) Gráfica A = A1r2. ¿Para qué valor de r es A? ¿pequeñísimo?

65. ¿Alguien quiere tenis? Para ganar un partido de tenis, un jugador debe sumar cuatro puntos. Si ambos jugadores han ganado tres puntos, el juego continúa hasta que un jugador tenga dos puntos de ventaja para ganar el juego. El modelo

$$P1x2 = \frac{x4\ 1 - 8x3 + 28x2 - 34x + 15)}{2x2 - 2x + 1}$$

representa la probabilidad P de que un jugador gane un juego en el que el jugador está sirviendo y x es la probabilidad de ganar un punto con el servicio. El jugador que saca es el primero en poner el balón en juego.

Fuente: Chris Gray, "Juego, set y estadísticas", Importancia, Febrero de 2015.

(a) ¿ Cuál es la probabilidad de que un jugador que está sacando gane el juego si la probabilidad de que el jugador gane un punto con el servicio es 0,64?

(b) Encuentre e interprete P(0,62).

(c) Resuelva P1x2 = 0,9.

(d) Grafique P = P1x2 para 0 … x … 1. Describa lo que le sucede a P cuando x tiende a 1.

66. Velocidad de mensajes de texto Un estudio sobre una nueva distribución de teclado para teléfonos inteligentes encontró que el número promedio de palabras que los usuarios podían enviar por mensaje de texto por minuto podría aproximarse a

$$N1t2 = \frac{321t + 22}{t + 5}$$

donde t es el número de días de práctica con el teclado.

(a) ¿Cuál fue el número promedio de palabras que los usuarios podían enviar por mensaje de texto con el nuevo diseño al comienzo del estudio?

(b) ¿Cuál fue el número promedio de palabras que los usuarios podían enviar por mensaje de texto después de usar el diseño durante 1 semana?

(c) Encuentre e interprete la asíntota horizontal de N.

Machine Translated by Google

67. Problema de desafío que elimina una discontinuidad en el ejemplo 5, graficamos la función racional $R(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$ y encontró que la gráfica tiene un agujero en el punto $(2, \frac{3}{4})$.

Por lo tanto, la gráfica de R es discontinua en $(2, \frac{3}{4})$. Nosotros Puede eliminar esta discontinuidad definiendo la función racional R usando la siguiente función definida por partes:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{3}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

(a) Redefina R del problema 33 de modo que se elimine la discontinuidad en x = 3.

(b) Redefina R del problema 35 de manera que la discontinuidad en $x = \frac{3}{2}$ es removido.

68. Problema de desafío Eliminación de una discontinuidad Consulte el problema 67.

(a) Redefina R del problema 34 de modo que se elimine la discontinuidad en x = - 5.

(b) Redefina R del problema 36 de modo que la discontinuidad en $x = -2\frac{5}{}$ es removido.

Discusión y escritura

69. Grafica cada una de las siguientes funciones:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad y = \frac{x^4 - 1}{x - 1} \quad y = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

¿Es x = 1 una asíntota vertical? ¿Por qué? ¿Qué sucede para x = 1? ¿Qué conjeturas sobre la gráfica xn - 1?

de $y = \frac{}{x - 1}$, n Ú 1 un número entero, para x = 1?

70. Grafica cada una de las siguientes funciones:

$$y = \frac{x^2}{x - 1} \quad y = \frac{x^4}{x - 1} \quad y = \frac{x^6}{x - 1} \quad y = \frac{x^8}{x - 1}$$

¿Qué similitudes ves? ¿Qué diferencias?

71. Cree una función racional que tenga las siguientes características: cruza el eje x en 3; toca el eje x en - 2; una asíntota vertical, x = 1; y una asíntota horizontal, y = 2. Dale tu función racional a un compañero de clase y pídele una crítica escrita de tu función racional.

72. Cree una función racional que tenga las siguientes características: cruza el eje x en 2; toca el eje x en - 1; una asíntota vertical en x = - 5 y otra en x = 6; y una asíntota horizontal, y = 3. Compara tu función con la de un compañero de clase. ¿En qué se diferencian? ¿Cuáles son sus similitudes?

73. Escribe algunos párrafos que proporcionen una estrategia general para graficar una función racional. Asegúrese de mencionar lo siguiente: propia, impropia, intersecciones y asíntotas.

74. Crea una función racional con las siguientes características: tres ceros reales, uno de multiplicidad 2; intersección y 1; asíntotas verticales, x = - 2 y x = 3; asíntota oblicua, y = 2x + 1. ¿Es esta función racional única? Compara tu función con las de otros estudiantes. ¿Cuál será igual que el de todos los demás? Añade algunas características más, como la simetría o nombrar los ceros reales. ¿Cómo modifica esto la función racional?

75. Explique las circunstancias bajo las cuales la gráfica de una función racional tiene un hueco.

Conserve su conocimiento

Los problemas 76 a 85 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

76. Resta: $14x^3 - 7x + 12 - 15x^2 - 9x + 32$

77. Resuelve: $\frac{3x}{3x + 1} = \frac{x - 2}{x + 5}$

78. Encuentra el máximo absoluto de $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 6x - 5$.

79. Encuentra el vértice de la gráfica de $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$.

80. Encuentra la función cuya gráfica es igual a la gráfica de y = · x · pero desplazada 4 unidades hacia abajo.

81. Encuentra g(3) donde

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 - 7x & \text{si } x \neq 0 \\ 5x - 9 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

82. Dado $f(x) = x^2 + 3x - 2$, encuentre f(x - 2).

83. Determina si las rectas y = 3x - 2 y 2x + 6y = 7 son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

84. Resuelve: $x - 2\sqrt{x + 7} = 5$

85. Resuelve: $\sqrt{24 - x^2} + 24 - x^2 = 0$

'¿Estas preparado?' Respuesta

1. ¢0, $\sqrt{14}$ ≤, 11, 02, 1 - 1, 02

Machine Translated by Google

4.5 Desigualdades polinómicas y racionales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Resolver desigualdades (Sección A.9, págs. A76–A78)
- Resolver desigualdades cuadráticas (Sección 3.5, págs. 201–203)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 264.

OBJETIVOS 1 Resolver desigualdades polinómicas (p. 260)
2 Resolver desigualdades racionales (p. 262)

1 Resolver desigualdades polinomiales

En esta sección resolvemos desigualdades que involucran polinomios de grado 3 y superiores, junto con desigualdades que involucran funciones racionales. Para ayudar a comprender el procedimiento algebraico para resolver tales desigualdades, utilizamos la información obtenida en las cuatro secciones anteriores sobre las gráficas de funciones polinómicas y racionales. El enfoque sigue la misma metodología que utilizamos para resolver desigualdades que involucran funciones cuadráticas.

EJEMPLO 1 Resolver una desigualdad polinómica usando una gráfica

Resuelve $1x + 32\,1x - 12^{\,2} \;7\; 0$ graficando $f1x2 = 1x + 32\,1x - 12^{\,2}$.

Solución

La gráfica $f1x2 = 1x + 32\,1x - 12^{\,2}$ está arriba del eje x. La función es positiva en estos intervalos. Usando los pasos 1 a 5 en la página 227, obtenemos el gráfico que se muestra en la Figura 45.

y determine los intervalos de x para los cuales

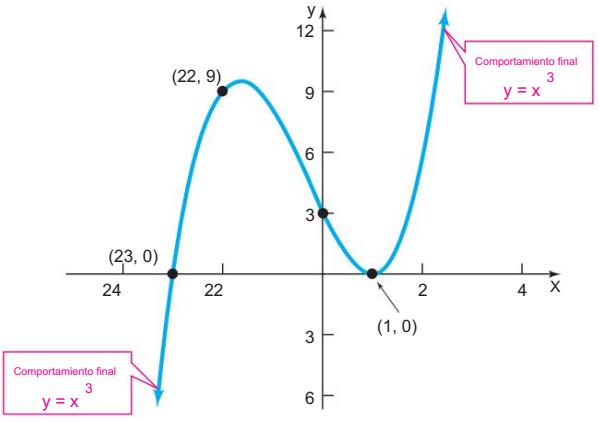


Figura 45 $f\,1x2 = 1x + 32\,1x - 12^{\,2}$

En la gráfica, podemos ver que $f1x2 \;7\; 0$ para $- 3 \;6\; x \;6\; 1$ o para $x \;7\; 1$. El conjunto solución es $5x\cdot - 3 \;6\; x \;6\; 1$ o $x \;7\; 16$ o, usando notación de intervalo, $1 - 3, 12\ h\ 11, q\ 2$.

Ahora trabaja el problema 9

Los resultados del Ejemplo 1 conducen al siguiente enfoque para resolver desigualdades polinómicas y racionales algebraicamente. Supongamos que la desigualdad polinómica o racional tiene una de las formas

$$f1x2 \;6\; 0 \quad f1x2 \;7\; 0 \quad f1x2 \ldots 0 \quad f1x2 \text{ Ú } 0$$

Machine Translated by Google

Ubique los ceros reales de f si f es una función polinómica y ubique los ceros reales del numerador y el denominador si f es una función racional. Utilice estos ceros para dividir la recta numérica real en intervalos porque en cada intervalo, la gráfica de f está por encima del eje x 3 f1x2 7 04 o por debajo del eje x 3 f1x2 6 04. Esto nos permite identificar la solución de la desigualdad.

EJEMPLO 2 Resolver una desigualdad polinómica algebraicamente

Resuelve la desigualdad x4 7 x algebraicamente y grafica el conjunto solución.

Solución paso-a-paso

Paso 1 Escribe la desigualdad de manera que una función polinómica f esté en el lado izquierdo y cero en el lado derecho.

Reorganiza la desigualdad para que 0 esté en el lado derecho.

x4 7x _

x4 - x7 0 Resta x de ambos lados de la desigualdad.

Esta desigualdad es equivalente a la que estamos resolviendo.

Paso 2 Determina los ceros reales (intersecciones x de la gráfica) de f.

Encuentra los ceros reales de f1x2 = x4 - x resolviendo x4 - x = 0.

x4 - x = 0

x1x3 - 12 = 0 Factoriza x.

x1x - 12 1x2 + x + 12 = 0 Factoriza la diferencia de dos cubos.

x = 0 o x - 1 = 0 o x2 + x + 1 = 0 Utilice la propiedad de producto cero.

x = 0 o x = 1

La ecuación x2 + x + 1 = 0 no tiene soluciones reales. ¿Ves por qué?

Paso 3 Usa los ceros reales encontrados en el Paso 2 para dividir la recta numérica real en intervalos.

Usa los ceros reales para separar la recta de números reales en tres intervalos:

1-q, 02 10, 12 11, q 2

Paso 4 Seleccione un número en cada intervalo, evalúe f en el número y determine si el valor de f es positivo o negativo. Si el valor de f es positivo, todos los valores de f en el intervalo son positivos. Si el valor de f es negativo, todos los valores de f en el intervalo son negativos.

NOTA Si la desigualdad no es estricta (es decir, si es… o Ú), incluya las soluciones de f 1x2 = 0 en la solución colocar. j

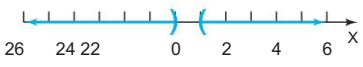


Figura 46

Seleccione un número de prueba en cada intervalo que se encuentra en el Paso 3 y evalúe f1x2 = x4 - x en cada número para determinar si el valor de f es positivo o negativo. Ver Tabla 14.

Tabla 14

	0 1 X		
Intervalo	1-q, 02	(0, 1)	11, q 2
Número elegido -1		$\frac{1}{2}$	2
Valor de f	f1-12 = 2	fa 1 segundo = - $\frac{7}{\text{décima}}$	f 122 = 14
Conclusión	Positivo	Negativo	Positivo

Concluya que f1x2 7 0 para todos los números x para los cuales x 6 0 o x 7 1. El conjunto solución de la desigualdad x4 7 x es 5x· x 6 0 o x 7 16 o, usando notación de intervalo, 1 - q, 02 h 11, q 2.

La Figura 46 muestra la gráfica del conjunto solución.

El papel de la multiplicidad en la resolución de desigualdades polinómicas

En el ejemplo 2, usamos el número - 1 y encontramos que f es positivo para todo x 6 0. Debido a que el "punto de corte" de 0 es un cero de multiplicidad impar (x es un factor elevado a la primera potencia), el signo de f cambia a ambos lados de 0, por lo que para 0 6 x 6 1, f es negativa. De manera similar, f es positiva para x 7 1, ya que la multiplicidad del cero 1 es impar.

Ahora resuelve el problema 2 1

Machine Translated by Google

2 Resolver desigualdades racionales

Así como usamos un enfoque gráfico para ayudar a comprender el procedimiento algebraico para resolver desigualdades que involucran polinomios, usamos un enfoque gráfico para motivar el procedimiento algebraico para resolver desigualdades que involucran expresiones racionales.

EJEMPLO 3 Resolver una desigualdad racional usando una gráfica

Resuelve $\frac{x - 1}{x2 - 4}$ Ú 0 graficando R1x2 = $\frac{x - 1}{x2 - 4}$.

Solución

Grafique R1x2 = $\frac{x - 1}{x2 - 4}$ y determine los intervalos de x para los cuales la gráfica está encima o en el eje x. La función R no es negativa en estos intervalos. Nosotros Grafique R1x2 = $\frac{x - 1}{x2 - 4}$ en el ejemplo 1, sección 4.4 (págs. 245 y 246). Reproducimos el gráfico de la Figura 47.

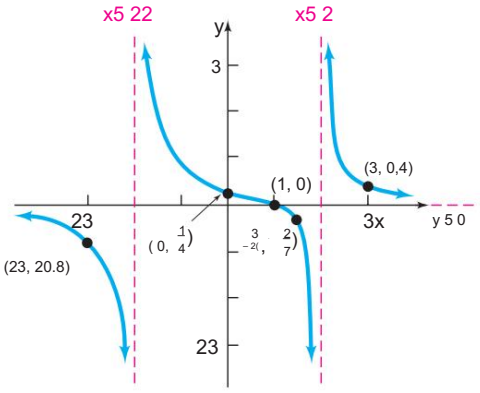


Figura 47 R1x2 = $\frac{x - 1}{x2 - 4}$

En la gráfica, podemos ver que R1x2 Ú 0 para - 2 6 x … 1 o x 7 2. El conjunto solución es 5x· - 2 6 x … 1 o x 7 2 6 o, usando notación de intervalo, 1 - 2, 14 h 12, q 2.

Ahora resuelve el problema 1 5

Para resolver algebraicamente una desigualdad racional, seguimos el mismo enfoque que usamos para resolver algebraicamente una desigualdad polinómica. Sin embargo, también debemos identificar los ceros reales del denominador de la función racional porque el signo de una función racional puede cambiar a cualquier lado de una asíntota vertical. Convénzase de esto mirando la Figura 47. Observe que los valores de la función son negativos para x 6 - 2 y positivos para x 7 - 2 (pero menores que 1).

EJEMPLO 4 Resolver una desigualdad racional algebraicamente

Resuelve la desigualdad $\frac{3x2 + 13x + 9}{1x + 22} \ldots 3$ algebraicamente y grafica el conjunto solución.

Machine Translated by Google

Solución paso-a-paso

Paso 1 Escribe la desigualdad de modo que una función racional f esté en el lado izquierdo y cero en el lado derecho.

Reorganiza la desigualdad para que 0 esté en el lado derecho.

$$\frac{3x2 + 13x + 9}{1x + 22^{2}} \ldots 3$$

$$\frac{3x2 + 13x + 9}{x2 + 4x + 4} - 3 \ldots 0$$

Resta 3 de ambos lados de la desigualdad; Expande 1x · 22 2.

$$\frac{3x2 + 13x + 9}{x2 + 4x + 4} - 3 \# \frac{x2 + 4x + 4}{x2 + 4x + 4} \ldots 0$$

Multiplicar 3 por $\frac{x2 \cdot 4x \cdot 4}{x2 \cdot 4x \cdot 4}$.

$$\frac{3x2 + 13x + 9 - 3x2 - 12x - 12}{x2 + 4x + 4} \ldots 0$$

Escribe como un cociente simple.

$$\frac{x - 3}{1x + 22^{2}} \ldots 0$$

Combina términos semejantes.

Paso 2 Determina los ceros reales (intersecciones x de la gráfica) de f y los números reales para los cuales f no está definida.

El cero real de $f1x2 = \frac{x - 3}{1x + 22^{2}}$ es 3. Además, f no está definida para x = - 2.

Paso 3 Usa los ceros reales y los valores indefinidos que se encuentran en el Paso 2 para dividir la recta numérica real en intervalos.

Usa el cero real y el valor indefinido para dividir la recta de números reales en tres intervalos:

1 - q, - 22 1 - 2, 32 13, q 2

Paso 4 Seleccione un número en cada intervalo, evalúe f en el número y determine si el valor de f es positivo o negativo. Si el valor de f es positivo, todos los valores de f en el intervalo son positivos. Si el valor de f es negativo, todos los valores de f en el intervalo son negativos.

NOTA Si la desigualdad no es estricta (… o Ú), incluya las soluciones de f(x) = 0 en el conjunto de soluciones. j ■

Seleccione un número de prueba en cada intervalo del Paso 3 y evalúe f en cada número para determinar si el valor de f es positivo o negativo. Ver Tabla 15.

Tabla 15

	−2 3 x		
Intervalo	1 - q, -22	1-2, 32	13, q 2
Número elegido	-3	0	4
Valor de f	f1 -32 = -6	f102 = -4 3 —	f142 = 1/36
Conclusión	Negativo	Negativo	Positivo

Concluimos que f 1x2 … 0 para todos los números para los cuales x 6 - 2 o - 2 6 x … 3. Observe que no incluimos - 2 en la solución porque - 2 no está en el dominio de f.

El conjunto solución de la desigualdad. $\frac{3x2 + 13x + 9}{1x + 22^{2}}$ … 3 es 5x· x 6 - 2 o - 2 6 x … 36

o, usando notación de intervalo, 1 - q, - 22 h 1 - 2, 3]. La Figura 48 muestra la gráfica del conjunto solución.

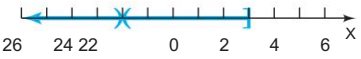


Figura 48

El papel de la multiplicidad en la resolución de desigualdades racionales

En el ejemplo 4, usamos el número - 3 y encontramos que f(x) es negativo para todo x 6 - 2. Debido a que el "punto de corte" de - 2 es un cero de multiplicidad par, sabemos que el signo de f(x) no cambia en ninguno de los lados de - 2, por lo que para - 2 6 x 6 3, f(x) es negativo . Debido a que el "punto de corte" de 3 es un cero de multiplicidad impar, el signo de f(x) cambia en ambos lados de 3, por lo que para x 7 3, f(x) es positiva. Por lo tanto, el conjunto solución de... $\frac{3x2 + 13x + 9}{1x + 22^{2}}$ 3 es 5x· x 6 - 2 o - 2 6 x … 36 o, usando notación de intervalo, 1 - q, - 22 h 1 - 2, 3].

Ahora resuelve los problemas 3 5 y 4 1

Machine Translated by Google

RESUMEN

Pasos para resolver desigualdades polinómicas y racionales algebraicamente

Paso 1: Escribe la desigualdad de modo que una función polinómica o racional f esté en el lado izquierdo y cero en el lado lado derecho en una de las siguientes formas:

f1x2 7 0 f1x2 Ú 0 f1x2 6 0 f1x2 … 0

Para funciones racionales, asegúrese de que el lado izquierdo esté escrito como un cociente único. Encuentra el dominio de f.

Paso 2: Determine los números reales en los que f1x2 = 0 y, si la función es racional, los números reales en los que la función f no está definida.

Paso 3: Usa los números que se encuentran en el Paso 2 para dividir la recta numérica real en intervalos.

Paso 4: seleccione un número en cada intervalo y evalúe f en el número.

- Si el valor de f es positivo, entonces f1x2 7 0 para todos los números x en el intervalo.
- Si el valor de f es negativo, entonces f1x2 6 0 para todos los números x en el intervalo.
- Si la desigualdad no es estricta 1Ú o …2, incluya las soluciones de f1x2 = 0 que están en el dominio de f en el conjunto solución. Tenga cuidado de excluir valores de x donde f no está definido.

4.5 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Resuelve la desigualdad 3 - 4x 7 5. Grafica el conjunto solución. (págs. A76–A78)

2. Resuelve la desigualdad x2 - 5x … 24. Grafica el conjunto solución. (págs. 201-203)

Conceptos y vocabulario

3. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes podría ser un número de prueba para el intervalo: 2 6 x 6 5?

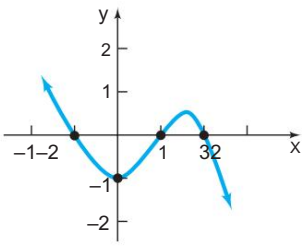
(un) - 3 (segundo) - 2 (c) 4 (d) 7

4. Verdadero o Falso La gráfica de f1x2 = $\frac{x}{x-3}$ está arriba el eje x para x 6 0 o x 7 3, por lo que el conjunto solución de desigualdad $\frac{x}{x-3}$ Ú 0 es 5x· x … 0 o x Ú 36.

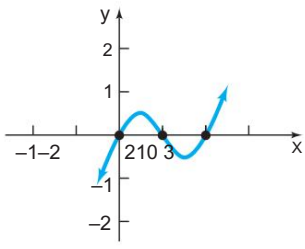
Desarrollo de habilidades

En los problemas 5 a 8, usa la gráfica de la función f para resolver la desigualdad.

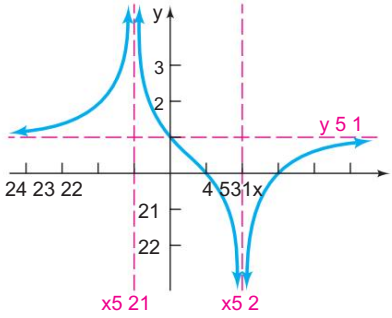
5. (a) f1x2 6 0
(b) f1x2 Ú 0



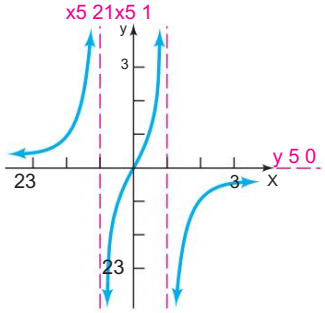
6. (a) f1x2 7 0
(b) f1x2 ... 0



7. (a) f1x2 7 0
(b) f1x2 ... 0



8. (a) f1x2 6 0
(b) f1x2 Ú 0



Machine Translated by Google

En los problemas 9 a 14, resuelva la desigualdad usando la gráfica de la función.

[Sugerencia: las gráficas se dibujaron en los problemas 5 a 10 de la sección 4.2.]

9. Resuelva f1x2 6 0, donde f1x2 = x2 1x - 32.

10. Resuelva f1x2 … 0, donde f1x2 = x1x + 22 12.

11. Resuelve f1x2 7 0, donde f1x2 = 1x - 12 1x + 32

Resuelva f1x2 Ú 0, donde f1x2 = 1x + 42 11- x2.

13. Resuelve f1x2 6 0, donde f1x2 = - 1x + 42 1x - 12 2

14. Resuelve f1x2 … 0, donde f1x2 = - 21x + 22 1x - 22

En los problemas 15 a 18, resuelva la desigualdad usando la gráfica de la función.

[Sugerencia: las gráficas se dibujaron en los problemas 7 a 10 de la sección 4.4.]

15. Resuelve R1x2 7 0, donde R1x2 = $\frac{x + 1}{x1x + 42}$.

16. Resuelve R1x2 6 0, donde R1x2 = 1x $\frac{x}{- 12 1x + 22}$.

17. Resuelva R1x2 Ú 0, donde R1x2 = $\frac{2x + 4}{x - 1}$.

18. Resuelve R1x2 … 0, donde R1x2 = 2x $\frac{3x + 3}{+ 4}$.

En los problemas 19 a 54, resuelva cada desigualdad algebraicamente.

19. 1x - 52 1x + 22 22. 2 7 0

20. 1x - 42 1x + 62 6 0

21. x3 - 4x2 7 0

x3 + 8x2 6 0

23. 3x3 6 - 15x2

24. 2x3 7 - 8x2

25. 1x + 12 1x + 22 1x + 32 … 0

26. 1x + 22 1x - 42 1x - 62 … 0

27. x3 + 2x2 - 3x 7 0

28. x4 - 4x2 - 12x 7 0

29. x4 6 9x2

30. x4 7 x2

31. x3 7 1

32. x4 7 1

33. 1x - 32 1x + 22 6x2 + 3x + 5

34. 31x2 - 22 6 21x - 12 2 + x2

35. $\frac{x + 1}{x - 1}$ 7 0

36. $\frac{x - 3}{x + 1}$ 7 0

37. $\frac{1x - 32 1x + 22}{x - 1}$ … 0

38. $\frac{1x - 22 1x + 22}{x}$ … 0

39. $\frac{1x + 52^2}{x2 - 4}$ U 0

40. $\frac{1x - 32x2-4 _^2}{}$ U 0

41. $\frac{x + 4}{x - 2}$ … 1

42. $\frac{x + 2}{x - 4}$ Ú 1

43. $\frac{x - 4}{2x + 4}$ Ú 1

44. $\frac{3x - 5}{x + 2}$ … 2

45. $\frac{x - 1}{x + 2}$ Ú - 2

46. $\frac{x + 1}{x - 3}$ … 2

47. $\frac{5}{x - 3}$ 7 $\frac{3}{x + 1}$

48. $\frac{1}{x - 2}$ 6 $\frac{2}{3x - 9}$

49. $\frac{x1x2 + 12 1x - 22}{1x - 12 1x + 12}$ U 0

50. $\frac{x2 13 + x2 1x + 42}{1x + 52 1x - 12}$ U 0

51. $\frac{12- x2x3^3 13x - 22}{+ 1}$ 6 0

52. $\frac{13 - x2^3 12x + 12}{x3 - 1}$ 6 0

53. x + $\frac{12}{x}$ 6 7

54. 6x - 5 6 $\frac{6}{x}$

Práctica mixta En los problemas 55 a 58, (a) grafique cada función a mano y (b) resuelva f1x2 Ú 0.

55. f1x2 = $\frac{2x2 + 9x + 9}{x2 - 4}$

56. f1x2 = $\frac{x2 + 5x - 6}{x2 - 4x + 4}$

57. f1x2 = $\frac{1x - 12 1x2 - 5x + 42}{x2 + x - 20}$

58. f1x2 = $\frac{1x + 42 1x2 - 2x - 32}{x2 - x - 6}$

Aplicaciones y extensiones

59. ¿ Para qué números positivos es el cubo del número? mayor que cuatro veces su cuadrado?

60. ¿ Para qué números positivos el cubo del número es menor que el número?

61. ¿Cuál es el dominio de la función f1x2 = 2x4 - 16?

62. ¿Cuál es el dominio de la función f1x2 = 2x3 - 3x2 ?

63. ¿Cuál es el dominio de la función f1x2 = A x - 2? $\frac{}{x + 4}$?

64. ¿Cuál es el dominio de la función f1x2 = A x - 1? $\frac{}{x + 4}$?

En los problemas 65 a 68, determine dónde está la gráfica de f debajo de la gráfica de g resolviendo la desigualdad f1x2 … g1x2. Grafique f y g juntos.

65. f1x2 = x4 - 1
g1x2 = x - 1

66. f1x2 = x4 - 1
g1x2 = - 2x2 + 2

67. f1x2 = x4
g1x2 = 2- x2

68. f1x2 = x4 - 4
g1x2 = 3x2

69. ¿ Dónde está la gráfica de R1x2 = $\frac{x4 - 16}{x2 - 9}$ arriba del eje x?

Machine Translated by Google

70. ¿Dónde está la gráfica de $R(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 25}$ arriba del eje x?

71. Costo promedio Supongamos que el costo diario C de fabricar bicicletas está dado por $C(x) = 80x + 5000$. Entonces el promedio $80x + 5000$

El costo diario $\overline{C}$ viene dado por $\overline{C}(x) = \frac{\text{Cuántos}}{x}$

¿Deben producirse bicicletas cada día para que el costo promedio no sea superior a $100?

72. Costo promedio Véase el problema 71. Supongamos que el gobierno impone un impuesto de $1000 por día al fabricante de bicicletas, de modo que el costo diario C de fabricar x bicicletas ahora está dado por $C(x) = 80x + 6000$. Ahora el costo diario promedio $\overline{C}$ es $80x + 6000$

dado por $\overline{C}(x) = \frac{}{x}$. ¿Cuántas bicicletas se deben producir cada día para que el costo promedio no sea superior a $100?

73. Desafío Problema Puenting Originaria de la isla Pentecostés en el Pacífico, la práctica de que una persona salte desde un lugar alto sujeta a un accesorio flexible fue introducida en la cultura occidental en 1979 por el Dangerous Sport Club de la Universidad de Oxford. Un parámetro importante que debe conocer antes de intentar un salto en bungee es cuánto se estirará la cuerda en la parte inferior de la caída. La rigidez del

La cuerda está relacionada con la cantidad de estiramiento mediante la ecuación.

$$k = \frac{2W(S + L)}{S^2}$$

donde W = peso del saltador (libras)

K = rigidez de la cuerda (libras por pie)

L = longitud libre del cable (pies)

S = estiramiento (pies)

(a) Una persona de 150 libras planea saltar desde una cornisa unida a una cuerda de 42 pies de largo. Si la rigidez de la cuerda no es menor de 16 libras por pie, ¿cuánto se estirará la cuerda?

(b) Si los requisitos de seguridad no permiten que el saltador se acerque a menos de 3 pies del suelo, ¿cuál es la altura mínima requerida para la repisa en el inciso (a)?

Fuente: Instituto Americano de Física, Physics News Update, No. 150, 5 de noviembre de 1993.

74. Problema de desafío Fuerza gravitacional Según la ley de gravitación universal de Newton, la fuerza de atracción F entre dos cuerpos está dada por

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde m_1, m_2 = las masas de los dos cuerpos

r = distancia entre los dos cuerpos

G = constante gravitacional = 6,6742 * 10-11 newtons # metro2 # kilogramo-2

Supongamos que un objeto viaja directamente desde la Tierra a la Luna. La masa de la Tierra es 5,9742 * 1024 kilogramos, la masa de la Luna es 7,349 * 1022 kilogramos y la distancia media de la Tierra a la Luna es 384.400 kilómetros. Para un objeto entre la Tierra y la Luna, ¿a qué distancia de la Tierra la fuerza sobre el objeto debida a la Luna es mayor que la fuerza sobre el objeto debida a la Tierra?

Fuente: www.solarviews.com; es.wikipedia.org

Explicar conceptos: discusión y escritura

75. La desigualdad $x^4 + 1 \le -5$ no tiene solución. Explicar por qué.

76. Un estudiante intentó resolver la desigualdad. $\frac{x + 4}{x - 3} \ge 0$ multiplicando ambos lados de la desigualdad por x - 3 para obtener $x + 4 \ge 0$. Esto llevó a una solución de $5x \cdot x \ge -46$. ¿Está en lo cierto el estudiante? Explicar.

77. Escribe una desigualdad racional cuyo conjunto solución sea $5x \cdot -3 \le x \le 56$.

78. Inventa una desigualdad que no tenga solución. inventa uno eso tiene exactamente una solución.

Conserve su conocimiento

Los problemas 79 a 88 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

79. Resuelve: $9 - 2x \ge 4x + 1$

80. Factoriza completamente: $6x^4y^4 + 3x^3y^5 - 18x^2y^6$

81. Escribe una función cuya gráfica sea la gráfica de $y = 2x$ pero

está comprimido verticalmente por un factor de $\frac{2}{3}$.

82. Si $f(x) = 2\sqrt{x - 1}$ y $g(x) = 2x + 1$, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ e indique su dominio.

83. Si $f(x) = 4x + 3$, encuentre $f\left(x - \frac{3}{4}\right)$.

84. Resuelve $v = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ para c.

85. Determina si la gráfica de

$x^2 + y^2 - 2x^2$ es $= 9x^2 + y^2$

simétrico con respecto al eje x, al eje y, al origen o a ninguno de estos.

86. Calcule los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$. Redondea las respuestas a dos decimales.

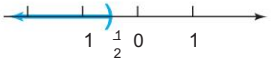
87. Resuelve: $5x^2 - 3 = 2x^2 + 11x + 1$

88. ¿ Cuáles son el cociente y el resto cuando $8x^2 - 4x + 5$ es dividido por $4x + 1$?

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, \infty)$

$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$



2. $5x \cdot -3 \le x \le 8$ o $[-3, 8]$

Machine Translated by Google

4.6 Los ceros reales de una función polinómica

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Evaluación de funciones (Sección 2.1, págs. 87–89)
- Factorizar polinomios (Sección A.3, págs. A27–A28)
- División sintética (Sección A.4, págs. A31–A34)
- División polinomial (Sección A.3, págs. A25–A27)
- Resolver una ecuación cuadrática (Sección A.6, págs. A47–A51)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 278.

OBJETIVOS 1 Usar los teoremas del resto y del factor (p. 267)
2 Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos de una función polinómica (p. 270)
3 Utilice el teorema de los ceros racionales para enumerar los ceros racionales potenciales de un Función polinómica (p. 271)
4 Encuentra los ceros reales de una función polinómica (p. 272)
5 Resolver ecuaciones polinómicas (p. 274)
6 Utilice el teorema de los límites de ceros (p. 275)
7 Utilice el teorema del valor intermedio (p. 276)

En la sección 4.1 pudimos identificar los ceros reales de una función polinómica porque la función polinómica estaba en forma factorizada o se podía factorizar fácilmente. Pero, ¿cómo encontramos los ceros reales de una función polinómica si no está factorizada o no se puede factorizar fácilmente?

Recuerde que si r es un cero real de una función polinómica f, entonces f1r2 = 0, r es una intersección con el eje x de la gráfica de f, x - r es un factor de f y r es una solución de la ecuación f1x2 = 0. Por ejemplo, si x - 4 es un factor de f, entonces 4 es un cero real de f y 4 es una solución de la ecuación f1x2 = 0. Para funciones polinómicas, hemos visto la importancia de los ceros reales para graficando. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los ceros reales de una función polinómica son difíciles de encontrar utilizando métodos algebraicos. No hay fórmulas buenas como la fórmula cuadrática disponibles para ayudarnos a encontrar ceros para polinomios de grado 3 o superior. Existen fórmulas para resolver cualquier ecuación polinómica de tercer o cuarto grado, pero son algo complicadas. No existen fórmulas generales para ecuaciones polinómicas de grado 5 o superior. Consulte la característica histórica al final de esta sección para obtener más información.

1 Utilice los teoremas del resto y del factor

Cuando se divide un polinomio (el dividendo) por otro (el divisor), se obtiene un polinomio cociente y un resto. El resto es el polinomio cero o un polinomio cuyo grado es menor que el grado del divisor. Para comprobarlo, verifique que

1Cociente2 1Divisor2 + Resto = Dividendo

Esta rutina de verificación es la base de un famoso teorema llamado algoritmo de división* para polinomios, que ahora enunciamos sin demostración.

*Un proceso sistemático en el que ciertos pasos se repiten un número finito de veces se llama algoritmo . Por ejemplo, la división polinomial es un algoritmo.

Machine Translated by Google

TEOREMA Algoritmo de división de polinomios

Si f(x) y g(x) denotan funciones polinomiales y si g(x) es un polinomio cuyo grado es mayor que cero, entonces existen funciones polinomiales únicas q(x) y r(x) para las cuales

$$\frac{f1x2}{g1x2} = q1x2 + \frac{r1x2}{g1x2} \quad \text{o} \quad f1x2 = q1x2g1x2 + r1x2 \qquad (1)$$

dividendo cociente divisor resto

donde r(x) es el polinomio cero o un polinomio de grado menor que el de g(x).

En la ecuación (1), f(x) es el dividendo, g(x) es el divisor, q(x) es el cociente, y r(x) es el resto.

Si el divisor g(x) es un polinomio de primer grado de la forma

$$g1x2 = x - c \qquad c \text{ un número real}$$

entonces el resto r(x) es el polinomio cero o un polinomio de grado 0.
Como resultado, para tales divisores, el resto es algún número, digamos R, y podemos escribir

$$f1x2 = 1x - c2q1x2 + R \qquad (2)$$

Esta ecuación es una identidad en x y es cierta para todos los números reales x. Supongamos que x = c. Entonces la ecuación (2) se convierte en

$$f1c2 = 1c - c2q1c2 + R$$
$$f1c2 = R$$

Sustituya f(c) por R en la ecuación (2) para obtener

$$f1x2 = 1x - c2q1x2 + f1c2 \qquad (3)$$

lo que demuestra el teorema del resto.

TEOREMA DEL RESTO

Supongamos que f es una función polinómica. Si f(x) se divide por x - c, entonces el resto es f(c).

EJEMPLO 1 Usando el teorema del resto

Encuentra el resto cuando f1x2 = x3 - 4x2 - 5 se divide por

(a) x - 3 (a) (b) x + 2

Solución

Se podría usar la división polinómica o la división sintética, pero es más fácil usar el teorema del resto, que establece que el resto es f(3).

$$f132 = 33 - 4 \# 32 - 5 = 27 - 36 - 5 = - 14$$

El resto es -14.

(b) Para encontrar el resto cuando f(x) se divide por x + 2 = x - 1 - 22, encuentre f1 - 22.

$$f1 - 22 = 1 - 22^{3} - 41 - 22^{2} - 5 = - 8 - 16 - 5 = - 29$$

El resto es - 29.

COMENTARIO Una utilidad gráfica proporciona otra forma de encontrar el valor de una función utilizando la función eVALUEate. Consulte su manual para obtener más detalles. Luego verifique los resultados del Ejemplo 1. ■

Compare el método utilizado en el Ejemplo 1(a) con el método utilizado en el Ejemplo 1 de la Sección A.4. ¿Qué método prefieres?

Machine Translated by Google

Una consecuencia importante y útil del teorema del resto es el teorema del factor.

TEOREMA DE FACTOR

Supongamos que f es una función polinómica. Entonces x - c es un factor de f(x) si y sólo si f1c2 = 0.

El teorema del factor en realidad consta de dos enunciados separados:

1. Si f1c2 = 0, entonces x - c es un factor de f(x).
2. Si x - c es un factor de f(x), entonces f1c2 = 0.

La prueba requiere dos partes.

Prueba

1. Supongamos que f1c2 = 0. Entonces, mediante la ecuación (3), tenemos

$$f1x2 = 1x - c2q1x2$$

para algún polinomio q(x). Es decir, x - c es un factor de f(x).

2. Suponga que x - c es un factor de f(x). Entonces existe una función polinómica q para cual

$$f1x2 = 1x - c2q1x2$$

Reemplazando x por c, encontramos que

$$f1c2 = 1c - c2q1c2 = 0 \# q1c2 = 0$$

Esto completa la prueba. ■

Un uso del teorema del factor es determinar si un polinomio tiene un factor particular.

EJEMPLO 2 Usando el teorema del factor

Utilice el teorema del factor para determinar si la función

$$f1x2 = 2x3 - x2 + 2x - 3$$

tiene el factor

(a) x - 1 El (b) x + 2

Solución

teorema del factor establece que si f1c2 = 0, entonces x - c es un factor.

(a) Como x - 1 tiene la forma x - c con c = 1, encuentre el valor de f(1).

$$f112 = 2 \# 1^{3} 2 - 1 + 2 \# 1 - 3 = 2 - 1 + 2 - 3 = 0$$

Según el teorema del factor, x - 1 es un factor de f(x).

(b) Para probar el factor x + 2, primero escríbalo en la forma x - c. Como x + 2 = x - 1 - 22, encuentre el valor de f1 - 22. Usando división sintética,

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ & & -4 & 10 & -24 \\ \hline & 2 & -5 & 12 & -27 \end{array}$$

Debido a que f1 - 22 = - 27 · 0, del teorema del factor concluimos que x - 1 - 22 = x + 2 no es un factor de f(x).

Ahora problema de trabajo 1 1

Machine Translated by Google

Del ejemplo 2(a), x - 1 es un factor de f. Para escribir f en forma factorizada, divida f por 1x - 12.

$$\begin{array}{r|rrr} 1\cdot 2 & -1 & 2 & -3 \\ & & 2 & 1 \\ \hline 2 & & 1 & 3 \\ & & 1 & 3 \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

El cociente es q1x2 = 2x2 + x + 3 con resto 0, como se esperaba. Escribe f en forma factorizada como

$$f1x2 = 2x3 - x2 + 2x - 3 = 1x - 12\ 12x2 + x + 32$$

Pero ¿cuántos ceros reales puede tener una función polinómica? Al contar los ceros de un polinomio, cuenta cada cero tantas veces como su multiplicidad.

TEOREMA Número de ceros reales

Una función polinómica no puede tener más ceros reales que su grado.

Demostración La demostración se basa en el teorema del factor. Si r es un cero real de una función polinómica f, entonces f1r2 = 0 y x - r es un factor de f(x). Cada cero real corresponde a un factor de grado 1. Como f no puede tener más factores de primer grado que su grado, el resultado es el siguiente. ■

2 Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos de una función polinómica

La regla de los signos de Descartes proporciona información sobre el número y la ubicación de los ceros reales de una función polinómica escrita en forma estándar (omitiendo términos con un coeficiente 0). Utiliza el número de variaciones en el signo de los coeficientes de f(x) y f1 - x2.

Por ejemplo, la siguiente función polinómica tiene dos variaciones en los signos de los coeficientes.

$$f1x2 = -3x7 + 4x4 + 3x2 - 2x - 1$$

(- a +) (+ a -)

Reemplazar x por - x da

$$f1 - x2 = -31 - x2 + 41 - x2^7 + 31 - x2^4 = 3x7 + 4x4 + 3x2 + 2x - 1$$

$$- 21 - x2 - 1$$

(+ a -)

que tiene una variación de signo.

TEOREMA La regla de los signos de Descartes

Supongamos que f es una función polinómica escrita en forma estándar.

- El número de ceros reales positivos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes distintos de cero de f(x) o es igual a ese número menos un número entero par.
- El número de ceros reales negativos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes distintos de cero de f1 - x2 o es igual a ese número menos un número entero par.

No demostramos la regla de los signos de Descartes. Veamos cómo se usa.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3

Uso del teorema del número de ceros reales y la regla de los signos de Descartes

Analiza los ceros reales de f1x2 = 3x7 - 4x4 + 3x3 + 2x2 - x - 3.

Solución Debido a que el polinomio es de grado 7, según el teorema del número de ceros reales hay como máximo siete ceros reales. Dado que hay tres variaciones en el signo de los coeficientes distintos de cero de f(x), según la regla de los signos de Descartes esperamos tres ceros reales positivos o un cero real positivo.

Para continuar, mira f1 - x2.

$$f1 - x2 = - 3x7 - 4x4 - 3x3 + 2x2 + x - 3$$

Hay dos variaciones de signo, por lo que esperamos dos ceros reales negativos o ningún cero real negativo. De manera equivalente, ahora sabemos que la gráfica de f tiene tres intersecciones x positivas o una intersección x positiva y dos intersecciones x negativas o ninguna intersección x negativa.

Ahora resuelve el problema 2 1

3 Utilice el teorema de los ceros racionales para enumerar los posibles ceros racionales de una función polinómica

El siguiente resultado, llamado Teorema de los ceros racionales, proporciona información sobre los ceros racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

TEOREMA Teorema de los ceros racionales

Sea f una función polinómica de grado 1 o superior de la forma

$$f1x2 = anxn + an\text{-}1xn\text{-}1 + g + a1x + a0 \qquad un \cdot 0\ a0 \cdot 0$$

donde cada coeficiente es un número entero. si q $\frac{pag}{}$, en términos más bajos, es un cero racional de f, entonces p debe ser factor de a0 y q debe ser factor de an.

EJEMPLO 4

Listado de posibles ceros racionales

Enumere los posibles ceros racionales de

$$f1x2 = 2x3 + 11x2 - 7x - 6$$

Solución Como f tiene coeficientes enteros, se puede utilizar el teorema de los ceros racionales. Primero, enumere todos los números enteros p que son factores del término constante a0 = - 6 y todos los números enteros q que son factores del coeficiente principal a3 = 2.

p: {1, {2, {3, {6 Factores de ·6

q: {1, {2 Factores de 2

Ahora forma todas las razones posibles $\frac{pag}{q}$.

$$\frac{pag}{q}: \{1 \quad \frac{1}{}, \{ \frac{2}{1}, \{ \frac{3}{1}, \{ \frac{6}{1}, \{2 \frac{1}{}, \{2 \frac{2}{}, \{2 \frac{3}{}, \{2 \frac{6}{}$$

que se simplifican a

$$\frac{pag}{}: \{1, \{2, \{3, \{6, \{ q \qquad \frac{1}{2}, \{2 \frac{3}{}$$

Si f tiene un cero racional, se encontrará en esta lista de 12 posibilidades.

Ahora resuelve el problema 3 3

Machine Translated by Google

Asegúrate de entender lo que dice el teorema de los ceros racionales: para un polinomio con coeficientes enteros, si hay un cero racional, es uno de los enumerados. Puede darse el caso de que la función no tenga ceros racionales.

Se puede utilizar la división polinomial, la división sintética o la sustitución para probar cada cero racional potencial y determinar si realmente es un cero. Para facilitar el trabajo, normalmente se prueban primero los números enteros.

4 Encuentra los ceros reales de una función polinómica

EJEMPLO 5 Encontrar los ceros reales de una función polinómica

Encuentra los ceros reales de la función polinómica f1x2 = 2x3 + 11x2 - 7x - 6.
Escribe f en forma factorizada.

Solución paso-a-paso

Paso 1 Usa el grado del polinomio para determinar el número máximo de ceros.

Como f es un polinomio de grado 3, hay como máximo tres ceros reales.

Paso 2 Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar el número posible de ceros reales positivos y ceros reales negativos.

Según la regla de los signos de Descartes, existe un cero real positivo. También porque

$$f1 - x2 = - 2x3 + 11x2 + 7x - 6$$

hay dos ceros reales negativos o ningún cero real negativo.

Paso 3 Si el polinomio tiene coeficientes enteros, usa el teorema de los ceros racionales para identificar los números racionales que son ceros potenciales. Utilice sustitución, división sintética o división polinómica para determinar si cada cero racional potencial es un cero. Si es así, factoriza la función polinómica. Repita el paso 3 hasta que se hayan identificado todos los ceros racionales de la función polinómica, o hasta que se pueda factorizar la función.

Enumere los posibles ceros racionales obtenidos en el Ejemplo 4:

$$\{1, \{2, \{3, \{6, \{\ 2 \qquad \frac{1}{}, \{2\ \frac{3}{}$$

De la lista, pruebe 1 primero usando división sintética.

$$\begin{array}{r|l} & 1\cdot 2\ 11 - 7 - 6 \\ & \quad 2\ 13 \qquad 6 \\ \hline & 2\ 13\ 6\ 0 \end{array}$$

Como f112 = 0, 1 es un cero de f y x - 1 es un factor de f. Entonces,

$$f1x2 = 2x3 + 11x2 - 7x - 6 = 1x - 12\ 12x2 + 13x + 62$$

Ahora cualquier solución de la ecuación 2x2 + 13x + 6 = 0 también es un cero de f. La ecuación 2x2 + 13x + 6 = 0 se llama ecuación deprimida de f. Debido a que cualquier solución de la ecuación 2x2 + 13x + 6 = 0 es un cero de f, trabaja con la ecuación reprimida para encontrar los ceros restantes de f.

La ecuación deprimida 2x2 + 13x + 6 = 0 se puede factorizar.

$$2x2 + 13x + 6 = 12x + 12\ 1x + 62 = 0$$

$$2x + 1 = 0 \text{ o } x + 6 = 0$$

$$x = - 2 \quad \frac{1}{} \quad \text{o} \qquad x = - 6$$

Los ceros de f son - 6, - 2 $\frac{1}{}$, y 1.

La forma factorizada de f es:

$$f1x2 = 2x3 + 11x2 - 7x - 6 = 1x - 1212x2 + 13x + 62$$
$$= 1x - 1212x + 12\ 1x + 62$$

Observe en el ejemplo 5 que los tres ceros de f están en la lista de ceros racionales potenciales y concuerdan con lo que se esperaba de la Regla de los Signos de Descartes.

Machine Translated by Google

RESUMEN

Pasos para encontrar los ceros reales de una función polinómica

Paso 1: Usa el grado del polinomio para determinar el número máximo de ceros reales.

Paso 2: utilice la regla de los signos de Descartes para determinar el número posible de ceros reales positivos y reales negativos ceros.

Paso 3:
- Si el polinomio tiene coeficientes enteros, utilice el teorema de los ceros racionales para identificar aquellos racionales números que potencialmente podrían ser ceros.
- Usar sustitución, división sintética o división polinómica para probar cada cero racional potencial. Cada Cuando se obtiene un cero, se encuentra un factor. Repita el paso 3 en la ecuación deprimida.
- Al buscar los ceros, utilice técnicas de factorización ya conocidas cuando sea posible.

EJEMPLO 6 Encontrar los ceros reales de una función polinómica

Encuentra los ceros reales de f1x2 = x5 - 7x4 + 19x3 - 37x2 + 60x - 36. Escribe f en forma factorizada.

Solución

Paso 1: Como f es un polinomio de grado 5, hay como máximo cinco ceros reales.

Paso 2: Según la regla de los signos de Descartes, hay cinco, tres o un cero real positivo. No hay ceros reales negativos porque

$$f1 - x2 = - x5 - 7x4 - 19x3 - 37x2 - 60x - 36$$

no tiene variación de signo.

Paso 3: Debido a que el coeficiente principal a5 = 1 y no hay ceros reales negativos, los ceros racionales potenciales se limitan a los enteros positivos 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36 (los factores positivos del término constante, 36). Pruebe primero el potencial racional cero 1, usando división sintética.

```
1·1 - 7  19 - 37  60 - 36
      1 - 6  13 - 24  36
1 - 6  13 - 24  36   0
```

El resto es f112 = 0, por lo que 1 es cero y x - 1 es un factor de f. Usa las entradas en la fila inferior de la división sintética para comenzar a factorizar f.

$$f1x2 = x5 - 7x4 + 19x3 - 37x2 + 60x - 36$$

$$= 1x - 12\ 1x4 - 6x3 + 13x2 - 24x + 362$$

Continúe el proceso usando la ecuación deprimida:

$$q1\ 1x2 = x4 - 6x3 + 13x2 - 24x + 36 = 0$$

Repita el paso 3: Los posibles ceros racionales de q1 siguen siendo 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36. Pruebe 1 nuevamente, ya que puede ser un cero repetido de f.

```
1·1 - 6  13 - 24  36
      1 - 5  8 - 16
1 - 5  8 - 16  20
```

Como el resto es 20, 1 no es un cero repetido. Pruebe 2 a continuación.

```
2·1 - 6  13 - 24  36
      2 - 8  10 - 38
1 - 4  5 - 14      8
```

Como el resto es 8, 2 no es cero. Pruebe 3 a continuación.

```
3·1 - 6  13 - 24  36
      3 - 9  12 - 36
1 - 3  4 - 12      0
```

Machine Translated by Google

El resto es f132 = 0, por lo que 3 es cero y x - 3 es un factor de f. Usa la fila inferior de la división sintética para continuar con la factorización de f.

$$f1x2 = x5 - 7x4 + 19x3 - 37x2 + 60x - 36$$

$$= 1x - 12\ 1x - 32\ 1x3 - 3x2 + 4x - 122$$

Los ceros restantes satisfacen la nueva ecuación deprimida.

$$q2\ 1x2 = x3 - 3x2 + 4x - 12 = 0$$

Observe que q2 1x2 se puede factorizar agrupando. Alternativamente, se podría repetir el paso 3 para verificar nuevamente el cero racional potencial 3. Los ceros racionales potenciales 1 y 2 ya no se verificarían porque ya han sido eliminados.

Ahora

$$x3 - 3x2 + 4x - 12 = 0$$

$$x2\ 1x - 32 + 41x - 32 = 0$$

$$1x2 + 42\ 1x - 32 = 0$$

$$x2 + 4 = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Dado que x2 + 4 = 0 no tiene soluciones reales, los ceros reales de f son 1 y 3, siendo 3 un cero repetido de multiplicidad 2. La forma factorizada de f es

$$f1x2 = x5 - 7x4 + 19x3 - 37x2 + 60x - 36$$

$$= 1x - 12\ 1x - 32\ \ 2\ 1x2 + 42$$

Ahora resuelve el problema 4 5

5 Resolver ecuaciones polinomiales

EJEMPLO 7 **Resolver una ecuación polinomial**

Encuentra las soluciones reales de la ecuación: x5 - 7x4 + 19x3 - 37x2 + 60x - 36 = 0

Solución

Las soluciones reales de esta ecuación son los ceros reales de la función polinómica.

$$f1x2 = x5 - 7x4 + 19x3 - 37x2 + 60x - 36$$

Usando el resultado del Ejemplo 6, los ceros reales de f son 1 y 3. Las soluciones reales de la ecuación x5 - 7x4 + 19x3 - 37x2 + 60x - 36 = 0 son 1 y 3.

Ahora problema de trabajo 5 7

En el ejemplo 6, el factor cuadrático x2 + 4 que aparece en la forma factorizada de f se llama irreducible, porque el polinomio x2 + 4 no se puede factorizar sobre los números reales. En general, un factor cuadrático ax2 + bx + c es irreducible si no se puede factorizar sobre los números reales, es decir, si es primo sobre los números reales.

Consulte los ejemplos 5 y 6. La función polinómica del ejemplo 5 tiene tres ceros reales y su forma factorizada contiene tres factores lineales. La función polinomial del ejemplo 6 tiene dos ceros reales distintos y su forma factorizada contiene dos factores lineales distintos y un factor cuadrático irreducible.

TEOREMA

Cada función polinómica con coeficientes reales se puede factorizar de forma única en un producto de factores lineales y/o factores cuadráticos irreducibles.

Probamos este resultado en la sección 4.7 y, de hecho, sacaremos varias conclusiones adicionales sobre los ceros de una función polinomial. Vale la pena señalar ahora una conclusión. Si un polinomio con coeficientes reales es de grado impar, debe tener al menos un factor lineal. (¿Ves por qué? Considere el comportamiento final de funciones polinómicas de grado impar). Esto significa que debe tener al menos un cero real.

Machine Translated by Google

TEOREMA

Una función polinómica con coeficientes reales de grado impar tiene al menos un cero real.

6 Utilice el teorema de los límites de los ceros

El trabajo involucrado en encontrar los ceros de una función polinómica se puede reducir un poco si se pueden encontrar los límites superior e inferior de los ceros. Un número M es un límite superior de los ceros de un polinomio f si ningún cero de f es mayor que M. El número m es un límite inferior si ningún cero de f es menor que m. En consecuencia, si m es un límite inferior y M es un límite superior de los ceros de una función polinómica f, entonces

m ... cualquier cero de f ... M

Para polinomios con coeficientes enteros, conocer los valores de un límite inferior m y un límite superior M puede permitirle eliminar algunos ceros racionales potenciales: es decir, cualquier cero fuera del intervalo [m, M].

COMENTARIO Los límites de los ceros reales de un polinomio proporcionan buenas opciones para establecer Xmin y Xmax del rectángulo de visualización. Con estas opciones, se pueden ver todas las intersecciones x de la gráfica. ■

TEOREMA Límites de los ceros

Sea f una función polinómica cuyo coeficiente principal es positivo.

- Si M 7 0 es un número real y si la tercera fila en el proceso de división sintética de f por x - M contiene sólo números positivos o cero, entonces M es un límite superior de los ceros reales de f.
- Si m 6 0 es un número real y si la tercera fila en el proceso de división sintética de f por x - m contiene números que alternan números positivos (o 0) y negativos (o 0), entonces m es un límite inferior del ceros reales de f.

NOTA Al encontrar un límite inferior, un 0 puede tratarse como positivo o negativo, pero no como ambos. Por ejemplo, los números 3, 0, 5 se considerarían de signo alternativo, mientras que 3, 0, - 5 no.

j ■

Demostración (esquema) Damos sólo un esbozo de la demostración de la primera parte del teorema. Supongamos que M es un número real positivo y que la tercera fila en el proceso de división sintética del polinomio f por x - M contiene solo números que son positivos o 0.
Entonces hay un cociente q y un resto R para el cual

f1x2 = 1x - M2q1x2 + R

donde los coeficientes de q(x) son positivos o 0 y el resto R Ú 0. Entonces, para cualquier x 7 M, debemos tener x - M 7 0, q1x2 7 0 y R Ú 0, de modo que f1x2 7 0 Es decir, no existe ningún cero de f mayor que M. La demostración de la segunda parte sigue un razonamiento similar.

■

Al encontrar límites, es preferible encontrar el límite superior más pequeño y el límite inferior más grande. Esto requerirá una división sintética repetida hasta que se observe el patrón deseado. Por simplicidad, consideramos sólo ceros racionales potenciales que sean números enteros. Si no se encuentra un límite usando estos valores, continúe verificando números enteros positivos y/o negativos hasta que encuentre un límite superior e inferior.

EJEMPLO 8 Encontrar los límites superior e inferior de los ceros

Para la función polinómica f1x2 = 2x3 + 11x2 - 7x - 6, utilice el teorema de los límites de los ceros para encontrar los límites superiores e inferiores enteros de los ceros de f.

Solución Del ejemplo 4, los ceros racionales potenciales de f son {1, {2, {3, {6, { 2 $\frac{1}{}$, { 2 $\frac{3}{}$.

Para encontrar un límite superior, comience con el entero positivo más pequeño que sea un cero racional potencial, que es 1. Continúe verificando 2, 3 y 6 (y luego los enteros positivos subsiguientes), si es necesario, hasta encontrar un límite superior. Para encontrar un límite inferior, comience con el entero negativo más grande que sea un cero racional potencial, que es - 1. Continúe verificando - 2, - 3 y - 6 (y luego los enteros negativos posteriores), si es necesario, hasta encontrar un límite inferior. es encontrado. La Tabla 16 resume los resultados de realizar análisis sintéticos repetidos.

Machine Translated by Google

divisiones mostrando sólo la tercera fila de cada división. Por ejemplo, la primera fila de la tabla muestra el resultado de dividir f(x) entre x - 1.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 11 & -7 & -6 \\ & & 2 & 13 & 6 \\ \hline & 2 & 13 & 6 & 0 \end{array}$$

Tabla 16 Resumen de la división sintética

límite superior

Más bajo atado

r	Coeficientes de q(x)			Resto	
1	2	13	6	0	Todo no negativo
-1	2	9	-dieciséis	10	
-2	2	7	-21	36	
-3	2	5	-22	60	
-6	2	-1	-1	0	
-7	2	-3	14	-104	Signos alternos

NOTA Lleve un registro de los ceros que se encuentren al buscar límites.

Para r = 1, la tercera fila de división sintética contiene solo números que son positivos o 0, por lo que sabemos que no hay ceros reales mayores que 1. Dado que la tercera fila de división sintética para r = - 7 resulta en alternancia positiva (o 0) y valores negativos (o 0), sabemos que - 7 es un límite inferior. No hay ceros reales menores que - 7. Observe que al buscar límites se descubrieron dos ceros. Estos ceros son 1 y - 6.

Ahora problema de trabajo 6 9

Si el coeficiente principal de f es negativo, los límites superior e inferior aún se pueden encontrar multiplicando primero el polinomio por - 1. Dado que - f1x2 = 1 - 12f1x2, los ceros de - f1x2 son los mismos que los ceros de f(x).

7 Utilice el teorema del valor intermedio

El siguiente resultado, llamado Teorema del valor intermedio, se basa en el hecho de que la gráfica de una función polinómica es continua; es decir, no contiene “huecos” ni “huecos”.

TEOREMA Teorema del valor intermedio

Sea f una función polinómica. Si a 6 b y si f(a) y f(b) son de signo opuesto, hay al menos un cero real de f entre a y b.

Aunque la demostración del teorema del valor intermedio requiere métodos avanzados de cálculo, es fácil “ver” por qué el resultado es verdadero. Mire la Figura 49.

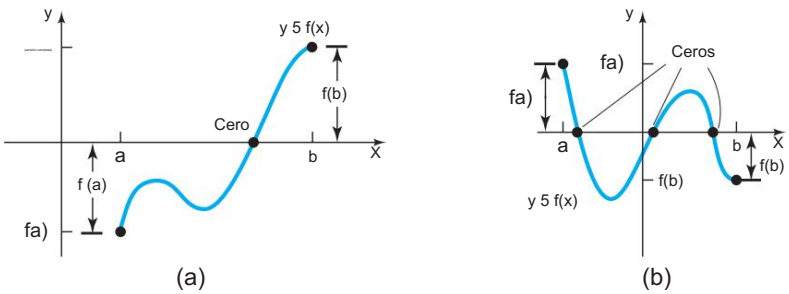


Figura 49 Si f es una función polinómica y si f(a) y f(b) son de signo opuesto, entonces hay al menos un cero real entre a y b.

EJEMPLO 9 Uso del teorema del valor intermedio para localizar un cero real

Demuestre que f1x2 = x5 - x3 - 1 tiene un cero real entre 1 y 2.

Machine Translated by Google

Solución Evalúe f en 1 y en 2.

f112 = - 1 y f122 = 23

Como f112 6 0 y f122 7 0, del teorema del valor intermedio se deduce que la función polinómica f tiene al menos un cero real entre 1 y 2.

Ahora problema de trabajo 7 9

Veamos más de cerca la función polinómica f del ejemplo 9. Según la regla de los signos de Descartes, f tiene exactamente un cero real positivo. Según el teorema de los ceros racionales, 1 es el único cero racional positivo potencial. Como f112 · 0, el cero entre 1 y 2 es irracional. El teorema del valor intermedio se puede utilizar para aproximarlo.

Pasos para aproximar los ceros reales de una función polinómica

Paso 1: Encuentra dos enteros consecutivos a y a + 1 para los cuales f tiene un cero real entre ellos.

Paso 2: Divide el intervalo 3a, a + 14 en 10 subintervalos iguales.

Paso 3: Evalúe f en los puntos finales de cada subintervalo hasta que cambie el signo de f . Entonces, según el teorema del valor intermedio, este intervalo contiene un cero real.

Paso 4: Ahora divida el nuevo intervalo en 10 subintervalos iguales y repita Paso 3.

Paso 5: Continúe con los pasos 3 y 4 hasta lograr la precisión deseada.

Nota: Si en el Paso 3 el valor de f es igual a 0, el proceso finaliza ya que ese valor es un cero.

EJEMPLO 10 Aproximar un cero real de una función polinómica

Encuentre el cero real positivo de f1x2 = x5 - x3 - 1 con precisión de dos decimales.

Solución

Del ejemplo 9 sabemos que el cero real positivo está entre 1 y 2. Divide el intervalo 31, 24 en 10 subintervalos iguales: 31, 1,14, 31,1, 1,24, 31,2, 1,34, 31,3, 1,44, 31,4, 1,54, 31,5, 1,64. , 31,6, 1,74 , 31,7, 1,84 , 31,8, 1,94 , 31,9, 24 . Ahora encuentre el valor de f1x2 = x5 - x3 - 1 en cada punto final hasta que se aplique el teorema del valor intermedio.

f11.02 = - 1 f11.12 = - 0.72049 f11,22 = - 0,23968 f11,32 = 0,51593

Podemos detenernos aquí y concluir que el cero está entre 1,2 y 1,3. Ahora divide el intervalo 31.2, 1.34 en 10 subintervalos iguales y evalúe f en cada punto final.

f11.202 = - 0.23968 f11.212 ≈ - 0.1778185 f11.222 ≈ - 0.1131398

f11.232 ≈ - 0.0455613 f11.242 ≈ 0.025001

El cero se encuentra entre 1,23 y 1,24, por lo que, con dos decimales, el cero es 1,23.

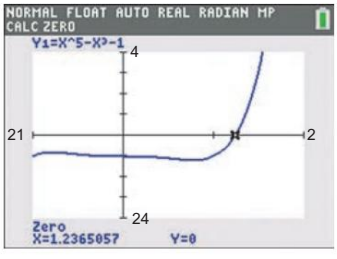


Figura 50 TI-84 Plus C

COMENTARIO La función TABLA de una calculadora gráfica facilita mucho los cálculos en la solución del Ejemplo 10.

■

Exploración

Examinamos la función polinómica f dada en el ejemplo 10. El teorema sobre los límites de los ceros nos dice que todo cero real está entre -1 y 2. Graficando f usando -1... x ... 2 (ver Figura 50), vemos que f tiene exactamente una intersección con el eje x. Usando CERO o RAÍZ, encontramos que este cero tiene una corrección de 1,23 con dos decimales.

Ahora problema de trabajo 9 1

Existen muchas otras técnicas numéricas para aproximar el cero real de un polinomio. El descrito en el Ejemplo 10 (una variación del método de bisección) tiene las ventajas de que siempre funciona, se puede programar en una computadora y cada vez que se usa se logra otro decimal de precisión. Consulte el problema 118 para conocer el método de bisección, que coloca el cero en una sucesión de intervalos, siendo cada nuevo intervalo la mitad de la longitud del anterior.

Machine Translated by Google

Característica histórica

Fórmulas para la solución de polinomios de tercer y cuarto grado.

Las ecuaciones existen y, aunque no son muy prácticas, tienen una historia interesante.

En el siglo XVI en Italia, los concursos de matemáticas eran un pasatiempo popular y las personas que poseían métodos para resolver problemas los mantenían en secreto. (Las soluciones que se publicaron ya eran de conocimiento público.) Nicolás de Brescia (1499-1557), comúnmente conocido como Tartaglia ("el tartamudo"), tenía el secreto para resolver ecuaciones cúbicas (de tercer grado), lo que le dio una decisión decidida. ventaja en los concursos. Girolamo Cardano (1501-1576) supo que Tartaglia tenía el secreto y, interesado en las cúbicas, se lo solicitó. El reacio Tartaglia dudó durante algún tiempo, pero finalmente, haciendo jurar a Cardano que guardaría el secreto con juramentos de medianoche a la luz de las velas, le contó el secreto. Cardano luego publicó la solución en su libro. Ars Magna (1545), dando el crédito a Tartaglia pero más bien comprometiendo el secreto. Tartaglia estalló en amargas recriminaciones y cada uno escribió panfletos que reflejaban las matemáticas, el carácter moral y la ascendencia del otro.

La ecuación de cuarto grado (cuarto grado) fue resuelta por el alumno de Cardano, Lodovico Ferrari, y esta solución también se incluyó, con crédito y esta vez con permiso, en el Ars Magna.

Se hicieron intentos para resolver la ecuación de quinto grado de manera similar, pero todos fracasaron. A principios del siglo XIX, P. Ruffini, Niels Abel y Evariste Galois encontraron formas de demostrar que no es posible resolver ecuaciones de quinto grado mediante fórmulas, pero las pruebas requirieron la introducción de nuevos métodos. Los métodos de Galois eventualmente se convirtieron en una gran parte del álgebra moderna.

Problemas históricos

Los problemas 1 a 8 desarrollan la solución de Tartaglia-Cardano de la ecuación cúbica y muestran por qué no es del todo práctica.

1. Demuestre que la ecuación cúbica general $y^3 + por^2 + cy + d = 0$ se puede transformar en una ecuación de la forma

   $x3 + px + q = 0$ usando la sustitución $y = x - \frac{b}{3}$.

2. En la ecuación $x3 + px + q = 0$, reemplaza x por H + K. Sea 3HK = - p, y demuestre que H3 + K3 = - q.
3. Basado en el Problema 2, tenemos las dos ecuaciones

   3HK = - p y H3 + K3 = - q

   Resuelva para K en 3HK = - p y sustitúyalo en H3 + K3 = - q. Entonces muestra que

   $$H = \text{Re } 3\sqrt{\frac{-q}{2} + C\,q\frac{2}{4} + \frac{3}{\text{pág.27}}}$$

   [Sugerencia: busque una ecuación que tenga forma cuadrática.]

4. Utilice la solución para H del problema 3 y la ecuación H3 + K3 = - q para demostrar que

   $$K = \text{re } 3\sqrt{\frac{-q}{2} - C\,q\frac{2}{4} + \frac{3}{\text{pág.27}}}$$

5. Utilice los resultados de los problemas 2 a 4 para demostrar que la solución de x3 + px + q = 0 es

   $$x = \text{re } 3\sqrt{\frac{-q}{2} + C\,q\frac{2}{4} + \frac{3}{\text{pag}}\,27} + D3\sqrt{\frac{-q}{2} - C\,q\frac{2}{4} + \frac{3}{\text{pag}}\,27}$$

6. Usa el resultado del Problema 5 para resolver la ecuación x3 - 6x - 9 = 0.
7. Usa una calculadora y el resultado del Problema 5 para resolver la ecuación x3 + 3x - 14 = 0.
8. Utilice los métodos de esta sección para resolver la ecuación x3 + 3x - 14 = 0.

4.6 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Encuentre f1 - 12 si f 1x2 = 2x2 - x. (págs. 87–89)
2. Factoriza la expresión 6x2 + x - 2. (págs. A27–A28)
3. Encuentra el cociente y el resto cuando 3x4 - 5x3 + 7x - 4 se divide por x - 3. (págs. A25–A27 o A31–A34)
4. Resuelve x2 = 3 - x. (págs. A47–A51)

Conceptos y vocabulario

5. Opción múltiple Si f 1x2 = q1x2g1x2 + r1x2, la función r(x) se llama . _____

   (a) resto (b) dividendo (c) cociente (d) divisor

6. Cuando una función polinómica f se divide por x - c, el resto es _____.
7. Opción múltiple Dado f1x2 = 3x4 - 2x3 + 7x - 2, ¿cuántos cambios de signo hay en los coeficientes de f1 - x2?

   (un) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

8. Verdadero o Falso Toda función polinómica de grado 3 con coeficientes reales tiene exactamente tres ceros reales.
9. Si f es una función polinómica y x - 4 es un factor de f, entonces f142 = 10. _____.

Verdadero o Falso Si f es una función polinómica de grado 4 y si f122 = 5, entonces

$$\frac{f1x2}{x - 2} = p1x2 + \frac{5}{x - 2}$$

donde p(x) es un polinomio de grado 3.

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 20, utilice el teorema del resto para encontrar el resto cuando f(x) se divide entre x - c. Luego usa el teorema del factor para determinar si x - c es un factor de f1x2.

11. f1x2 = 4x3 - 3x2 - 8x + 4; x - 2 13.
12. f1x2 = - 4x3 + 5x2 + 8; x + 3
f1x2 = 4x4 - 15x2 - 4; x - 2 15.
14. f1x2 = 5x4 - 20x3 + x - 4; x - 2
f1x2 = 2x6 - 18x4 + x2 - 9; x + 3 17.
16. f1x2 = 2x6 + 129x3 + 64; x + 4
f1x2 = x6 - 16x4 + x2 - 16; x + 4
18. f1x2 = 4x6 - 64x4 + x2 - 15; x + 4
19. f1x2 = 3x4 + x3 - 3x + 1; x + $\frac{1}{3}$
20. f1x2 = 2x4 - x3 + 2x - 1; X - $\frac{1}{2}$

En los problemas 21 a 32, determine el número máximo de ceros reales que puede tener cada función polinómica. Luego usa la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos y cuántos negativos puede tener cada función polinomial. No intentes encontrar los ceros.

21. f1x2 = - 4x7 + x3 - x2 + 2
22. f1x2 = 5x4 + 2x2 - 6x - 5
23. f1x2 = - 3x5 + 4x4 + 2
24. f1x2 = 8x6 - 7x2 - x + 5
25. f1x2 = - x3 - x2 + x + 1
26. f1x2 = - 2x3 + 5x2 - x - 7
27. f1x2 = x4 + 5x3 - 2
28. f1x2 = - x4 + x2 - 1
29. f1x2 = x5 - x4 + x3 - x2 + x - 1
30. f1x2 = x5 + x4 + x2 + x + 1
31. f1x2 = x6 + 1
32. f1x2 = x6 - 1

En los problemas 33 a 44, enumere los ceros racionales potenciales de cada función polinómica. No intentes encontrar los ceros.

33. f1x2 = 3x4 - 3x3 + x2 - x + 1
34. f1x2 = x5 - x4 + 2x2 + 3
35. f1x2 = 2x5 - x4 - x2 + 1
36. f1x2 = x5 - 2x2 + 8x - 5
37. f1x2 = 6x4 - x2 + 2
38. f1x2 = - 9x3 - x2 + x + 3
39. f1x2 = - 4x3 + x2 + x + 6
40. f1x2 = 6x4 - x2 + 9
41. f1x2 = 3x5 - x2 + 2x + 18
42. f1x2 = 2x5 - x3 + 2x2 + 12
43. f1x2 = - 6x3 - x2 + x + 10
44. f1x2 = 6x4 + 2x3 - x2 + 20

En los problemas 45 a 56, utilice el teorema de los ceros racionales para encontrar todos los ceros reales de cada función polinomial. Usa los ceros para factorizar f sobre los números reales.

45. f1x2 = x3 + 2x2 - 5x - 6
46. f1x2 = x3 + 8x2 + 11x - 20
47. f1x2 = 2x3 + x2 + 2x + 1
48. f1x2 = 2x3 - x2 + 2x - 1
49. f1x2 = 3x3 + 6x2 - 15x - 30
50. f1x2 = 2x3 - 4x2 - 10x + 20
51. f1x2 = 2x4 - x3 - 5x2 + 2x + 2
52. f1x2 = 2x4 + x3 - 7x2 - 3x + 3
53. f1x2 = x4 - x3 - 6x2 + 4x + 8
54. f1x2 = x4 + x3 - 3x2 - x + 2
55. f1x2 = 3x4 + 4x3 + 7x2 + 8x + 2
56. f1x2 = 4x4 + 5x3 + 9x2 + 10x + 2

En los problemas 57 a 68, resuelva cada ecuación del sistema de números reales.

57. x4 - x3 + 2x2 - 4x - 8 = 0
58. 2x3 + 3x2 + 2x + 3 = 0
59. 2x3 - 3x2 - 3x - 5 = 0
60. 3x3 + 4x2 - 7x + 2 = 0
61. 2x3 - 11x2 + 10x + 8 = 0
62. 3x3 - x2 - 15x + 5 = 0
63. x4 - 2x3 + 10x2 - 18x + 9 = 0
64. x4 + 4x3 + 2x2 - x + 6 = 0
65. x3 + $\frac{3}{2}$x2 + 3x - 2 = 0 2
66. x3 - $\frac{2}{3}$x2 + $\frac{8}{3}$x + 1 = 0
67. 2x4 + x3 - 24x2 + 20x + 16 = 0
68. 2x4 - 19x3 + 57x2 - 64x + 20 = 0

Machine Translated by Google

En los problemas 69 a 78, encuentre los límites de los ceros reales de cada función polinómica.

69. f1x2 = x4 - 3x2 - 4 71. f1x2 = x4 - x3 + x - 1 73. f1x2 = 3x4 - 3x3 - 5x2 + 27x - 36 75. f1x2 = 4x5 + x4 + x3 + x2 - 2x - 2 77. f1x2 = - 4x5 + 5x3 + 9x2 + 3x - 12

70. f1x2 = x4 - 5x2 - 36 72. f1x2 = x4 + x3 - x - 1 74. f1x2 = 3x4 + 3x3 - x2 - 12x - 12 76. f1x2 = 4x5 - x4 + 2x3 - 2x2 + x - 1 78. f1x2 = - x4 + 3x3 - 4x2 - 2x + 9

En los problemas 79 a 84, utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que cada función polinómica tiene un cero real en el intervalo dado.

79. f1x2 = 8x4 - 2x2 + 5x - 1; 30, 14

80. f1x2 = x4 + 8x3 - x2 + 2; 3 - 1, 04

81. f1x2 = 3x3 - 10x + 9; 3 - 3, - 24

82. f1x2 = 2x3 + 6x2 - 8x + 2; 3 - 5, - 44

83. f1x2 = x5 - 3x4 - 2x3 + 6x2 + x + 2; 31,7, 1,84

84. f1x2 = x5 - x4 + 7x3 - 7x2 - 18x + 18; 31,4, 1,54

En los problemas 85 a 88, cada ecuación tiene una solución r en el intervalo indicado. Utilice el método del Ejemplo 10 para aproximar esta solución con dos decimales.

85. x4 + 8x3 - x2 + 2 = 0; - 1 … r … 0 87. 3x3 - 10x + 9 = 0; - 3... r ... - 2

86. 8x4 - 2x2 + 5x - 1 = 0; 0… r … 1 88. 2x3 + 6x2 - 8x + 2 = 0; - 5 … r … - 4

En los problemas 89 a 92, cada función polinómica tiene exactamente un cero real positivo. Utilice el método del Ejemplo 10 para aproximar el cero correcto a dos decimales.

89. f1x2 = 2x4 + x2 - 1 91. f1x2 = 2x4 - 3x3 - 4x2 - 8

90. f1x2 = x3 + x2 + x - 4 92. f1x2 = 3x3 - 2x2 - 20

Práctica mixta En los problemas 93 a 104, grafica cada función polinómica.

93. f1x2 = x3 + 8x2 + 11x - 20 96. f1x2 = 2x3 - x2 + 2x - 1 99. f1x2 = 4x4 + 15x2 - 4 102. f1x2 = x4 + x3 - 3x2 - x + 2

94. f1x2 = x3 + 2x2 - 5x - 6 97. f1x2 = x4 - 3x2 - 4 100. f1x2 = 4x4 + 7x2 - 2 103. f1x2 = 4x5 + 12x4 - x - 3

95. f1x2 = 2x3 + x2 + 2x + 1 98. f1x2 = x4 + x2 - 2 101. f1x2 = x4 - x3 - 6x2 + 4x + 8 104. f1x2 = 4x5 - 8x4 - x + 2

Aplicaciones y extensiones

105. Supongamos que f1x2 = 3x3 + 16x2 + 3x - 10. Encuentra los ceros de f1x + 32.

106. Supongamos que f1x2 = 4x3 - 11x2 - 26x + 24. Encuentra los ceros de f1x - 22.

107. Encuentra k para que x - 2 sea un factor de

f1x2 = x3 - kx2 + kx + 2

108. Encuentra k para que x + 2 sea un factor de

f1x2 = x4 - kx3 + kx2 + 1

109. ¿Cuál es el resto cuando f1x2 = 2x20 - 8x10 + x - 2 es dividido por x - 1?

110. ¿Cuál es el resto cuando f1x2 = - 3x17 + x9 - x5 + 2x? se divide por x + 1?

111. Utilice el teorema del factor para demostrar que x - c es un factor de xn - cn para cualquier entero positivo n.

112. Utilice el teorema del factor para demostrar que x + c es un factor de xn + cn si n Ú 1 es un entero impar.

113. Una solución de la ecuación x3 - 8x2 + 16x - 3 = 0 es 3. Encuentra la suma de las soluciones restantes.

114. Una solución de la ecuación x3 + 5x2 + 5x - 2 = 0 es - 2. Encuentra la suma de las soluciones restantes.

115. Geometría ¿Cuál es la longitud de la arista de un cubo si su volumen se duplica con un aumento de 6 centímetros en uno? borde, un aumento de 12 centímetros en un segundo borde y una disminución de 4 centímetros en el tercer borde?

116. Geometría ¿Cuál es la longitud de la arista de un cubo si, después de cortar una rebanada de 1 pulgada de espesor de un lado, el volumen restante es 294 pulgadas cúbicas?

117. Sea f(x) una función polinómica cuyos coeficientes son números enteros. Supongamos que r es un cero real de f y que el coeficiente principal de f es 1. Utilice el teorema de los ceros racionales para demostrar que r es un número entero o irracional.

118. Método de bisección para aproximar ceros reales de una función polinómica Comenzamos con dos números enteros consecutivos, a y a + 1, para los cuales f(a) y f1a + 12 son de signo opuesto. Evalúe f en el punto medio m1 de a y a + 1. Si f1m12 = 0, entonces m1 es el cero de f y hemos terminado. De lo contrario, f1m12 es de signo opuesto a f(a) o f1a + 12. Supongamos que f(a) y f1m12 son de signo opuesto. Ahora evalúe f en el punto medio m2 de a y m1. Repita este proceso hasta obtener el grado de precisión deseado. Tenga en cuenta que cada iteración coloca el cero en un intervalo cuya longitud es la mitad que la del intervalo anterior. Utilice el método de bisección para aproximar el cero de f1x2 = 8x4 - 2x2 + 5x - 1 en el intervalo [0, 1] con precisión de tres decimales.

[Sugerencia: el proceso finaliza cuando ambos puntos finales coinciden en el número deseado de decimales.]

Machine Translated by Google

119. Problema de desafío Demuestre el teorema de los ceros racionales.

[Pista: deja que $\frac{p}{q}$, donde p y q no tienen factores comunes

excepto 1 y - 1, ser un cero de la función polinómica

f1x2 = anxn + an-1xn-1 + g + a1x + a0

cuyos coeficientes son todos números enteros. Muestra esa

anpn + an-1pn-1 q + g + a1pqn-1 + a0qn = 0

Ahora, demuestre que p debe ser factor de a0 y que q debe ser factor de an.]

120. Problema de desafío Supongamos que f es una función polinómica. Si f1 - 22 = 7 y f162 = - 1, entonces el Valor Intermedio ¿Cuál de los siguientes teorema garantiza? Justifica tu respuesta.

(a) f102 = 0

(b) f1c2 = 3 para al menos un número c entre - 2 y 6.

(c) f1c2 = 0 para al menos un número entre - 1 y 7.

(d) - 1 … f 1x2 … 7 para todos los números en forma cerrada intervalo 3 - 2, 64.

121. Problema de desafío Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que las funciones y = x3 e y = 1 - x2 se cortan en algún lugar entre x = 0 y x = 1.

Explicar conceptos: discusión y escritura

122. es $\frac{1}{3}$ un cero de f1x2 = 2x3 + 3x2 - 6x + 7? Explicar.

123. es $\frac{1}{3}$ un cero de f1x2 = 4x3 - 5x2 - 3x + 1? Explicar.

124. es $\frac{3}{5}$ ¿un cero de f1x2 = 2x6 - 5x4 + x3 - x + 1? Explicar.

125. es $\frac{2}{3}$ ¿un cero de f1x2 = x7 + 6x5 - x4 + x + 2? Explicar.

Conserve su conocimiento

Los problemas 126 a 135 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

126. Escribe f1x2 = - 3x2 + 30x - 4 en la forma

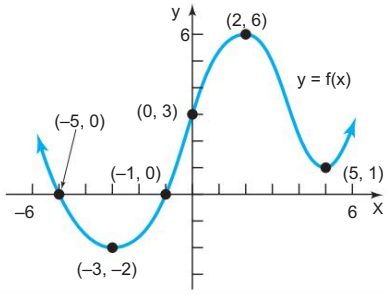
f1x2 = a1x - h2 2 + k

127. Expresa la desigualdad 3 … x 6 8 usando el intervalo notación.

128. Resuelve 2x - 5y = 3 para y.

129. Resuelve $\frac{1}{3}$x2 - 2x + 9 = 0.

Para los problemas 130 a 135, utilice la gráfica de la derecha.



130. ¿En qué intervalo(s) f aumenta?

131. ¿En qué intervalo(s) f disminuye?

132. ¿Cuáles son los ceros de f, si los hay?

133. ¿ Cuáles son las intersecciones de la gráfica de f ?

134. ¿Cuáles son los puntos de inflexión?

135. ¿Cuáles son los extremos absolutos, si los hay?

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 3 2. 13x + 2212x - 12 3. Cociente: 3x3 + 4x2 + 12x + 43; Resto: 125 4. $\frac{-1-\sqrt{113}}{2}, \frac{-1+\sqrt{113}}{2}$

4.7 Ceros complejos; Teorema fundamental del álgebra

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Números complejos (Sección A.7, págs. A54–A59)
- Soluciones complejas de una ecuación cuadrática (Sección A.7, págs. A59–A61)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 286.

OBJETIVOS 1 Usar el teorema de pares conjugados (p. 283)

2 Encuentre una función polinómica con ceros especificados (p. 284)

3 Encuentra los ceros complejos de una función polinómica (p. 285)

En la sección A.6 encontramos las soluciones reales de una ecuación cuadrática. Es decir, encontramos los ceros reales de una función polinómica de grado 2. Luego, en la Sección A.7 encontramos las soluciones complejas de una ecuación cuadrática. Es decir, encontramos los ceros complejos de una función polinómica de grado 2.

Machine Translated by Google

¿Necesita revisar?

Los números complejos y las soluciones complejas de una ecuación cuadrática se analizan en el Apéndice A, págs. A54–A61.

En la sección 4.6 encontramos los ceros reales de funciones polinomiales de grado 3 o superior. En este apartado encontraremos los ceros complejos de funciones polinomiales de grado 3 o superior.

DEFINICIÓN Ceros complejos

Una variable en el sistema de números complejos se denomina variable compleja.
Una función polinómica compleja f de grado n es una función de la forma

$$f1x2 = anxn + an-1xn-1 + g + a1x + a0 \qquad (1)$$

donde an, an-1, c, a1, a0 son números complejos, an · 0, n es un entero no negativo y x es una variable compleja. Como antes, an se llama coeficiente principal.
apagado . Un número complejo r se llama cero complejo de f si f1r2 = 0.

En la mayor parte de nuestro trabajo, los coeficientes en (1) son números reales.

Hemos aprendido que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen soluciones reales, pero que en el sistema de números complejos cada ecuación cuadrática tiene al menos una solución, ya sea real o compleja. El siguiente resultado, demostrado por Karl Friedrich Gauss (1777–1855) cuando tenía 22 años*, ofrece una extensión a los polinomios complejos. De hecho, este resultado es tan importante y útil que se le conoce como el Teorema Fundamental del Álgebra.

Teorema fundamental del álgebra

Toda función polinómica compleja f de grado n Ú 1 tiene al menos una función polinómica compleja cero.

No probaremos este resultado, ya que la prueba está más allá del alcance de este texto.
Sin embargo, utilizando el Teorema Fundamental del Álgebra y el Teorema del Factor, podemos demostrar el siguiente resultado:

TEOREMA

Cada función polinómica compleja f de grado n Ú 1 puede factorizarse en n factores lineales (no necesariamente distintos) de la forma

$$f1x2 = an\,1x - r121x - r22\,\#\,g\,\#\,1x - rn2 \qquad (2)$$

donde an, r1, r2, c, rn son números complejos. Es decir, toda función polinómica compleja de grado n Ú 1 tiene exactamente n ceros complejos, algunos de los cuales pueden repetirse.

Prueba Sea f1x2 = anxn + an-1xn-1 + g +a1x + a0.

Según el teorema fundamental del álgebra, f tiene al menos un cero, digamos r1. Entonces, según el teorema del factor, x - r1 es un factor y

$$f1x2 = 1x - r12q1\,1x2$$

donde q1 1x2 es un polinomio complejo de grado n - 1 cuyo coeficiente principal es an. Repitiendo este argumento n veces llegamos a

$$f1x2 = 1x - r12\,1x - r22\,\#\,g\,\#\,1x - rn2qn\,1x2$$

donde qn 1x2 es un polinomio complejo de grado n - n = 0 cuyo coeficiente principal es an. Es decir, qn 1x2 = anx0 = an, y así

$$f1x2 = an\,1x - r12\,1x - r22\,\#\,g\,\#\,1x - rn2$$

Concluimos que toda función polinómica compleja f de grado n Ú 1 tiene exactamente n ceros (no necesariamente distintos). ■

*En total, Gauss dio cuatro demostraciones diferentes de este teorema, siendo la primera en 1799 el tema de su tesis doctoral.

Machine Translated by Google

1 Utilice el teorema de pares conjugados

El Teorema Fundamental del Álgebra se puede utilizar para obtener información valiosa sobre los ceros complejos de funciones polinómicas cuyos coeficientes son números reales.

Teorema de pares conjugados

Supongamos que f es una función polinómica cuyos coeficientes son números reales. Si r = a + bi es un cero de f, el conjugado complejo r = a - bi también es un cero de f.

En otras palabras, para funciones polinómicas cuyos coeficientes son números reales, los ceros complejos aparecen en pares conjugados. Este resultado no debería ser tan sorprendente ya que los ceros complejos de una función cuadrática se presentan en pares conjugados.

prueba de dejar

$$f1x2 = anxn + an-1xn-1 + g + a1x + a0$$

donde an, an-1, c, a1, a0 son números reales y an · 0. Si r = a + bi es un cero de f, entonces f1r2 = f1a + bi2 = 0, entonces

$$anr^{\cdots} + an-1r^{n-1} + g + a1r + a0 = 0$$

Toma el conjugado de ambos lados para obtener

$$\overline{anr^{\cdots} + an-1r^{n-1} + g + a1r + a0 = 0}$$

$$\overline{anr^{\cdots}} + \overline{an-1r^{n-1}} + g + a1r + \overline{a0} = 0$$ — El conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados (ver Sección A.7).

$$\overline{un}\,\overline{1r2^{\cdots}} + \overline{an-1}\,\overline{1r2^{n-1}} + g + a1r + \overline{a0} = 0$$ — El conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados.

$$un\,\overline{1r2^{\cdots}} + an-1\,\overline{1r2^{n-1}} + g + a1r + a0 = 0$$ El conjugado de un número real es igual al número real.

Esta última ecuación establece que f1r2 = 0; es decir, r = a - bi es un cero de f. ■

La importancia de este resultado es que una vez que sabemos que un número complejo, digamos 3 + 4i, es un cero de una función polinómica con coeficientes reales, entonces sabemos que su conjugado 3 - 4i también es un cero. Este resultado tiene un corolario importante.

Corolario

Una función polinómica f de grado impar con coeficientes reales tiene al menos un cero real.

Prueba Debido a que los ceros complejos ocurren como pares conjugados en una función polinómica con coeficientes reales, siempre habrá un número par de ceros que no sean números reales. En consecuencia, como f es de grado impar, uno de sus ceros debe ser un número real.

■

Por ejemplo, la función polinómica f1x2 = x5 - 3x4 + 4x3 - 5 tiene al menos un cero que es un número real, ya que f es de grado 5 (impar) y tiene coeficientes reales.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1

Usando el teorema de pares conjugados

Una función polinómica f de grado 5 cuyos coeficientes son números reales tiene los ceros 1, 5i y 1 + i. Encuentra los dos ceros restantes.

Solución

Como f tiene coeficientes que son números reales, los ceros complejos aparecen como pares conjugados. Se deduce que - 5i, el conjugado de 5i, y 1 - i, el conjugado de 1 + i, son los dos ceros restantes.

Ahora trabaja el problema 9

2 Encuentre una función polinómica con ceros especificados

EJEMPLO 2

Encontrar una función polinómica cuyos ceros se dan

Encuentre una función polinómica f de grado 4 cuyos coeficientes sean números reales que tenga los ceros 1, 1 y - 4 + i.

Solución

Dado que - 4 + i es un cero, según el teorema de pares conjugados, - 4 - i también es un cero de f. Según el teorema del factor, si f1c2 = 0, entonces x - c es un factor de f(x). Entonces f ahora se puede escribir como

$$f1x2 = a1x - 12\ 1x - 12\ 3x - 1 - 4 + i2\ 4\ 3x - 1 - 4 - i2\ 4$$

donde a es cualquier número real distinto de cero. Entonces

$$f1x2 = a1x - 12\ 1x - 12\ 3x - 1 - 4 + i2\ 4\ 3x - 1 - 4 - i2\ 4$$

$$= a1x2 - 2x + 12\ 3\ 1x + 42 - i4\ 3\ 1x + 42 + i4$$

$$= a1x2 - 2x + 12[1x + 422 - yo^2]$$

$$= a1x2 - 2x + 12[x2 + 8x + 16 - 1 - 12] = a1x2 - 2x \quad i2 \cdot \cdot 1$$

$$+ 121x2 + 8x + 172$$

$$= a1x4 + 8x3 + 17x2 - 2x3 - 16x2 - 34x + x2 + 8x + 172$$

$$= a1x4 + 6x3 + 2x2 - 26x + 172$$

Exploración

Grafique la función f encontrada en el ejemplo 2 para a = 1. ¿El valor de a afecta los ceros de f ? ¿ Cómo afecta el valor de a a la gráfica de f ? ¿ Qué información sobre f es suficiente para determinar de forma única a?

Resultado Un análisis de la función polinómica f nos dice qué esperar:

- Como máximo tres puntos de inflexión.
- Para 0 x 0 grande , la gráfica se parece a la gráfica de y = x4.
- Un cero real repetido en 1, por lo que la gráfica tocará el eje x en 1.
- La única intersección con el eje x es 1; la intersección y es 17.

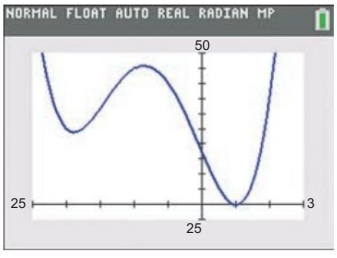


Figura 51

f1x2 = x4 + 6x3 + 2x2 - 26x + 17

La Figura 51 muestra el gráfico completo en una TI-84 Plus C. (¿Ves por qué? El gráfico tiene exactamente tres puntos de inflexión). El valor de a provoca un estiramiento o compresión; también ocurre una reflexión si a 6 0. Los ceros no se ven afectados.

Si se conoce cualquier punto distinto de la intersección con el eje x en la gráfica de f , entonces se puede determinar a . Por ejemplo, si (2, 3) está en la gráfica, entonces f122 = 3 = a1372, entonces a = 3>37. ¿ Por qué no funciona una intersección con el eje x?

Machine Translated by Google

Ahora podemos demostrar el teorema establecido en la sección 4.6.

TEOREMA

Cada función polinómica con coeficientes reales se puede factorizar de forma única sobre los números reales en un producto de factores lineales y/o factores cuadráticos irreducibles.

Prueba Cada función polinómica compleja f de grado n tiene exactamente n ceros y puede factorizarse en un producto de n factores lineales. Si sus coeficientes son reales, los ceros que son números complejos siempre aparecen en pares conjugados. Como resultado, si r = a + bi es un cero complejo, entonces también lo es r = a - bi. En consecuencia, cuando los factores lineales x - r y x - r de f se multiplican, tenemos

$$1x - r2\,1x - r2 = x2 - 1r + r2x + rr = x2 - 2ax + a2 + b2$$

Este polinomio de segundo grado tiene coeficientes reales y es irreducible (sobre los números reales). Entonces, los factores de f son factores cuadráticos lineales o irreducibles. ■

Ahora problema de trabajo 1 9

3 Encuentra los ceros complejos de una función polinómica

Los pasos para encontrar los ceros complejos de una función polinómica son los mismos que para encontrar los ceros reales.

EJEMPLO 3 Encontrar los ceros complejos de una función polinómica

Encuentra los ceros complejos de la función polinómica.

$$f1x2 = 3x4 + 5x3 + 25x2 + 45x - 18$$

Escribe f en forma factorizada.

Solución

Paso 1: El grado de f es 4, por lo que f tiene cuatro ceros complejos.

Paso 2: Dado que los coeficientes de f son números reales, se puede utilizar la regla de los signos de Descartes para obtener información sobre los ceros reales. Para esta función polinómica, hay un cero real positivo. Hay tres ceros reales negativos o un cero real negativo, porque

$$f1 - x2 = 3x4 - 5x3 + 25x2 - 45x - 18$$

tiene tres variaciones de signo.

Paso 3: Dado que los coeficientes de f son números enteros, el teorema de los ceros racionales se puede utilizar para obtener información sobre los posibles ceros racionales de f. Los ceros racionales potenciales son

$$\{3\ \frac{1}{}, \{, \{\frac{2}{3}, \{1, \{2, \{3, \{6, \{9, \{18$$

La Tabla 17 resume algunos resultados de la división sintética.

Tabla 17

r	Coeficientes de q (x)				Resto	
1	3	8	33	78	60	1 no es un cero.
-1	3	2	23	22	-40	·1 no es un cero.
2	3	11	47	139	260	2 no es un cero.
-2	3	-1	27	-9	(0)	·2 es un cero.

Dado que f1 - 22 = 0, entonces - 2 es cero y x + 2 es un factor de f. La ecuación deprimida es

$$3x3 - x2 + 27x - 9 = 0$$

Machine Translated by Google

Repita el paso 3: la ecuación deprimida se puede factorizar agrupando.

$$3x3 - x2 + 27x - 9 = 0$$

x2 13x - 12 + 913x - 12 = 0 Factoriza x2 de 3x3 · x2 y 9 de 27x · 9.

1x2 + 9213x - 12 = 0 Factoriza el factor común 3x · 1.

x2 + 9 = 0 o 3x - 1 = 0 Utilice la propiedad del producto cero.

x2 = - 9 o $x = \frac{1}{3}$

x = - 3i, x = 3i o $x = \frac{1}{3}$ Utilice el método de la raíz cuadrada.

Los cuatro ceros complejos de f son - 3i, 3i, - 2 y 3. $\frac{1}{}$.

La forma factorizada de f es

f1x2 = 3x4 + 5x3 + 25x2 + 45x - 18

= 31x + 3i2 1x - 3i2 1x + 22 hacha - = $\frac{1}{3 \text{ segundo}}$

31x2 + 92 1x + 22 hacha - $\frac{1}{3 \text{ segundo}}$

Ahora resuelve el problema 3 5

4.7 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Calcula la suma y el producto de los números complejos 3 - 2i y - 3 + 5i. (págs. A54–A59)
2. Resuelve x2 + 2x + 2 = 0 en el sistema de números complejos. (págs. A59–A61)
3. ¿Cuál es el conjugado de - 3 + 4i? (pág. A56)
4. Dado z = 5 + 2i, encuentra el producto z # z. (pág. A56)

Conceptos y vocabulario

5. Toda función polinómica de grado impar con coeficientes reales tendrá al menos cero(s) real(es). _____
6. Si 3 + 4i es un cero de una función polinómica de grado 5 con coeficientes reales, entonces también lo es _____ .
7. Verdadero o Falso Una función polinómica de grado n con coeficientes reales tiene exactamente n ceros complejos. Como máximo n de ellos son ceros reales.
8. Verdadero o Falso Una función polinómica de grado 4 con coeficientes reales podría tener - 3, 2 + i, 2 - i y - 3 + 5i como ceros.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 18 se proporciona información sobre una función polinómica f cuyos coeficientes son números reales. Encuentra los ceros restantes de f.

9. Grado 3; ceros: 3, 4 - i 11. Grado 4; ceros: 1, 2, 2 + i 13. Grado 5; ceros: 0, 1, 2, i 15. Grado 4; ceros: 2 - i, - i 17. Grado 6; ceros: i, 3 - 2i, - 2 + i
10. Grado 3; ceros: 4, 3 + i
12. Grado 4; ceros: i, 3 + i
14. Grado 5; ceros: 1, i, 5i
16. Grado 4; ceros: i, 7, - 7
18. Grado 6; ceros: 2, 4 + 9i, - 7 - 2i, 0

Machine Translated by Google

En los problemas 19 a 24, encuentre una función polinómica f con coeficientes reales que tengan el grado y ceros dados. Las respuestas variarán según la elección del coeficiente principal.

19. Grado 4; ceros: 3 + 2i; 4, multiplicidad 2

20. Grado 4; ceros: i, 1 + 2i

21. Grado 6; ceros: i, 4 - i; 2 + yo

22. Grado 5; ceros: 2; - i; 1 + yo

23. Grado 5; ceros: 1, multiplicidad 3; 1 + yo

24. Grado 4; ceros: 3, multiplicidad 2; - i

En los problemas 25 a 32, use el cero dado para encontrar los ceros restantes de cada función polinómica.

25. g1x2 = x3 + 3x2 + 25x + 75; cero: - 5i 26. f1x2 = x3 - 5x2 + 9x - 45; cero: 3i

27. h1x2 = 3x4 + 5x3 + 25x2 + 45x - 18; cero: 3i

28. f1x2 = 4x4 + 7x3 + 62x2 + 112x - 32; cero: - 4i

29. f1x2 = x4 - 7x3 + 14x2 - 38x - 60; cero: 1 + 3i

30. h1x2 = x4 - 7x3 + 23x2 - 15x - 522; cero: 2 - 5i

31. g1x2 = 2x5 - 3x4 - 5x3 - 15x2 - 207x + 108; cero: 3i

32. h1x2 = 3x5 + 2x4 - 9x3 - 6x2 - 84x - 56; cero: - 2i

En los problemas 33 a 42, encuentre los ceros complejos de cada función polinomial. Escribe f en forma factorizada.

33. f1x2 = x4 - 1 35. f1x2 = x3 - 8x2 + 25x - 26 37. f1x2 = x4 + 13x2 + 36 39. f1x2 = x4 + 3x3 - 19x2 + 27x - 252 41. f1x2 = 2x4 + x3 - 35x2 - 113x + 65

34. f1x2 = x3 - 1

36. f1x2 = x3 + 13x2 + 57x + 85

38. f1x2 = x4 + 5x2 + 4

40. f1x2 = x4 + 2x3 + 22x2 + 50x - 75

42. f1x2 = 3x4 - x3 - 9x2 + 159x - 52

43. Problema de desafío Sea f la función polinómica de grado 4 con coeficientes reales, coeficiente principal 1, y ceros x = 3 + i, 2, - 2. Sea g la función polinómica de grado 4 con intersección 10, - 42 y ceros x = i, 2i. Encuentre 1f + g2 112. †

44. Problema de desafío Supongamos que f1x2 = 2x3 - 14x2 + bx - 3 con f122 = 0 y g1x2 = x3 + cx2 - 8x + 30, con el cero x = 3 - i, donde b y c son números reales. Encuentre 1f # g2 112. †

45. Problema de desafío Los ceros complejos de f 1x2 · x4 · 1 Para la función f1x2 = x4 + 1:

(a) Factorice f en el producto de dos cuadráticas irreducibles.

(b) Encuentre los ceros de f encontrando los ceros de cada cuadrática irreducible.

Explicar conceptos: discusión y escritura

En los problemas 46 y 47, explique por qué los hechos dados son contradictorios.

46. f es una función polinómica de grado 3 cuyos coeficientes son números reales; sus ceros son 2, i y 3 + i.

47. f es una función polinómica de grado 3 cuyos coeficientes son números reales; sus ceros son 4 + i, 4 - i y 2 + i.

48. f es una función polinómica de grado 4 cuyos coeficientes son números reales; dos de sus ceros son - 3 y 4 - i. Explica por qué uno de los ceros restantes debe ser un número real. Escribe uno de los ceros que faltan.

49. f es una función polinómica de grado 4 cuyos coeficientes son números reales; tres de sus ceros son 2, 1 + 2i y 1 - 2i.
Explica por qué el cero restante debe ser un número real.

50. Para la función polinómica f1x2 = x2 + 2ix - 10:
(a) Verifique que 3 - i es un cero de f.
(b) Verifique que 3 + i no es un cero de f.
(c) Explique por qué estos resultados no contradicen el teorema de pares conjugados.

†Cortesía del Departamento de Matemáticas de Joliet Junior College

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 51 a 60 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

51. Dibuja un diagrama de dispersión para los datos dados.

x	-1	1	2	5	8	10
y	-4	0	3	1	5	7

52. Dado f1x2 = 23 - x, encuentre x tal que f1x2 = 5.

53. Multiplicar: 12x - 52 13x2 + x - 42

54. Encuentra el área y la circunferencia de un círculo con un diámetro de 6 pies.

55. Si f1x2 = $\frac{x+1}{x}$ y g1x2 = 3x - 2, encuentre una segundo 1x2 y indicar su dominio.

56. Resuelve $x = 2y + 3 - 5$ para y.

57. Encuentra el dominio de g1x2 = $\frac{x - 2x}{x + 2}$.

58. Encuentra las intersecciones de la gráfica de la ecuación 3x + y2 = 12.

59. Racionaliza el numerador: $\frac{2x - 3}{x + 7}$

60. Encuentra el cociente de diferencias de f(x2 = x3 + 8.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. Suma: 3i; producto: 1+21i
2. - 1 - yo, - 1 + yo
3. - 3 - 4i
4. 29

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Función de potencia (págs. 212-215)

f1x2 = xn , n Ú 2 par

Dominio: todos los números reales; Rango de números reales no negativos
Contiene los puntos 1 - 1, 12, 10, 02, 11, 12
incluso función
Decreciente en 1 - q, 04, creciente en 30, q 2

f1x2 = xn , n Ú 3 impar

Dominio: todos los números reales; Rango de todos los números reales
Contiene los puntos 1 - 1, - 12, 10, 02, 11, 12
Función impar
Aumentando en 1 - q, q 2

Función polinómica (págs. 211–212, 215–222)

f1x2 = anxn + an-1xn-1 + g + a1x + a0, an · 0

Dominio: todos los números reales
Como máximo n - 1 puntos de inflexión
Comportamiento final: Se comporta como y = anxn para · x · grande

Ceros reales de una función polinómica f (p. 216)

Números reales para los cuales f1x2 = 0; los ceros reales de f son las intersecciones con el eje x de la gráfica de f.

Multiplicidad (pág. 217)

Si 1x - r2 m es factor de un polinomio f y 1x - r2 entonces r $^{m+1}$ no es un factor de f, se llama cero real de multiplicidad m de f.

Función racional (págs. 234-241)

R1x2 = $\frac{p1x2}{q1x2}$

p, q son funciones polinomiales y q no es el polinomio cero.

Dominio: 5x· q1x2 · 06
Asíntotas verticales: Con R(x) en términos más bajos, si q1r2 = 0 para algún número real, entonces x = r es una asíntota vertical.
Asíntota horizontal u oblicua: consulte el resumen en las páginas 239–240.

Teorema del resto (p. 268)

Si una función polinómica f(x) se divide por x - c, entonces el resto es f(c).

Teorema del factor (p. 269)

x - c es un factor de una función polinómica f(x) si y sólo si f1c2 = 0.

Machine Translated by Google

La regla de los signos de Descartes (p. 270)

Sea f una función polinómica escrita en forma estándar.

- El número de ceros positivos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes distintos de cero de f(x) o es igual a ese número menos un número entero par.
- El número de ceros reales negativos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes distintos de cero de f1 - x2 o bien es igual a ese número menos algún número entero par.

Teorema de los ceros racionales (p. 271)

Sea f una función polinómica de grado 1 o superior de la forma

$$f1x2 = anxn + an-1xn-1 + g + a1x + a0 \quad an \cdot 0,\ a0 \cdot 0$$

donde cada coeficiente es un número entero. si q $\frac{pag}{}$, en términos más bajos, es un cero racional de f, entonces p debe ser un factor de a0 y q debe ser un factor de an.

Teorema del valor intermedio (p. 276)

Sea f una función polinómica. Si a 6 b y f(a) y f(b) son de signo opuesto, entonces hay al menos un cero real de f entre a y b.

Teorema fundamental del álgebra (p. 282)

Toda función polinómica compleja f de grado n Ú 1 tiene al menos un cero complejo.

Teorema de pares conjugados (p. 283)

Sea f una función polinómica cuyos coeficientes son números reales. Si r = a + bi es un cero de f, entonces su conjugado complejo $r = \overline{a} - bi$ también es un cero de f.

Objetivos

Sección	Deberías poder hacerlo. . .	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
4.1	1 Identificar funciones polinómicas y su grado (\211)	1	1–4
	2 Graficar funciones polinómicas usando transformaciones (p. 215)	2, 3	5–7
	3 Identificar los ceros reales de una función polinómica y su multiplicidad (p. 216) 4–9		8-11
4.2	1 Grafica una función polinómica (p. 226)	1, 2	8-11
	2 Grafique una función polinómica usando una utilidad gráfica (p. 228)	3	49
	3 Construya modelos cúbicos a partir de datos (p. 230)	4	51
4.3	1 Encuentra el dominio de una función racional (p. 234)	1–3	12-14
	2 Encuentra las asíntotas verticales de una función racional (p. 237)	4	12-14
	3 Encuentra una asíntota horizontal u oblicua de una función racional (p. 239)	5–8	12-14
4.4	1 Grafica una función racional (p. 245)	1–6	15-20
	2 Resolver problemas aplicados que involucran funciones racionales (p. 255)	7	50
4.5	1 Resolver desigualdades polinómicas (p. 260)	1, 2	21, 22
	2 Resolver desigualdades racionales (p. 262)	3, 4	23–25
4.6	1 Utilice los teoremas del resto y del factor (p. 267)	1, 2	26–28
	2 Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos de una función polinómica (p. 270)	3	29, 30
	3 Utilice el teorema de los ceros racionales para enumerar los posibles ceros racionales de una función polinómica (p. 271)	4	31–34
	4 Encuentra los ceros reales de una función polinómica (p. 272)	5, 6	32–34
	5 Resolver ecuaciones polinómicas (p. 274)	7	35, 36
	6 Utilice el teorema de los límites de ceros (p. 275)	8	37, 38
	7 Utilice el teorema del valor intermedio (p. 276)	9, 10	39–42
4.7	1 Utilice el teorema de pares conjugados (p. 283)	1	43, 44
	2 Encuentra una función polinómica con ceros especificados (p. 284)	2	43, 44
	3 Encuentra los ceros complejos de una función polinómica (p. 285)	3	45–48

Machine Translated by Google

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 a 4, determine si la función es una función polinómica, una función racional o ninguna de las dos. Para aquellas que son funciones polinómicas, indique el grado. Para aquellas que no son funciones polinómicas, diga por qué no.

1. f1x2 = x7 - 6x5 + 2x4 + x3 + x - 1 2. f1x2 = x5/2 + 4x2 + 3x1/2 - 5 3. f1x2 = 3x2 + 5x1/2 - 1 4. f1x2 = 3

En los problemas 5 a 7, represente gráficamente cada función usando transformaciones (desplazamiento, compresión, estiramiento y reflexión). Muestra todas las etapas.

5. f1x2 = 1x + 22 ^{3} 6. f1x2 = - 1x - 12 ^{4} 7. f1x2 = 1x - 12 $^{4+2}$

En los problemas 8 a 11, grafica cada función polinómica siguiendo los pasos 1 a 5 de la página 227.

8. f1x2 = x1x + 22 1x + 42 10. 9. f1x2 = 1x - 22 ^{2} 1x + 42

f1x2 = - 2x3 + 4x2 11. f1x2 = 1x - 12 ^{2} 1x + 32 1x + 12

En los problemas 12 a 14, encuentre el dominio de cada función racional. Encuentre asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

12. $R1x2 = 1x \dfrac{x - 4}{+ 32}^2$ 13. $R1x2 = \dfrac{2x2 + 1}{x2 - 4}$ 14. $R1x2 = \dfrac{x2 + 3x + 2}{1x + 22^2}$

En los problemas 15 a 20, grafica cada función racional siguiendo los siete pasos indicados en la página 247.

15. $R1x2 = \dfrac{2x - 6}{X}$ 16. $H1x2 = \dfrac{x + 2}{x1x - 22}$ 17. $R1x2 = \dfrac{x2 + x - 6}{x2 - x - 6}$

18. $F1x2 = \dfrac{x3}{x2 - 4}$ 19. $R1x2 = 1x \dfrac{2x4}{- 12}^2$ 20. $G1x2 = x2 \dfrac{x2 - 4}{- x - 2}$

En los problemas 21 a 25, resuelve cada desigualdad. Grafique el conjunto solución.

21. x3 + x2 6 4x + 4 22. x3 + 4x2 Ú x + 4 23. $\dfrac{2x - 6}{1- x}$ 6 2 24. $\dfrac{1x - 22\ 1x - 12}{x - 3}$ U 0 25. $\dfrac{x2 - 8x + 12}{x2 - 16}$ 7 0

En los problemas 26 y 27, encuentre el resto R cuando f(x) se divide por g(x). ¿Es ga factor de f?

26. f1x2 = x3 - 3x2 + x + 2; g1x2 = x - 2 28. Encuentra 27. f1x2 = x4 - 5x + 6; g1x2 = 2- x2

el valor de f1x2 = 12x6 - 8x4 + 1 en x = 4.

En los problemas 29 y 30, utilice la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos y negativos puede tener cada función polinomial. No intentes encontrar los ceros.

29. - x8 - 4x7 + 3x6 - 9x4 + x3 - x2 + 2

30. f1x2 = - 6x5 + x4 + 5x3 + x + 1

31. Enumere todos los ceros racionales potenciales de f1x2 = 12x8 - x7 + 6x4 - x3 + x - 3.

En los problemas 32 a 34, utilice el teorema de los ceros racionales para encontrar todos los ceros reales de cada función polinómica. Usa los ceros para factorizar f sobre los números reales.

32. f1x2 = x3 - 3x2 - 6x + 8 33. f1x2 = 4x3 + 4x2 - 7x + 2 34. f1x2 = x4 - 4x3 + 9x2 - 20x + 20

En los problemas 35 y 36, resuelve cada ecuación del sistema de números reales.

35. 2x4 + 2x3 - 11x2 + x - 6 = 0 36. 2x4 + 7x3 + x2 - 7x - 3 = 0

En los problemas 37 y 38, encuentre los límites de los ceros reales de cada función polinómica.

37. f1x2 = x3 - x2 - 4x + 2 38. f1x2 = 2x3 - 7x2 - 10x + 35

En los problemas 39 y 40, utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que cada función polinómica tiene un cero real en el intervalo dado.

39. f1x2 = x3 - 2x2 + 3x - 1; 30, 24 40. f1x2 = 8x4 - 4x3 - 2x - 1; 30, 14

En los problemas 41 y 42, cada función polinómica tiene exactamente un cero positivo. Aproxima el cero correcto a dos decimales.

41. f1x2 = x3 - x - 2 42. f1x2 = 8x4 - 4x3 - 2x - 1

En los problemas 43 y 44 se proporciona información sobre un polinomio complejo f cuyos coeficientes son números reales. Encuentra los ceros restantes de f. Luego encuentra una función polinómica con coeficientes reales que tenga ceros.

43. Grado 3; ceros: 2 + 3i, 4 44. Grado 5; ceros: 6 - i, 2 + 5i, 3

En los problemas 45 a 48, encuentre los ceros complejos de cada función polinómica f. Escribe f en forma factorizada.

45. f1x2 = x3 - 3x2 - 6x + 8 47. f1x2 46. f1x2 = 4x3 + 4x2 - 7x + 2

= x4 - 4x3 + 9x2 - 20x + 20 48. f1x2 = 2x4 + 2x3 - 11x2 + x - 6

Machine Translated by Google

49. Grafica la función polinómica

$$f(x) = x^3 - 2{,}37x^2 - 4{,}68x + 6{,}93$$

siguiendo los pasos del 1 al 8 en la página 229.

50. Hacer una lata Se requiere que una lata con forma de cilindro circular recto tenga un volumen de 250 centímetros cúbicos.

(a) Exprese la cantidad A de material necesario para fabricar la lata en función del radio r del cilindro.

(b) ¿Cuánto material se requiere si la lata tiene un radio de 3 centímetros?

(c) ¿Cuánto material se requiere si la lata tiene un radio de 5 centímetros?

(d) Gráfica $A = A(r)$. ¿ Para qué valor de r es A el más pequeño?

51. Precios de la vivienda Los datos de la tabla de la derecha representan los precios medios de las viviendas nuevas en enero en los Estados Unidos para los años mostrados.

(a) Con una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que parece existir entre las dos variables.

(b) Decida cuál es la función que mejor se ajusta a estos datos (lineal, cuadrática o cúbica) y utilice esta función para predecir el precio mediano de una vivienda nueva en Estados Unidos para enero de 2022 1t = 102.

(c) Dibuje la función de mejor ajuste en el diagrama de dispersión obtenido en el inciso (a).

Año, t	Precio medio, P ($1000)
2004, 1	209,5
2006, 2	244,9
2008, 3	232,4
2010, 4	218.2
2012, 5	221,7
2014, 6	269,8
2016, 7	288,4
2018, 8	324,9

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

1. Grafica $f(x) = (x - 3)^4 - 2$ usando transformaciones.

2. Para la función polinómica $g(x) = 2x^3 + 5x^2 - 28x - 15$,

(a) Determine el número máximo de ceros reales que puede tener la función.

(b) Enumere los posibles ceros racionales.

(c) Determine los ceros reales de g. Factoriza g sobre los reales.

(d) Encuentre las intersecciones x e y de la gráfica de g.

(e) Determine si la gráfica cruza o toca el eje x en cada intersección con el eje x.

(f) Encuentre la función de potencia a la que se asemeja la gráfica de g para valores grandes de $|x|$.

(g) Junte toda la información para obtener la gráfica de g.

3. Encuentra los ceros complejos de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 25x - 100$.

4. Resuelve $3x^3 + 2x - 1 = 8x^2 - 4$ en el número complejo sistema.

En los problemas 5 y 6, encuentre el dominio de cada función. Encuentre asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

5. $g(x) = x^2 \dfrac{2x^2 - 14x + 24}{+ 6x - 40}$

6. $r(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$

7. Grafique la función del problema 6. Etiquete todas las intersecciones, asíntotas verticales, asíntotas horizontales y asíntotas oblicuas.

En los problemas 8 y 9, escribe una función que cumpla las condiciones dadas.

8. Polinomio de cuarto grado con coeficientes reales; ceros: $-2, 0, 3 + i$

9. Función racional; asíntotas: $y = 2$, $x = 4$; dominio: $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

10. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la función $f(x) = -2x^2 - 3x + 8$ tiene al menos un cero real en el intervalo $[0, 4]$.

11. Resuelve: $\dfrac{x + 2}{x - 3} \geq 2$

12. Resuelve: $x^3 + 7x^2 \leq 2x^2 - 6x$

Machine Translated by Google

Revisión acumulativa

1. Encuentra la distancia entre los puntos P = 11, 32 y Q = 1 - 4, 22.

2. Resuelve la desigualdad x2 Ú x y grafica el conjunto solución.

3. Resuelve la desigualdad x2 - 3x 6 4 y grafica el conjunto solución.

4. Encuentre una función lineal con pendiente - 3 que contenga la punto 1 - 1, 42. Grafica la función.

5. Encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta y = 2x + 1 y que contiene el punto (3, 5). Expresa tu respuesta en forma pendiente-intersección y grafica la recta.

6. Grafica la ecuación y = x3 .

7. ¿La relación 5 13, 62, 11, 32, 12, 52, 13, 82 6 representa una función? ¿Por qué o por qué no?

8. Resuelve la ecuación x3 - 6x2 + 8x = 0.

9. Resuelve la desigualdad 3x + 2 … 5x - 1 y grafica la solución colocar.

10. Encuentra el centro y el radio del círculo.

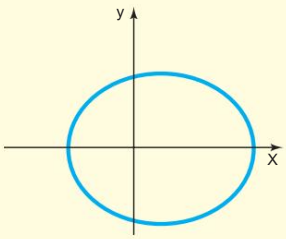
$$x2 + 4x + y2 - 2y - 4 = 0$$

Grafica el círculo.

11. Para la ecuación y = x3 - 9x, determine las intersecciones y pruebe la simetría.

12. Encuentra una ecuación de la recta perpendicular a 3x - 2y = 7 que contiene el punto (1, 5).

13. ¿Es la siguiente gráfica de una función? ¿Por qué o por qué no?



14. Para la función f1x2 = x2 + 5x - 2, encuentre
(a) f(3) (b) f1 - x2
(c) - f1x2 (d) f13x2
(e) $\dfrac{f1x + h2 - f1x2}{h}$ h · 0

15. Dada la función

$$f1x2 = x \frac{x + 5}{- 1}$$

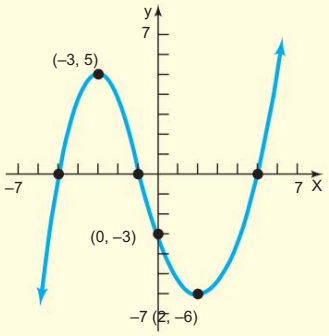
(a) ¿Cuál es el dominio de f?
(b) ¿Está el punto (2, 6) en la gráfica de f?
(c) Si x = 3, ¿cuál es f(x)? ¿Qué punto está en la gráfica de f ?
(d) Si f1x2 = 9, ¿cuál es x? ¿Qué punto está en la gráfica de f?
(e) ¿Es f un polinomio o una función racional?

16. Grafica la función f1x2 = - 3x + 7.

17. Grafica f1x2 = 2x2 - 4x + 1 determinando si su gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo y encontrando su vértice, eje de simetría, intersección con el eje y e intersección con el eje x, si las hubiera.

18. Encuentra la tasa de cambio promedio de f1x2 = x2 + 3x + 1 de 1 a 2. Usa este resultado para encontrar la ecuación de la recta secante que contiene (1, f(1)) y (2, f(2)) .

19. En las partes (a) a (f), utilice el siguiente gráfico.



(a) Encuentre las intersecciones.
(b) Con base en la gráfica, indique si la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y/o al origen.
(c) Con base en la gráfica, indica si la función es par, impar o ninguna de las dos.
(d) Enumere los intervalos en los que f aumenta. Enumere los intervalos en los que f está disminuyendo.
(e) Enumere los números, si los hay, en los que f tiene un máximo local. ¿Cuáles son los valores máximos locales?
(f) Enumere los números, si los hay, en los que f tiene un mínimo local. ¿Cuáles son los valores mínimos locales?

20. Determina algebraicamente si la función

$$f1x2 = \frac{5x}{x2 - 9}$$

es par, impar o ninguno de los dos.

21. Para la función f1x2 = e 2x + 1 si - 3 6 x 6 2 x Ú 2

(a) Encuentre el dominio de f.
(b) Localice cualquier intercepción.
(c) Grafique la función.
(d) Con base en la gráfica, encuentre el rango.

22. Grafica la función f1x2 = - 31x + 12 ^{2} + 5 usando transformaciones.

23. Supongamos que f1x2 = x2 - 5x + 1 y g1x2 = - 4x - 7.

(a) Encuentre f + g e indique su dominio.

(b) Encuentre $\frac{F}{}$ y establezca su dominio.

24. Ecuación de la demanda El precio p (en dólares) y la cantidad x Las ventas de un determinado producto obedecen a la ecuación de la demanda.

$$pag = - \frac{1}{10} x + 150, 0 \ldots x \ldots 1500$$

(a) Exprese el ingreso R en función de x.
(b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 100 unidades?
(c) ¿Qué cantidad x maximiza los ingresos? ¿Cuál es el ingreso máximo?

(d) ¿ Qué precio debería cobrar la empresa para maximizar ¿ganancia?

Machine Translated by Google

Proyectos del Capítulo

Proyecto basado en Internet

I. Duración del día Vaya a http://en.wikipedia.org/wiki/Latitude y lea sobre la latitud en el subtítulo "Preliminares". Ahora vaya a http://www.orchidculture.com/COD/daylength.html.

1. Para un día particular del año, registre en una tabla los 60°N. duración del día para el ecuador (0°N), 5°N, 10°N, . . . , Ingrese los datos en una hoja de cálculo de Excel, una calculadora gráfica TI o alguna otra hoja de cálculo capaz de encontrar funciones lineales, cuadráticas y cúbicas de mejor ajuste.
2. Dibuje un diagrama de dispersión de los datos con la latitud como variable independiente y la duración del día como variable dependiente usando Excel, una calculadora gráfica TI o alguna otra hoja de cálculo. El proyecto del Capítulo 3 describe cómo dibujar un diagrama de dispersión en Excel.
3. Determine la función lineal de mejor ajuste. Grafique la función lineal de mejor ajuste en el diagrama de dispersión. Para hacer esto en Excel, haga clic derecho en cualquier punto de datos en el diagrama de dispersión. Ahora haga clic en Agregar línea de tendencia. . . menú. En Opciones de línea de tendencia, seleccione el botón de opción Lineal y seleccione Mostrar ecuación en el gráfico. Consulte la Figura 52. Mueva la ventana Opciones de línea de tendencia hacia un lado y verá la función lineal de mejor ajuste mostrada en el diagrama de dispersión. ¿Crees que la función describe con precisión la relación entre la latitud y la duración del día?
4. Determine la función cuadrática de mejor ajuste. Grafique la función cuadrática de mejor ajuste en el diagrama de dispersión. Para hacer esto en Excel, haga clic derecho en cualquier punto de datos en el diagrama de dispersión. Ahora haga clic en Agregar línea de tendencia. . . menú. En Opciones de línea de tendencia, seleccione el botón de opción Polinomio con Orden establecido en 2. Seleccione Mostrar ecuación en el gráfico. Mueva la ventana Opciones de línea de tendencia a un lado y verá la función cuadrática de mejor ajuste mostrada en el diagrama de dispersión. ¿Crees que la función describe con precisión la relación entre la latitud y la duración del día?

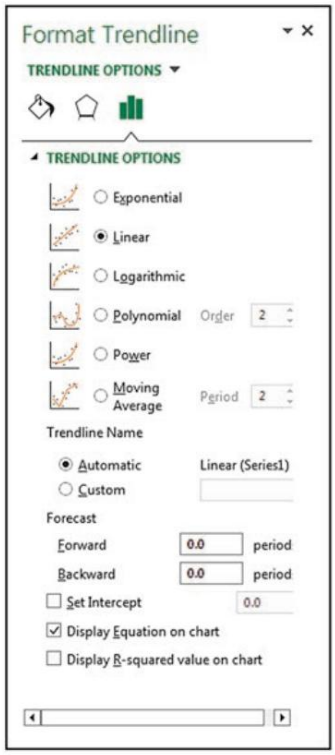


Figura 52

5. Determine la función cúbica de mejor ajuste. Grafique la función cúbica de mejor ajuste en el diagrama de dispersión. Para hacer esto en Excel, haga clic derecho en cualquier punto de datos en el diagrama de dispersión. Ahora haga clic en Agregar línea de tendencia. . . menú. En Opciones de línea de tendencia, seleccione el botón de opción Polinomio con Orden establecido en 3. Seleccione Mostrar ecuación en el gráfico. Mueva la ventana Opciones de línea de tendencia a un lado y verá la función cúbica de mejor ajuste mostrada en el diagrama de dispersión. ¿Crees que la función describe con precisión la relación entre la latitud y la duración del día?
6. ¿Cuál de los tres modelos parece ajustarse mejor a los datos? Explique su razonamiento.
7. Utilice su modelo para predecir las horas de luz del día que seleccionó para Chicago (41,85 grados de latitud norte). Vaya al Old Farmer's Almanac u otro sitio web para determinar las horas de luz en Chicago para el día que seleccionó. ¿Cómo se comparan los dos?

Cita: Excel © 2018 Microsoft Corporation. Usado con permiso de Microsoft.

El siguiente proyecto está disponible en el Centro de recursos para instructores (IRC):

II. Teoría de ecuaciones Los coeficientes de una función polinómica se pueden encontrar si se conocen sus ceros, lo cual es una ventaja de usar polinomios en el modelado.

Machine Translated by Google

5 exponencial y Funciones logarítmicas

Depreciación de los coches

Estás listo para comprar ese primer auto nuevo. Sabes que los automóviles pierden valor con el tiempo debido a la depreciación y que diferentes automóviles tienen diferentes tasas de depreciación. Por lo tanto, investigará las tasas de depreciación de los automóviles que está pensando en comprar. Después de todo, para los automóviles que se venden aproximadamente al mismo precio, cuanto menor sea la tasa de depreciación, más valdrá el automóvil cada año.

—Ver el Proyecto del Capítulo I basado en Internet—

Describir

5.1 Funciones compuestas
5.2 Funciones Uno a Uno; Funciones inversas
5.3 Funciones exponenciales
5.4 Funciones logarítmicas
5.5 Propiedades de los logaritmos
5.6 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales
5.7 Modelos Financieros
5.8 Modelos de Crecimiento y Decaimiento Exponenciales; Ley de Newton; Modelos logísticos de crecimiento y decadencia
5.9 Construcción de modelos exponenciales, logarítmicos y logísticos a partir de datos
Revisión del capítulo
Prueba de capítulo
Revisión acumulativa
Proyectos del Capítulo

Una mirada atras

Hasta ahora, nuestro estudio de funciones se ha concentrado en funciones polinómicas y racionales. Estas funciones pertenecen a la clase de funciones algebraicas, es decir, funciones que se pueden expresar en términos de sumas, diferencias, productos, cocientes, potencias o raíces de polinomios. Las funciones que no son algebraicas se denominan trascendentales. Es decir, trascienden o van más allá de las funciones algebraicas.

Una mirada hacia el futuro

En este capítulo, estudiamos dos funciones trascendentales: la función exponencial y la función logarítmica. Estas funciones ocurren con frecuencia en una amplia variedad de aplicaciones, como biología, química, economía y psicología.

El capítulo comienza con una discusión de funciones compuestas, uno a uno e inversas. conceptos necesarios para explicar la relación entre funciones exponenciales y logarítmicas.

Machine Translated by Google

5.1 Funciones compuestas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Encuentre el valor de una función (Sección 2.1, págs. 87–89) • Dominio de una función (Sección 2.1, págs. 91–93)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 299.

OBJETIVOS 1 Formar una función compuesta (p. 295)

2 Encuentre el dominio de una función compuesta (p. 296)

1 Formar una función compuesta

Suponga que un petrolero tiene una fuga de petróleo y desea determinar el área de la mancha circular de petróleo alrededor del barco. Vea la Figura 1. Se determina que el radio de la mancha circular de petróleo alrededor del barco aumenta a un ritmo de 3 pies por minuto. Entonces el radio r de la mancha de petróleo en cualquier momento t, en minutos, viene dado por r1t2 = 3t. Entonces, después de 20 minutos, el radio de la mancha de petróleo es r1202 = 31202 = 60 pies.

El área A de un círculo es función del radio r dado por A1r2 = pr de la mancha circular ^{2}. La zona de aceite después de 20 minutos es A1602 = p1602 = 3600p pies cuadrados. ^{2}
Tenga en cuenta que 60 = r1202, entonces A1602 = A1r1202 2. El argumento de la función A es la salida de la función r.

En general, el área de la mancha de aceite se puede expresar como función del tiempo t 2 evaluando A1r1t2 2 y obteniendo A1r1t2 2 = A13t2 = p13t2 = 9pt ^{2} . La función A1r1t2 2 es un tipo especial de función llamada función compuesta.

Como otro ejemplo, considere la función y = 12x + 32 y u = g1x2 = 2x + ^{2}. Sea y = f1u2 = u2 3. Luego, mediante un proceso de sustitución, la función original se obtiene de la siguiente manera: y = f1u2 = f1g1x2 2 = 12x + 32 ^{2}.

En general, supongamos que f y g son dos funciones y que x es un número en el dominio de g. La evaluación de g en x produce g1x2. Si g1x2 está en el dominio de f, entonces evaluar f en g1x2 produce la expresión f1g1x2 2. La correspondencia de x con f1g1x2 2 se llama función compuesta f g.

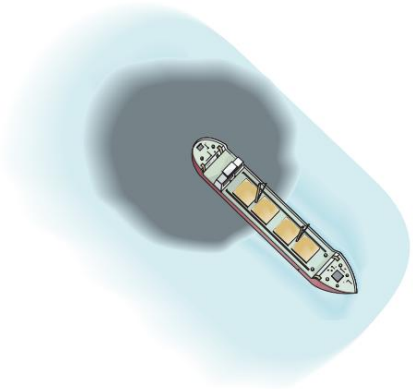


Figura 1

DEFINICIÓN Función compuesta

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta, denotada por f g (leída como " f compuesta con g"), se define por

$$1f \quad g2\ 1x2 = f1g1x2\ 2$$

El dominio de f g es el conjunto de todos los números x en el dominio de g para los cuales g1x2 está en el dominio de f.

Mire cuidadosamente la Figura 2. Sólo aquellos valores de x en el dominio de g para los cuales g1x2 está en el dominio de f pueden estar en el dominio de f g. La razón es si g1x2 no está en el dominio de f, entonces f1g1x2 2 no está definido. Por esto, el dominio de f g es un subconjunto del dominio de g; el rango de f g es un subconjunto del rango de f.

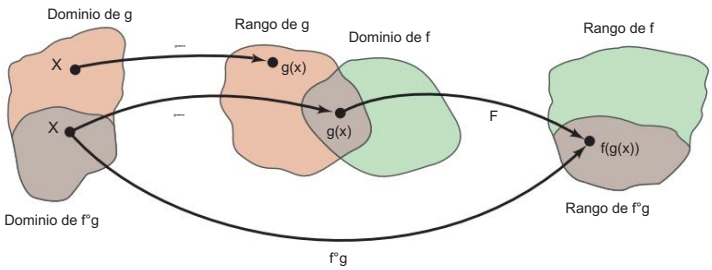


Figura 2

Machine Translated by Google

La Figura 3 proporciona una segunda ilustración de la definición. Aquí x es la entrada a la función g, lo que produce g1x2. Entonces g1x2 es la entrada a la función f, lo que produce f1g1x22. Tenga en cuenta que la función "interna" g en f1g1x22 se "procesa" primero.

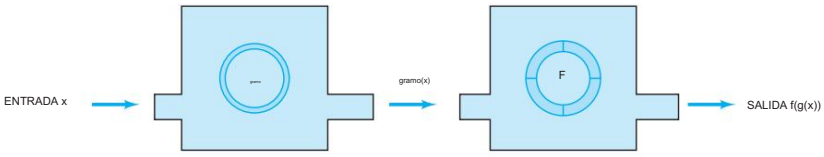


figura 3

EJEMPLO 1 Evaluación de una función compuesta

Supongamos que f1x2 = 2x2 - 3 y g1x2 = 4x. Encontrar:

(a) 1f g2 112 (b) 1g f 2 112 (c) 1f f 2 1 - 22 (d) 1g g2 1 - 12

Solución (a) 1f g2 112 = f1g112 2 = f142 = 2 # 42 - 3 = 29

cc
g1x2 · 4x f1x2 · 2x2 · 3
g112 · 4

(b) 1g f 2 112 = g1f112 2 = g1 - 12 = 4 # 1 - 12 = - 4

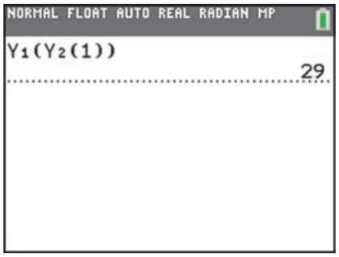
c c
f1x2 · 2x2 · 3 g1x2 · 4x
f 112 · ·1

(c) 1f f 2 1 - 22 = f1f1 - 22 2 = f152 = 2 # 52 - 3 = 47

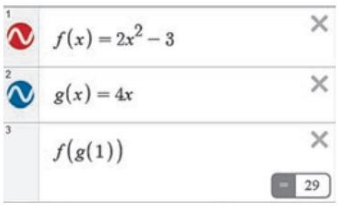
c f 1 ·22 · 21 ·22² · 3 · 5

(d) 1g g2 1 - 12 = g1g1 - 12 2 = g1 - 42 = 4 # 1 - 42 = - 16

c g 1 ·12 · ·4



(a) TI-84 Plus C



(b) Desmos

Figura 4

COMENTARIO Las utilidades gráficas pueden evaluar funciones compuestas.* Usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C, sea Y1 = f1x2 = 2x2 - 3 e Y2 = g1x2 = 4x, y encuentre 1f g2(1) como se muestra en la Figura 4(a) . Usando Desmos, encuentre 1f g2 (1) como se muestra en la Figura 4(b). Tenga en cuenta que estos dan el resultado obtenido en el Ejemplo 1(a). ■

Ahora resuelve el problema 1 3

2 Encuentre el dominio de una función compuesta

EJEMPLO 2 Encontrar una función compuesta y su dominio

Supongamos que f1x2 = x2 + 3x - 1 y g1x2 = 2x + 3.

Encuentre: (a) f g (b) gramo f

Luego encuentra el dominio de cada función compuesta.

Solución El dominio de f y el dominio de g son el conjunto de todos los números reales.

(a) 1f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f12x + 32 = 12x + 32 2 + 312x + 32 - 1

c
c g 1x2 · 2x · 3 f 1x2 · x2 · 3x · 1

= 4x2 + 12x + 9 + 6x + 9 - 1 = 4x2 + 18x + 17

Debido a que los dominios de f y g son el conjunto de todos los números reales, el dominio de f g es el conjunto de todos los números reales.

*Consulte el manual de su usuario para conocer las pulsaciones de teclas adecuadas.

Machine Translated by Google

(b) 1g f 2 1x2 = g1 f1x2 2 = g1x2 + 3x - 12 = 21x2 + 3x - 12 + 3
C C

f1x2 · x2 · 3x · 1 g1x2 · 2x · 3

= 2x2 + 6x - 2 + 3 = 2x2 + 6x + 1

Debido a que los dominios de f y g son el conjunto de todos los números reales, el dominio de g f es el conjunto de todos los números reales.

El ejemplo 2 ilustra que, en general, f f. A veces ff, g hace que g · g sea igual a g como veremos en el ejemplo 5.

Vuelva a mirar la Figura 2 en la página 295.

Para determinar el dominio de la función compuesta 1f g2 1x2 = f1g1x2 2, Tenga en cuenta las siguientes dos ideas sobre la entrada x.

- Cualquier x que no esté en el dominio de g debe excluirse.
- Debe excluirse cualquier x para el cual g(x) no esté en el dominio de f .

EJEMPLO 3 Encontrar el dominio de f g

Encuentra el dominio de f g si $f1x2 = x + \frac{1}{2}$ y $g1x2 = x - 1 \frac{4}{}$.

Solución

Para 1f g2 1x2 = f1g1x2 2, primero observe que el dominio de g es 5x· x · 16, por lo que 1 es excluido del dominio de f , lo que g. A continuación observe que el dominio de f es 5x· x · - 26, significa que g1x2 no puede ser igual a - 2. Resuelva la ecuación g1x2 = - 2 para determinar qué valor(es) adicional(es) de x excluir.

$$\frac{4}{x - 1} = - 2 \qquad \text{gramo } 1x2 \cdot \cdot 2$$

$$4 = - 21x - 12 \qquad \text{Multiplica ambos lados por } x \cdot 1.$$

$$4 = - 2x + 2$$

$$2x = - 2$$

$$x = - 1$$

También excluya - 1 del dominio de f g.

El dominio de f g es 5x· x · - 1, x · 16.

✓ Verifique: Para x = 1, $g1x2 = x - \frac{4}{1}$ no está definido, por lo que 1f g2 112 = f1g112 2 no lo está definido.

Para x = - 1, g1 - 12 = - 2 y 1f g2 1 - 12 = f1g1 - 12 2 = f1 - 22 no está definido.

EJEMPLO 4 Encontrar una función compuesta y su dominio

Supongamos $f1x2 = \frac{1}{x + 2}$ y $g1x2 = \frac{4}{x - 1}$.

Encuentre: (a) f (b) f f

Luego encuentra el dominio de cada función compuesta.

Solución

El dominio de f es 5x· x · - 26 y el dominio de g es 5x· x · 16.

(a) 1f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f a $\frac{4}{x - 1}$ segundo = $\frac{1}{\frac{4}{x - 1} + 2} = \frac{x - 1}{4 + 21x - 12} = \frac{x - 1}{2x + 2} = \frac{x - 1}{21x + 12}$
C C C

g1x2 · $\frac{4}{x \cdot 1}$ f 1x2 · $\frac{1}{x \cdot 2}$ Multiplicar por $\frac{x \cdot 1}{x \cdot 1}$.

(continuado)

Machine Translated by Google

En el ejemplo 3, el dominio de f Se encontró que g era 5x x ≠ - 1, x ≠ 16.

El dominio de f g también se puede encontrar observando primero el dominio de g: 5x x ≠ 16. Como resultado, excluye 1 del dominio de f g . Luego mire f g y observe que x no puede ser igual a - 1, porque x = - 1 resulta en una división entre 0. Entonces, del dominio de f g. Por tanto, el dominio de f excluya - 1 g es 5x x ≠ - 1, x ≠ 16.

(b) 1f f2 1x2 = f1f1x2 2 = f a 1 $\sqrt{x + 2}$ b = æ $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x + 2} + 2}$ = $\dfrac{x + 2}{1 + 21x + 22}$ = $\dfrac{x + 2}{2x + 5}$

f 1x2 = æ $\dfrac{1}{x + 2}$ f 1x2 = $\dfrac{1}{x + 2}$ Multiplicar por x æ $\dfrac{x + 2}{+ 2}$.

El dominio de f f consta de todos los valores de x en el dominio de f, 5x x ≠ - 26, para los cuales f1x2 = ≠ - 2. Para encontrar otros números x para excluir, resuelve la ecuación $\dfrac{1}{x + 2}$

$$\frac{1}{x + 2} = - 2$$

$$1 = - 21x + 22$$

$$1 = - 2x - 4$$

$$2x = - 5$$

x = - 2 $\dfrac{5}{}$

Entonces f1x2 ≠ - 2 si x ≠ - $\dfrac{5}{2}$. El dominio de f f es e x ` x ≠ - $\dfrac{5}{2}$ ’ x ≠ - 2f.

El dominio de f f también se puede encontrar observando que - 2 no está en el dominio de f y por lo tanto no está en el dominio de f f. Luego, mirando f f, observe que x no puede igual - 2 $\dfrac{5}{}$. ¿Ves por qué? Por lo tanto, el dominio de f f es e x ` x ≠ - $\dfrac{5}{2}$ ’ x ≠ - 2f.

Ahora resuelva los problemas 2 7 y 2 9

EJEMPLO 5 Demostrar que dos funciones compuestas son iguales

Si f1x2 = 3x - 4 y g1x2 = $\dfrac{x + 4}{3}$, muestra esa

1f g2 1x2 = 1g f2 1x2 = x

para cada x en el dominio de f g y g f.

Solución

1f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f ¢ $\sqrt{x + 34}$ ≤ = 3¢ $\sqrt{x + 4}$ 3 ≤ - 4 = x + 4 - 4 = x

g1x2 = $\dfrac{x + 4}{3}$ f 1x2 = 3x − 4

1g f2 1x2 = g1f1x2 2 = g13x - 42 = 3 cc $\dfrac{13x - 42 + 4}{}$ = $\dfrac{3x}{3}$ = x

f 1x2 = 3x − 4 g1x2 = $\dfrac{x + 4}{3}$

Concluimos que 1f g2 1x2 = 1g f2 1x2 = x, x cualquier número real.

Ver el concepto

Usando una calculadora gráfica, sea

Y1 = f1x2 = 3x - 4

Y2 = g1x2 = $\dfrac{1}{3}$ 1x + 42

Y3 = f gramo, Y4 = gramo f

Usando la ventana de visualización -3 … x … 3, -2 … y … 2, grafica solo Y3 e Y4. ¿Que ves? TRACE para verificar que Y3 = Y4.

Machine Translated by Google

En la sección 5.2 veremos que existe una relación importante entre las funciones f y g para las cuales 1f g2 1x2 = 1g f 2 1x2 = x.

Ahora resuelve el problema 3 9

Aplicación de cálculo

Algunas técnicas de cálculo requieren la capacidad de determinar los componentes de una función compuesta. Por ejemplo, la función H1x2 = 1x + 1 es la composición de las funciones f y g, donde f1x2 = 1x y g1x2 = x + 1, porque H1x2 = 1f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f1x + 12 = 1x + 1.

EJEMPLO 6 Encontrar las componentes de una función compuesta

Encuentre las funciones f y g tal que g = H cuando H1x2 = 1x2 + 12 50.

Solución

f La función H eleva la expresión x2 + 1 a la potencia 50. Una forma natural de descomponer H es elevar la función g1x2 = x2 + 1 a la potencia 50. Sea f1x2 = x50 y g1x2 = x2 + 1. Entonces

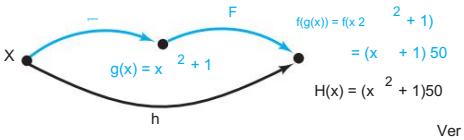


Figura 5

1f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f1x2 + 12 = 1x2 + 12 50 = H1x2

Ver Figura 5.

Se pueden encontrar otras funciones f y g para las cuales f g = H en el ejemplo 6. Para Por ejemplo, si f1x2 = x2 y g1x2 = 1x2 + 12 25, entonces

1f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f1 1x2 + 12 25 2 = 3 1x2 + 12 25 4 2 = 1x2 + 12 50

Aunque las funciones f y g encontradas como solución del ejemplo 6 no son únicas, generalmente lo primero que nos viene a la mente es una selección “natural” para f y g .

EJEMPLO 7 Encontrar las componentes de una función compuesta

Encuentre las funciones f y g tal que f g = H cuando H1x2 = $\frac{1}{x+1}$.

Solución

Aquí H es el recíproco de g1x2 = x + 1. Sea f1x2 = $\frac{1}{x}$ y g1x2 = x + 1. Entonces

1f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f1x + 12 = x + 1 $\frac{1}{\quad}$ = H1x2

Ahora problema de trabajo 4 7

5.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Calcula f132 si f1x2 = - 4x2 + 5x. (págs. 87–89)
2. Encuentre f13x2 si f1x2 = 4 - 2x2 . (págs. 87–89)
3. Encuentra el dominio de la función f1x2 = $\frac{x2 - 1}{x2 - 25}$. (págs. 91 a 93)

Machine Translated by Google

Conceptos y vocabulario

4. Dadas dos funciones f y g, la denotada f _____ _____, g, se define por 1 f g2 1x2 = _____

5. Verdadero o Falso Si f 1x2 = x2 y g 1x2 = 2x + 9, entonces 1 f g 2 142 = 5.

6. Opción múltiple Si f 1x2 = 2x + 2 y g 1x2 = entonces 1 f $\frac{3}{x}$. g2 1x2 es igual

(a) $\frac{3}{2x + 2}$ $\frac{3}{(\text{segundo})\ 2x} + 2$

(c) Un $\frac{3}{x} + 2$ (d) Un $\frac{3}{x + 2}$

7. Opción múltiple Si H = f g y H1x2 = 225 - 4x2 , ¿cuál de las siguientes no pueden ser las funciones componentes f y g?

(a) f1x2 = 225 - x2 ; gramo 1x2 = 4x

(b) f1x2 = 2x; gramo 1x2 = 25 - 4x2

(c) f1x2 = 225 - x ; gramo 1x2 = 4x2

(d) f1x2 = 225 - 4x ; gramo 1x2 = x2

8. Verdadero o Falso El dominio del compuesto la función 1f g21x2 es la misma que el dominio de g1x2.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 y 10, evalúe cada expresión usando los valores dados en la tabla.

9.

x	-3	-2	-1		0	1	2	3
ƒ1x2	11	9	7		5	3	1	-1
g1x2	-8	-3	0		1	0	-3	-8

(a) 1f g2 112 (b) 1f g2 122
(c) 1g f2 122 (d) 1g f2 132
(e) 1g g2 112 (f) 1f f2 132

10.

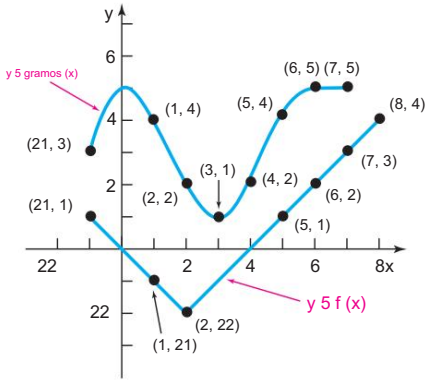
x	-3	-2	-1		0	1	2	3
ƒ1x2	-7	-5	-3	-1		3	5	7
g1x2	8	3	0	-1		0	3	8

(a) 1f g2 112 (b) 1f g2 1 - 12
(c) 1g f2 1 - 12 (d) 1g f2 102
(e) 1g g2 1 - 22 (f) 1f f2 1 - 12

En los problemas 11 y 12, evalúe cada expresión usando las gráficas de y = f1x2 e y = g1x2 que se muestran en la figura.

11. (a) 1g f2 112 (b) 1g f2 152
(c) 1f g2 102 (d) 1f g2 122

12. (a) 1g f2 1 - 12 (b) 1g f2 102
(c) 1f g2 1 - 12 (d) 1f g2 142



En los problemas 13 a 22, para las funciones dadas f y g, encuentre:

(a) 1f g2 142 (c) 1f (b)f2g1 12 2 1 2 2 (d) 1g g2 102

13. f1x2 = 2x; g1x2 = 3x2 + 1

14. f1x2 = 3x + 2; g1x2 = 2x2 - 1

15. f1x2 = 2x2 ; g1x2 = 1 - 3x2

16. f1x2 = 8x2 - 3; g1x2 = 3 - 2x

17. f1x2 = $\frac{1}{2}$x2

18. f1x2 = 2x; g1x2 = 5x

19. f1x2 = 0 x - 2 0 ; g1x2 = x2 + 2

20. f1x2 = 0 x 0 ; g1x2 = x2 + $\frac{1}{9}$

21. f1x2 = x3>2 ; g1x2 = $\frac{2}{x + 1}$

22. f1x2 = $\frac{3}{x + 1}$; g1x2 = 23x

En los problemas 23 a 38, para las funciones dadas f y g, encuentre:

(a) f gramo (b) g f (c) f f (d) g Indique el dominio de cada función compuesta.

23. f1x2 = - x; g1x2 = 2x - 4

24. f1x2 = 2x + 3; g1x2 = 4x

25. f1x2 = x + 1; g1x2 = x2 + 4

26. f1x2 = 3x - 1; g1x2 = x2

Machine Translated by Google

27. f1x2 = x2 ; g1x2 = x2 + 4

28. f1x2 = x2 + 1; g1x2 = 2x2 + 3

29. f1x2 = ; g1x2 = $\frac{3}{x - 1}$ $\frac{2}{x}$

30. f1x2 = ; g1x2 = $\frac{1}{-x + 3}$ $\frac{2}{x}$

31. f1x2 = $\frac{x}{x + 3}$; g1x2 = $\frac{2}{x}$

32. f1x2 = $\frac{x}{x - 1}$; g1x2 = - $\frac{4}{x}$

33. f1x2 = 2x - 2; g1x2 = 1 - 2x

34. f1x2 = 2x; g1x2 = 2x + 5

35. f1x2 = x2 + 4; g1x2 = 2x - 2

36. f1x2 = x2 + 7; g1x2 = 2x - 7

37. f1x2 = $\frac{2x - 1}{2x - 5}$; g1x2 = x - 2 $\frac{x + 4}{}$

38. f1x2 = $\frac{x - 5}{1 x - 3}$; g1x2 = x + $\frac{x + 2}{}$

En los problemas 39 a 46, demuestre que 1f g2 1x2 = 1g f2 1x2 = x.

39. f1x2 = 2x; g1x2 = $\frac{1}{x2}$

40. f1x2 = 4x; g1x2 = $\frac{1}{x4}$

41. f1x2 = x + 5; g1x2 = x - 5

42. f1x2 = x3 ; g1x2 = 23 x

43. f1x2 = 4 - 3x; g1x2 = 14- x2 $\frac{1}{3}$

44. f1x2 = 9x - 6; g1x2 = 1x + 62 $\frac{1}{9}$

45. f1x2 = ; g1x2 = $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x}$

46. f1x2 = ax + b; g1x2 = $\frac{1}{a}$ 1x - b2a · 0

En los problemas 47 a 52, encuentre las funciones f y g tal que f g = H.

47. H1x2 = 12x + 32 4

48. H1x2 = 11 + x2 2 50. 3

49. H1x2 = 21 - x2 51.

H1x2 = 2x2 + 1

H1x2 = 0 2x2 + 3 0

52. H1x2 = 0 2x + 1 0

Aplicaciones y extensiones

53. Si f1x2 = 7x3 - 8x2 + x - 9 y g1x2 = 3, encuentre 1f g2 1x2 y 1g f2 1x2.

54. Si f1x2 = x - $\frac{x + 1}{1}$, encuentre 1f f2 1x2.

55. Si f1x2 = 2x2 + 4 y g1x2 = 6x + a, encuentre a tal que la gráfica de f g cruce el eje y en 166.

56. Si f1x2 = 3x2 - 7 y g1x2 = 2x + a, encuentre a tal que la intersección y de f g sea 68.

En los problemas 57 y 58, use las funciones f y g para encontrar:

(a) f (b) gramo f

(c) el dominio de f g y de g f

(d) las condiciones para las cuales f g = g

57. f(x) = nx + t g(x) = cx + m

58. f1x2 = $\frac{\text{hacha + b}}{cx + d}$ g1x2 = mx

59. Área de superficie de un globo El área de superficie S (en metros cuadrados) de un globo aerostático está dada por

$$S1r2 = 4pr^2$$

donde r es el radio del globo (en metros). Si el radio r aumenta con el tiempo t (en segundos) de acuerdo con la fórmula r1t2 = t $\frac{2}{3}$ 3, t Ú 0, encuentre el área de superficie S del globo en función del tiempo t.

60. Volumen de un globo El volumen V (en metros cúbicos) del globo aerostático descrito en el problema 59 se da por V1r2 = $\frac{4}{}$ pr 3 3. Si el radio r es la misma función de t que En el problema 59, encuentre el volumen V en función del tiempo t.

61. Producción de automóviles El número N de automóviles producidos en una determinada fábrica en un día después de t horas de funcionamiento es dado por N1t2 = 100t - 5t 2, 0 … t … 10. Si el costo C (en dólares) de producir N automóviles es C1N2 = 15 000 + 8 000 N, Encuentre el costo C en función del tiempo t de operación de la fábrica.

62. Preocupaciones medioambientales La dispersión del petróleo que se escapa de un camión cisterna tiene forma de círculo. Si el radio r (en pies) de la dispersión después de t horas es r1t2 = 2001t, encuentre el área A de la mancha de petróleo en función del tiempo t.

63. Costo de producción El precio p de un determinado producto y la cantidad x vendida obedecen a la ecuación de demanda que se muestra.

$$pag = - 4 \frac{1}{}x + 500, 0 \dots x \dots 2000$$

Supongamos que el costo C de producir x unidades es

$$C = \frac{2x}{75} + 800.$$

Suponiendo que todos los artículos producidos se venden, encuentre el costo C en función del precio p.

[Sugerencia: resuelva para x en la ecuación de demanda y luego forme la combinación.]

64. Costo de un bien El precio p, en dólares, de un determinado bien y la cantidad x vendida siguen la ecuación de la demanda.

$$pag = - 5 \frac{1}{}x + 200\ 0 \dots x \dots 1000$$

Supongamos que el costo C, en dólares, de producir x unidades es

$$C = \frac{1x}{10} + 400$$

Suponiendo que todos los artículos producidos se venden, encuentre el costo C en función del precio p.

Machine Translated by Google

65. Volumen de un cilindro El volumen V de un cilindro circular recto de altura h y radio r es V = pr 2h. Si la altura es seis veces el radio, exprese el volumen V en función de r.

66. Volumen de un cono El volumen V de un cono circular recto. es V = $\frac{1}{3}$pr 2h. Si la altura es el doble del radio, expresa la volumen V en función de r.

67. Los comerciantes de divisas a menudo compran moneda extranjera con la esperanza de ganar dinero cuando cambia el valor de la moneda. Por ejemplo, en un día determinado, un dólar estadounidense podría comprar 0,7443 euros y un euro podría comprar 148,8705 yenes.
Sea f1x2 el número de euros que puedes comprar con x dólares, y sea g(x) el número de yenes que puedes comprar con x euros.

(a) Encuentre una función que relacione dólares con euros.
(b) Encuentre una función que relacione los euros con el yen. (c) Utilice los resultados de los incisos (a) y (b) para encontrar una función que relacione los dólares con los yenes. Es decir, encuentre 1g f2 1x2 = g1f1x2 2.
(d) ¿Qué es g1f110002 2?

68. Conversión de temperatura La función C1F2 = $\frac{5}{9}$ 1P - 322 convierte una temperatura en grados Fahrenheit, F, a una temperatura en grados Celsius, C. La función K1C2 = C + 273, convierte una temperatura en grados Celsius a una temperatura en kelvins, K.

(a) Encuentre una función que convierta una temperatura en grados Fahrenheit a una temperatura en kelvin.
(b) Determine 80 grados Fahrenheit en kelvins.

69. Descuentos El fabricante de una computadora ofrece dos descuentos en el modelo de computadora del año pasado. El primer descuento es un reembolso de $500 y el segundo descuento es un 20 % del precio normal, pág.
(a) Escriba una función f que represente el precio de venta si solo se aplica el reembolso.
(b) Escriba una función g que represente el precio de venta si solo se aplica el descuento del 20%.
(c) Encuentre f g y g f. ¿Qué representa cada una de estas funciones? ¿Qué combinación de descuentos representa una mejor oferta para el consumidor?

70. Impuestos Suponga que trabaja por $15 por hora. Escribe una función que represente el salario bruto G en función de las horas trabajadas h. Su empleador debe retener impuestos (impuesto federal sobre la renta, Seguro Social, Medicare) de su cheque de pago. Supongamos que su empleador retiene el 20% de sus ingresos para impuestos. Escriba una función que represente el salario neto N en función del salario bruto G. Encuentre e interprete N G.

71. Supongamos f1x2 = x3 + x2 - 16x - 16 y g1x2 = x2 - 4.
Encuentra los ceros de 1f g2 1x2.

72. Supongamos f1x2 = 2x3 - 3x2 - 8x + 12 y g1x2 = x + 5.
Encuentra los ceros de 1f g2 1x2.

73. Sean f1x2 = ax + b y g1x2 = bx + a, donde a y b son números enteros. Si f112 = 6 y f1g1182 2 - g1f1182 2 = 20,
Encuentre el producto de a y b.

74. Problema de desafío Si f y g son funciones impares, demuestre que la función compuesta f g también es impar.

75. Problema de desafío Si f1x2 = x2 + 5x + c, g1x2 = ax + b, y 1f g2 1x2 = 4x2 + 22x + 31, encuentre a, b y c.

76. Problema de desafío Si f es una función impar y g es una función par, demuestre que las funciones compuestas f g y g f son ambas pares.

77. Problema de desafío Si f1x2 = $\frac{1}{x + 4}$, g1x2 = $\frac{x}{x - 2}$, y h1x2 = 2x + 3, encuentre el dominio de 1f g2 1x2.

78. Problema de desafío Dadas tres funciones f, g y h, defina 1f g h2 1x2 = f 3g1h1x2 2 4. Encuentra 1f g y h2 122 si f1x2 = 6x - 7, g1x2 = $\frac{1}{x}$, h1x2 = 2x + 7.

* Cortesía del Departamento de Matemáticas de Joliet Junior College

Conserve su conocimiento

Los problemas 79 a 88 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

79. Dado f1x2 = 3x + 8 y g1x2 = x - 5, encuentre
1f + g2 1x2, 1 f - g2 1x2, 1 f # g2 1x2, y ¢ f gramo ≤ 1x2
Indique el dominio de cada uno.

80. Encuentra los ceros reales de f1x2 = 2x - 52x + 2.

81. Encuentra el dominio de R1x2 = $\frac{x2 + 6x + 5}{x - 3}$. Encontrar cualquier asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

82. Para la función cuadrática f1x2 = - $\frac{1}{3}$x2 + 2x + 5, encuentra el vértice y el eje de simetría, y determina si la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

83. Resuelve: x2 - 6x - 7… 0

84. Si un triángulo rectángulo tiene hipotenusa c = 2 y cateto a = 1, encuentre la longitud de la otra pierna b.

85. Encuentra los puntos de intersección de las gráficas de las funciones f1x2 = x2 + 3x + 7 y g1x2 = - 2x + 3.

86. Encuentra la distancia entre los puntos 1 - 3, 82 y 12, - 72.

87. Simplifica: $\frac{\frac{3}{x + 1} - \frac{3}{c + 1}}{x - c}$

88. Resuelve: - x3 19 - x2 2 -1>2 + 2x19 - x2 2 1>2 = 0

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. - 21 2.4 - 18x2 3. 5x· x · - 5, x · 56

Machine Translated by Google

5.2 Funciones Uno a Uno; Funciones inversas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Funciones (Sección 2.1, págs. 83–95)
- Funciones crecientes/decrecientes (Sección 2.3, págs. 111 y 112)
- Expresiones racionales (Sección A.5, págs. A35–A42)
- Propiedades de las funciones racionales (sección 4.3, págs. 234–241)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 311.

OBJETIVOS 1 Determinar si una función es uno a uno (p. 303)

2 Obtenga la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica de una función uno a uno (p. 306)

3 Verificar una función inversa (p. 307)

4 Encuentra la inversa de una función definida por una ecuación (p. 308)

1 Determinar si una función es uno a uno

La sección 2.1 presentó cinco formas de representar una función: (1) verbalmente, (2) con una aplicación, (3) como un conjunto de pares ordenados, (4) con una gráfica y (5) con una ecuación. Por ejemplo, las Figuras 6 y 7 ilustran dos funciones diferentes representadas como asignaciones.
La función de la Figura 6 muestra la correspondencia entre los estados y sus poblaciones (en millones). La función de la Figura 7 muestra una correspondencia entre los animales y la esperanza de vida (en años).

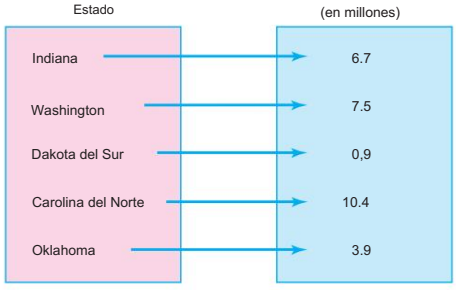


Figura 6

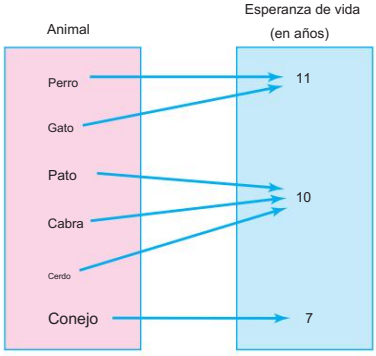


Figura 7

Supongamos que se pide a varias personas que nombren un estado que tiene una población de 0,9 millones según la función de la Figura 6. Todos responderán "Dakota del Sur".
Ahora bien, si a las mismas personas se les pide que nombren un animal cuya esperanza de vida es de 11 años según la función de la Figura 7, algunos pueden responder "perro", mientras que otros pueden responder "gato". ¿Cuál es la diferencia entre las funciones de las Figuras 6 y 7? En la Figura 6, no hay dos elementos en el dominio que correspondan al mismo elemento en el rango. En la Figura 7, este no es el caso: diferentes elementos en el dominio corresponden al mismo elemento en el rango. Funciones como la de la Figura 6 reciben un nombre especial.

DEFINICIÓN Uno a Uno

Una función es uno a uno si dos entradas diferentes en el dominio corresponden a dos salidas diferentes en el rango. Es decir, si x1 y x2 son dos entradas diferentes de una función f, entonces f es uno a uno si f1x12 · f1x22.

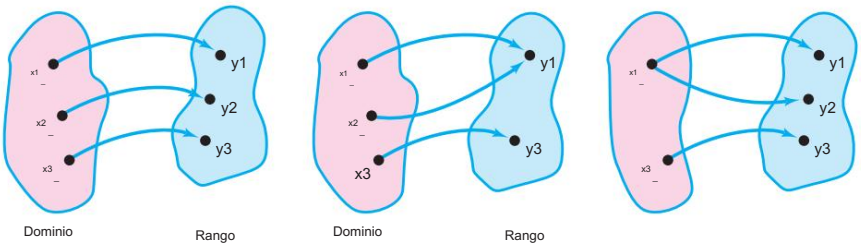
En palabras
Una función no es uno a uno si dos entradas diferentes corresponden a la misma salida.

Dicho de otra manera, una función f es uno a uno si ningún y en el rango es imagen de más de un x en el dominio. Una función no es uno a uno si dos (o más) elementos diferentes en el dominio corresponden al mismo elemento en el rango. Entonces, la función en la Figura 7 no es uno a uno porque dos elementos diferentes en el dominio,

Machine Translated by Google

perro y gato, ambos corresponden a 11 (y también porque tres elementos diferentes en el dominio corresponden a 10).

La Figura 8 ilustra la distinción entre funciones uno a uno, funciones que son no uno a uno, y relaciones que no son funciones.



(a) Función uno a uno: Cada x en el dominio tiene una y solo una imagen en el rango.

(b) No es una función uno a uno: y1 es la imagen de ambos x_1 y x2 .

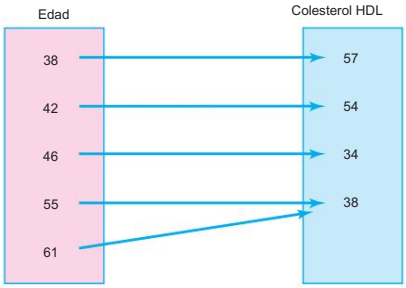
(C) No es una función: x_1 tiene dos imágenes, y1 y y2 .

Figura 8

EJEMPLO 1 Determinar si una función es uno a uno

Determine si las siguientes funciones son uno a uno.

(a) Para la siguiente función, el dominio representa las edades de cinco hombres y el rango representa sus puntuaciones de colesterol HDL (bueno) (mg/dL).



(b) 5 1 - 2, 62, 1 - 1, 32, 10, 22, 11, 52, 12, 82 6

Solución

(a) La función no es uno a uno porque hay dos entradas diferentes, 55 y 61, que corresponden a la misma salida, 38.

(b) La función es uno a uno porque cada entrada distinta corresponde a una producción.

Ahora resuelve los problemas 1 3 y 1 7

Para funciones definidas por una ecuación y = f1x2 y para las cuales se conoce la gráfica de f , existe una prueba simple, llamada prueba de la línea horizontal, para determinar si f es uno a uno.

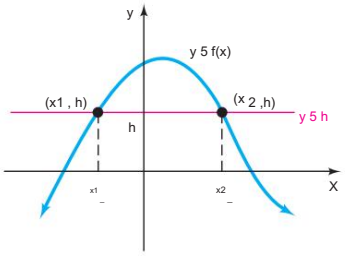


Figura 9
f1x12 = f1x22 = h y x1 · x2; f no es una función uno a uno.

TEOREMA Prueba de línea horizontal

Si cada línea horizontal corta la gráfica de una función f como máximo en un punto, entonces f es uno a uno.

La razón por la que esta prueba funciona se puede ver en la Figura 9, donde la línea horizontal y = h cruza la gráfica en dos puntos distintos, 1x1 , h2 y 1x2 , h2. Dado que h es la imagen de x1 y x2 y de x1 · x2 , f no es uno a uno. Con base en la Figura 9, podemos expresar la prueba de la línea horizontal de otra manera: si la gráfica de cualquier línea horizontal interseca la gráfica de una función f en más de un punto, entonces f no es uno a uno.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Usando la prueba de línea horizontal

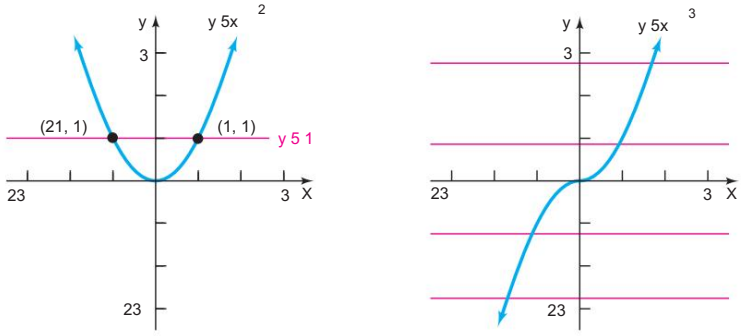
Para cada función, usa su gráfica para determinar si la función es uno a uno.

(a) f1x2 = x2 (b) g1x2 = x3

Solución

(a) La figura 10(a) ilustra la prueba de la línea horizontal para f1x2 = x2 . La recta horizontal y = 1 corta la gráfica de f dos veces, en (1, 1) y en 1 - 1, 12, por lo que f no es cara a cara.

(b) La figura 10(b) ilustra la prueba de la línea horizontal para g1x2 = x3 . Debido a que cada línea horizontal corta la gráfica de g exactamente una vez, la función g es uno a uno.



(a) Una línea horizontal cruza el gráfico. dos veces; f no es uno a uno.

(b) Cada línea horizontal corta la gráfica. Exactamente una vez; g es uno a uno.

Figura 10

Ahora resuelve el problema 2 1

Mire más de cerca la función uno a uno g1x2 = x3 . Esta función es una función creciente. Debido a que una función creciente (o decreciente) siempre tiene valores de y diferentes para valores de x desiguales, se deduce que una función que aumenta (o decrece) en su dominio también es una función uno a uno.

TEOREMA

- Una función que aumenta en un intervalo I es una función uno a uno en I.
- Una función que es decreciente en un intervalo I es una función uno a uno en I.

Las funciones uno a uno y = f1x2 tienen una propiedad importante. Correspondiente a cada x en el dominio de f, hay exactamente una y en el rango porque f es una función.
Y correspondiente a cada y en el rango de f, hay exactamente una x en el dominio porque f es uno a uno. La función representada por la correspondencia desde el rango hasta el dominio se llama función inversa de f.

En palabras
Supongamos que f es una función uno a uno, de modo que la entrada 5 corresponde a la salida 10. Para la función inversa f^{-1}, la entrada 10 corresponderá a la salida 5.

DEFINICIÓN Función Inversa

Supongamos que y = f1x2 es una función uno a uno. La correspondencia entre el rango de f y el dominio de f se llama función inversa de f. El símbolo f^{-1} se utiliza para indicar la función inversa de f. En otras palabras, si y = f1x2 es una función uno a uno, entonces f tiene una función inversa f^{-1} 1y2. y $x = f^{-1}$

Machine Translated by Google

Obtenga la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica 2 de una función uno a uno

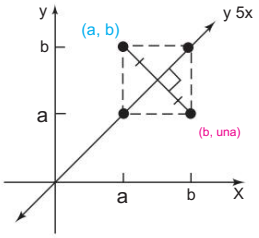


Figura 11

Supongamos que 1a, b2 es un punto en la gráfica de una función uno a uno f definida por y = f1x2. 1b2, Entonces b = f1a2. Esto significa que a = f la $^{-1}$ entonces 1b, a2 es un punto en la gráfica de función inversa f $^{-1}$. La relación entre el punto 1a, b2 en f y el punto 1b, a2 en f se muestra en la Figura 11. El segmento de recta con puntos finales 1a, b2 y 1b, a2 es perpendicular a la recta y = x y es bisectado por la recta y = x. (¿Ves por qué?) Se deduce que el punto 1b, a2 en f es la reflexión sobre la recta y = x del punto 1a, b2 en f. $^{-1}$

TEOREMA

La gráfica de una función uno a uno f y la gráfica de su función inversa f son simétricas con respecto a la recta y = x. $^{-1}$

La figura 12 ilustra el teorema. Una vez conocida la gráfica de f , la gráfica de f se puede obtener reflejando la gráfica de f alrededor de la recta y = x. $^{-1}$

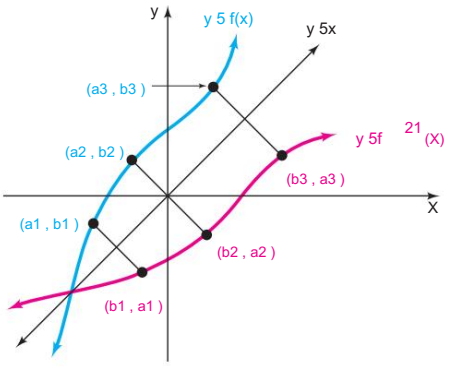


Figura 12

EJEMPLO 3

Graficar una función inversa La gráfica de la Figura 13(a) muestra una función uno a uno y = f1x2. Dibuja la gráfica de su inversa.

Solución

Primero agregue la gráfica de y = x a la Figura 13(a). Dado que los puntos 1 - 2, - 12, 1 - 1, 02 y 12, 12 están en la gráfica de f, los puntos 1 - 1, - 22, 10, - 12 y 11, 22 deben estar en la gráfica. de f es la reflexión sobre el $^{-1}$. Teniendo en cuenta que la gráfica de f $^{-1}$ recta y = x de la gráfica de f, gráfica f $^{-1}$. Véase la Figura 13(b).

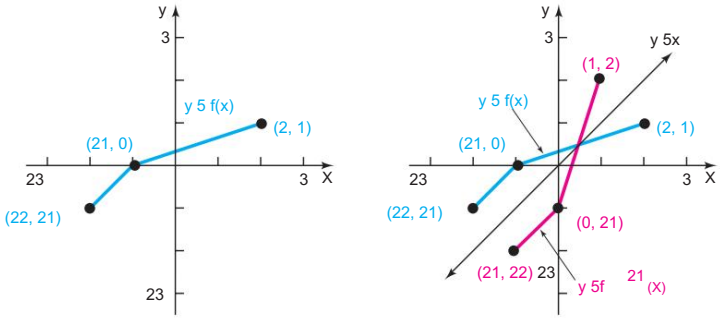


Figura 13

Ahora resuelve el problema 2 7

Machine Translated by Google

3 Verificar una función inversa

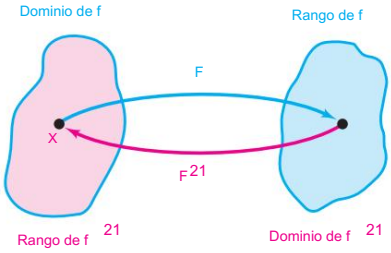


Figura 14

Supongamos que f es una función uno a uno. Entonces f tiene una función f^{-1}. Figura 14 inversa f muestra la relación entre el dominio y rango de f y el dominio y rango de f f^{-1}. Como ilustra la Figura 14,

- Dominio de f = Rango de f $^{-1}$
- Rango de f = Dominio de f $^{-1}$

Mire nuevamente la Figura 14 para visualizar la relación. Comenzando con x, aplicando f, se obtiene y luego aplicando f $^{-1}$ x nuevamente. Comenzando con x, aplicando f y luego $^{-1}$, aplicando f se obtiene el número x nuevamente. En pocas palabras, lo que hace f , f y $^{-1}$ deshace, viceversa. Vea la ilustración que sigue.

Entrada x del dominio de f → Aplicar ¡si f 1x2 → Aplicar ¡si $^{-1}$ → F^{-1} 1 f 1x2 2 = x

Entrada x del dominio de f $^{-1}$ Aplicar ¡f - 1 → F^{-1} 1x2 → Aplicar ¡f f 1f $^{-1}$ 1x2 2 = x

En otras palabras,

- f $^{-1}$ 1f1x2 2 = x donde x está en el dominio de f
- f1f $^{-1}$ 1x2 2 = x donde x está en el dominio de f $^{-1}$

ADVERTENCIA ¡Tenga cuidado! f es un símbolo de la función inversa de f. El - 1 usado en f^{-1} no es un exponente. Eso no es, f^{-1} significa la recíproca. $^{-1}$ apagado ; F 1x2 no es igual a $\frac{1}{f1x2}$. j

Considere la función f1x2 = 2x, que multiplica el argumento x por 2. deshace todo lo La función inversa f $^{-1}$ que hace f . Entonces la función inversa de f es f^{-1} $1x2 = x, \frac{1}{2}$ que divide el argumento por 2. Por ejemplo, f132 = 2 # 3 = 6 y f _ $^{-1}$ $162 = \# 6 \frac{1}{} = 3$, entonces f 2 $^{-1}$ deshace f. Esto se verifica mostrando que f $^{-1}$ 1f1x22 = f $^{-1}$ $12x2 = \# 2x \frac{1}{} = x$ y f1f 2 $^{-1}$ $1x22 = f\ a\ 12xb = 2 \#\ \frac{1}{2}x = x.$

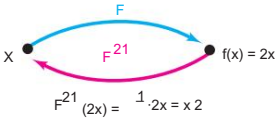


Figura 15

Ver Figura 15.

EJEMPLO 4 Verificación de funciones inversas

(a) Verifique que la inversa de g1x2 = x3 es g-1 1x2 = 23 x.

(b) Verifique que la inversa de f1x2 = 2x + 3 es f $^{-1}$ $1x2 = \frac{1}{2}$ 1x -32.

Solución (a) g-1 1g1x2 2 = g-1 1x32 = 23 x3 = x para todo x en el dominio de g

g1g-1 1x2 2 = g1 23 x2 = 1 23 x2 3 = x para todo x en el dominio de g-1

(b) f $^{-1}$ 1 f1x2 2 = f $^{-1}$ 12x + 32 = 3 $\frac{1}{2}$2x + 32 - 34 = 2 $\frac{1}{2}$ # 2x = x para todo x en el dominio de f

f1f $^{-1}$ 1x2 2 = f a $\frac{1}{2}$ 1x - 32 segundo = 2 # $\frac{1}{2}$ 1x - 32 + 3 = x para todo x en el dominio de f 2 $^{-1}$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Verificación de funciones inversas

Verifica que la inversa de $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ es $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1$. ¿Para qué valores de x es $f^{-1}(f(x)) = x$? ¿Para qué valores de x es $f(f^{-1}(x)) = x$?

Solución

El dominio de f es $\{x \mid x \neq 1\}$ y el dominio de f^{-1} es $\{x \mid x \neq 0\}$. Ahora

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{x - 1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x - 1}} + 1 = x - 1 + 1 = x \text{ proporcionado } x \neq 1$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + 1\right) - 1} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \text{ proporcionado } x \neq 0$$

Ahora resuelve los problemas 33 y 37

4 Encuentra la inversa de una función definida por una ecuación

El hecho de que las gráficas de una función uno a uno f y su función inversa f^{-1} sean simétricas con respecto a la recta $y = x$ nos dice más. Dice que podemos obtener f^{-1} intercambiando los roles de x e y en f. Si f está definida por la ecuación

$$y = f(x)$$

entonces f^{-1} está definido por la ecuación

$$x = f(y)$$

La ecuación $x = f(y)$ define f implícitamente. Si podemos resolver esta ecuación para y, tendremos la forma explícita de f^{-1}, eso es,

$$y = f^{-1}(x)$$

Usemos este procedimiento para encontrar la inversa de $f(x) = 2x + 3$. Como f es una función lineal y es creciente, f es uno a uno y por lo tanto tiene una función inversa.

> **¿Necesita revisar?**
> Las funciones implícitas se analizan en la Sección 2.1, p. 90.

EJEMPLO 6 Encontrar la inversa de una función definida por una ecuación

Encuentra la inversa de $f(x) = 2x + 3$. Grafica f y f^{-1} en los mismos ejes de coordenadas.

Solución paso a paso

Paso 1 Reemplace $f(x)$ con y. Luego intercambie las variables x e y. Esta ecuación define la función inversa f^{-1} implícitamente.

Reemplace $f(x)$ con y en $f(x) = 2x + 3$ y obtenga $y = 2x + 3$. Ahora intercambie las variables x e y para obtener

$$x = 2y + 3$$

Esta ecuación define la función inversa f^{-1} implícitamente.

Paso 2 Si es posible, resuelva la ecuación implícita para y en términos de x para obtener la forma explícita de f^{-1}, $y = f^{-1}(x)$.

Para encontrar la forma explícita de la inversa, resuelve $x = 2y + 3$ para y.

$$x = 2y + 3$$

$$2y + 3 = x$$

$$2y = x - 3 \qquad \text{Resta 3 de ambos lados.}$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 3) \qquad \text{Multiplica ambos lados por } \frac{1}{2}.$$

La forma explícita de la función inversa f^{-1} es

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$$

Machine Translated by Google

Paso 3 Verifique el resultado mostrando $f^{-1}1f\,1x2\,2 = x$ que f y f^{-1} $1f1x2\,2 = x$.

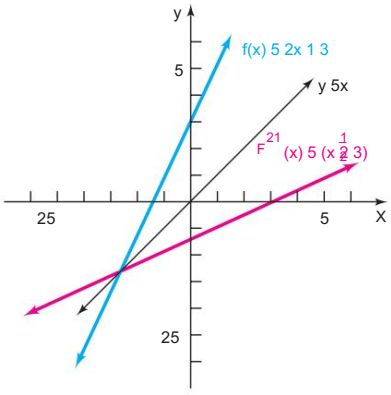


Figura 16

Verificamos que f y f^{-1} son inversas en el ejemplo 4(b).

Las gráficas de f1x2 = 2x + 3 y su inversa f^{-1} $1x2 = \frac{1}{2}1x - 32$ se muestran en Figura 16. Nótese la simetría de las gráficas con respecto a la recta y = x.

Pasos para encontrar la inversa de una función uno a uno

Paso 1: En y = f1x2, intercambie las variables x e y para obtener

$$x = f1y2$$

Esta ecuación define la función inversa f^{-1} implícitamente.

Paso 2: Si es posible, resuelva la ecuación implícita para y en términos de x para obtener la forma explícita de f^{-1}:

$$y = f^{-1}1x2$$

Paso 3: Verifique el resultado mostrando que

$$f^{-1}1f1x2\,2 = x \text{ y } f1f^{-1}1x2\,2 = x$$

EJEMPLO 7 Encontrar la inversa de una función definida por una ecuación

La función

$$f1x2 = \frac{2x + 1}{x - 1} \qquad x \cdot 1$$

es uno a uno. Encuentra su función inversa y comprueba el resultado.

Solución

Paso 1: Reemplace f1x2 con y e intercambie las variables x e y en

$$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

para obtener

$$x = \frac{2 \text{ años} + 1}{y - 1}$$

Paso 2: Resuelve para y.

$$x = \frac{2 \text{ años} + 1}{y - 1}$$

$x1y - 12 = 2y + 1$ Multiplica ambos lados por y · 1.

$xy - x = 2y + 1$ Utilice la propiedad distributiva.

$xy - 2y = x + 1$ Resta 2y de ambos lados; suma x a ambos lados.

$1x - 22y = x + 1$ Factor.

$$y = \frac{x + 1}{x - 2}$$ Dividir por x · 2.

La función inversa es

$$F^{-1}\,1x2 = \frac{x + 1}{x - 2} \qquad x \cdot 2$$ Reemplace y por f ·11x2.

Machine Translated by Google

Paso 3: ✓ Controlar:

$$F^{-1}\ 1f1x22 = f\ -1\ a\ \frac{2x+1}{x-1} + 1\ \text{segundo} = \frac{\frac{2x+1}{x-1} + 1}{\frac{2x+1}{x-1} - 2} = \frac{2x+1+x-1}{2x+1-21x-12} = \frac{3x}{3} = x,\ x \cdot 1$$

$$f1f^{-1}\ 1x22 = f\ a\ \frac{x+1}{x-2} + 1\ b = \frac{2\#\frac{x+1}{x-2} + 1}{\frac{x+1}{x-2} - 1} = \frac{21x+12+x-2}{x+1-1x-22} = \frac{3x}{3} = x,\ x \cdot 2$$

Exploración

En el ejemplo 7, encontramos que si $\frac{2x+1}{x-1}$, entonces $f^{-1}\ 1x2 = \frac{x+1}{x-2}$. Compara la vertical y la horizontal asíntotas de f y f^{-1}.

Resultado La asíntota vertical de f es x = 1 y la asíntota horizontal es y = 2. La asíntota vertical de f^{-1} es x = 2, y la asíntota horizontal es y = 1.

Ahora resuelva los problemas 4 5 y 5 9

Si una función no es uno a uno, no tiene función inversa. A veces, sin embargo, una restricción apropiada en el dominio de dicha función produce una nueva función que es uno a uno. Entonces la función definida en el dominio restringido tiene una función inversa.

EJEMPLO 8 Encontrar la inversa de una función de dominio restringido

Encuentra la inversa de $y = f1x2 = x2$ si $x \text{ Ú } 0$. Grafica f y f^{-1}.

Solución

La función $y = x2$ no es uno a uno. [Consulte el ejemplo 2(a).] Sin embargo, restringir el dominio de esta función a $x \text{ Ú } 0$, como se indica, da como resultado una nueva función que es creciente y, por lo tanto, es uno a uno. En consecuencia, la función definida por $y = f1x2 = x2$, $x \text{ Ú } 0$, tiene una función inversa, f^{-1}.

Sigue los pasos para encontrar f^{-1}.

Paso 1: En la ecuación, $y = x2$, intercambia las variables x e y. El resultado es

$$x = y2 \qquad y \text{ Ú } 0$$

Esta ecuación define implícitamente la función inversa.

Paso 2: Resuelva y para obtener la forma explícita de la inversa. Porque $y \text{ Ú } 0$, sólo un $1x2 =$ Se obtiene la solución para y : $y = 1x$. entonces $f^{-1}\ 1x$.

Paso 3: ✓ Comprobar: $f^{-1}\ 1f1x2\ 2 = f^{-1}\ 1x2\ 2 = 2x2 = 0\ x\ 0 = x$ porque $x \text{ Ú } 0$

$$f1f^{-1}\ 1x2\ 2 = f1\ 1x\ 2 = 1\ 1x\ 2^{\ 2} = x$$

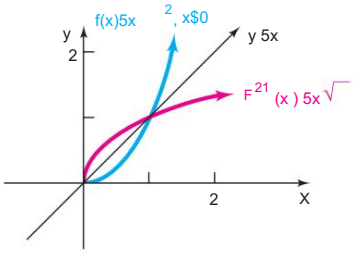


Figura 17

La figura 17 ilustra las gráficas de $f1x2 = x2$, $x \text{ Ú } 0$, y $f^{-1}\ 1x2 = 1x$.

RESUMEN

- Si una función f es uno a uno, entonces tiene una función inversa f^{-1}.
- Dominio de f = Rango de f^{-1}; Rango de f = Dominio de f^{-1}.
- Verificar que f^{-1} es la inversa de f, demuestre que $f^{-1}\ 1f1x22 = x$ para cada x en el dominio de f y que $f1f^{-1}\ 1x22 = x$ para cada x en el dominio de f^{-1}.
- Las gráficas de f y f^{-1} son simétricos con respecto a la recta y = x.

Machine Translated by Google

5.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Suponga que f 1x2 = 4x - 2. Encuentre f a x+h2 (págs. 87 a 89)

2. ¿ Dónde aumenta la función f1x2 = x2 ? ¿Dónde está disminuyendo? (págs. 111 y 112)

3. ¿Cuál es el dominio de f1x2 =? (págs. 91–93) $\frac{x+5}{x^2+3x-18}$

4. Simplifica: $\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x^2}-1}$ (págs. A40–A42)

Conceptos y vocabulario

5. Si x1 y x2 son dos entradas diferentes de una función f, entonces f es uno a uno si _____.

6. Si cada línea horizontal corta la gráfica de una función f sin función. más de un punto, entonces f es un(n) _____

7. Si f es una función uno a uno y f132 = 8, 182 = entonces f^{-1} _____.

8. Si f^{-1} es la inversa de una función f, entonces las gráficas de y f^{-1} f son simétricas con respecto a la recta _____.

9. Si el dominio de una función uno a uno f es 34, q 2, entonces la rango de su función inversa f^{-1} es _____.

10. Verdadero o Falso Si f y g son funciones inversas, entonces el dominio de f es el mismo que el rango de g.

11. Elección múltiple Si 1 - 2, 32 es un punto en la gráfica de una función uno a uno f, ¿cuál de los siguientes puntos está en la $^{-1}$?

gráfica de f (a) 13, - 22 (b) 12, - 32 (c) 1 - 3, 22 (d) 1 - 2, - 32

12. Opción múltiple Supongamos que f es una función uno a uno con un dominio de 5x 0 x · 36 y un rango de e y ` y · $\frac{2}{3}$f. cual de el siguiente es el dominio de f^{-1}?

(a) 5x 0x · 36 (b) Todos los números reales

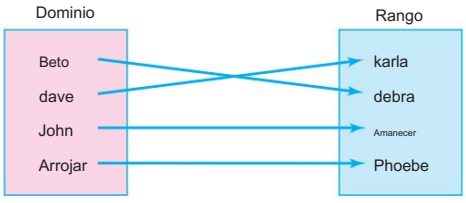
(c) e x ` x · $\frac{2}{3}$ ’ x ·3f (d) e x ` x · $\frac{2}{3}$f

Desarrollo de habilidades

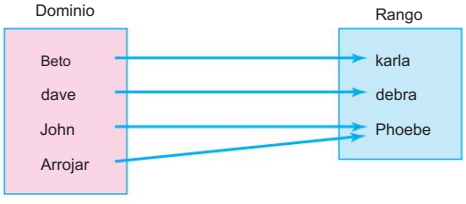
En los problemas 13 a 20, determine si la función es uno a uno.

13.

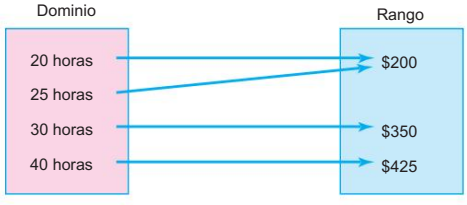
14.



15.



dieciséis.



17. 5 12, 62, 1 - 3, 62, 14, 92, 11, 102 6 19.

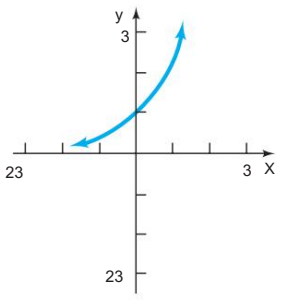
5 11, 22, 12, 82, 13, 182, 14, 322 6

18. 5 1 - 2, 52, 1 - 1, 32, 13, 72, 14, 122 6

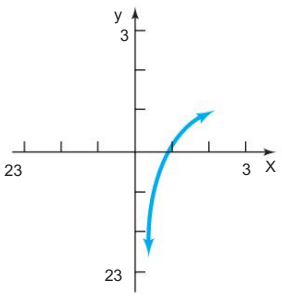
20. 5 10, 02, 11, 12, 12, 162, 13, 812 6

En los problemas 21 a 26 se da la gráfica de una función f. Utilice la prueba de la línea horizontal para determinar si f es uno a uno.

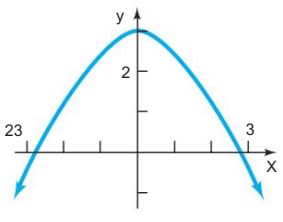
21.



22.

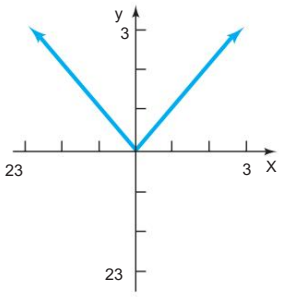


23.

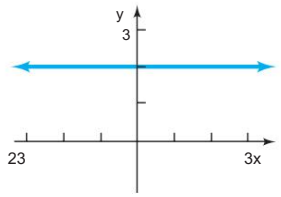


Machine Translated by Google

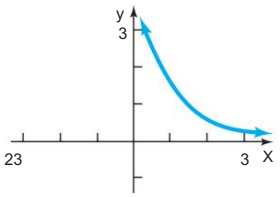
24.



25.

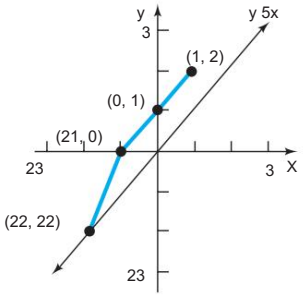


26.

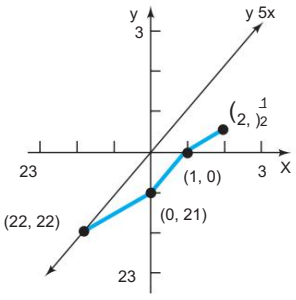


En los problemas 27 a 32 se da la gráfica de una función uno a uno f. Dibuja la gráfica de la función inversa f^{-1}.

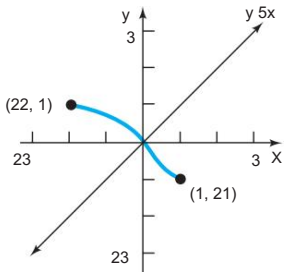
27.



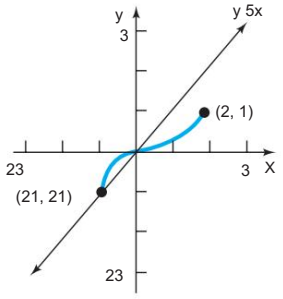
28.



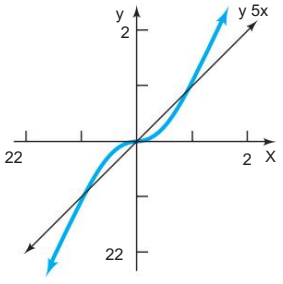
29.



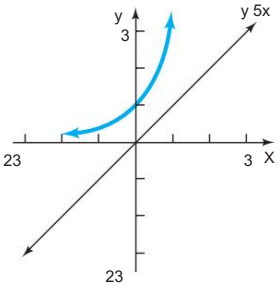
30.



31.



32.



En los problemas 33 a 42, verifique que las funciones f y g son inversas entre sí demostrando que f1g1x2 2 = x y g1f1x2 2 = x. Indique los valores de x que deban excluirse del dominio de f y del dominio de g.

33. f1x2 = 3x + 4; g1x2 = $\frac{1}{3}$ 1x - 42

34. f1x2 = 3 - 2x; g1x2 = - 2 $\frac{1}{}$ 1x - 32

35. f1x2 = 2x + 6; g1x2 = $\frac{1}{}$x - 3 2

36. f1x2 = 4x - 8; g1x2 = $\frac{x}{4}$ + 2

37. f1x2 = x3 - 8; g1x2 = 23x + 8

38. f1x2 = 1x - 22 ^{2}, x Ú 2; g1x2 = 2x + 2

39. f1x2 = x; g1x2 = x

40. f1x2 = $\frac{1}{x}$; g1x2 = $\frac{1}{x}$

41. f1x2 = $\frac{x - 5}{2x + 3}$; g1x2 = $\frac{3x + 5}{1 - 2x}$

42. f1x2 = $\frac{2x + 3}{x + 4}$; g1x2 = $\frac{4x - 3}{2 - x}$

En los problemas 43 a 54, la función f es uno a uno. (a) Encuentre su función inversa f^{-1} y comprueba tu respuesta. (b) Encuentre el dominio y el rango de f^{-1}. (c) Grafica f, f^{-1}, e y = x en los mismos ejes de coordenadas.

43. f1x2 = - 4x

44. f1x2 = 3x

45. f1x2 = 4x + 2

46. f1x2 = 1 - 3x

47. f1x2 = x3 + 1

48. f1x2 = x3 - 1

49. f1x2 = x2 + 9, x Ú 0

50. f1x2 = x2 + 4, x Ú 0

51. f1x2 = - $\frac{3}{x}$

52. f1x2 = $\frac{4}{x}$

53. f1x2 = $\frac{4}{x + 2}$

54. f1x2 = $\frac{1}{x - 2}$

Machine Translated by Google

En los problemas 55 a 72, la función f es uno a uno. (a) Encuentre su función inversa $^{-1}$ y comprueba tu respuesta. (b) Encuentre el dominio y el rango f de f y f $^{-1}$.

55. $f(x) = \frac{4}{2 - x}$

56. $f(x) = \frac{2}{3 + x}$

57. $f(x) = -x - 1\frac{2x}{\quad}$

58. $f(x) = x + \frac{3x}{2}$

59. $f(x) = 3x \frac{2x}{- 1}$

60. $f(x) = -\frac{3x + 1}{x}$

61. $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 4}$

62. $f(x) = 2x \frac{3x + 4}{- 3}$

63. $f(x) = \frac{- 3x - 4}{x - 2}$

64. $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 2}$

65. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{3x^2}$, $x \neq 0$

66. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$, $x \neq 0$

67. $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 5$

68. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 4, x \geq 0$

69. $f(x) = 25x^3 + 13$

70. $f(x) = 23x^5 - 2$

71. $f(x) = 22x + 3 - 5$

72. $f(x) = 1x - 12\,9^{\frac{1}{2}} + 2, x \neq 1$

Aplicaciones y extensiones

73. Utilice la gráfica de y = f1x2 dada en el problema 27 para evaluar lo siguiente:

(a) f1 - 12 (b) f112 (c) f $^{-1}$ 112 (d) f $^{-1}$ 122

74. Utilice la gráfica de y = f1x2 dada en el problema 28 para evaluar lo siguiente:

(a) f122 (b) f112 (c) f $^{-1}$ 102 (d) f $^{-1}$ 1 - 12

75. Si f162 = 21 y f es uno a uno, ¿cuál es f 76. Si $^{-1}$ 1212?

g1 - 52 = 3 y g es uno a uno, ¿cuál es g-1 132?

77. El dominio de una función uno a uno f es [5, q 2, y su rango es [- 2, q 2. Indique el dominio y el rango de f 78. El dominio de una función uno $^{-1}$.

a uno la función f es [0, q 2 y su rango es [5, q 2. Indique el dominio y el rango de f 79. El dominio de una función uno a uno g es 1 - q, 04 y su $^{-1}$.

el rango es [6, q 2. Indique el dominio y el rango de g-1 .

80. El dominio de una función uno a uno g es 30, 154 y su rango es (0, 8). Indique el dominio y el rango de g-1 .

81. Una función y = f1x2 es creciente en el intervalo (0, 7). ¿Qué conclusiones puedes sacar sobre la gráfica de y = f? $^{-1}$ 1x2?

82. Una función y = f1x2 es decreciente en el intervalo 30, 54. 1x2? ¿Qué conclusiones puedes sacar sobre la gráfica de y = f? $^{-1}$

83. Encuentra la inversa de la función lineal.

$$f(x) = mx + b, \text{ metro} \cdot 0$$

84. Encuentra la inversa de la función.

$$f(x) = 2r\,2 - x^2, \quad 0 \ldots x \ldots r$$

85. Una función f tiene una función inversa. Si la gráfica de f se encuentra en el cuadrante III, ¿en qué cuadrante se encuentra la gráfica de f? $^{-1}$ ¿mentir?

86. Una función f tiene una función inversa f $^{-1}$ · ¿Si la gráfica de f está en cuadrante II, en cuyo cuadrante se realiza la gráfica de $^{-1}$ lie?

f 87. La función f1x2 = · 5· no es uno a uno. Encuentre una restricción adecuada en el dominio de f para que la nueva función resultante sea uno a uno. Luego encuentra la inversa de f.

88. La función f1x2 = x4 no es uno a uno. Encuentre una restricción adecuada en el dominio de f para que la nueva función resultante sea uno a uno. Luego encuentra la inversa de la nueva función.

En las aplicaciones, los símbolos utilizados para las variables independientes y dependientes suelen basarse en el uso común. Entonces, en lugar de usar y = f1x2 para representar una función, un problema aplicado podría usar C = C1q2 para representar el costo C de fabricar q unidades de un bien. Debido a esto, la notación $^{-1}$ utilizado en un problema de matemáticas puras no se utiliza al encontrar inversas de problemas aplicados. Más bien, lo inverso inversa f de una función como C = C1q2 será q = q1C2. Entonces C = C1q2 es una función que representa el costo C como función del número q de unidades fabricadas, y q = q1C2 es una función que representa el número q como función del costo C. Los problemas 89 a 96 ilustran esta idea. .

89. Distancia de parada del vehículo Teniendo en cuenta el tiempo de reacción, la distancia d (en pies) que requiere un automóvil para detenerse por completo mientras viaja r millas por hora viene dada por la siguiente función.

$$d(r) = 6{,}95r - 90{,}45$$

(a) Exprese la velocidad r a la que viaja el automóvil como función de la distancia d requerida para detenerse por completo. Verifica tu respuesta comprobando que r1d1r2 2 = r, y d1r1d2 2 = d.

(b) Prediga la velocidad a la que viajaba un automóvil si la distancia requerido para detenerse fue de 250 pies.

90. Altura y circunferencia de la cabeza La circunferencia de la cabeza C de un niño está relacionada con la altura H del niño (ambas en pulgadas) a través de la función

$$H(C) = 2{,}15C - 10{,}53$$

(a) Exprese la circunferencia de la cabeza C en función de altura h.

(b) Verifique que C = C1H2 es la inversa de H = H1C2 demostrando que H1C1H2 2 = H y C1H1C2 2 = C.

(c) Prediga la circunferencia de la cabeza de un niño que mide 26 pulgadas de alto.

91. Peso corporal ideal El peso corporal ideal W para hombres (en kilogramos) en función de la altura h (en pulgadas) viene dado por la siguiente función.

$$W(h) = 50 + 2.31h - 592$$

(a) ¿Cuál es el peso ideal de un hombre de 6 pies?

(b) Exprese la altura h en función del peso W. Verifique su respuesta comprobando que W1h1W2 2 = W y h1W1h2 2 = h.

Machine Translated by Google

92. Conversión de temperatura La función $F1C2 = \frac{9}{5}C + 32$ convierte una temperatura de C grados Celsius a F grados Fahrenheit.

(a) Exprese la temperatura en grados Celsius C en función de la temperatura en grados Fahrenheit F.
(b) Verifique que C = C1F2 es la inversa de F = F1C2 demostrando que C1F1C2 2 = C y F1C1F2 2 = F.
(c) ¿Cuál es la temperatura en grados Celsius si ¿Es 70 grados Fahrenheit?

93. Impuestos sobre la renta La función

T1g2 = 1905 + 0,121g - 19,0502

representa el impuesto federal sobre la renta T (en dólares) de 2018 adeudado por un declarante "casado que presenta una declaración conjunta" cuyo ingreso bruto ajustado modificado es g dólares, donde 19,050 6 g … 77,400.
(a) ¿ Cuál es el dominio de la función T?
(b) Dado que el impuesto adeudado T es una función lineal creciente del ingreso bruto ajustado modificado g, encuentre el rango de la función T.
(c) Encuentre el ingreso bruto ajustado g como función del impuesto federal sobre la renta T. ¿Cuáles son el dominio y el rango de esta función?

94. Impuestos sobre la renta En un determinado país, la siguiente función representa el impuesto sobre la renta T (en dólares) adeudado por una persona cuyo ingreso bruto ajustado es g dólares, donde 30,600… g … 74,200.

T1g2 = 4220 + 0,251g - 30,6002

95. Gravedad en la Tierra Bajo ciertas condiciones, si una roca cae desde una altura de 50 metros, la altura H (en metros) después de t segundos se aproxima mediante la siguiente ecuación.

$$H1t2 = 50 - 4{,}9t^2$$

(a) En general, las funciones cuadráticas no son uno a uno. Sin embargo, la función H(t) es uno a uno. ¿Por qué?
(b) Encuentre la inversa de H y verifique su resultado.
(c) ¿Cuánto tiempo tardará una roca en caer 80 metros?

96. Período de un péndulo El período T (en segundos) de un péndulo simple en función de su longitud l (en pies) está dado por

$$T1l2 = 2pA\,\frac{l}{32.2}$$

(a) Exprese la longitud l en función del período T.
(b) ¿Cuánto mide un péndulo cuyo período es de 3 segundos?

97. Problema de desafío Si h1x2 = 1f g2 1x2, encuentre h-1 en términos y de f^{-1} g-1 .

98. Problema de desafío presentado

$$f1x2 = \frac{hacha + b}{cx + d}$$

encontrar f^{-1} 1x2. Si c · 0, ¿bajo qué condiciones en a, b, cy d? es f = f^{-1} ?

99. Problema de desafío para f1x2 = e 2x + 3, x 63x + 4, x Ú 0
(a) Encuentre el dominio y rango de f.
(b) Encuentre^{-1} .
f (c) Encuentre el dominio y rango de f^{-1} .

Explicar conceptos: discusión y escritura

100. ¿Pueden ser iguales una función uno a uno y su inversa? ¿Qué debe ser cierto acerca de la gráfica de f para que esto suceda? Da algunos ejemplos para respaldar tu conclusión.

101. Dibuja la gráfica de una función uno a uno que contiene los puntos 1 - 2, - 32, (0, 0) y (1, 5). Ahora dibuja la gráfica de su inversa. Compara tu gráfico con el de otros estudiantes.
Discuta cualquier similitud. ¿Qué diferencias ves?

102. Dé un ejemplo de una función cuyo dominio sea el conjunto de los números reales y que no sea creciente ni decreciente en su dominio, sino uno a uno.

[Sugerencia: utilice una función definida por partes.]

103. ¿Todas las funciones impares son uno a uno? Explicar.

104. Supongamos que C1g2 representa el costo C, en dólares, de fabricar g automóviles. Explique qué representa C-1 1800,0002.

105. Explique por qué la prueba de la línea horizontal se puede utilizar para identificar funciones uno a uno en una gráfica.

106. Explique por qué una función debe ser uno a uno para tener una inversa que sea una función. Usa la función y = x2 para respaldar tu explicación.

Conserve su conocimiento

Los problemas 107 a 116 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

107. Si f1x2 = 3x2 - 7x, encuentre f1x + h2 - f1x2.

108. Encuentra los ceros de la función cuadrática f1x2 =

$$3x^2 + 5x + 1$$

¿Cuáles son las intersecciones con el eje x, si las hay, de la gráfica de la función? Encuentra el vértice. ¿Es un máximo o un mínimo?
¿La gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo?

109. Utilice las técnicas de desplazamiento, compresión o estiramiento y reflexiones para representar gráficamente f1x2 = - 0 x + 2 0 + 3.

110. Encuentra el dominio de $R1x2 = \frac{6x2 - 11x - 2}{\text{vertical u}}$. Encuentre cualquier asíntota horizontal, oblicua de 2x2 - x - 6.

Machine Translated by Google

111. Encuentra la ecuación de un círculo con centro 1 - 3, 52 y radio 7.

112. Encuentra una ecuación de la recta que contiene el punto 1 - 4, 12. y es perpendicular a la línea 3x - 6y = 5. Escribe la ecuación en forma pendiente-intersección.

113. ¿La función f1x2 = $\frac{3x}{5x^3 + 7x}$ par, impar o ninguna de las dos?

114. Resuelve para D: 2x + 2yD = xD + y

115. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = - 3x2 + 2x + 1 de 2 a 4.

116. Encuentra el cociente de diferencias de f: f1x2 = $\frac{}{22x + 3}$

'¿Estas preparado?' Respuestas

1.x _ 2. Aumentando en 30, q 2; disminuyendo en 1 - q, 04 3. 5x· x · - 6, x · 36 4. $\frac{x}{1- x}$, x · 0, x · - 1

5.3 Funciones exponenciales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Exponentes (Sección A.1, págs. A7–A9 y Sección A.10, págs. A87–A88)
- Técnicas gráficas: transformaciones (Sección 2.5, págs. 134–143)
- Resolver ecuaciones (Sección A.6, págs. A44–A51)
- Tasa de cambio promedio (sección 2.3, págs. 115-117)
- Funciones cuadráticas (Sección 3.3, págs. 179–188)
- Funciones lineales (Sección 3.1, págs. 161–164)
- Asíntotas horizontales (Sección 4.3, págs. 239-241)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 326.

OBJETIVOS 1 Evaluar funciones exponenciales (p. 315)
2 Graficar funciones exponenciales (p. 319)
3 Defina el número e (p. 322)
4 Resolver ecuaciones exponenciales (p. 324)

1 Evaluar funciones exponenciales

El Apéndice A, Sección A.10 da una definición para elevar un número real a a una potencia racional. Esa discusión proporciona significado a expresiones de la forma

Arbitrarias

donde la base a es un número real positivo y el exponente r es un número racional.

Pero ¿cuál es el significado del hacha ?, ¿Dónde la base a es un número real positivo y el exponente x es un número irracional? Aunque una definición rigurosa requiere métodos discutidos en cálculo, la base de la definición es fácil de seguir: seleccione un número racional r que se forme truncando (eliminando) todos los dígitos excepto un número finito del número irracional x. Entonces es razonable esperar que

hacha ≈ ar

Por ejemplo, tomemos el número irracional p = 3,14159c. Entonces una aproximación a ap es

ap≈a3.14 _ _

donde se truncan los dígitos de p después de la posición de las centésimas. Una mejor aproximación es

ap≈a3.14159 _ _

donde los dígitos después de la posición de las centésimas se truncan. Siguiendo de esta manera, podemos obtener aproximaciones que alcancen cualquier grado de precisión deseado.

Machine Translated by Google

La mayoría de las calculadoras tienen una tecla xy o una tecla de intercalación ^ para trabajar con exponentes. ingrese la base a, luego presione la tecla xy (o la tecla ^), ingrese el exponente x y presione = (o ENTER). Evaluar expresiones de la forma ax.

EJEMPLO 1 Usar una calculadora para evaluar potencias de 2

Utilice una calculadora para evaluar:

(a) 21.4 b) 21,41 c) 21.414 d) 21.4142 (mi) $2^{\sqrt{2}}$

Solución

(a) $21,4 \approx 2,639015822$ (c) $21,414 \approx 2,66474965$ (e) $2^{\sqrt{2}} \approx 2,665144143$

(b) $21,41 \approx 2,657371628$

(d) $21,4142 \approx 2,665119089$

Ahora resuelve el problema 17

Se puede demostrar que las leyes de los exponentes racionales son válidas para los exponentes reales.

TEOREMA Leyes de los exponentes

Si s, t, a y b son números reales con a 7 0 y b 7 0, entonces

$$\text{como } \# \text{ en} = \text{como}^{+t} \quad 1\text{como } 2^{t} = \text{ast} \quad 1\text{ab2 s} = \text{como } \# \text{ bs}$$

$$1^{s} = 1 \quad \text{como} = \frac{1}{\text{como}} = \text{un } \frac{1}{} \quad \text{a0} = 1 \qquad (1)$$

Introducción al crecimiento exponencial

Supongamos que una función f tiene las dos propiedades siguientes:

- El valor de f se duplica con cada aumento de 1 unidad en la variable independiente x.
- El valor de f en x = 0 es 5, por lo que f102 = 5.

La Tabla 1 muestra los valores de la función f para x = 0, 1, 2, 3 y 4.

tabla 1

x	f(x)
0	5
1	10
2	20
3	40
4	80

Encontremos una ecuación y = f1x2 que describa esta función f. El hecho clave es que el valor de f se duplica por cada aumento de 1 unidad en x.

f102 = 5

f112 = 2f102 = 2 # 5 = 5 # 21 Duplique el valor de f en 0 para obtener el valor en 1.

f122 = 2f112 = 215 # 22 = 5 # 22 Duplique el valor de f en 1 para obtener el valor en 2.

f132 = 2f122 = 215 # 222 = 5 # 23

f142 = 2f132 = 215 # 232 = 5 # 24

El patrón conduce a

$$f1x2 = 2f1x - 12 = 215 \# 2x-12 = 5 \# 2x$$

DEFINICIÓN Función exponencial

Una función exponencial es una función de la forma

$$f1x2 = Cax$$

donde a es un número real positivo 1a 7 02, a · 1 y C · 0 es un número real.
El dominio de f es el conjunto de todos los números reales. La base a es el factor de crecimiento y, como f102 = Ca0 = C, a C se le llama valor inicial.

Machine Translated by Google

En la definición de función exponencial, se excluye la base a = 1 = C. porque esta función es simplemente la función constante f1x2 = C # 1 x También se excluyen las bases que sean negativas; de lo contrario, muchos valores de x serían 3 tienen que ser excluidos del dominio, como x = 2 1 y x = 4 . [Recuerde - 22 1>2 en el = 2- 2, 1 - 32 3>4 = 24 1 - 32 que 1 3 = 24 - 27, etc., no están definidos conjunto de los números reales.]

ADVERTENCIA Es importante distinguir una función de potencia, g1x2 = axn , nú 2 un número entero, de una función exponencial, f1x2 = C # ax , a · 1, a 7 0. En una función potencia, la base es una variable y el exponente es una constante. En una función exponencial, la base es una constante y el exponente es una variable.

Las transformaciones (desplazamientos verticales, desplazamientos horizontales, reflexiones, etc.) de una función de la forma f1x2 = Cax también son funciones exponenciales. Ejemplos de tales funciones exponenciales son

$$f1x2 = 2x \quad F1x2 = a\,1\ \overline{3\,b\,x} + 5 \quad G1x2 = 2 \# 3x\text{-}3$$

Para cada función, tenga en cuenta que la base de la expresión exponencial es una constante y el exponente contiene una variable.

En la función f1x2 = 5 # 2x , Observe que la relación de salidas consecutivas es constante para aumentos de 1 unidad en la entrada. Esta relación es igual a la constante 2, la base de la función exponencial. En otras palabras,

$$\frac{f112}{f102} = \frac{5 \# 21}{5} = 2 \qquad \frac{f122}{f112} = \frac{5 \# 22}{5 \# 21} = 2 \qquad \frac{f132}{f122} = \frac{5 \# 23}{5 \# 22} = 2 \text{ y así sucesivamente}$$

Esto conduce al siguiente resultado.

TEOREMA

Para una función exponencial f1x2 = Cax , a 7 0, a · 1 y C · 0, si x es cualquiera número real, entonces

$$\frac{f1x + 12}{f1x2} = a \text{ o } f1x + 12 = af1x2$$

En palabras
Para cambios de 1 unidad en la entrada x de una función exponencial f 1x2 =, C # ax la relación de salidas consecutivas es la constante a.

Prueba

$$\frac{f1x + 12}{f1x2} = \frac{Cax+1}{cax} = ax+1\text{-}x = a1 = a$$

■

EJEMPLO 2 Identificar funciones lineales o exponenciales

Determina si la función dada es lineal, exponencial o ninguna de las dos. Para aquellas que son lineales, encuentre una función lineal que modele los datos. Para aquellas que son exponenciales, encuentre una función exponencial que modele los datos.

(a)

x	y
-1	5
0	2
1	-1
2	-4
3	-7

(b)

x	y
-1	32
0	dieciséis
1	8
2	4
3	2

(C)

x	y
-1	2
0	4
1	7
2	11
3	dieciséis

Solución Para cada función, calcule la tasa de cambio promedio de y con respecto a x y la razón de salidas consecutivas. Si la tasa de cambio promedio es constante, entonces la función es lineal. Si la relación de salidas consecutivas es constante, entonces la función es exponencial.

(continuado)

Machine Translated by Google

Cuadro 2 (a)

x	y	Tasa promedio de cambio	Relación de productos consecutivos
-1	5	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-5}{0-(-1)} = -3$	$\frac{2}{5}$
0	2	$\frac{-1-2}{1-0} = -3$	$\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$
1	-1	$\frac{-4-(-1)}{2-1} = -3$	$\frac{-4}{-1} = 4$
2	-4	$\frac{-7-(-4)}{3-2} = -3$	$\frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$
3	-7		

(b)

x	y	Tasa promedio de cambio	Relación de productos consecutivos
-1	32	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16-32}{0-(-1)} = -16$	$\frac{\text{dieciséis}}{32} = \frac{1}{2}$
0	dieciséis	-8	$\frac{8}{\text{dieciséis}} = \frac{1}{2}$
1	8	-4	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
2	4	-2	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
3	2		

(C)

x	y	Tasa promedio de cambio	Relación de productos consecutivos
-1	2	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{0-(-1)} = 2$	2
0	4	3	$\frac{7}{4}$
1	7	4	$\frac{11}{7}$
2	11	5	$\frac{\text{dieciséis}}{11}$
3	dieciséis		

(a) Véase la Tabla 2(a). La tasa de cambio promedio por cada aumento de 1 unidad en x es -3. Por tanto, la función es una función lineal. En una función lineal, la tasa de cambio promedio es la pendiente m, por lo que m = - 3. La intersección con el eje y b es el valor de la función en x = 0, por lo que b = 2. La función lineal que modela los datos es f1x2 = mx + b = - 3x + 2.

(b) Véase el Cuadro 2(b). Para esta función, la tasa de cambio promedio no es constante. Entonces la función no es una función lineal. La proporción de salidas consecutivas para un aumento de 1 unidad en los insumos es una constante, $\frac{1}{2}$. Porque la razón de 2 consecutivos La producción es constante, la función es una función exponencial con crecimiento. factor a = $\frac{1}{2}$. El valor inicial C de la función exponencial es C = 16, el valor 2 de la función en 0. Por lo tanto, la función exponencial que modela los datos es g1x2 = Cax = 16 # a 1 $\frac{1}{2}$ b x .

Machine Translated by Google

(c) Véase el Cuadro 2(c). Para esta función, ni la tasa de cambio promedio ni la proporción de dos producciones consecutivas son constantes. Como la tasa de cambio promedio no es constante, la función no es una función lineal. Debido a que la relación de salidas consecutivas no es constante, la función no es una función exponencial.

Ahora trabaja el problema 2 9

2 Graficar funciones exponenciales

Si sabemos graficar una función exponencial de la forma f1x2 = ax , Entonces nosotros Puede usar transformaciones (desplazamiento, estiramiento, etc.) para obtener la gráfica de cualquier función exponencial.

Primero, grafiquemos la función exponencial f1x2 = 2x .

EJEMPLO 3 Graficar una función exponencial

Grafica la función exponencial: f1x2 = 2x

Solución

El dominio de f1x2 = 2x es el conjunto de todos los números reales. Comience ubicando algunos puntos en la gráfica de f1x2 = 2x , como se enumera en la Tabla 3.

Como 2x 7 0 para todo x, la gráfica no tiene intersecciones en x y se encuentra por encima del eje x para todo x. La intersección con el eje y es 1.

La Tabla 3 sugiere que cuando x S - q, el valor de f tiende a 0. Por lo tanto, el eje x 1y = 02 es una asíntota horizontal de la gráfica de f cuando x S - q. Esto proporciona el comportamiento final para x grande y negativo.

Para determinar el comportamiento final para x grande y positivo, consulte nuevamente la Tabla 3. Como x S q, f1x2 = 2x crece muy rápidamente, lo que hace que la gráfica de f1x2 = 2x aumente muy rápidamente.

Usando toda esta información, trace algunos de los puntos de la Tabla 3 y conéctelos con una curva suave y continua, como se muestra en la Figura 18. Del gráfico, concluimos que el rango de f es (0, q). También concluimos que f es una función creciente, por lo que f es uno a uno.

Tabla 3

x	f 1x2 · 2x
-10	2-10 ≈ 0,00098
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	20 = 1
1	21 = 2
2	22 = 4
3	23 = 8
10	210 = 1024

NOTA Recuerde $a^n = \frac{1}{a^n}$.

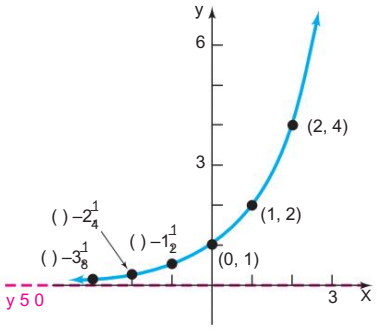
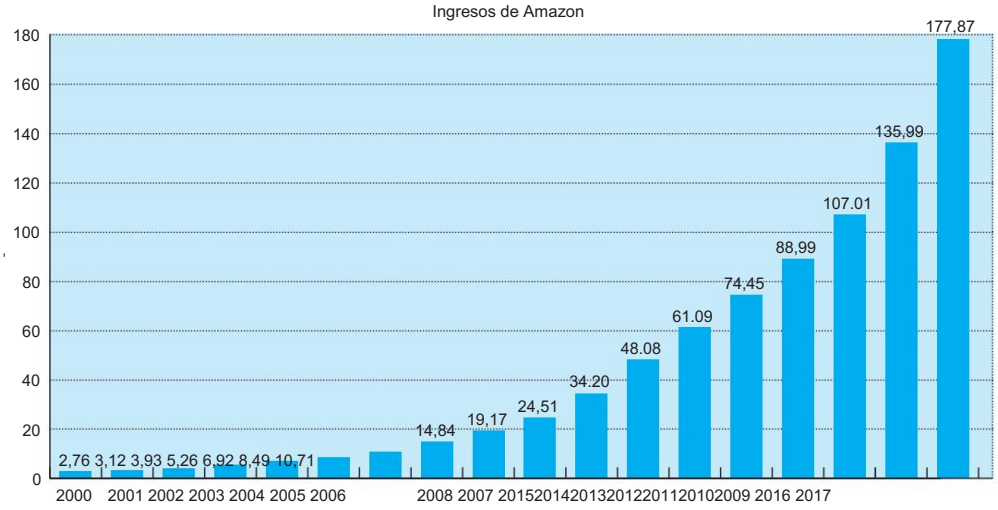


Figura 18 f1x2 = 2x

Los gráficos que se parecen al de la Figura 18 aparecen con mucha frecuencia en una variedad de situaciones. Por ejemplo, el gráfico de la Figura 19 en la página siguiente muestra los ingresos anuales de Amazon, Inc. de 2000 a 2017. De este gráfico se podría concluir que los ingresos anuales de Amazon están creciendo exponencialmente.

Más adelante en este capítulo analizamos otras situaciones que exhiben un crecimiento exponencial. Por ahora, continuamos explorando las propiedades de funciones exponenciales.

Machine Translated by Google



Fuente: Amazon, Inc.

Figura 19

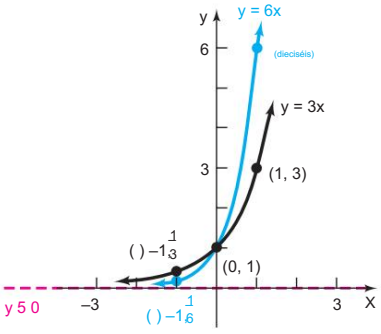


Figura 20

La gráfica de f1x2 = 2x en la Figura 18 es típica de todas las funciones exponenciales de la forma f1x2 = ax con 7 1. Estas funciones son funciones crecientes y, por lo tanto, son uno a uno. Sus gráficas se encuentran por encima del eje x, contienen el punto (0, 1) y aumentan rápidamente cuando x S q. Como x S - q, el eje x 1y = 02 es una asíntota horizontal. No hay asíntotas verticales. Finalmente, los gráficos son suaves y continuos, sin esquinas ni espacios.

La Figura 20 ilustra las gráficas de otras dos funciones exponenciales cuyas bases son mayores que 1. Observe que cuanto mayor es la base, más inclinada es la gráfica cuando x 7 0, y cuando x 6 0, cuanto mayor es la base, más cercana está la gráfica. al eje x.

Ver el concepto Grafique Y1 =
2x y compare lo que ve con la Figura 18. Borre la pantalla, grafique Y1 = 3x e Y2 = 6x y compare lo que , vea con la Figura 20. Borre la pantalla y grafique Y1 = 10x e Y2 = 100x .

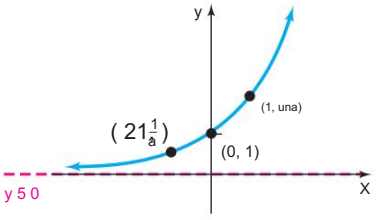


Figura 21 f1x2 = hacha , un 7 1

Propiedades de la función exponencial f 1x2 · ax , un + 1

- El dominio es el conjunto de todos los números reales, o 1 - q, q 2 usando notación de intervalo; el rango es el conjunto de números reales positivos, o 10, q 2 usando notación de intervalo.
- No hay intersecciones con el eje x; la intersección con el eje y es 1.
- El eje x 1y = 02 es una asíntota horizontal de la gráfica de f como x S - q.
- f1x2 = hachaa 7 1, es una función creciente y es uno a uno.
- La gráfica de f contiene los puntos a - 1, a 1/b, 10, 12 y 11, a2.
- La gráfica de f es suave y continua, sin esquinas ni espacios. Ver Figura 21.

Ahora considere f1x2 = ax cuando 0 6 a 6 1.

EJEMPLO 4 Graficar una función exponencial

Grafique la función exponencial: f1x2 = a 1 2b x

Machine Translated by Google

Tabla 4

x	$x \notin 1\,2 \le -10 \notin$
-10	$= 210 = 1024$
-3	$= 23 = 8$
-2	$= 22 = 4$
-1	$= 21 = 2$
0	$= 1$
1	$= \frac{1}{2}$
2	$= \frac{1}{4}$
3	$= \frac{1}{8}$
10	$\approx 0{,}00098$

¿Necesita revisar?

Las reflexiones sobre el eje y se analizan en la Sección 2.5, p. 141.

Ver el concepto

Utilizando una utilidad gráfica, grafica simultáneamente:

(a) $Y1 = 3^x$, $Y2 = a\,1\,3b^x$

(b) $Y1 = 6^x$, $Y2 = a\,1\,6b^x$

Concluya que la gráfica de $Y2 = a\,1\,a\,b^x$, para a 7 0, es la reflexión respecto del eje y de la gráfica de $Y1 = a^x$.

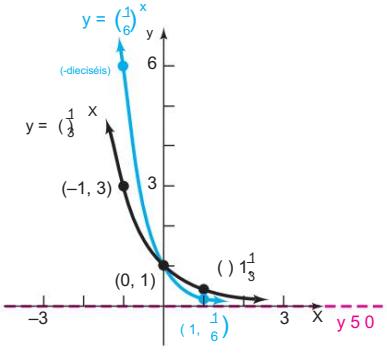


Figura 24

Solución El dominio de $f1x2 = a\,1\,2\,b^x$ son todos números reales. Como antes, ubique algunos puntos en la gráfica como se muestra en la Tabla 4. Porque $a\,1\,2\,b^x$ 7 0 para todo x, el rango de f es el intervalo 10, q 2. La gráfica se encuentra encima del eje x y no tiene intersecciones con el eje x. El La intersección con el eje y es 1. Como x S - q, $f1x2 = a\,2\,b^x$ crece muy rápidamente. Como x S q, los valores de f1x2 se aproxima a 0. El eje x 1y = 02 es una asíntota horizontal de la gráfica de f como x S q. La función f es una función decreciente y también lo es uno a uno. La Figura 22 muestra la gráfica de f.

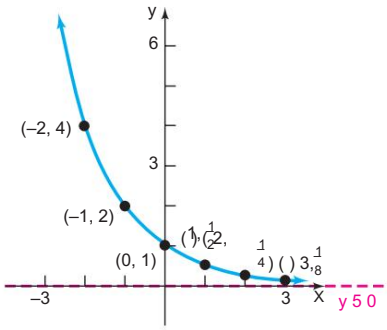


Figura 22 $f1x2 = a\,1\,2\,b^x$

La gráfica de las $y = a\,1\,2\,b^x$ también se puede obtener de la gráfica de y = 2x usando transformaciones y = a 1 2 b x . La gráfica de $y = a\,1\,2\,b^x = 2^{-x}$ es una reflexión sobre el eje y de la gráfica de y = 2x (reemplace x por - x). Véanse las Figuras 23(a) y (b).

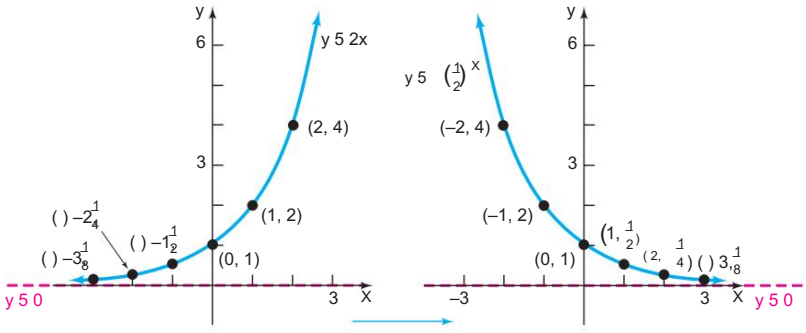


Figura 23

La gráfica de $f1x2 = a\,1\,2\,b^x$ en la Figura 22 es típico de todas las funciones exponenciales de la forma f1x2 = ax con 0 6 a 6 1. Estas funciones son decrecientes y uno a uno. Sus gráficas se encuentran sobre el eje x y contienen el punto 10, 12. Las gráficas aumentan rápidamente cuando x S - q. Como x S q, el eje x 1y = 02 es una asíntota horizontal. No hay asíntotas verticales. Finalmente, los gráficos son suaves y continuos, sin esquinas ni espacios.

La Figura 24 ilustra las gráficas de otras dos funciones exponenciales cuyas bases están entre 0 y 1. Observe que la base más pequeña da como resultado una gráfica que es más pronunciada cuando x 6 0. Cuando x 7 0, la gráfica de la ecuación con la base más pequeña es más cerca del eje x.

Machine Translated by Google

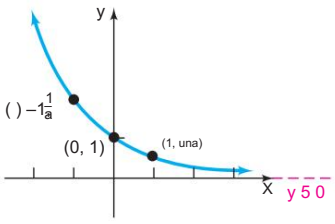


Figura 25 f 1x2 = a x, 0 6 un 6 1

Propiedades de la función exponencial f 1x2 · ax , 0 * a * 1

- El dominio es el conjunto de todos los números reales, o 1 - q, q 2 usando notación de intervalo; el rango es el conjunto de números reales positivos, o 10, q 2 usando notación de intervalo.
- No hay intersecciones con el eje x; la intersección con el eje y es 1.
- El eje x 1y = 02 es una asíntota horizontal de la gráfica de f como x S q.
- f1x2 = hacha, 0 6 a 6 1, es una función decreciente y es uno a uno.
- La gráfica de f contiene los puntos a - 1, 1/a b, 10, 12 y 11, a2.
- La gráfica de f es suave y continua, sin esquinas ni espacios. Ver Figura 25.

EJEMPLO 5 Graficar una función exponencial mediante transformaciones

Grafique f1x2 = 2-x - 3 y determine el dominio, el rango, la asíntota horizontal y la intersección con el eje y de f.

Solución Comience con la gráfica de y = 2x. La Figura 26 muestra los pasos.

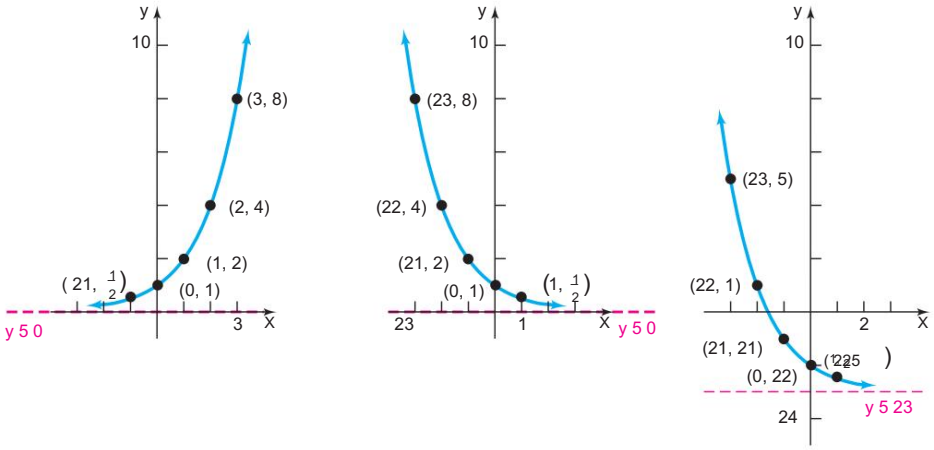


Figura 26

Como ilustra la Figura 26(c), el dominio de f1x2 = 2-x - 3 es el intervalo 1 - q, q 2 y el rango es el intervalo 1 - 3, q 2. La asíntota horizontal de la gráfica de f es la recta y = - 3. La intersección con el eje y es f102 = 20 - 3 = 1 - 3 = - 2.

Ahora resuelve el problema 4 5

3 Definir el número e

Muchos problemas que ocurren en la naturaleza requieren el uso de una función exponencial cuya base es cierto número irracional, simbolizado por la letra e.

A continuación se proporciona una forma de llegar a este importante número e .

Machine Translated by Google

Histórico
Característica

El número e se llama así en honor a los suizos matemático Leonhard Euler (1707-1783).

DEFINICIÓN Número e

El número e se define como el número que la expresión

$$a1 + \frac{1}{n}bn \qquad (2)$$

se aproxima como n S q. En cálculo, esto se expresa, usando notación límite, como

$$e = \lim_{n \to q} a1 + \frac{1}{n}bn$$

La Tabla 5 ilustra lo que sucede con la expresión definitoria (2) cuando n adquiere valores cada vez mayores. El último número en la columna derecha de la tabla se aproxima a e correcto con nueve decimales. Es decir, e = 2,718281828c. Recuerde, los tres puntos indican que los decimales continúan. Como estos lugares decimales continúan pero no se repiten, e es un número irracional. El número e a menudo se expresa como un decimal redondeado a un número específico de lugares. Por ejemplo, e ≈ 2,71828 se redondea a cinco decimales.

Tabla 5

norte	$\frac{1}{n}$	$1 \cdot \frac{1}{n}$	a1 · 1 nb n
1	1	2	2
2	0,5	1.5	2.25
5	0,2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0,01	1.01	2.704813829
1.000	0.001	1.001	2.716923932
10.000	0.0001	1.0001	2.718145927
100.000	0.00001	1.00001	2.718268237
1.000.000	0.000001	1.000001	2.718280469
10.000.000.000	10-10	1+ 10-10	2.718281828

Tabla 6

X	ex
-2	e-2 ≈ 0,14
-1	e-1 ≈ 0,37
0	e0 = 1
1	e1 ≈ 2,72
2	e2 ≈ 7,39

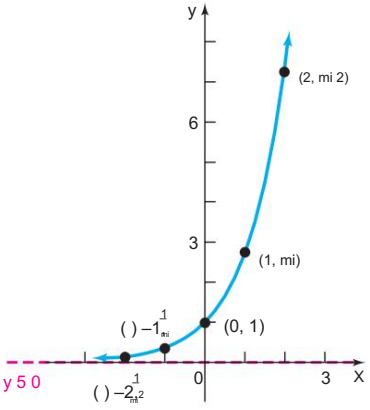


Figura 27 y = ex

La función exponencial f1x2 = ex , cuya base es el número e, ocurre con tal frecuencia en aplicaciones que generalmente se la denomina función exponencial. La mayoría de las calculadoras tienen la clave · ex · o · exp1x2·, que puede usarse para aproximar la función exponencial para un valor dado de x.*

Utilice su calculadora para aproximar ex para x = - 2, x = - 1, x = 0, x = 1 y x = 2. Consulte la Tabla 6. La gráfica de la función exponencial f1x2 = ex se muestra en la Figura 27. Dado que 2 6 e 6 3, la gráfica de y = ex se encuentra entre las gráficas de y = 2x y y = 3x . ¿Ves por qué? (Consulte las Figuras 18 y 20.)

Ver el concepto

Grafique Y1 = ex y compare lo que ve con la Figura 27. Utilice eVALUEate o TABLE para verificar los puntos en el gráfico que se muestra en la Figura 27. Ahora grafique Y2 = 2x e Y3 = 3x en la misma pantalla que Y1 = ex . Observe que la gráfica de Y1 = ex se encuentra entre estas dos gráficas.

EJEMPLO 6 Graficar una función exponencial mediante transformaciones

Grafique f1x2 = - ex-3 y determine el dominio, el rango, la asíntota horizontal y la intersección con el eje y de f.

*Si su calculadora no tiene una de estas teclas, consulte el manual del propietario.

Machine Translated by Google

Solución Comience con la gráfica de y = ex . La Figura 28 muestra los pasos.

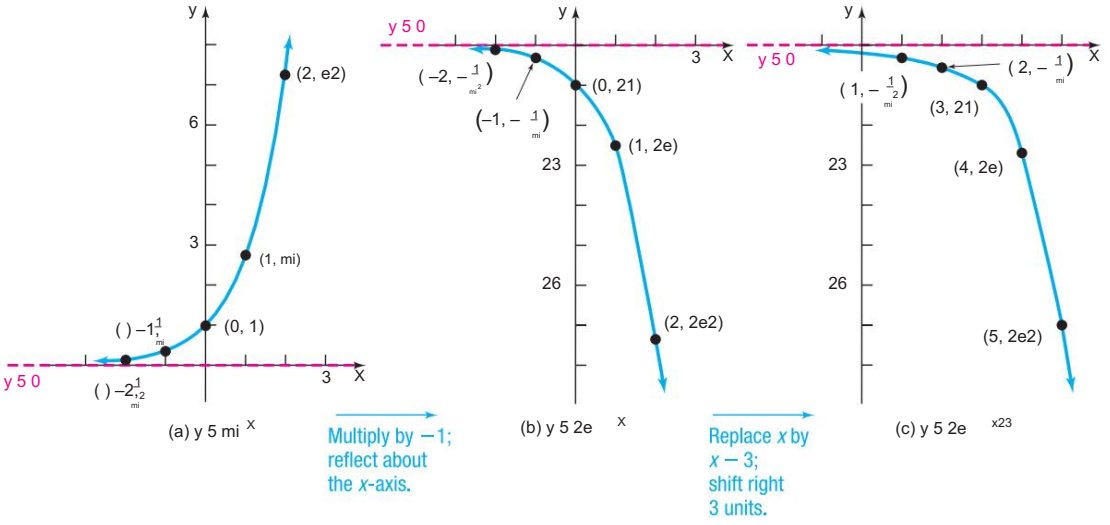


Figura 28

Como ilustra la Figura 28(c), el dominio de f1x2 = - ex-3 es el intervalo 1 - q, q 2, y el rango es el intervalo 1 - q, 02. La asíntota horizontal es la recta y = 0. La intersección con el eje y es f102 = - e0-3 = - e^-3 ≈ - 0,05.

Ahora problema de trabajo 5 7

4 Resolver ecuaciones exponenciales

Ecuaciones que involucran términos de la forma ax , donde a 7 0 y a · 1, están referidos como ecuaciones exponenciales. A veces, estas ecuaciones se pueden resolver utilizando las leyes de los exponentes y la propiedad (3):

En palabras
Cuando dos expresiones exponenciales con la misma base son iguales, entonces sus exponentes son iguales.

Si au = av , entonces u = v. (3)

La propiedad (3) es consecuencia del hecho de que las funciones exponenciales son uno a uno. Para utilizar la propiedad (3), cada lado de la igualdad debe escribirse con la misma base.

EJEMPLO 7 Resolver ecuaciones exponenciales

Resuelve cada ecuación exponencial.

(a) 3x+1 = 81 (b) 42x-1 = 8x+3

Solución

(a) Dado que 81 = 34, escribe la ecuación como

3x+1 = 34

Ahora las expresiones en ambos lados de la ecuación tienen la misma base, 3. Iguala los exponentes entre sí para obtener

x + 1 = 4

x = 3

El conjunto solución es 536.

(b) 42x-1 = 8x+3

1222 12x-12 = 1232 1x+32 4 · 22; 8 · 23

2212x-12 = 231x+32

1ar 2s · ars _

212x - 12 = 31x + 32 Si au · av , entonces u · v, (propiedad (3)).

4x - 2 = 3x + 9

x = 11

El conjunto solución es 5116.

Ahora resuelve los problemas 6 7 y 7 7

Machine Translated by Google

EJEMPLO 8 Resolver una ecuación exponencial

Resuelva: $e^{-x^2} = 1e^{x^2} \cdot \frac{1}{e^3}$

Solución Usa primero las leyes de los exponentes para obtener una expresión única con la base e en el lado derecho.

$$1e^{x^2} \cdot \frac{1}{e^3} = e^{2x} \# e^{-3} = e^{2x-3}$$

Entonces,

$$e^{-x^2} = e^{2x-3}$$

$$-x^2 = 2x - 3 \qquad \text{Utilice la propiedad (3).}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad \text{Coloca la ecuación cuadrática en forma estándar.}$$

$$1x + 32\,1x - 12 = 0 \qquad \text{Factor.}$$

$$x = -3 \text{ o } x = 1 \qquad \text{Utilice la propiedad de producto cero.}$$

El conjunto solución es $\{-3, 1\}$.

Ahora problema de trabajo 8 3

EJEMPLO 9 Probabilidad exponencial

Entre las 9:00 pm y las 10:00 pm, los autos llegan al drive-thru de Burger King a razón de 12 autos por hora (0,2 autos por minuto). La siguiente fórmula de la teoría de la probabilidad se puede utilizar para determinar la probabilidad de que un automóvil llegue dentro de t minutos de las 9:00 p.m.

$$F1t2 = 1 - e^{-0.2t}$$

(a) Determine la probabilidad de que llegue un automóvil dentro de los 5 minutos de las 9 pm (es decir, antes de las 9:05 pm).

(b) Determine la probabilidad de que llegue un automóvil dentro de los 30 minutos posteriores a las 9 p. m. (antes de las 9:30 p. m.).

(c) Gráfico F.

(d) ¿A qué se aproxima F cuando t aumenta sin límite en la dirección positiva?

Solución

(a) La probabilidad de que un automóvil llegue en 5 minutos se encuentra evaluando F1t2 en t = 5.

$$F152 = 1 - e^{-0,2152} \approx 0,63212$$

C
Usa una calculadora.

Hay un 63% de probabilidad de que llegue un automóvil en 5 minutos.

(b) La probabilidad de que un automóvil llegue dentro de 30 minutos se encuentra evaluando F1t2 en t = 30.

$$F1302 = 1 - e^{-0,21302} \approx 0,9975$$

C
Usa una calculadora.

Existe una probabilidad del 99,75% de que llegue un automóvil en 30 minutos.

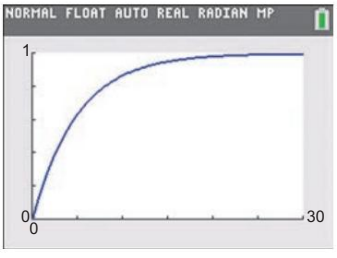


Figura 29 F1t2 = 1 - e-0.2t

(c) Consulte la Figura 29 para ver la gráfica de F.

(d) A medida que pasa el tiempo, aumenta la probabilidad de que llegue un automóvil. El valor que F

Los enfoques se pueden encontrar dejando t S q. Como $e^{-0.2t} = \frac{1}{e^{0.2t}}$, $e^{-0.2t}$ S 0 como

t S q. Por lo tanto, F1t2 = 1 - e-0.2t S 1 como t S q. El análisis algebraico está respaldado por la Figura 29.

Ahora resuelve el problema 1 1 5

Machine Translated by Google

RESUMEN

Propiedades de la función exponencial

f1x2 = hacha, un 7 1

- Dominio: el intervalo 1 - q, q 2; rango: el intervalo 10, q 2
- intersecciones x: ninguna; intercepción y: 1
- Asíntota horizontal: eje x 1y = 02 como x S - q
- Creciente; cara a cara; liso; continuo
- Consulte la Figura 21 para ver un gráfico típico.

f1x2 = hacha, 0 6 un 6 1

- Dominio: el intervalo 1 - q, q 2; rango: el intervalo 10, q 2
- intersecciones x: ninguna; intercepción y: 1
- Asíntota horizontal: eje x 1y = 02 como x S q
- Decreciente; cara a cara; liso; continuo
- Consulte la Figura 25 para ver un gráfico típico.

Si au = av, entonces u = v.

5.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. 43 = _____ ; 82>3 _____; 3-2 = _____. (págs. A7–A9 y = págs. A87–A88)
2. Resuelva: x2 + 3x = 4 (págs. A47–A51)
3. Verdadero o Falso Para graficar y = 1x - 22 3, cambiar el gráfico de y = x3 a la izquierda 2 unidades. (págs. 134-143)
4. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = 3x - 5 de x = 0 a x = 4. (págs. 115-117)
5. Verdadero o Falso La gráfica de la función f1x2 = x - 3 2x tiene y = 2 como asíntota horizontal. (págs. 239-241)
6. Si f1x2 = - 3x + 10, entonces la gráfica de f es a _____ con pendiente _____ y la intercepción y _____(págs. 161-164)
7. ¿ Dónde aumenta la función f1x2 = x2 - 4x + 3? ¿Dónde está disminuyendo? (págs. 182-185)

Conceptos y vocabulario

8. A(n) _____ _____ es una función de la forma f1x2 = Cax , donde a 7 0, a · 1 y C · 0 son reales y C es números. La base a es la _____ _____ _____ _____.
9. Para una función exponencial f1x2 = Cax , $\frac{f1x+12}{f1x2}$ = ____.
10. Verdadero o Falso El dominio de la función f1x2 = ax , donde a 7 0 y a · 1, es el conjunto de todos los números reales.
11. Verdadero o Falso La función f 1x2 = ex es creciente y es uno a uno.
12. La gráfica de cada función exponencial f1x2 = ax , donde a 7 0 y a · 1, contiene los tres puntos: _____, _____, y _____.
13. Si 3x = 34 , entonces x · ____
14. Verdadero o Falso Las gráficas de y = 3x e y = a 1 3 b x son idéntico.
15. Opción múltiple ¿Qué función exponencial es creciente?
    (a) f1x2 = 0,5x (b) f1x2 = a 5 2 b x
    (c) f1x2 = a 2 3 b x (d) f1x2 = 0,9x
16. Opción múltiple El rango de la función f1x2 = ax , donde a 7 0 y a · 1, es el intervalo
    (a) 1 - q, q 2 (b) 1 - q, 02 (c) 10, q 2 (d) 30, q 2

Desarrollo de habilidades

En los problemas 17 a 28, aproxima cada número usando una calculadora. Expresa tu respuesta redondeada a tres decimales.

17. (a) 23.14 (b) 23.141 (c) 23.1415 (d) 2p
18. (a) 22,7 b) 22,71 (c) 22.718 (d) 2e
19. (a) 2.73.1 (b) 2.713.14 (c) 2.7183.141 (d) mi pag
20. (a) 3.12.7 b) 3.142,71 (c) 3.1412.718 (d) pe
21. a1 + $\frac{0,09}{12 \text{ segundo}}$ 24
22. 11 + 0.042 6
23. 158a 5 8.63 segundo
24. 8.4a 1 2.9 3 segundo
25. mi -1,3
26. mi 1.2
27. 83,6e -0,15719,52
28. 125e 0,026172

Machine Translated by Google

En los problemas 29 a 36, determine si la función dada es lineal, exponencial o ninguna de las dos. Para aquellas que son funciones lineales, encuentre una función lineal que modele los datos; para aquellos que son exponenciales, encuentre una función exponencial que modele los datos.

29.

x	f(x)
-1	3
0	6
1	12
2	18
3	30

30.

x	gramo(x)
-1	2
0	5
1	8
2	11
3	14

31.

x	F(x)
-1	$\frac{2}{3}$
0	1
1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{9}{4}$
3	$\frac{27}{8}$

32.

x	H(x)
-1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	decisés
3	64

33.

x	gramo(x)
-1	6
0	1
1	0
2	3
3	10

34.

x	f(x)
-1	$\frac{3}{2}$
0	3
1	6
2	12
3	24

35.

x	F(x)
-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{\text{decisés}}$
3	$\frac{1}{32}$

36.

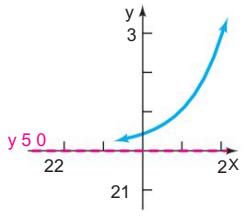
x	H(x)
-1	2
0	4
1	6
2	8
3	10

En los problemas 37 a 44 se da la gráfica de una función exponencial. Relaciona cada gráfico con una de las siguientes funciones.

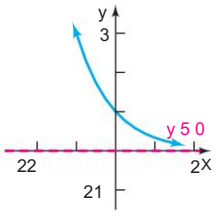
(A) y = 3x (B) y = 3-x (C) y = - 3x (D) y = - 3-x

(mi) y = 3x - 1 (F) y = 3x-1 (G) y = 31-x (H) y = 1 - 3x

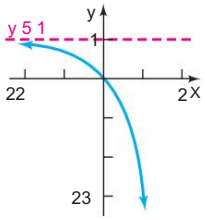
37.



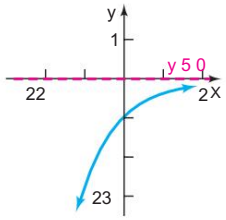
38.



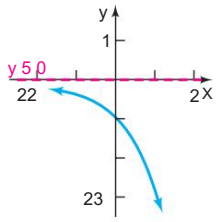
39.



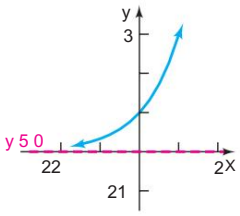
40.



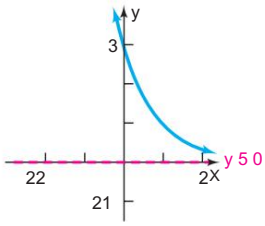
41.



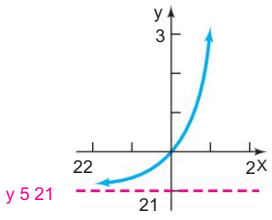
42.



43.



44.



En los problemas 45 a 56, utilice transformaciones para representar gráficamente cada función. Determine el dominio, el rango, la asíntota horizontal y la intersección con el eje y de cada función.

45. f1x2 = 2x + 1

46. f1x2 = 3x - 2

47. f1x2 = 2x+2

48. f1x2 = 3x-1

49. f1x2 = 4 # a 1 $\overline{3}$ b x

50. f1x2 = 3 # a 1 $\overline{2}$ b x

51. f1x2 = - 3x + 1

52. f1x2 = 3-x - 2

53. f1x2 = 1 - 2x+3

54. f1x2 = 2 + 4x-1

55. f1x2 = 1 - 2-x>3

56. f1x2 = 2 + 3x>2

En los problemas 57 a 64, comience con la gráfica de y = ex (Figura 27) y use transformaciones para representar gráficamente cada función. Determine el dominio, el rango, la asíntota horizontal y la intersección con el eje y de cada función.

57. f1x2 = ex

58. f1x2 = - ex

61. f1x2 = 9 - 3e-x

62. f1x2 = 5 - ex

59. f1x2 = ex - 1

63. f1x2 = 7 - 3e2x

60. f1x2 = ex+2

64. f1x2 = 2 - ex>2

Machine Translated by Google

En los problemas 65 a 84, resuelve cada ecuación. 65. 5x = 5-6 66. 6x = 65

67. 2-x = 16

68. 3-x = 81

69. a 14 bx = 1/64

70. a 15 b x = 1/25

71. 5x+3 = 1/5

72. 32x-5 = 9

73. 4x2 = 2x

74. 3x3 = 9x

75. 9-x+15 = 27x

76. 8-x+11 = 16 2x

77. 3x2-7 = 272x

78. 5x2+8 = 1252x

79. 92x # 27x2 = 3-1

80. 4x # 2x2 = 16 2

81. e3x = e2-x

82. e2x = e5x+12

83. ex2 = e3x / # e2

84. 1e4 2x _ # ex2 = e12

85. Si 2x = 3, ¿a qué equivale 4-x ?

86. Si 4x = 7, ¿a qué equivale 4-2x ?

87. Si 5-x = 3, ¿a qué equivale 53x ?

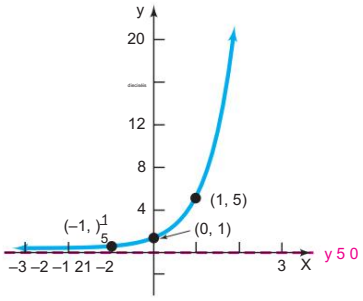
88. Si 3-x = 2, ¿a qué equivale 32x ?

89. Si 2-3x = ¿a qué equivale 2x ? 1000,

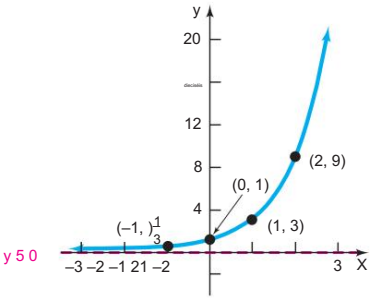
90. Si 9x = 25, ¿a qué equivale 3x ?

En los problemas 91 a 94, determine la función exponencial cuya gráfica se da.

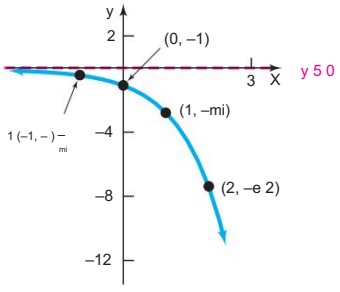
91.



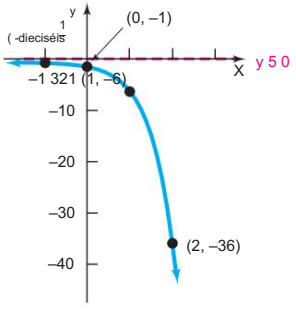
92.



93.



94.



95. Encuentre una función exponencial cuya gráfica tenga la asíntota horizontal y = - 3 y contenga los puntos 10, - 22 y 1 - 2, 12.

96. Encuentre una función exponencial cuya gráfica tenga la asíntota horizontal y = 2 y contenga los puntos 10, 32 y 11, 52.

97. Supongamos que f1x2 = 3x .
(a) ¿Qué es f 142? ¿Qué punto está en la gráfica de f?
(b) Si f1x2 = 1/g, ¿Qué es x ? ¿Qué punto está en la gráfica de f ?

98. Suponga que f 1x2 = 2x (a) ·
¿Cuál es f142? ¿Qué punto está en la gráfica de f ?
(b) Si f1x2 = ¿qué es x? ¿Qué punto está en la gráfica de f? dieciséis,

99. Suponga que g1x2 = 5x - 3. (a)
¿Cuánto es g1 - 12? ¿Qué punto está en la gráfica de g? (b) Si g1x2 = 122, ¿cuál es x? ¿Qué punto está en la gráfica de g?

100. Suponga que g1x2 = 4x + 2. (a)
¿Cuánto es g1 - 12? ¿Qué punto está en la gráfica de g? (b) Si g1x2 = 66, ¿cuál es x? ¿Qué punto está en la gráfica de g?

101. Supongamos que F1x2 = a 1 3b x - 3.
(a) ¿Qué es F1 - 52? ¿Qué punto está en la gráfica de F? (b) Si F1x2 = 24, ¿cuál es x? ¿Qué punto está en la gráfica?
apagado ? _ (c) Encuentre el cero de F.

102. Supongamos que H1x2 = a 1 2b x - 4.
(a) ¿Qué es H1 - 62? ¿Qué punto está en la gráfica de H? (b) Si H1x2 = 12, ¿cuál es x? ¿Qué punto está en la gráfica de H?
(c) Encuentre el cero de H.

Práctica mixta En los problemas 103 a 106, grafica cada función. Con base en la gráfica, indica el dominio y el rango, y encuentra las intersecciones.

103. f1x2 = e ex si x 6 0 ex si x Ú 0

104. f1x2 = e ex si x 6 0 ex si x Ú 0

f1x2 = e - ex si x 6 0 ex si x Ú 0

= e - ex si x Ú 0

Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

107. Óptica Si un solo panel de vidrio borra el 9% de la luz que lo atraviesa, entonces el porcentaje p de la luz que pasa a través de n paneles sucesivos viene dado aproximadamente por la siguiente función.

p1n2 = 10010.912n

(a) ¿Qué porcentaje de luz pasará a través de 5 paneles?
(b) ¿Qué porcentaje de luz pasará a través de 15 paneles?
(c) Explique el significado de la base 0,97 en este problema.

108. Presión atmosférica La presión atmosférica p en un globo o avión disminuye al aumentar la altura.
Esta presión, medida en milímetros de mercurio, está relacionada con la altura h (en kilómetros) sobre el nivel del mar mediante la función

p1h2 = 760e-0.145h

(a) Encuentre la presión atmosférica a una altura de 2 km (sobre una milla).
(b) ¿Cuánto es a una altura de 10 kilómetros (más de 30 000 pies)?

109. Depreciación El precio, p, de un automóvil usado específico que es x años viene dada por la siguiente fórmula.

p1x2 = 1479610.742x

(a) ¿Cuánto cuesta un automóvil de 3 años?
(b) ¿Cuánto cuesta un automóvil de 9 años?
(c) Explique el significado de la base 0,74 en este problema.

110. Curación de heridas La curación normal de heridas se puede modelar mediante una función exponencial. Si A0 representa el área original de la herida y si A es igual al área de la herida, entonces la función

A1n2 = A0e-0,35n

Describe el área de una herida después de n días de una lesión cuando no hay infección presente que retrase la curación.
Supongamos que una herida tuviera inicialmente un área de 100 milímetros cuadrados.

(a) Si se está curando, ¿qué tamaño tendrá el área de la herida después de 3 días?
(b) ¿Qué tamaño tendrá después de 10 días?

111. Cáncer de páncreas en estadio avanzado El porcentaje de pacientes P que han sobrevivido t años después del diagnóstico inicial de una determinada enfermedad se modela mediante la función

P1t2 = 10010,82t .

Fuente: Centros de tratamiento del cáncer de América
(a) Según el modelo, ¿qué porcentaje de pacientes sobrevive 1 año después del diagnóstico inicial?
(b) ¿Qué porcentaje de pacientes sobrevive 4 años después del diagnóstico inicial?
(c) Explique el significado de la base 0,8 en el contexto de este problema.

112. Especies en peligro de extinción En un entorno protegido, la población P de una determinada especie en peligro de extinción se recupera con el tiempo t (en años) según el modelo

P1t2 = 30 # 1.149x

(a) ¿Cuál es el tamaño de la población inicial de la ¿especies?
(b) Según el modelo, ¿cuál será la población de la especie dentro de 5 años?
(c) Según el modelo, ¿cuál será la población de la especie dentro de 10 años?
(d) Según el modelo, ¿cuál será la población de la especie dentro de 15 años?
(e) ¿Qué le sucede a la población cada 5 años?

113. Drogas Medicación La función

D1h2 = 6e-0.59h

se puede utilizar para encontrar la cantidad de miligramos D de un determinado medicamento que se encuentra en el torrente sanguíneo de un paciente h horas después de que se haya administrado el medicamento. ¿Cuántos miligramos habrá después de 1 hora? ¿Despues de 3 horas?

114. Difusión de rumores Un modelo para el número N de personas en una comunidad universitaria que han escuchado cierto rumor es

N = P11 - e-0,15d2

donde P es la población total de la comunidad y d es el número de días que han transcurrido desde que comenzó el rumor. En una comunidad de 1000 estudiantes, ¿cuántos estudiantes habrán escuchado el rumor después de 3 días?

115. Probabilidad exponencial Entre las 12:00 pm y la 1:00 pm, los automóviles llegan al autoservicio de Citibank a razón de 6 automóviles por hora (0,1 automóviles por minuto). La siguiente fórmula de probabilidad se puede utilizar para determinar la probabilidad de que un automóvil llegue dentro de los t minutos posteriores a las 12:00 p. m.

F1t2 = 1 - e-0.1t

(a) Determine la probabilidad de que llegue un automóvil dentro de los 10 minutos posteriores a las 12:00 p. m. (es decir, antes de las 12:10 p. m.).
(b) Determine la probabilidad de que llegue un automóvil dentro de los 40 minutos posteriores a las 12:00 p. m. (antes de las 12:40 p. m.).
(c) ¿A qué se aproxima F cuando t se vuelve ilimitado en el ¿dirección positiva?
(d) Grafique F usando una utilidad gráfica.
(e) Usando INTERSECT, determine cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad alcance el 50%.

116. Probabilidad exponencial Entre las 5:00 pm y las 6:00 pm, los autos llegan a Jiffy Lube a razón de 9 autos por hora (0.15 autos por minuto). Esta fórmula de probabilidad se puede utilizar para determinar la probabilidad de que un automóvil llegue dentro de los t minutos posteriores a las 5:00 p. m.:

F1t2 = 1 - e-0,15t

(a) Determine la probabilidad de que llegue un automóvil dentro de los 15 minutos posteriores a las 5:00 pm (es decir, antes de las 5:15 pm).
(b) Determine la probabilidad de que llegue un automóvil dentro de los 30 minutos posteriores a las 5:00 pm (antes de las 5:30 pm).
(c) ¿A qué se aproxima F cuando t se vuelve ilimitado en el ¿dirección positiva?
(d) Gráfico F.
(e) Usando INTERSECT, determine cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad alcance el 60%.

117. Probabilidad de Poisson Las personas hacen fila para subir a la montaña rusa Demon a razón de 4 por minuto. La siguiente fórmula de probabilidad se puede utilizar para determinar la probabilidad de que x personas lleguen en el próximo minuto.

$$P1x2 = \frac{4xe-4}{¡X!}$$

(continuado)

Machine Translated by Google

dónde

¡X! = x # 1x - 12 # 1x - 22 # g # 3 # 2 # 1

(a) Determine la probabilidad de que x = 5 personas lleguen en el siguiente minuto.

(b) Determine la probabilidad de que x = 8 personas lleguen en el siguiente minuto.

118. Probabilidad de Poisson Entre las 5:00 pm y las 6:00 pm, los autos llegan a un autoservicio de McDonald's a razón de 20 autos por hora. La siguiente fórmula de probabilidad se puede utilizar para determinar la probabilidad de que x autos lleguen entre las 5:00 p.m. y las 6:00 p.m.

$$P1x2 = \frac{20xe\text{-}20}{¡X!}$$

dónde

¡X! = x # 1x - 12 # 1x - 22 # g # 3 # 2 # 1

119. Humedad relativa La humedad relativa es la relación (expresada como porcentaje) entre la cantidad de vapor de agua en el aire y la cantidad máxima que puede contener a una temperatura específica. La humedad relativa, R, se encuentra usando la siguiente fórmula

$$R = 10a\ 4221\ \frac{T+459.4}{4221}\text{-}\ \frac{}{D+459.4+2b}$$

(a) Determine la humedad relativa si la temperatura del aire es de 46° Fahrenheit y la temperatura del punto de rocío es de 40° Fahrenheit.

(b) Determine la humedad relativa si la temperatura del aire es 75° Fahrenheit y la temperatura del punto de rocío es 71° Fahrenheit.

(c) ¿Cuál es la humedad relativa si la temperatura del aire y la temperatura del punto de rocío son iguales?

120. Curva de aprendizaje Supongamos que un estudiante tiene 500 palabras de vocabulario para aprender. Si el estudiante aprende 15 palabras después de 5 minutos, la función

L1t2 = 50011 - e-0.0061t 2

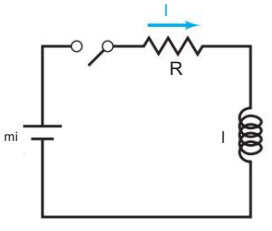
aproxima el número de palabras L que el estudiante habrá aprendido después de t minutos.

(a) ¿ Cuántas palabras habrá aprendido el estudiante?
¿despues de 30 minutos?

(b) ¿ Cuántas palabras habrá aprendido el estudiante?
¿después de 60 minutos?

121. Corriente en un circuito RL La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) después del tiempo t (en segundos) en un único circuito RL que consta de una resistencia R (en ohmios), una inductancia L (en henrys) y una fuerza electromotriz E (en voltios) es

$$yo = \frac{mi}{R}\ 31 - e\text{-}1R>L2t\ 4$$



(a) Si E = 120 voltios, R = 10 ohmios y L = 5 henrios, ¿ Cuánta corriente I1 fluye después de 0,3 segundos?
¿Después de 0,5 segundos? ¿Después de 1 segundo?

(b) ¿Cuál es la corriente máxima?

(c) Grafique esta función I = I1 1t2, midiendo I a lo largo el eje y y t a lo largo del eje x.

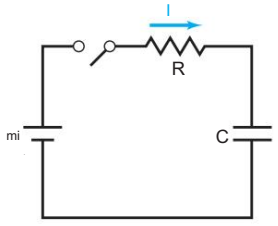
(d) Si E = 120 voltios, R = 5 ohmios y L = 10 henrios, ¿ Cuánta corriente I2 fluye después de 0,3 segundos?
¿Después de 0,5 segundos? ¿Después de 1 segundo?

(e) ¿Cuál es la corriente máxima?

(f) Grafique la función I = I2 1t2 en los mismos ejes de coordenadas que I1 1t2.

122. Corriente en un circuito RC La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) después del tiempo t (en microsegundos) en un único circuito RC que consta de una resistencia R (en ohmios), una capacitancia C (en microfaradios) y una fuerza electromotriz E (en voltios) es

$$yo = \frac{mi}{R}et>1RC2$$



(a) Si E = 120 voltios, R = 2000 ohmios y C = 1,0 microfaradio, ¿cuánta corriente I1 fluye inicialmente 1t = 02?
¿Después de 1000 microsegundos? ¿Después de 3000 microsegundos?

(b) ¿Cuál es la corriente máxima?

(c) Grafique la función I = I1 1t2, midiendo I a lo largo el eje y y t a lo largo del eje x.

(d) Si E = 120 voltios, R = 1000 ohmios y C = 2,0 microfaradios, ¿cuánta corriente I2 fluye inicialmente? ¿Después de 1000 microsegundos? ¿Después de 3000 microsegundos?

(e) ¿Cuál es la corriente máxima?

(f) Grafique la función I = I2 1t2 en los mismos ejes de coordenadas que I1 1t2.

123. Si f es una función exponencial de la forma f1x2 = C # ax con factor de crecimiento 2 y f142 = 14. ¿Cuál es f152?

124. Otra fórmula para e Usa una calculadora para calcular la valores de

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + g + \frac{1}{¡norte!}$$

para n = 4, 6, 8 y 10. Compare cada resultado con e.

[Pista: 1! = 1, 2! = 2 # 1, 3! = 3 # 2 # 1,

¡norte! = n1n - 12 #g# 132 122 112.]

125. Otra fórmula para e Usa una calculadora para calcular los distintos valores de la expresión. Compare los valores con e.

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{\text{etc.}}}}}}$$

Machine Translated by Google

126. Cociente de diferencias si f1x2 = ax , muestra esa

$$\frac{f1x + h2 - f1x2}{h} = \text{hacha } \# \frac{ah - 1}{h} \quad h \cdot 0$$

127. Si f1x2 = hacha , Demuestre que f1A + B2 = f1A2 # f1B2.

128. Si f1x2 = hacha , demuestre que $f1 - x2 = \frac{1}{f1x2}$.

129. Si f1x2 = hacha , demuestre que f1ax2 = 3f1x24a.

Los problemas 130 y 131 definen otras dos funciones trascendentales.

130. La función seno hiperbólica, designada por senh x, se define como

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} 1ex - ex 2$$

(a) Demuestre que f1x2 = senh x es una función impar.

(b) Grafique f1x2 = senh x.

131. La función coseno hiperbólica, designada por cosh x, se define como

$$\cosh x = \frac{1}{2} 1ex + ex 2$$

(a) Demuestre que f1x2 = cosh x es una función par.

(b) Grafique f1x2 = cosh x.

(c) Consulte el problema 130. Demuestre que, para cada x,

$$1\cosh x2^{\,2} - 1 \text{ pecado } x2^{\,2} = 1$$

132. Problema histórico Pierre de Fermat (1601-1665) Conjeturó que la función

$$f1x2 = 212x\,2 + 1$$

para x = 1, 2, 3, c, siempre tendría un valor igual a un número primo. Pero Leonhard Euler (1707–1783) demostró que esta fórmula falla cuando x = 5. Utilice una calculadora para determinar los números primos producidos por f para x = 1, 2, 3, 4. Luego demuestre que f152 = 641 * 6,700,417, que no es primo.

133. Reto Problema Resolver: $2^{\frac{2}{3}x+1} - 3 \# 2^{\frac{1}{3}x} - 20 = 0$

134. Reto Problema Resolver: 32 x-1 - 4 # 3x + 9 = 0

Explicar conceptos: discusión y escritura

135. Las bacterias en un recipiente de 4 litros se duplican cada minuto. Después de 60 minutos el recipiente está lleno. ¿Cuánto tiempo tardó en llenar la mitad del contenedor?

136. Explica con tus propias palabras qué es el número e . Proporcione al menos dos aplicaciones que utilicen este número.

137. ¿Crees que existe una función de potencia que aumenta más rápidamente que una función exponencial? Explicar.

138. Como base a de una función exponencial f1x2 = ax , donde a 7 1, aumenta, ¿qué sucede con su gráfica para x 7 0? ¿Qué sucede con su gráfica para x 6 0?

139. Las gráficas de y = ax e y = a 1 $\overline{a\ b\ x}$ Son identicos. ¿Por qué?

Conserve su conocimiento

Los problemas 140 a 149 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

140. Resuelve la desigualdad: x3 + 5x2 … 4x + 20.

141. Resuelve la desigualdad: $x \frac{x + 1}{-2}$ Ú 1.

142. Encuentra la ecuación de la función cuadrática f que tiene su vértice en 13, 52 y contiene el punto 12, 32.

143. Supongamos f 1x2 = x2 + 2x - 3.

(a) Grafique f determinando si su gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, eje de simetría, intersección con el eje y e intersección con el eje x, si las hubiera.

(b) Encuentre el dominio y rango de f.

(c) Determine dónde f aumenta y dónde disminuye.

144. Resuelve: 13x - 15x - 62 = 2x - 18x - 272

145. Encuentre una ecuación para el círculo con centro 10, 02 y radio r = 1.

146. Resuelve: $x - 162x + \overline{48} = 0$

147. Si se invierten $12 000 al 3,5% de interés simple durante 2,5 años, ¿Cuánto interés se gana?

148. Determina dónde está la gráfica de f1x2 = x4 - 5x2 - 6 está debajo de la gráfica de g1x2 = 2x2 + 12 resolviendo la desigualdad f1x2 … g1x2.

149. Encuentra el cociente de diferencias de f1x2 = 2x2 - 7x.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1, 64; 4; $\frac{1}{9}$ 2. 5 - 4, 16 3. Falso 4. 3 5. Verdadero 6. línea; - 3; 10 7. 32, q 2; 1-q, 24

Machine Translated by Google

5.4 Funciones logarítmicas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Resolver desigualdades (Sección A.9, págs. A76–A79)
- Desigualdades cuadráticas (Sección 3.5, págs. 201–203)
- Desigualdades polinómicas y racionales (sección 4.5, págs. 260–264)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 340.

OBJETIVOS 1 Cambiar enunciados exponenciales a enunciados logarítmicos y De declaraciones logarítmicas a declaraciones exponenciales (p. 332)

2 Evaluar expresiones logarítmicas (p. 333)

3 Determinar el dominio de una función logarítmica (p. 333)

4 Graficar funciones logarítmicas (p. 334)

5 Resolver ecuaciones logarítmicas (p. 338)

Recuerde que una función uno a uno y = f1x2 tiene una función inversa que está definida implícitamente por la ecuación x = f1y2. En particular, la función exponencial y = f1x2 = ax , donde a 7 0 y a · 1, es uno a uno, por lo que tiene una función inversa que está definida implícitamente por la ecuación

x = sí un 7 0 un · 1

Esta función inversa es tan importante que se le da un nombre: función logarítmica.

DEFINICIÓN Función Logarítmica con Base a

La función logarítmica con base a, donde a 7 0 y a · 1, se denota por y = loga x (leído como y es el logaritmo con base a de x") y se define por

y = loga x si y sólo si x = ay

El dominio de la función logarítmica y = loga x es x 7 0.

En palabras
Cuando necesites evaluar loga x, piensa "¿a elevado a qué potencia me da x?"

Como ilustra esta definición, un logaritmo es el nombre de un determinado exponente. Entonces loga x es igual al exponente al que se debe elevar a para obtener x.

EJEMPLO 1 Relacionar logaritmos con exponentes

(a) Si y = log3 x, entonces x = 3y . Por ejemplo, el enunciado logarítmico 4 = log3 81 es equivalente al enunciado exponencial 81 = 34 .

(b) Si y = log5 x, entonces x = 5y . Por ejemplo, - 1 = log5 a 1 5 b es equivalente a $\frac{1}{5} = 5^{-1}$.

1 Cambie declaraciones exponenciales a declaraciones logarítmicas y declaraciones logarítmicas a declaraciones exponenciales

La definición de logaritmo se puede utilizar para convertir de forma exponencial a forma logarítmica y viceversa, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 2 Cambiar declaraciones exponenciales a declaraciones logarítmicas

Cambie cada enunciado exponencial por un enunciado equivalente que incluya un logaritmo.

(a) 1,23 = m (c) a4 = 24 (b) eb = 9

Solución Utilice el hecho de que y = loga x y x = ay , donde a 7 0 y a · 1, son equivalentes.

(a) Si 1,23 = m, entonces 3 = log1,2 m. (b) Si eb = 9, entonces b = loge 9.

(c) Si a4 = 24, entonces 4 = loga 24.

Ahora problema de trabajo 1 1

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Cambiar declaraciones logarítmicas a declaraciones exponenciales

Cambie cada enunciado logarítmico por un enunciado equivalente que incluya un exponente.

(a) log 4 = 5 (b) log b = - 3 (c) log3 5 = c

Solución

(a) Si loga 4 = 5, entonces a5 = 4.

(b) Si loge b = - 3, entonces e-3 = b.

(c) Si log3 5 = c, entonces 3c = 5.

Ahora problema de trabajo 1 9

2 Evaluar expresiones logarítmicas

Para encontrar el valor exacto de un logaritmo, escribe el logaritmo en notación exponencial usando el hecho de que y = loga x es equivalente a ay = x, y usa el hecho de que si au = av , entonces u = v.

EJEMPLO 4 Encontrar el valor exacto de una expresión logarítmica

Encuentre el valor exacto de:

(a) log2 16 (b) registro3 $\frac{1}{27}$

Solución (a) Para encontrar log2 16, piense "¿2 elevado a qué potencia es igual a 16?" Entonces,

y = log2 16

2 años = 16 Cambiar a forma exponencial.

2 años = 24 16 · 24

y = 4 Igualar exponentes.

Por lo tanto, log2 16 = 4.

(b) Para encontrar $\log_3 \frac{1}{}$ piensa "3 elevado a 27, ¿Qué potencia es igual a $\frac{1}{27}$? Entonces,

$y = \log_3 \frac{1}{27}$

$3^{\text{años}} \frac{1}{= 27}$ Cambiar a forma exponencial.

3 años = 3-3 $\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{33} \cdot 3 \cdot 3$

y = - 3 Igualar exponentes.

Por lo tanto, $\log_3 \frac{1}{27} = -3$.

Ahora resuelve el problema 2 7

3 Determinar el dominio de una función logarítmica

La función logarítmica y = loga x se ha definido como la inversa de la función exponencial y = ax . Es decir, si f1x2 = ax , entonces f^{-1} 1x2 = log x. Basado en la discusión de la Sección 5.2 sobre funciones inversas, para una función f y su inversa f^{-1},

Dominio de f^{-1} = Rango de f y Rango de f^{-1} = Dominio de f

En consecuencia, se deduce que

- Dominio de la función logarítmica = Rango de la función exponencial = 10, q 2
- Rango de la función logarítmica = Dominio de la función exponencial = 1 - q, q 2

El siguiente cuadro resume algunas propiedades de la función logarítmica.

y = loga x si y sólo si x = ay

Dominio: 0 6 x 6 q Rango: - q 6 y 6 q

El dominio de una función logarítmica está formado por los números reales positivos , entonces el argumento de una función logarítmica debe ser mayor que cero.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Encontrar el dominio de una función logarítmica

Encuentra el dominio de cada función logarítmica.

(a) F1x2 = log2 1x + 32 (b) g1x2 = log5 a 1 + $\sqrt{x}$ - xb (c) h1x2 = log1>2 0 x 0

Solución

(a) El dominio de F consta de todo x para el cual x + 3 7 0, es decir, x 7 - 3. Usando notación de intervalo, el dominio de F es 1 - 3, q 2.

(b) El dominio de g está restringido a

$$\frac{1+x}{1-x} \;7\; 0$$

Resuelva esta desigualdad para encontrar que el dominio de g consta de todo x entre - 1 y 1, es decir, - 1 6 x 6 1, o, usando notación de intervalo, 1 - 1, 12.

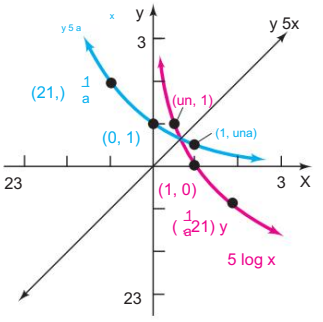
(c) Dado que 0 x 0 7 0, siempre que x · 0, el dominio de h consta de todos los números reales excepto cero, o, usando notación de intervalo, 1 - q, 02 10, q 2.

Ahora resuelve los problemas 4 1 y 4 7.

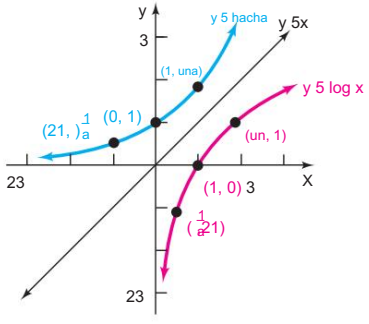
4 Graficar funciones logarítmicas

Debido a que las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas son inversas entre sí, la gráfica de la función logarítmica y = loga x es la reflexión sobre la recta y = x de la gráfica de la función exponencial y = ax , como se muestra en las Figuras 30(a) y (b).

Por ejemplo, para graficar y = log2 x, grafica y = 2x y reflexiona sobre el línea y = x. Ver Figura 31. Para graficar y = log1>3 x, grafique y = a $\frac{1}{3}$ b x y reflexionar sobre la recta y = x. Ver Figura 32.



(a) 0, a , 1



(b) un . 1

Figura 30

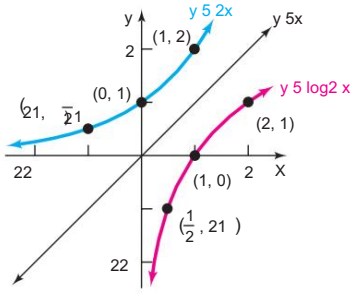


Figura 31

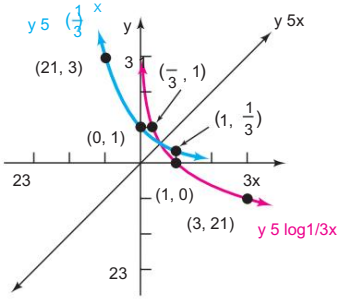


Figura 32

Ahora resuelve el problema 6 1

Las gráficas de y = loga x en las Figuras 30(a) y (b) conducen a las siguientes propiedades.

Propiedades de la función logarítmica f 1x2 · loga x; un + 0, un 3 1

- El dominio es el conjunto de números reales positivos, o 10, q 2 usando notación de intervalo; el rango es el conjunto de todos los números reales, o 1 - q, q 2 usando notación de intervalo.
- La intersección con el eje x de la gráfica es 1. No hay intersección con el eje y.
- El eje y 1x = 02 es una asíntota vertical de la gráfica de f.
- Una función logarítmica es decreciente si 0 6 a 6 1 y aumenta si a 7 1.
- La gráfica de f contiene los puntos (1, 0), (a, 1) y a 1 $\frac{1}{a}$, - 1b.
- El gráfico es suave y continuo, sin esquinas ni espacios.

Machine Translated by Google

En palabras
y = loge x se escribe y = ln x.

Si la base de una función logarítmica es el número e, el resultado es la función logaritmo natural. Esta función ocurre con tanta frecuencia en las aplicaciones que se le asigna un símbolo especial, ln (del latín logarithmus naturalis). Eso es,

$$y = \ln x \text{ si y sólo si } x = e^y \qquad (1)$$

Debido a que y = ln x y la función exponencial y = ex son funciones inversas, la gráfica de y = ln x se puede obtener reflejando la gráfica de y = ex alrededor de la recta y = x. Ver Figura 33.

Usando una calculadora con la tecla ln podemos obtener otros puntos de la gráfica de f1x2 = lnx . Ver Tabla 7.

Tabla 7

x	en x
$\frac{1}{2}$	-0,69
2	0,69
3	1.10

Ver el concepto

Grafique Y1 = ex e Y2 = ln x en la misma pantalla cuadrada. Utilice eVALUEate para verificar los puntos en la gráfica dada en la Figura 33. ¿Ves la simetría de las dos gráficas con respecto a la recta y = x?

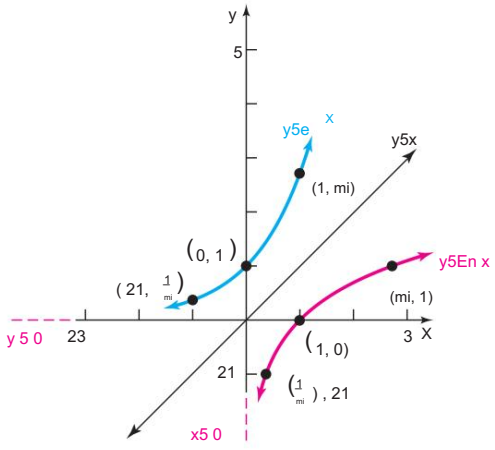


Figura 33

EJEMPLO 6 Graficar una función logarítmica y su inversa

(a) Encuentre el dominio de la función logarítmica f1x2 = - ln1x - 22.

(b) Gráfica f.

(c) A partir de la gráfica, determine el rango y la asíntota vertical de f.

(d) f^{-1}, la inversa de f.

Encuentre f (e) Encuentre el dominio y el f^{-1}.

rango de f (f) Grafique f

Solución (a) El dominio de f consta de todo x para el cual x - 2 7 0, o equivalentemente, x 7 2. El dominio de f es {x 0 x 7 2}, o 12, q 2 en notación de intervalo.

(b) Para obtener la gráfica de y = - ln1x - 22, comience con la gráfica de y = ln x y use transformaciones. Ver Figura 34.

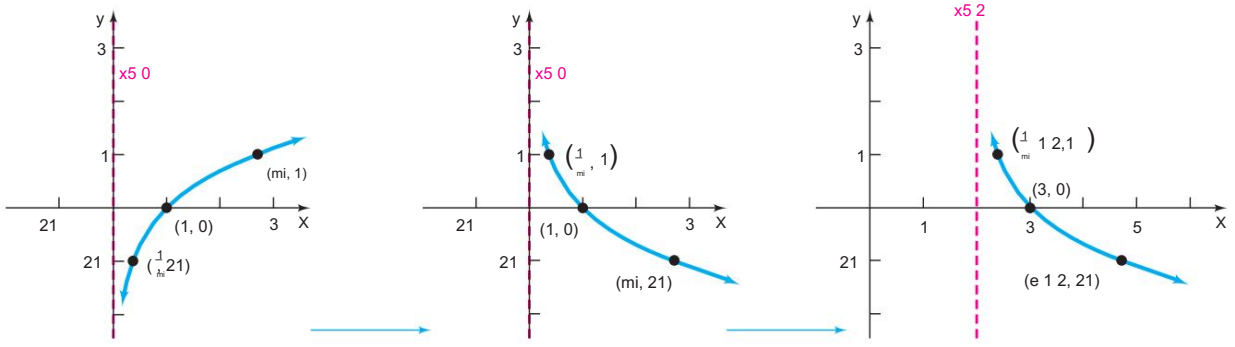


Figura 34 (a) y 5 En x (b) y 5 2En x (c) y 5 2ln (x 2 2)

(continuado)

Machine Translated by Google

(c) El rango de f1x2 = - ln1x - 22 es el conjunto de todos los números reales. La asíntota vertical es x = 2. [¿Ves por qué? La asíntota original 1x = 02 se desplaza hacia la derecha 2 unidades.]

(d) Encontrar f $^{-1}$, comienza con y = - ln1x - 22. La función inversa está definida implícitamente mediante la ecuación

$$x = - \ln 1y - 22$$

Ahora resuelve para y.

$$-x = \ln 1y - 22 \qquad \text{Aísla el logaritmo.}$$

$$ex = y - 2 \qquad \text{Cambiar a forma exponencial.}$$

$$y = ex + 2 \qquad \text{Resuelve para y.}$$

La inversa de f es f $^{-1}$ 1x2 = ex + 2.

(e) El dominio de f del $^{-1}$ es igual al rango de f, que es el conjunto de todos los números inciso (c). El rango de notación f . $^{-1}$ reales, es el dominio de f, que es 12, q 2 en el intervalo

(f) Graficar la recta $^{-1}$, use la gráfica de f en la Figura 34(c) y reflexione sobre 1x2 = ex + 2 f y = x. Vea la Figura 35. También podríamos graficar transformaciones^{-1} usando f .

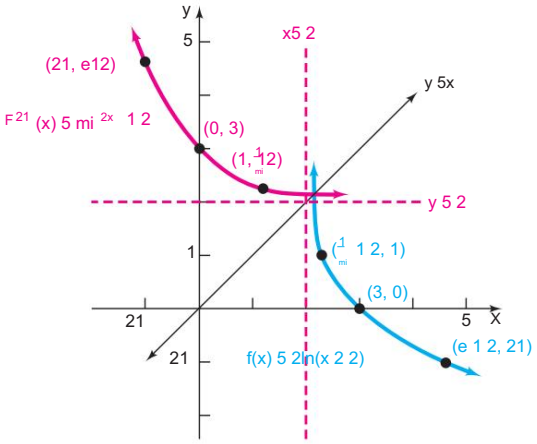


Figura 35

Ahora problema de trabajo 7 3

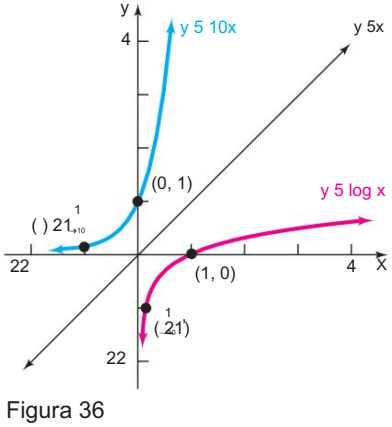


Figura 36

Si la base de una función logarítmica es el número 10, el resultado es la función logarítmica común. Si no se indica la base a de la función logarítmica se entiende que es 10. Es decir,

y = log x si y sólo si x = 10 y

Debido a que y = log x y la función exponencial y = 10, la ^{x} son funciones inversas, gráfica de y = log x se puede obtener reflejando la gráfica de y = 10 en la línea ^{x} acerca de y = x. Ver Figura 36.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Graficar una función logarítmica y su inversa

(a) Encuentre el dominio de la función logarítmica f1x2 = 3 log 1x - 12.

(b) Gráfica f.

(c) A partir de la gráfica, determine el rango y la asíntota vertical de f.

(d) Encuentre f^{-1}, la inversa de f.

(e) Encuentre el dominio y el rango de f^{-1} (f) .

Grafique f^{-1} .

Solución (a) El dominio de f consta de todo x para el cual x - 1 7 0, o equivalentemente, x 7 1. El dominio de f es {x 0 x 7 1}, o 11, q 2 en notación de intervalo.

(b) Para obtener la gráfica de y = 3 log1x - 12, comience con la gráfica de y = log x y use transformaciones. Ver Figura 37.

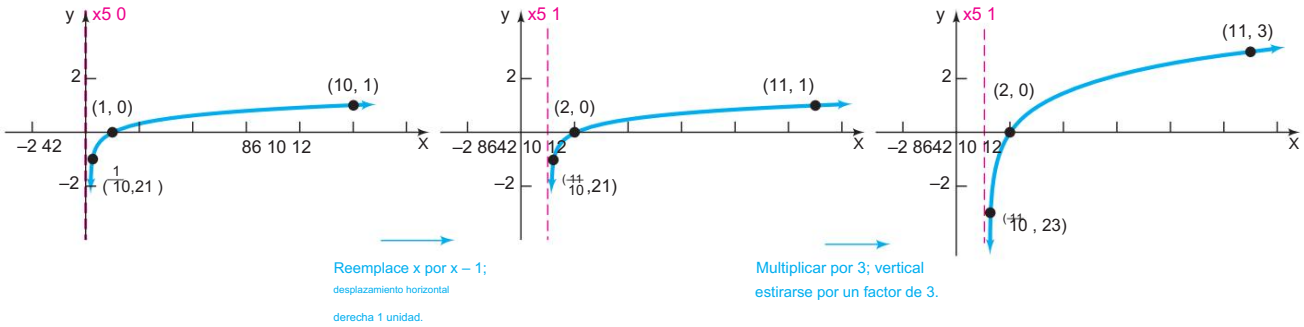


Figura 37 (a) y 5 log x (b) y 5 log (x 2 1) (c) y 5 3 log (x 2 1)

(c) El rango de f1x2 = 3 log1x - 12 es el conjunto de todos los números reales. la vertical la asíntota es x = 1.

(d) Comience con y = 3 log1x - 12. La función inversa se define implícitamente por la ecuación

$$x = 3 \log 1y - 12$$

Resuelve para y.

$$\frac{x}{} = \text{registro } 1 \text{ año } - 12 \qquad \text{Aísla el logaritmo.}$$

$$3\ 10_{\ x>3} = y - 1 \qquad \text{Cambiar a forma exponencial.}$$

$$y = 10x>3 + 1 \qquad \text{Resuelve para y.}$$

La inversa de f es f^{-1} 1x2 = 10x>3 + 1.

(e) El dominio de f parte $^{-1}$ es el rango de f, que es el conjunto de todos los números reales, (c). El rango de f $^{-1}$ desde es el dominio de f, que es 11, q 2 en notación de intervalo.

(f) Para graficar f^{-1} use la gráfica de f en la Figura 37(c) y refleje alrededor de la recta y = x. Ver Figura 38.

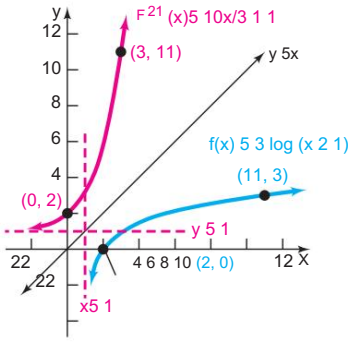


Figura 38

También podríamos graficar f^{-1} 1x2 = 10 x>3 + 1 usando transformaciones.

Ahora problema de trabajo 8 1

Machine Translated by Google

5 Resolver ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones que contienen logaritmos se llaman ecuaciones logarítmicas. Se debe tener cuidado al resolver ecuaciones logarítmicas algebraicamente. En la expresión loga M, recuerda que a y M son positivos y a · 1. Asegúrate de verificar cada solución aparente en la ecuación original y descarta las que sean extrañas.

Algunas ecuaciones logarítmicas se pueden resolver cambiando la ecuación logarítmica a forma exponencial usando el hecho de que y = loga x significa ay = x.

EJEMPLO 8 Resolver ecuaciones logarítmicas

Resolver:

(a) log3 14x - 72 = 2 (a) log x 64 = 2

Solución (a) Para resolver, cambie la ecuación logarítmica a forma exponencial.

log3 14x - 72 = 2 4x -

7 = 32 Cambiar a forma exponencial.

4x - 7 = 9

4x = 16

x = 4

✓Comprueba: log3 14x - 72 = log3 14 # 4 - 72 = log3 9 = 2 32 · 9 El conjunto solución es 546. (b) Para resolver, cambia la ecuación logarítmica a forma exponencial.

logx 64 = 2x2

= 64 Cambiar a forma exponencial.

x = {264 = {8 Utilice el método de la raíz cuadrada.

Como la base de un logaritmo debe ser positiva, descarte - 8. Verifique la solución potencial 8.

✓Compruebe: log8 64 = 2 82 · 64

El conjunto solución es 586.

EJEMPLO 9 Usar logaritmos para resolver una ecuación exponencial

Resuelva: e2x = 5

Solución Para resolver, cambia la ecuación exponencial a forma logarítmica.

e2x = 5

en 5 = 2x Cambiar a forma logarítmica.

$x = \frac{\text{en } 5}{2}$ Solución exacta

≈ 0,805 solución aproximada

El conjunto solución es e l5 2 f.

Ahora resuelve los problemas 8 9 y 1 0 1

Machine Translated by Google

EJEMPLO 10 Alcohol y conducción

La concentración de alcohol en sangre (BAC) es una medida de la cantidad de alcohol en el torrente sanguíneo de una persona. Un BAC de 0,04% significa que una persona tiene 4 partes de alcohol por cada 10.000 partes de sangre en el cuerpo. El riesgo relativo se define como la probabilidad de que ocurra un evento dividida por la probabilidad de que ocurra un segundo evento. Por ejemplo, si una persona con una BAC de 0,02 % tiene 1,4 veces más probabilidades de sufrir un accidente automovilístico que una persona que no ha estado bebiendo, el riesgo relativo de un accidente con una BAC de 0,02 % es 1,4. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo relativo R de tener un accidente mientras se conduce un automóvil puede modelarse mediante una ecuación de la forma

$$R = ekx$$

donde x es el porcentaje de concentración de alcohol en el torrente sanguíneo y k es una constante.

(a) Las investigaciones indican que el riesgo relativo de que una persona tenga un accidente con un BAC del 0,02% es 1,4. Encuentra la constante k en la ecuación.

(b) Utilizando este valor de k, ¿cuál es el riesgo relativo si el BAC es 0,17%?

(c) Utilizando este mismo valor de k, ¿qué BAC corresponde a un riesgo relativo de 100?

(d) Si la ley afirma que cualquier persona con un riesgo relativo de 4 o más no debería tener privilegios de conducir, ¿a qué concentración de alcohol en el torrente sanguíneo se debería arrestar a un conductor y acusarlo de DUI (conducir bajo la influencia)?

Solución (a) Para una concentración de alcohol en sangre de 0,02% y un riesgo relativo R de 1,4, sea x = 0,02 y resuelva para k.

$$R = ekx$$

$$1,4 = ek10,022 \qquad R \cdot 1,4;\ x \cdot 0,02$$

$$0,02k = \text{en } 1,4 \qquad \text{Cambie a una declaración logarítmica.}$$

$$k = \frac{\text{en } 1.4}{0,02} \approx 16,82 \qquad \text{Resuelve para k.}$$

(b) Un BAC de 0,17% significa x = 0,17. Utilice k = 16,82 en la ecuación para encontrar la riesgo relativo R:

$$R = ekx = e116.82210.172 \approx 17.5$$

Para una concentración de alcohol en sangre del 0,17%, el riesgo relativo R de sufrir un accidente es de aproximadamente 17,5. Es decir, una persona con un BAC de 0,17% tiene 17,5 veces más probabilidades de sufrir un accidente automovilístico que una persona sin alcohol en el torrente sanguíneo.

(c) Un riesgo relativo de 100 significa R = 100. Utilice k = 16,82 en la ecuación R = ekx. La concentración de alcohol en sangre x obedece

$$100 = e16.82x \qquad R \cdot ekx,\ R \cdot 100,\ k \cdot 16,82$$

$$16,82x = \text{en } 100 \qquad \text{Cambie a una declaración logarítmica.}$$

$$x = \frac{\text{en } 100}{16,82} \approx 0,27 \qquad \text{Solución para x.}$$

NOTA Un BAC del 0,30% provoca pérdida del conocimiento en la mayoría de las personas. j

Para una concentración de alcohol en sangre del 0,27%, el riesgo relativo R de sufrir un accidente es 100.

(d) Un riesgo relativo de 4 significa R = 4. Utilice k = 16,82 en la ecuación R = ekx. La concentración de alcohol en sangre x obedece

$$4 = e16.82x$$

$$16,82x = \text{en } 4$$

$$x = \frac{\text{en } 4}{16,82} \approx 0,082$$

NOTA En la mayoría de los estados de EE. UU., el contenido de alcohol en sangre al que se aplica una citación por DUI dado es 0,08%. j

Un conductor con un BAC de 0,082% o más debe ser arrestado y acusado de DUI.

Machine Translated by Google

RESUMEN

Propiedades de la función logarítmica

f1x2 = log x, a 7 1
1y = loga x si y sólo si x = ay2

- Dominio: el intervalo 10, q 2; Rango: el intervalo 1 - q, q 2
- intercepción x: 1; intercepción y: ninguna; asíntota vertical: x = 0 1y-axis2; creciente; cara a cara
- La gráfica de f es suave y continua. Contiene el puntos ¢ $\frac{1}{a}$, - 1≤, 11, 02 y 1a, 12.
- Consulte la Figura 39(a) para ver un gráfico típico.

f1x2 = log x, 0 6 a 6 1
1y = loga x si y sólo si x = ay2

- Dominio: el intervalo 10, q 2; Rango: el intervalo 1 - q, q 2
- intercepción x: 1; intercepción y: ninguna; asíntota vertical: x = 0 1y-axis2; decreciente; cara a cara
- La gráfica de f es suave y continua. Contiene el puntos 1a, 12, 11, 02 y ¢ 1 $\frac{1}{a}$, - 1≤.
- Consulte la Figura 39(b) para ver un gráfico típico.

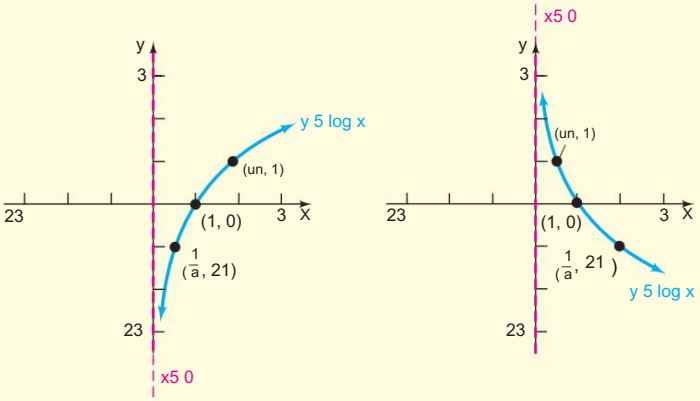


Figura 39 (a) un . 1 (b) 0 , a , 1

5.4 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Resuelve cada desigualdad:
   (a) 3x - 7 … 8 - 2x (págs. A76–A79)
   (b) x2 - x - 6 7 0 (págs. 201-203)

2. Resuelve la desigualdad: $\frac{x - 1}{x + 4}$ 7 0 (págs. 262-264)

Conceptos y vocabulario

3. El dominio de la función logarítmica f1x2 = loga x es _____.

4. La gráfica de cada función logarítmica f1x2 = loga x, donde a 7 0 y a · 1, contiene los tres puntos: y _____, _____, _____.

5. Si la gráfica de una función logarítmica f1x2 = loga x, donde a 7 0 y a · 1, es creciente, entonces su base es mayor que _____.

6. Verdadero o Falso Si y = loga x, entonces y = ax .

7. Verdadero o Falso La gráfica de f1x2 = loga x, donde a 7 0 y a · 1, tiene una intersección con el eje x igual a 1 y ninguna intersección con el eje y.

8. Opción múltiple Seleccione la respuesta que complete la declaración: y = ln x si y sólo si (a) x = _____.
   ey (b) y = e (c) x = 10y (d) y = 10x

9. Opción múltiple El dominio de f1x2 = log3 1x + 22 es
   (a) 1 - q, q 2 (b) 12, q 2 (c) 1 - 2, q 2 (d) 10, q 2

10. Registro de opción múltiple3 81 es igual
    (a) 9 (b) 4 (c) 2 (d) 3

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 18, cambie cada enunciado exponencial por un enunciado equivalente que incluya un logaritmo.

11. 9 = 32
12. 16 = 42
13. a3 = 2,1
14. a2 = 1,6
15. 3x = 4,6
16. 2x = 7,2
17. e2,2 = M
18. ex = 8

En los problemas 19 a 26, cambie cada enunciado logarítmico por un enunciado equivalente que incluya un exponente.

19. log2 8 = 3
20. log3 un $\frac{1}{9}$ segundo = - 2
21. log 4 = 2
22. loga 3 = 6
23. log2 6 = x
24. log3 2 = x
25. En x = 4
26. en 4 = x

En los problemas 27 a 38, encuentre el valor exacto de cada logaritmo sin usar una calculadora.

27. registro2 1
28. iniciar sesión8 8
29. log3 un $\frac{1}{\text{segundo}}$
30. log7 49
31. registro1>3 9
32. registro1>5 125
33. registro 23 100
34. registro $\sqrt{210}$
35. registro13 9
36. registro12 4
37. En e3
38. ln1e $^{-}$

En los problemas 39 a 50, encuentre el dominio de cada función.

39. g1x2 = ln1x - 12
40. f1x2 = ln1x - 32
41. F1x2 = log2x2
42. H1x2 = log5 x3
43. g1x2 = 8 + 5 ln12x + 32
44. f1x2 = 3 - 2 log4 ax $\sqrt{2}$ - 5b
45. g1x2 = lna 1 $\sqrt{x - 5}$ b
46. f1x2 = lna 1 $\sqrt{x + 1 \text{ segundo}}$
47. g1x2 = log5 a x + 1 $\sqrt{x}$ b
48. h1x2 = log3 ax $\sqrt{x - 1 \text{ segundo}}$
49. g1x2 = ln x $\frac{1}{\sqrt{}}$
50. f1x2 = 2lnx $\sqrt{}$

En los problemas 51 a 58, use una calculadora para evaluar cada expresión. Redondea tu respuesta a tres decimales.

51. $\frac{\text{en } 5}{3}$
52. en $\frac{5}{3}$
53. $\frac{\text{en } \frac{2}{3}}{-0,1}$
54. $\frac{\text{en } \frac{10}{3}}{0,04}$
55. $\frac{\text{registro } 15 + \text{registro } 20}{\text{En } 15 + \text{En } 20}$
56. $\frac{\text{En } 4 + \text{En } 2}{\text{registro } 4 + \text{registro } 2}$
57. $\frac{3 \text{ registro } 80 - \text{en } 5}{\text{iniciar sesión } 5 + \text{en } 20}$
58. $\frac{2 \text{ en } 5 + \text{registro } 50}{\text{iniciar sesión } 4 - \text{en } 2}$

59. Encuentra a tal que la gráfica de f1x2 = loga x contenga el punto a 1 $\sqrt{2}$, - 4b.

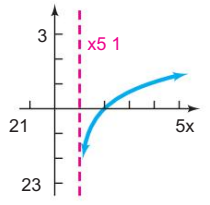
60. Encuentra a tal que la gráfica de f1x2 = logax contenga el punto 12, 22.

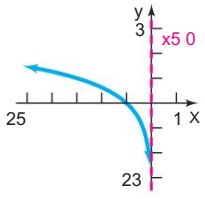
En los problemas 61 a 64, grafica cada función y su inversa en el mismo conjunto de ejes.

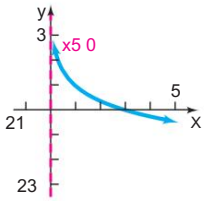
61. f1x2 = 3x ; F^{-1} 1x2 = log3x
62. f1x2 = 4x ; F^{-1} 1x2 = log4x
63. f1x2 = a 1 $\sqrt{3}$ b x ; F^{-1} 1x2 = log1> 3x
64. f1x2 = a 1 $\sqrt{2}$ b x ; F^{-1} 1x2 = log1> 2x

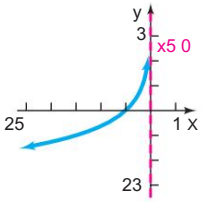
En los problemas 65 a 72 se da la gráfica de una función logarítmica. Relaciona cada gráfica con una de las siguientes funciones:

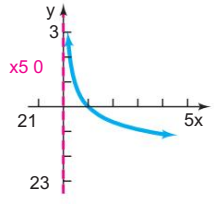
(A) y = log3x
(B) y = log3 1 - x2
(C) y = - log3 x
(D) y = - log3 1 - x2
(E) y = log3 x - 1
(F) y = log3 1x - 12
(G) y = log3 11 - x2
(H) y = 1 - log3 x

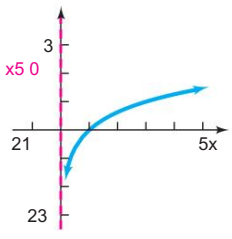
65.


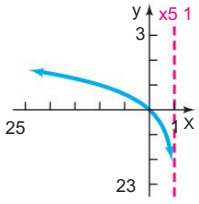
66.


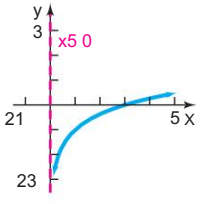
67.


68.


69.


70.


71.


72.


Machine Translated by Google

En los problemas 73 a 88, utilice la función dada f.

(a) Encuentre el dominio de f. (b) Gráfica f. (c) A partir de la gráfica, determine el rango y las asíntotas de f.
(d) Encuentre f^{-1}, la inversa de f. (e) Encuentre el dominio y el rango de f^{-1} (f) Grafique f^{-1}. 73. f1x2 = ln1x + 42

74. f1x2 = ln1x - 32 75. f1x2 = - ln1 - x2 76. f1x2 = 2 + ln x

77. f1x2 = - 2 en 1x + 12 1 78. f1x2 = ln12x2 - 3 79. f1x2 = 2 $^{\frac{1}{\text{iniciar sesión x - 5}}}$ 80. f1x2 = log1x - 42 + 2

81. f1x2 = log12x2 82. f1x2 = log1 - 2x2 83. f1x2 = 2 - log3 1x + 12 84. f1x2 = 3 + log3 1x + 22

85. f1x2 = 3ex + 2 86. f1x2 = ex+2 - 3 87. f1x2 = - 3x+1 88. f1x2 = 2x>3 + 4

En los problemas 89 a 112, resuelve cada ecuación.

89. log3 x = 2 90. log5 x = 3 91. log3 13x - 22 = 2 92. log2 13x + 42 = 5

93. logx a $\frac{1}{8}$ b = 3 94. logx 16 = 2 95. En e-2x = 8 96. En ex = 5

97. log5 625 = x 98. log4 64 = x 99. log6 36 = 5x + 3 100. log3 243 = 2x + 1

101. e3x = 10 102. e-2x = 3 $\frac{1}{}$ 103. e-2x+1 = 13 104. e2x+5 = 8

105. log5 1x2 + x + 42 = 2 109. 106. log7 1x2 + 42 = 2 110. 107. log3 3x = - 1 108. log2 8x = - 6

8 # 102x-7 = 3 5e0.2x = 7 111. 4ex+1 = 5 112. 2 # 102-x = 5

113. Supongamos que F1x2 = log2 1x + 12 - 3.

(a) ¿ Cuál es el dominio de F?
(b) ¿ Qué es F172? ¿Qué punto está en la gráfica de F?
(c) Si F1x2 = - 1, ¿cuál es x? ¿Qué punto está en la gráfica?
¿ apagado ?
(d) ¿ Cuál es el cero de F?

114. Supongamos que G1x2 = log3 12x + 12 - 2.

(a) ¿ Cuál es el dominio de G?
(b) ¿ Qué es G1402? ¿Qué punto está en la gráfica de G?
(c) Si G1x2 = 3, ¿cuál es x? ¿Qué punto está en la gráfica?
de G?
(d) ¿ Cuál es el cero de G?

Práctica mixta En los problemas 115 a 118, grafica cada función. Con base en la gráfica, indica el dominio y el rango, y encuentra las intersecciones.

115. f1x2 = e ln1 -x2 1 1 7 si x ... - 1
x2 si - 1 6 x 6 0
si 0 6 x 6 1
f1x2 = e ln x - ln x si x Ú 1

116. f1x2 = e ln1 -x2 si x 6 0 si x 7 0
x2

118. f1x2 = e - ln x si 0 6 x 6 1 si x Ú 1

Aplicaciones y extensiones

119. Química El pH de una solución química está dado por la fórmula

$$pH = - \log_{10} [H^+]$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Los valores de pH varían de 0 (ácido) a 14 (alcalino).

(a) ¿Cuál es el pH de una solución para la cual $[H^+]$ es 0,1?
(b) ¿Cuál es el pH de una solución para la cual $[H^+]$ es 0,01?
(c) ¿Cuál es el pH de una solución para la cual $[H^+]$ es 0.001?
(d) ¿Qué sucede con el pH a medida que disminuye la concentración de iones de hidrógeno?
(e) Determine la concentración de iones hidrógeno de una naranja 1pH = 3,52.
(f) Determine la concentración de iones de hidrógeno en sangre humana 1pH = 7,42.

120. Índice de diversidad El índice de diversidad de Shannon es una medida de la diversidad de una población. El índice de diversidad viene dado por la fórmula

$$H = - (p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2 + \cdots + p_n \log p_n)$$

donde p1 es la proporción de la población de la especie 1, p2 es la proporción de la población de la especie 2, y así sucesivamente. En este problema, la población es gente de Estados Unidos y la especie es raza.

(a) Según la Oficina del Censo de Estados Unidos, la distribución de La carrera en los Estados Unidos en 2015 fue:

Carrera	Proporción
Blanco	0,617
Negro o afroamericano	0,124
Indio americano y nativo de Alaska	0.007
asiático	0.053
Nativo de Hawái y otras islas del Pacífico	0.002
Hispano	0,177
Dos o mas carreras	0.020

Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

Calcule el índice de diversidad de Estados Unidos en 2015.

(b) El valor más grande del índice de diversidad viene dado por Hmax = log1S2, donde S es el número de categorías de raza. Calcule Hmáx.

(c) La relación de uniformidad viene dada por $EH = \frac{H}{H_{max}}$,

donde 0… EH … 1. Si EH = 1, hay total uniformidad.
Calcule la razón de uniformidad para Estados Unidos.

(d) Obtenga la distribución racial de los Estados Unidos en 2010 de la Oficina del Censo. Calcule el índice de diversidad de Shannon. ¿Estados Unidos se está volviendo más diverso? ¿Por qué?

Machine Translated by Google

121. Presión atmosférica La presión atmosférica p en un globo o un avión disminuye al aumentar la altura. Esta presión, medida en milímetros de mercurio, está relacionada con la altura h (en kilómetros) sobre el nivel del mar mediante la fórmula

p = 760e-0,145h .

(a) Encuentre la altura de una aeronave si la presión atmosférica son 389 milímetros de mercurio.

(b) Encuentre la altura de una montaña si la presión atmosférica es de 517 milímetros de mercurio.

122. Curación de heridas La curación normal de heridas se puede modelar mediante una función exponencial. Si A0 representa el área original de la herida y si A es igual al área de la herida, entonces la función

A1n2 = A0e-0,35n

Describe el área de una herida después de n días de una lesión cuando no hay infección presente que retrase la curación. Supongamos que una herida tuviera inicialmente un área de 100 milímetros cuadrados.

(a) Si se está curando, ¿después de cuántos días la herida tendrá la mitad de su tamaño original?

(b) ¿Cuánto tiempo pasará antes de que la herida alcance el 10% de su tamaño original?

123. Probabilidad exponencial Entre las 5:00 pm y las 6:00 pm, los autos llegan a Jiffy Lube a razón de 9 autos por hora (0.15 autos por minuto). La siguiente fórmula de probabilidad se puede utilizar para determinar la probabilidad de que un automóvil llegue dentro de t minutos de las 5:00 p.m.

F1t2 = 1 - e-0,15t

(a) Determine cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad alcance el 50%.

(b) Determine cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad alcance el 80%.

124. Probabilidad exponencial Entre las 12:00 pm y la 1:00 pm, los automóviles llegan al autoservicio de un banco a razón de 6 automóviles por hora (0,1 automóviles por minuto). La siguiente fórmula estadística se puede utilizar para determinar la probabilidad de que un automóvil llegue dentro de los t minutos posteriores a las 12:00 p.m.

F1t2 = 1 - e-0.1t

(a) Determine cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad alcance el 40%.

(b) Determine cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad alcance el 70%.

(c) ¿Es posible que la probabilidad sea igual al 100%? Explicar.

125. Drogas Medicación La fórmula

D = 25e-0,4h

se puede utilizar para encontrar la cantidad de miligramos D de un determinado medicamento que se encuentra en el torrente sanguíneo de un paciente h horas después de que se administró el medicamento. Cuando la cantidad de miligramos llega a 4, el medicamento debe administrarse nuevamente. ¿Cuál es el tiempo entre inyecciones?

126. Difusión de rumores Un modelo para el número N de personas en una comunidad universitaria que han escuchado cierto rumor es

N1d2 = P11 - e-0,15d2

donde P es la población total de la comunidad y d es el número de días que han transcurrido desde que comenzó el rumor. En una comunidad de 1000 estudiantes, ¿cuántos días pasarán antes de que 450 estudiantes escuchen el rumor?

127. Corriente en un circuito RL La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) después del tiempo t (en segundos) en un circuito RL simple que consta de una resistencia R (en ohmios), una inductancia L (en henrys) y una fuerza electromotriz E (en voltios) es

$$yo = \frac{mi}{R}\ 31 - e\text{-}1R>L2t\ 4$$

Si E = 12 voltios, R = 10 ohmios y L = 5 henrios, ¿cuánto tiempo se tarda en obtener una corriente de 0,5 amperios? ¿De 1,0 amperios?
Grafica la ecuación.

128. Curva de aprendizaje Los psicólogos a veces utilizan la función

L1t2 = A11 - e-kt2

para medir la cantidad L aprendida en el momento t. Aquí A representa la cantidad que se debe aprender y el número k mide la tasa de aprendizaje. Supongamos que un estudiante tiene una cantidad A de 200 palabras de vocabulario para aprender. Un psicólogo determina que el alumno ha aprendido 20 palabras de vocabulario después de 5 minutos.

(a) Determine la tasa de aprendizaje k.

(b) ¿ Aproximadamente cuántas palabras habrá aprendido el estudiante después de 10 minutos?

(c) ¿Después de 15 minutos?

(d) ¿ Cuánto tiempo le toma al estudiante aprender 180 palabras?

Volumen del sonido Los problemas 129 a 132 utilizan la siguiente discusión: El volumen L(x), medido en decibeles (dB), de un sonido donde I0 = 10-12 vatios por metro de intensidad x, medida en vatios por metro cuadrado, se define como $L1x2 = 10 \log \frac{x}{I0}$, cuadrado

Es el sonido menos intenso que el oído humano puede detectar. Determine el volumen, en decibeles, de cada uno de los siguientes sonidos.

129. Un sonido con intensidad de x = 10-11 vatios por cuadrado metro.

130. Música rock amplificada: intensidad de 10-1 vatio por cuadrado metro.

131. Un sonido con intensidad de x = 10-1 vatio por metro cuadrado.

132. Camión diésel que viaja a 40 millas por hora a 50 pies de distancia: intensidad 10 veces mayor que la de un automóvil de pasajeros que viaja a 50 millas por hora a 50 pies de distancia, cuyo volumen es de 70 decibeles.

Machine Translated by Google

Los problemas 133 y 134 de la escala de Richter utilizan la siguiente discusión: La escala de Richter es una forma de convertir lecturas sismográficas en números que proporcionan una referencia fácil para medir la magnitud M de un terremoto. Todos los terremotos se comparan con un terremoto de nivel cero cuya lectura sismográfica mide 0,001 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro. Un terremoto cuya lectura sismográfica mide x milímetros tiene magnitud M1x2, dada por

$$M1x2 = \log\not\subset x \quad \overline{\quad} \quad x0 \leq$$

donde x0 = 10-3 es la lectura de un terremoto de nivel cero a la misma distancia de su epicentro. En los problemas 133 y 134, determine la magnitud de cada terremoto.

133. Magnitud de un Terremoto Un terremoto cuya lectura sismográfica mide x milímetros tiene magnitud M(x), dada por

$$M1x2 = \log\not\subset x \quad \overline{\quad} \quad x0 \leq$$

donde x0 = 10-3 es la lectura de un terremoto de nivel cero a la misma distancia de su epicentro. Determine la magnitud de un terremoto con una lectura sismográfica de 122.899 milímetros a 100 kilómetros del centro.

134. Magnitud de un terremoto en San Francisco en 1906: lectura sismográfica de 50.119 milímetros a 100 kilómetros del centro

135. El alcohol y la conducción La concentración de alcohol en el torrente sanguíneo de una persona se puede medir. Supongamos que el riesgo relativo R de tener un accidente mientras se conduce un automóvil se puede modelar mediante una ecuación de la forma

$$R = ekx$$

donde x es el porcentaje de concentración de alcohol en el torrente sanguíneo y k es una constante.

(a) Suponga que una concentración de alcohol en el torrente sanguíneo del 0,03 por ciento da como resultado un riesgo relativo de accidente de 1,4. Encuentra la constante k en la ecuación.

(b) Usando este valor de k, ¿cuál es el riesgo relativo si el ¿La concentración es del 0,17 por ciento?

(c) Utilizando el mismo valor de k, ¿qué concentración de alcohol corresponde a un riesgo relativo de 100?

(d) Si la ley afirma que cualquier persona con un riesgo relativo de sufrir un accidente de 5 o más no debería tener privilegios de conducir, ¿a qué concentración de alcohol en el torrente sanguíneo se debería arrestar a un conductor y acusarlo de DUI?

(e) Compare esta situación con la del ejemplo 10. Si fuera legislador, ¿qué situación apoyaría? Da tus razones.

136. El problema del matrimonio Existe un infame problema matemático que intenta cuantificar el número de parejas potenciales con las que uno debe salir antes de elegir su "verdadero amor". La función

$$L1x2 = - x \ln x$$

representa la probabilidad de encontrar la pareja ideal después de rechazar la primera proporción x de parejas potenciales. Por ejemplo, si rechazas las primeras 20, = 0,20 de las personas con las que sales, la probabilidad de encontrar la pareja ideal es L10,22 ≈ 0,322. Entonces, si desea que la probabilidad de encontrar la pareja ideal sea mayor que 0,332 y solo está dispuesto a salir con hasta 20 personas, debe rechazar los primeros 0,21202 = 4 personas antes de intentar decidir cuál es la pareja ideal. Presumiblemente, estás utilizando esos primeros 4 individuos para ayudarte a decidir qué rasgos valoras en una pareja.

(a) Determine e interprete L10.12.

(b) Determine e interprete L10.62.

(c) ¿ Cuál es el dominio de L?

(d) Grafique L = L1x2 sobre el dominio.

(e) A juzgar con base en el enfoque sugerido por el modelo, ¿cuál es el valor de x que maximiza L? ¿Cuál es la mayor probabilidad de encontrar la pareja ideal?

137. Reto Problema Resolver: log6 1log2 x2 = 1

138. Reto Problema Resolver: log2 3log4 1log3 x24 = 0

139. Reto Problema Resolver: log3 92x+3 = x2 + 1

Explicar conceptos: discusión y escritura

140. ¿Existe alguna función de la forma y = xa, 0 6 a 6 1, que aumente más lentamente que una función logarítmica cuya base sea mayor que 1? Explicar.

141. En la definición de la función logarítmica, la base a no es permitido ser igual a 1. ¿Por qué?

142. Pensamiento crítico Al comprar un automóvil nuevo, una consideración podría ser qué tan bien se mantiene el precio del automóvil con el tiempo. Las diferentes marcas de automóviles tienen diferentes tasas de depreciación. A continuación se proporciona una forma de calcular la tasa de depreciación de un automóvil. Supongamos que los precios actuales de un determinado automóvil son los que se muestran en la tabla.

	Edad en años					
Nuevo	1	2	3	4	5	
$38,000	$36,600	$32,400	$28,750	$25,400	$21,200	

Utilice la fórmula Nuevo = Antiguo1eRt2 para encontrar R, la tasa de depreciación anual, para un tiempo específico t. ¿Cuándo podría ser el mejor momento para cambiar el coche? Consulte el libro NADA ("azul") y compare dos modelos similares que le interesen. ¿Cuál tiene la mejor tasa de depreciación?

Conserve su conocimiento

Los problemas 143 a 152 se basan en el material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

143. Encuentra los ceros reales de g1x2 = 4x4 - 37x2 + 9. ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de g?

144. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = 9x de $\frac{1}{2}$ a 1.

Machine Translated by Google

145. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que el la función f1x2 = 4x3 - 2x2 - 7 tiene un cero real en el intervalo 31, 24.

146. Una función polinómica compleja f de grado 4 con coeficientes reales tiene los ceros - 1, 2 y 3 - i. Encuentre los ceros restantes de f. Luego encuentra una función polinómica que tenga ceros.

147. Resuelve: 2x2 - 7x - 1 = 0

148. Encuentra una ecuación de la recta que contiene los puntos 10, 12 y 18, - 42. Escribe la ecuación en forma general.

149. Resuelve: · 2x + 17· = 45

150. Ciencias Forenses La relación entre la altura H de una mujer adulta y la longitud x de su tibia, en centímetros, se estima mediante el modelo lineal H1x2 = 2,90x + 61,53. Si los restos esqueléticos incompletos de una mujer adulta incluyen una tibia que mide 30,9 centímetros, calcule la altura de la mujer. Redondea a la décima más cercana.

151. Para f1x2 = x3 , encontrar $\frac{f1x2 - f122}{x - 2}$.

152. Factorizar completamente:

1x + 52 4 # 71x - 32 6 + 1x - 32 7 # 41x + 52 3

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. (a) x … 3 (b) x 6 - 2 o x 7 3 2. x 6 - 4 o x 7 1

5.5 Propiedades de los logaritmos

OBJETIVOS 1 Trabajar con las propiedades de los logaritmos (p. 345)

2 Escribe una expresión logarítmica como suma o diferencia de Logaritmos (pág. 347)

3 Escribe una expresión logarítmica como un logaritmo único (p. 348)

4 Evaluar logaritmos cuya base no es ni 10 ni e (p. 349)

1 Trabajar con las propiedades de los logaritmos

Los logaritmos tienen algunas propiedades muy útiles que pueden derivarse directamente de la definición y las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 1 Estableciendo propiedades de logaritmos

(a) Demuestre que loga 1 = 0. (b) Demuestre que loga a = 1.

Solución (a) Este hecho se estableció cuando graficamos y = loga x (consulte la Figura 30 en la página 334).

Para mostrar el resultado algebraicamente, sea y = loga 1. Entonces

y = log 1	
sí = 1	Cambiar a forma exponencial.
sí = a0	a0 · 1 ya que a + 0, a 3 1
y = 0	Igualar exponentes.
loga 1 = 0	y · loga 1

(b) Sea y = loga a. Entonces

y = log a	
sí = un	Cambiar a forma exponencial.
sí = a1	un · a1
y = 1	Igualar exponentes.
log a = 1	y · log a

Para resumir:

loga 1 = 0 loga a = 1

Machine Translated by Google

TEOREMA Propiedades de los logaritmos

En estas propiedades, M y a son números reales positivos, a · 1 y r es cualquier número real.

- El número loga M es el exponente al que se debe elevar a para obtener M. Eso es,

$$\text{aloga } M = M \qquad (1)$$

- El logaritmo con base a de a elevado a una potencia es igual a esa potencia. Eso es,

$$\log ar = r \qquad (2)$$

La prueba utiliza el hecho de que y = ax e y = loga x son funciones inversas.

Prueba de propiedad (1) Para funciones inversas,

$$f1f^{-1}1x22 = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f^{-1}$$

Utilice $f1x2 = ax$ y $f^{-1}1x2 = \text{loga } x$ para encontrar

$$f1f^{-1}1x22 = \text{áloga } x = x \text{ para } x 7 0$$

Ahora sea x = M para obtener aloga M = M, donde M 7 0. ■

Prueba de propiedad (2) Para funciones inversas,

$$F^{-1}1f1x22 = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Utilice $f1x2 = ax$ y $f^{-1}1x2 = \text{loga } x$ para encontrar

$$F^{-1}1f1x22 = \text{loga } ax = x \text{ para todos los números reales } x$$

Ahora sea x = r para obtener loga ar = r, donde r es cualquier número real. ■

EJEMPLO 2 Usando propiedades de los logaritmos (1) y (2)

2log2p = p log0,2 0,2 - 12 (a) $\overline{\ } = - 22$ (b) $\overline{\ }$ (c) ln ekt = kt

Ahora resuelve el problema 1 5

A continuación se dan otras propiedades útiles de los logaritmos.

TEOREMA Propiedades de los logaritmos

En estas propiedades, M, N y a son números reales positivos, a · 1 y r es cualquier número real.

El registro de un producto es igual a la suma de los registros

$$\text{loga } 1MN2 = \text{loga } M + \text{loga } N \qquad (3)$$

El registro de un cociente es igual a la diferencia de los registros

$$M \quad \overline{N\ b} = \text{loga } M - \text{loga } N \text{ loga } a \qquad (4)$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto de la potencia y el logaritmo

$$\text{loga Señor} = r \text{ loga } M \qquad (5)$$

$$ar = er\ _^{\text{en}} \qquad (6)$$

Machine Translated by Google

Probamos las propiedades (3), (5) y (6) y dejamos la prueba de la propiedad (4) como una ejercicio (ver Problema 109).

Prueba de propiedad (3) Sea A = loga M y sea B = loga N. Estas expresiones son equivalentes a las expresiones exponenciales

$$aA = M \text{ y } aB = N$$

Ahora

$$\begin{aligned} \log a\,1MN2 = \log a\,1aAaB2 &= \log a\,aA+B && \text{Ley de exponentes} \\ &= A + B && \text{Propiedad (2) de los logaritmos} \\ &= \log a\,M + \log a\,N \end{aligned}$$

■

Prueba de propiedad (5) Sea A = loga M. Esta expresión es equivalente a

$$aA = M$$

Ahora

$$\begin{aligned} \log a\,Mr = \log a\,1aA2\,r = \log a\,arA && && \text{Ley de exponentes} \\ &= ra && && \text{Propiedad (2) de los logaritmos} \\ &= r \log a\,M \end{aligned}$$

■

Prueba de propiedad (6) La propiedad (1), con a = e, da

$$e^{\ln m} = METRO$$

Ahora sea M = ar y use la propiedad (5).

$$mi^{\ln ar} = e^{r \ln a} = un^{r}$$

■

Ahora problema de trabajo 1 9

2 Escribir una expresión logarítmica como suma o diferencia de logaritmos

Los logaritmos se pueden utilizar para transformar productos en sumas, cocientes en diferencias y potencias en factores. Estas transformaciones son útiles en determinados problemas de cálculo.

EJEMPLO 3 Escribir una expresión logarítmica como suma de logaritmos

Escribe $\log a\,1x2\sqrt{x2 + 12}$, x 7 0, como suma de logaritmos. Expresa todas las potencias como factores.

Solución

$$\begin{aligned} \log a\,1x2\sqrt{x2 + 12} &= \log a\,x + \log a\,2\sqrt{x2 + 1} && \log a\,1M \# N2 \cdot \log a\,M \cdot \log a\,N \\ &= \log x + \log 1x2 + 12^{1>2} \\ &= \log x + \frac{1}{2}\log 1x2 + 12 && \log a\,Señor \cdot r \log a\,m \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Escribir una expresión logarítmica como diferencia de logaritmos

Escribir

$$\ln\frac{x2}{\sqrt[3]{1x - 12}} \qquad x7\ 1$$

como diferencia de logaritmos. Expresa todas las potencias como factores.

Solución

$$\ln\frac{x2}{\sqrt[3]{1x - 12}} = \ln x2 - \ln 1x - 12c^{1/3} = 2\ln x - \frac{1}{3}\ln 1x - 12$$

$$\log a \frac{M}{N} \cdot \log a\,M \cdot \log a\,N \qquad \log a\,Señor \cdot r \log a\,M$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 **Escribir una expresión logarítmica como suma y diferencia de logaritmos**

Escribir

$$\log_a \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x^3 \sqrt[4]{x + 12}} \quad x > 0$$

como suma y diferencia de logaritmos. Expresa todas las potencias como factores.

Solución

$$\log_a \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x^3 \sqrt[4]{x + 12}} = \log_a \sqrt{2x^2 + 1} - \log_a x^3 \sqrt[4]{x + 12}$$ Propiedad (4)

$$= \log_a \sqrt{2x^2 + 1} - \log_a x^3 - \log_a \sqrt[4]{x + 12}$$ Propiedad (3)

$$= \log_a (2x^2 + 1)^{1/2} - \log_a x^3 - \log_a (x + 12)^{1/4}$$

$$= \frac{1}{2}\log_a (2x^2 + 12) - 3\log_a x - \frac{1}{4}\log_a (x + 12)$$ Propiedad (5)

ADVERTENCIA Al utilizar las propiedades (3) a (5), tenga cuidado con los valores que puede asumir la variable. Por ejemplo, el dominio de la variable para $\log_a x$ es $x > 0$ y para $\log_a (x - 12)$ es $x > 1$. Si se suman estas expresiones, el dominio es $x > 1$. Es decir, $\log_a x + \log_a (x - 12) = \log_a x(x - 12)$ es cierto sólo para $x > 1$.

Ahora resuelve el problema 51

3 Escribir una expresión logarítmica como un logaritmo único

Otro uso de las propiedades (3) a (5) es escribir sumas y/o diferencias de logaritmos con la misma base que un logaritmo único. Esta habilidad es necesaria para resolver ciertas ecuaciones logarítmicas que se analizan en la siguiente sección.

EJEMPLO 6 **Escribir expresiones como un logaritmo único**

Escribe cada uno de los siguientes como un solo logaritmo.

(a) $\log_a 7 + 4\log_a 3$ (b) $\frac{2}{3}\ln 8 - \ln(x^2 - 1)$

(c) $\log_a x + \log_a 9 + \log_a (x^2 + 1) - \log_a 5$

Solución (a) $\log_a 7 + 4\log_a 3 = \log_a 7 + \log_a 3^4$ $r\log_a M = \log_a M^r$

$= \log 7 + \log 81$

$= \log 7 \cdot 81$ $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

$= \log 567$

(b) $\frac{2}{3}\ln 8 - \ln(x^2 - 1) = \ln 8^{2/3} - \ln(x^2 - 1)$ $r\log_a M = \log_a M^r$

$= \ln 4 - \ln(x^2 - 1)$ $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

$= \ln \frac{4}{x^2 - 1}$ $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

(c) $\log_a x + \log_a 9 + \log_a (x^2 + 1) - \log_a 5 = \log_a 9x(x^2 + 1) - \log_a 5$

$= \log_a 9x(x^2 + 1) \cdot 4 - \log_a 5$

$= \log_a \frac{9x(x^2 + 1)}{5}$

Machine Translated by Google

ADVERTENCIA Un error común que cometen algunos estudiantes es expresar el logaritmo de una suma como suma de logaritmos.

loga 1M + N2 no es igual a loga M + loga N

Enunciado correcto loga 1MN2 = loga M + loga N Propiedad (3)

Otro error común es expresar la diferencia de logaritmos como cociente de logaritmos.

loga M - loga N no es igual a $\frac{\text{loga m}}{\text{loga sustantivo, masculino}}$

Declaración correcta loga M - loga N = logaa M $\frac{}{\text{SUST.}}$ Propiedad (4)

Un tercer error común es expresar un logaritmo elevado a una potencia como el producto de la potencia por el logaritmo.

1loga M2r no es igual a r loga M

Enunciado correcto loga Mr = r loga M Propiedad (5)

Ahora resuelve los problemas 5 7 y 6 3

Otras dos propiedades importantes de los logaritmos son consecuencias del hecho de que la función logarítmica y = loga x es una función uno a uno.

TEOREMA Propiedades de los logaritmos

En estas propiedades, M, N y a son números reales positivos, a · 1.

- Si M = N, entonces loga M = loga N. (7)
- Si loga M = loga N, entonces M = N. (8)

La propiedad (7) se utiliza de la siguiente manera: comenzando con la ecuación M = N, “tome la logaritmo de ambos lados” para obtener loga M = loga N.

Las propiedades (7) y (8) son útiles para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, un tema que se analiza en la siguiente sección.

4 Evaluar logaritmos cuya base no es ni 10 ni e

Los logaritmos con base 10 (logaritmos comunes) se utilizaban para facilitar los cálculos aritméticos antes del uso generalizado de las calculadoras. (Véase el artículo histórico al final de esta sección.) Los logaritmos naturales, es decir, los logaritmos cuya base es el número e, siguen siendo muy importantes porque surgen con frecuencia en el estudio de los fenómenos naturales.

Los logaritmos comunes suelen abreviarse escribiendo log, entendiéndose que la base es 10, al igual que los logaritmos naturales se abrevian con ln, entendiéndose que la base es e.

La mayoría de las calculadoras tienen teclas log y ln para calcular el logaritmo común y el logaritmo natural de un número, respectivamente. Veamos un ejemplo para ver cómo aproximar logaritmos que tienen una base distinta de 10 o e.

EJEMPLO 7 Aproximación de un logaritmo cuya base no es ni 10 ni e

Log27 aproximado . Redondea la respuesta a cuatro decimales.

Machine Translated by Google

Solución Recuerde, evaluar log2 7 significa responder la pregunta "¿2 elevado a qué exponente es igual a 7?" Sea y = log2 7. Entonces 2y = 7. Como 22 = 4 y 23 = 8, el valor de log2 7 está entre 2 y 3.

$$\begin{aligned} 2^{años} &= 7 \\ \ln 2^y &= \ln 7 && \text{Propiedad (7)} \\ y \ln 2 &= \ln 7 && \text{Propiedad (5)} \\ y &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Valor exacto} \\ y &\approx 2{,}8074 && \text{Valor aproximado redondeado a cuatro decimales} \end{aligned}$$

El ejemplo 7 muestra cómo aproximar un logaritmo cuya base es 2 cambiando a logaritmos que involucran la base e. En general, se utiliza la fórmula de cambio de base .

TEOREMA Fórmula de cambio de base

Si a · 1, b · 1 y M son números reales positivos, entonces

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} \qquad (9)$$

Prueba Sea y = loga M. Entonces

$$\begin{aligned} a^y &= M \\ \log a^y &= \log M && \text{Propiedad (7)} \\ y \log a &= \log M && \text{Propiedad (5)} \\ y &= \frac{\log M}{\log a} && \text{Resuelve para y.} \\ \log_a M &= \frac{\log M}{\log a} && y \cdot \log M \end{aligned}$$

■

NOTA TECNOLÓGICA ALGUNAS

Las calculadoras tienen funciones para evaluar logaritmos con bases distintas de 10 o e. Por ejemplo, la TI-84 Plus C tiene la función logBASE (en Math 7 Matemáticas 7 A: logBASE). Consulta el manual de usuario de tu calculadora. j

Porque la mayoría de las calculadoras tienen teclas para log e ln , en la práctica, el La fórmula de cambio de base utiliza b = 10 o b = e. Eso es,

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} \quad \text{y} \quad \log_a M = \frac{\ln M}{\ln a}$$

EJEMPLO 8 Usando la fórmula de cambio de base

Aproximado:

(a) log5 89 (b) $\log_{12} \sqrt{25}$

Redondea las respuestas a cuatro decimales.

Solución (a) $\log_5 89 = \frac{\log 89}{\log 5} \approx 2{,}7889$

o

$\log_5 89 = \frac{\ln 89}{\ln 5} \approx 2{,}7889$

(b) $\log_{12} \sqrt{25} = \frac{\log \sqrt{15}}{\log 12} \approx 2{,}3219$

o

$\log_{12} \sqrt{25} = \frac{\ln \sqrt{25}}{\ln 22} \approx 2{,}3219$

Ahora resuelve los problemas 2 3 y 7 1

Machine Translated by Google

COMENTARIO Podemos usar la fórmula de cambio de base para graficar funciones logarítmicas cuando ln x
la base es diferente de e o 10. Por ejemplo, para graficar y = log2 x, grafica y = $\frac{\ln x}{\ln 2}$
o y = $\frac{\text{iniciar sesión}x}{\log 2.}$ ■

Ahora problema de trabajo 7 9

RESUMEN

Propiedades de los logaritmos

En la lista siguiente, a, b, M, N y r son números reales. Además, a 7 0, a · 1, b 7 0, b · 1, M 7 0 y N 7 0.

Definición

y = loga x si y sólo si x = ay

Propiedades de los logaritmos

- loga 1 = 0
- log a = 1
- loga Señor = r loga M
- alogaM = M
- loga ar = r
- ar = er en un
- loga 1MN2 = loga M + loga N
- log a M N b = loga M - loga N
- Si M = N, entonces loga M = loga N.
- Si loga M = loga N, entonces M = N.

Fórmula de cambio de base

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log a}$$

Característica histórica

Juan Napier
(1550-1617)

Los logaritmos fueron inventados alrededor de 1590 por John Napier (1550-1617) y Joost Burgi (1552-1632), trabajando de forma independiente. Napier, cuya obra tuvo mayor influencia, era un lord escocés, un hombre reservado cuyos vecinos se inclinaban a creer que estaba aliado con el diablo. Su enfoque de los logaritmos era muy diferente al nuestro; se basó en la relación entre sucesiones aritméticas y geométricas, que se analiza en un capítulo posterior, y no en la relación de función inversa de logaritmos con exponenciales.

funciones (descritas en la Sección 5.4). Las tablas de Napier, publicadas en 1614, enumeraban lo que hoy se llamaría logaritmos naturales de senos y eran bastante difíciles de utilizar. Un profesor de Londres, Henry Briggs, se interesó por las tablas y visitó Napier. En sus conversaciones, desarrollaron la idea de los logaritmos comunes, que se publicaron en 1617. La importancia de esta herramienta para el cálculo se reconoció inmediatamente y en 1650 los logaritmos comunes se imprimían en lugares tan lejanos como China. Siguieron siendo una importante herramienta de cálculo hasta la llegada de las calculadoras portátiles de bajo costo alrededor de 1972, lo que ha disminuido su importancia calculada, pero no teórica.

Un efecto secundario de la invención de los logaritmos fue la popularización del sistema decimal de notación de números reales.

5.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. loga 1 = _____
2. aloga = _____
3. loga ar = _____
4. loga 1MN2 = _____ + _____
5. loga a M = _____ - _____
6. loga Señor = _____
7. Si log8 M = $\frac{\text{registro}5\ 7}{\log 5\ 8}$, entonces m = _____ .
8. Verdadero o Falso ln1x + 32 - ln12x2 = ln12x2 $\frac{\ln 1x + 32}{}$
9. Verdadero o Falso log2 13x4 2 = 4 log2 13x2
10. Verdadero o Falso loga 2 b = $\frac{\text{registro } 2}{\text{registro } 3}$
11. Opción múltiple Elige la expresión equivalente a 2x .

(a) e2x (b) ex (c) e 12. $\frac{\text{registro}2\ x}{(ex)^2}$ (d) e2 lnx

Opción múltiple Escribir loga x - loga y + 2 loga z como un solo logaritmo da como resultado ¿cuál de los siguientes?

(a) loga 1x - y + 2z2 (b) log a $\frac{xz2}{y}$ b

(c) loga a 2xzy b (d) loga ax yz2 b

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 28, utilice las propiedades de los logaritmos para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

13. log2 2-13

14. registro7 729

15. En e-4

16. En e12

17. eln 8

18. 9log9 13

19. log8 2 + log8 4

20. log6 9 + log6 4

21. log8 16 - log8 2

22. log5 35 - log5 7

23. registro2 6 # registro6 8

24. registro3 8 # registro8 9

25. 5log5 6+log57

26. 4log4 6-log45

27. elog 9 e2

28. elog 16 e2

En los problemas 29 a 36, suponga que ln 2 = a y ln 3 = b. Usa las propiedades de los logaritmos para escribir cada logaritmo en términos de a y b.

29. en $\frac{2}{3}$

30. en 6

31. en 0,5

32. en 1,5

33. En 27

34. en 8

35. En A $4^{\frac{2}{3}}$

36. En 25 6

En los problemas 37 a 56, escribe cada expresión como una suma y/o diferencia de logaritmos. Expresar potencias como factores.

37. registro3 $\frac{x}{9}$

38. log6 36x

39. log7 x5

40. log5 y6

41. en x ^{mi}

42. en(ex)

43. ln1xex 2

44. en $\frac{x}{ex}$

45. log2 un b2 b a 7 0, b 7 0

46. loga 1u2v3 2 u 7 0, v 7 0

47. ln1x21 + x2 2 x 7 0

48. ln1x2 21 - x2 0 6 x 6 1

49. log5 ¢ $\frac{23x2 + 1}{x2 - 1}$ ≤ x 7 1

50. log2 ¢ x3 - 3 ≤ x 7 3

51. logJ x1x + 22 2 R x 7 0

52. logJ x3 2x + 1 2 R x 7 2

53. lnJ 1x - 42x2 $^{2>3}$ x 7 4

54. lnJ x2 $\frac{1x + 22}{1x + 42}$ $^{1>3}$ 2R x 7 2

55. lnJ 5x2 $\frac{2 23 + 1x}{4x + 12}$ 2 R 0 6 x 6 1

56. $\frac{5x21 + 3x}{en\ 1x - 42^{3}}$ x 7 4

En los problemas 57 a 70, escribe cada expresión como un logaritmo único.

57. 3 log5 u + 4 log5 v

58. 2 log3 u - log3 v

59. log2 un b + log2 ¢ 1 x2 ≤

60. log3 1x - log3 x3

61. log1x2 + 3x + 22 - 2 log1x + 12

62. log4 1x2 - 12 - 5 log4 1x + 12

63. lna x x - 1 b + lna x + 1 x b - ln1x2 - 12 66. 8

64. log¢ x2 + 2x - 8 ≤ - log¢ x2 + 7x + 6x + 2 ≤ 65. 21 log3 1

^{3} x + log3 19x2 2 - log3 9

log2 23x - 2 - log2 a 4 x b + log2 4

67. $\frac{1}{3}$ log1x3 + 12 + $\frac{1}{2}$ log1x2 + 12

68. 2 log 15x3 2 - $\frac{1}{2}$ loga 12x + 32

69. 3 log5 13x + 12 - 2 log5 12x - 12 - log5 x

70. 2 log2 1x + 12 - log2 1x + 3) - log2 1x - 12

En los problemas 71 a 78, utilice la fórmula de cambio de base y una calculadora para evaluar cada logaritmo. Redondea tu respuesta a tres decimales.

71. log3 21

72. log5 18

73. log1>2

74. registro1>3 71

75. registro15 8

76. registro12 7

15 77. logp 22

78. logp e

En los problemas 79 a 84, represente gráficamente cada función utilizando una herramienta gráfica y la fórmula de cambio de base.

79. y = log4 x

80. y = log5 x

81. y = log4 1x - 32

82. y = log2 1x + 22

83. y = logx+2 1x - 22

84. y = logx-1 1x + 12

85. Práctica mixta Si f1x2 = log2 x, g1x2 = 2x, y h1x2 = 4x, encuentre:

(a) 1f g2 1x2. ¿ Cuál es el dominio de f g?
(b) 1g f2 1x2. ¿ Cuál es el dominio de g f ?
(c) 1f g2 132
(d) 1f h2 1x2. ¿ Cuál es el dominio de f h?
(e) 1f h2 182

86. Práctica mixta Si f1x2 = ln x, g1x2 = ex , y h1x2 = x2 , encontrar:

(a) 1f g2 1x2. ¿ Cuál es el dominio de f g?
(b) 1g f2 1x2. ¿ Cuál es el dominio de g f ?
(c) 1f g2 152
(d) 1f h2 1x2. ¿ Cuál es el dominio de f h?
(e) 1f h2 1e2

Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 87 a 96, exprese y como función de x. La constante C es un número positivo.

87. ln y = ln1x + C2 89.

ln y = 2 ln x - ln1x + 12 + ln C 91. ln y = - 2x

+ ln C 93. ln1y + 42 = 5x +

ln C

88. ln y = ln 8x + ln C

90. ln y = ln x + ln (x + 10) + ln C

92. ln y = 17x + ln C

94. ln (y - 8) = - 3x + ln C

95. 2 ln y = - ln x + $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ ln1x2 + 12 + lnC

96. 3 en y = 2 $\frac{1}{}$ en (2x + 5) - 3 $\frac{1}{}$ ln (x + 2) + ln C

97. Encuentre el valor de log2 3 # log3 4 # log4 5 # log5 6 # log6 7 # log7 8.

98. Encuentre el valor de log2 4 # log4 6 # log6 8.

99. Encuentre el valor de log15 16 # log16 17 #g# logn (n + 1) # logn+1 15. 100. Encuentre el valor de log2 2 # log2 4 # log2 8 # g # log2 2n .

101. Demuestre que loga 1x + 2x2 - 12 + loga 1x - 2x2 - 12 = 0.

102. Demuestre que loga 1 1x + 2x - 12 + loga 1 1x - 2x - 12 = 0.

103. Demuestre que ln11 + e2x 2 = 2x + ln11 + e-2x 2.

104. Cociente de diferencias Si f1x2 = loga x, demuestre que $\frac{f1x + h2 - f1x2}{h}$ = log a1 + $\frac{h}{x}$ $^{1>h}_{b}$, h · 0.

105. Si f1x2 = loga x, demuestre que - f1x2 = log1>a x.

106. Si f1x2 = loga x, demuestre que f1AB2 = f1A2 + f1B2.

107. Si f1x2 = loga x, demuestre que f a 1 x b = - f1x2.

108. Si f1x2 = loga x, demuestre que f1xa2 = af1x2.

109. Muestra que loga a M b = loga M - loga N, donde a, M y N son números reales positivos y a · 1.

110. Demuestre que loga a 1 Nb = - loga N, donde a y N son positivos números reales y a · 1.

111. Problema de desafío Demuestre que log2a m = loga m2 , donde a y m son números reales positivos y a · 1.

112. Problema de desafío Demuestre que loga b = $\frac{1}{\text{logb a}}$, donde un y b son números reales positivos, a · 1 y b · 1.

113. Problema de desafío Encuentre n:

log2 3 # log3 4 # log4 5 # · # iniciar sesión 1n + 12 = 10

114. Problema de desafío Demuestre que logan bm = $\frac{\text{metro}}{\text{norte}}$ loga b, donde a, b, myn son números reales positivos, a · 1, y b · 1.

Explicar conceptos: discusión y escritura

115. Grafique Y1 = log1x2 2 e Y2 = 2 log1x2 usando una utilidad gráfica. ¿Son equivalentes? ¿Qué podría explicar las diferencias entre las dos funciones?

116. Escribe un ejemplo que ilustre por qué 1loga x2 r · rloga x.

117. Escribe un ejemplo que ilustre por qué

log2 1x + y2 · log2 x + log2 y

118. ¿ 3log3 1-52 = - 5? ¿Por qué o por qué no?

Conserve su conocimiento

Los problemas 119 a 128 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

119. Utilice una herramienta gráfica para resolver x3 - 3x2 - 4x + 8 = 0. Redondea las respuestas a dos decimales.

120. Sin resolver, determine el carácter de la solución de la ecuación cuadrática 4x2 - 28x + 49 = 0 en el sistema de números complejos.

121. Encuentra los ceros reales de

f1x2 = 5x5 + 44x4 + 116x3 + 95x2 - 4x - 4

122. Grafica f1x2 = 22 - x usando las técnicas de desplazamiento, compresión o estiramiento y reflexión. Indique el dominio y el rango de f.

123. Encuentra el dominio de f1x2 = 223 - 5x - 4.

124. Resuelve: 4· x + 1· - 9 6 23

Encuentra el vértice de f1x2 = - 2 si la gráfica $\frac{1}{}$ x2 + 4x + 5, y determina 125. es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

126. Encuentra el centro y el radio del círculo.

x2 - 10x + y2 + 4y = 35

127. Encuentre la tasa de cambio promedio f1x2 = x3 de -1 a 3.

128. ¿La función f1x2 = par, impar o ninguna de las dos? $\frac{5x2 - 3x4}{23x}$

Machine Translated by Google

5.6 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Uso de una utilidad gráfica para resolver ecuaciones (Sección B.4, págs. B6–B8)
- Resolver ecuaciones cuadráticas (Sección A.6, págs. A47–A51)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 358.

OBJETIVOS 1 Resolver ecuaciones logarítmicas (p. 354)
2 Resolver ecuaciones exponenciales (p. 356)
3 Resuelva ecuaciones logarítmicas y exponenciales mediante una gráfica Utilidad (pág. 357)

1 Resolver ecuaciones logarítmicas

En la sección 5.4, resolvimos ecuaciones logarítmicas cambiando una expresión logarítmica a una expresión exponencial. Es decir, utilizamos la definición de logaritmo:

y = loga x si y sólo si x = ay a 7 0 a · 1

Por ejemplo, para resolver la ecuación log2 11 - 2x2 = 3, escribe la ecuación logarítmica como una ecuación exponencial equivalente 1 - 2x = 23 y resuelve para x. log2 11

- 2x2 = 3 1 - 2x = 23 Cambiar a forma exponencial.

- 2x = 7 Simplificar.

$x = -\frac{7}{2}$ Resolver.

Deberías comprobar esta solución por ti mismo.

Para la mayoría de las ecuaciones logarítmicas, se requiere cierta manipulación de la ecuación (generalmente usando propiedades de los logaritmos) para obtener una solución. Además, para evitar soluciones extrañas con ecuaciones logarítmicas, determine primero el dominio de la variable.

Comencemos con un ejemplo de ecuación logarítmica que requiere usar el hecho que una función logarítmica es una función uno a uno:

Si loga M = loga N, entonces M = N M, N y a son positivos y a · 1

EJEMPLO 1 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva: 2 log5 x = log5 9

Solución El dominio de la variable en esta ecuación es x 7 0. Observa que cada logaritmo tiene la misma base, 5. Ahora usa las propiedades de los logaritmos para resolver la ecuación.

2 log5 x = log5 9

log5 x2 = log5 9 r loga M · loga Mr Si

x2 = 9 loga M · loga N, entonces M · N.

x = 3 o x = - 3

Como el dominio de la variable es x 7 0, - 3 es superfluo y se descarta.

Machine Translated by Google

✓ Compruebe: 2 log5 3

log5 9 log5 32 r loga M · loga Sr.

log5 9 log5 9 = log5 9

El conjunto solución es 536.

Ahora resuelve el problema 1 7

A menudo se necesitan una o más propiedades de los logaritmos para reescribir la ecuación. como un solo logaritmo. En el siguiente ejemplo, se utiliza el registro de una propiedad de producto.

EJEMPLO 2 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva: log5 1x + 62 + log5 1x + 22 = 1

Solución

El dominio de la variable requiere que x + 6 7 0 y x + 2 7 0, por lo que x 7 - 6 y x 7 - 2. Esto significa que cualquier solución debe satisfacer x 7 - 2. Para obtener una solución exacta, primero expresa la lado izquierdo como un solo logaritmo. Luego cambia la ecuación a una ecuación exponencial equivalente.

log5 1x + 62 + log5 1x + 22 = 1 log5 3

1x + 62 1x + 22 4 = 1 1x + 62 1x loga M · loga N · loga 1MN2

+ 22 = 51 = 5 x2 + 8x + 12 = 5 Cambiar a forma exponencial.

x2 + 8x + 7 = 0 1x + Multiplicar.

72 1x + 12 = 0 Coloca la ecuación cuadrática en forma estándar. Factor.

x = - 7 o x = - 1 Utilice la propiedad de producto cero.

ADVERTENCIA Una solución negativa no es automáticamente extraña. Debes determinar si la solución potencial hace que el argumento de cualquier expresión logarítmica en la ecuación sea negativo o 0.

Sólo x = - 1 satisface la restricción de que x 7 - 2, por lo que x = - 7 es extraño. El conjunto de soluciones es 5 - 16, que debes verificar.

Ahora resuelve el problema 2 5

EJEMPLO 3 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva: ln x = ln1x + 62 - ln1x - 42

Solución El dominio de la variable requiere que x 7 0, x + 6 7 0 y x - 4 7 0. Como resultado, el dominio de la variable aquí es x 7 4. Comience la solución usando el registro de una propiedad de diferencia .

ln x = ln1x + 62 - ln1x - 42

ln x = lna x +46bx - En M - ln N · lna M SUST.

$x = \frac{x + 6}{x - 4}$ Si ln M · ln N, entonces M · N.

x1x - 42 = x + 6 x2 - Multiplica ambos lados por x · 4.

4x = x + 6 x2 - 5x - Distribuir.

6 = 0 1x - 62 1x + Coloca la ecuación cuadrática en forma estándar. Factor.

12 = 0

x = 6 o x = - 1 Utilice la propiedad de producto cero.

Como el dominio de la variable es x 7 4, descarte - 1 como superfluo. El conjunto de soluciones es 566, que debes verificar.

Machine Translated by Google

ADVERTENCIA Al utilizar las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones logarítmicas, evite utilizar la propiedad loga xr = r loga x, cuando r es par. La razón se puede ver en este ejemplo:

Resuelva: log3 x2 = 4

Solución: El dominio de la variable x son todos los números reales excepto 0.

(a) log3x2 = 4

x2 = 34 = 81 Cambiar a forma exponencial.

x = - 9 o x = 9

(b) log3x2 = 4 loga xr · r loga x

2 log3 x = 4 El dominio de la variable es x + 0.

log3 x = 2

x = 9

Tanto - 9 como 9 son soluciones de log3 x2 = 4 (como puede verificar). La solución del inciso (b) no encuentra la solución - 9 porque el dominio de la variable se restringió aún más debido a la aplicación de la propiedad loga xr = r loga x.

Ahora resuelve el problema 3 5

2 Resolver ecuaciones exponenciales

En las secciones 5.3 y 5.4 resolvimos ecuaciones exponenciales algebraicamente expresando cada lado de la ecuación usando la misma base. Es decir, utilizamos la propiedad uno a uno de la función exponencial:

Si au = av , entonces u = va 7 0 a · 1

Por ejemplo, para resolver la ecuación exponencial 42x+1 = 16, observa que 16 = 42 y usa la propiedad uno a uno para obtener la ecuación 2x + 1 = 2, de la cual encontramos x = $\frac{1}{2}$.

No todas las ecuaciones exponenciales se pueden expresar de manera que cada lado de la ecuación tenga la misma base. Para tales ecuaciones, a menudo se pueden utilizar otras técnicas para obtener soluciones exactas.

EJEMPLO 4 Resolver ecuaciones exponenciales

Resuelva: (a) 2x = 5 (b) 8 # 3x = 5

Solución (a) Como 5 no se puede escribir como una potencia entera de 2 122 = 4 y 23 = 82, escriba la ecuación exponencial como la ecuación logarítmica equivalente.

$$2x = 5$$

$$x = \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

Fórmula de cambio de base

Alternativamente, la ecuación 2x = 5 se puede resolver tomando el logaritmo natural (o logaritmo común) de cada lado.

$$2x = 5$$

$$\ln 2x = \ln 5 \quad \text{Si } M \cdot N, \text{ entonces } \ln M \cdot \ln N.$$

$$x \ln 2 = \ln 5 \quad \text{En Señor} \cdot r \text{ En } M$$

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \quad \text{Solución exacta}$$

$$\approx 2.322 \quad \text{solución aproximada}$$

El conjunto solución es e l En 2 f.

(b) 8 # 3x = 5

$$3x = \frac{5}{8} \quad \text{Resuelve para 3x .}$$

Machine Translated by Google

$$x = \log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1.465$$ Solución exacta; solución aproximada

El conjunto solución es $\{\log_3 5\}$ o $\{1.465\}$.

Ahora problema de trabajo 47

EJEMPLO 5 Resolver una ecuación exponencial

Resuelva: $5^{x-2} = 3^{3x+2}$

Solución En esta ecuación, las bases son 3 y 5, y no podemos expresar una como una potencia de la otra como lo hicimos en la sección 5.3 (págs. 324 y 325). En su lugar, comience tomando el logaritmo natural de ambos lados y luego use el hecho de que $\ln M^r = r \ln M$. Esto da como resultado una ecuación que sabemos cómo resolver.

$$\ln 5^{x-2} = \ln 3^{3x+2}$$ Si $M = N$, $\ln M = \ln N$.

$$(x-2)\ln 5 = (3x+2)\ln 3$$ En señor $= r \ln M$

$$x \ln 5 - 2 \ln 5 = 3x \ln 3 + 2 \ln 3$$ Distribuir.

$$x \ln 5 - 3x \ln 3 = 2 \ln 3 + 2 \ln 5$$ Coloca los términos que involucran x a la izquierda.

$$x(\ln 5 - 3 \ln 3) = 2(\ln 3 + \ln 5)$$ Factor.

$$x = \frac{2(\ln 3 + \ln 5)}{\ln 5 - 3 \ln 3} \approx -3.212$$ Solución exacta; solución aproximada

El conjunto solución es $\{\frac{2(\ln 3 + \ln 5)}{\ln 5 - 3 \ln 3}\}$ o $\{-3.212\}$.

Ahora problema de trabajo 57

NOTA Debido a las propiedades de los logaritmos, las soluciones exactas que involucran logaritmos a menudo se pueden expresar de múltiples maneras. Por ejemplo, la solución a $5^{x-2} = 3^{3x+2}$ del Ejemplo 5 puede ser $\frac{2 \ln 15}{\ln 5}$ expresado de manera equivalente como $\frac{-\ln 225}{\ln \frac{1}{5}}$ o como $\frac{\ln 225}{\ln 5}$, entre otros. ¿Ves por qué?

EJEMPLO 6 Resolver una ecuación exponencial de forma cuadrática

Resuelva: $4^x - 2^x - 12 = 0$

Solución Tenga en cuenta que $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, entonces la ecuación es de forma cuadrática y puede ser escrito como

$$(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$ Sea $u = 2^x$; entonces $u^2 - u - 12 = 0$.

Ahora factoriza como de costumbre.

$$(u - 4)(u + 3) = 0$$ $u = 4$ o $u = -3$

$$2^x = 4 \quad 2^x = -3$$ $2^x = 4$ $2^x = -3$

La ecuación de la izquierda tiene la solución $x = 2$; la ecuación de la derecha no tiene solución, ya que $2^x > 0$ para todo x. El conjunto solución es $\{2\}$.

Ahora resuelve el problema 65

3 Resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales usando una utilidad gráfica

Las técnicas algebraicas introducidas en esta sección para obtener soluciones exactas se pueden usar para resolver solo ciertos tipos de ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Las soluciones para otros tipos generalmente se estudian en cálculo, utilizando métodos numéricos. Para tales tipos, podemos usar una utilidad gráfica para aproximar la solución.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Resolver ecuaciones usando una utilidad gráfica

Resuelva: x + ex = 2

Exprese la(s) solución(es) redondeada(s) a dos decimales.

Solución La solución se encuentra utilizando una TI-84 Plus C gráficando Y1 = x + ex e Y2 = 2 como se muestra en la Figura 40(a). Tenga en cuenta que debido a que Y1 es una función creciente (¿sabe por qué?), solo hay un punto de intersección para Y1 e Y2 . El uso del comando INTERSECT revela que la solución es 0,44, redondeada a dos decimales. La Figura 40(b) muestra la solución usando Desmos.

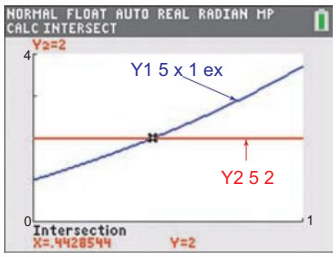
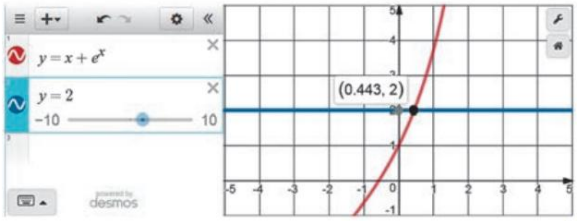


Figura 40 (a) TI-84 Plus C



(b) Desmos

Ahora problema de trabajo 7 5

5.6 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Resuelva x2 - 7x - 30 = 0. (págs. A47–A51)

2. Resuelve 1x + ^{2} - 41x + 32 + 3 = 0.(págs. A47–A51)

3. Aproxima la(s) solución(es) a x3 = x2 - 5 usando una herramienta gráfica. (págs. B6–B8)

32 4. Aproxima la(s) solución(es) a x3 - 2x + 2 = 0 usando una utilidad gráfica. (págs. B6–B8)

Desarrollo de habilidades

En los problemas 5 a 44, resuelva cada ecuación logarítmica. Expresar soluciones irracionales en forma exacta.

5. iniciar sesión 1x + 62 = 1

6. log4 x = 2

7. log3 13x - 12 = 2

8. log2 15x2 = 4 11.

9. log5 12x + 3) = log5 3 12.

10. log4 1x + 42 = log4 15

log2 · x - 7· = 4

log4 · x· = 3

13. log9 · 3x + 4· = log9 · 5x - 12·

14. log5 · 2x - 1· = log5 13 17. 3

15. - 2 log4 x = log4 9 18. 2

dieciséis. $\frac{1}{2}$ log7 x = 3 log7 2

log2 x = - log2 27 20. 2 log6

log5 x = 3 log5 4 21. log x +

19. 2 log3 1x + 42 - log3 9 = 2

1x - 52 + log6 9 = 2

log 1x - 212 = 2

22. iniciar sesiónx + iniciar sesión1x + 152 = 2

23. log12x2 - log1x - 3) = 1 24. log17x + 62 = 1 + log1x - 12 26. log6 1x + 42 + log6 1x + 3) = 1 27. 25. log2 1x + 72 + log2 1x + 82 = 1

log5 1x + 3) = 1 - log5 1x - 12 29 .ln1x + 12 - ln x = 2 30. ln x + ln1x + 22 = 4 33. log4 1x2 - 92 - log4 28. log8 1x + 62 = 1 - log8 1x + 42

1x + 3) = 3 32. log9 1x + 82 + log9 1x + 72 = 2 35. loga 1x - 12 - loga 1x + 62 = loga 1x 31. log2 1x + 12 + log2 1x + 72 = 3

- 22 - loga 1x + 32

34. log1>3 1x2 + x2 - log1>3 1x2 - x2 = - 1

36. loga x + loga 1x - 22 = loga 1x + 42

37. log3 x - 2 log3 5 = log3 1x + 12 - 2 log3 10 39. 31log7 x -

38. 2 log5 1x - 32 - log5 8 = log5 2

log7 22 = 2 log7 4

40. 2 log6 1x + 22 = 3 log6 2 + log6 4

41. iniciar sesión 1x - 12 = iniciar sesión $\frac{1}{2}$ 3

42. 2 log13 1x + 22 = log13 14x + 72

43. En x - 32 En x + 2 = 0

44. 1log3x2 _ ^{2} -3log3x = 10

Machine Translated by Google

En los problemas 45 a 72, resuelva cada ecuación exponencial. Expresar soluciones irracionales en forma exacta.

45. 5 -x = 25
46. 2x-5 = 8
47. 2x = 10
48. 3x = 14
49. 2-x = 1,5
50. 8-x = 1,2
51. 0,3140,2x 2 = 0,2
52. 5123x 2 = 8
53. 2x+1 = 51-2x
54. 31-2x = 4x
55. un $\frac{1x}{4}$ = 5x
56. un $\frac{3}{3}$ b x = 71-x
57. 1,2x = 10,52 -x
58. 0,31+x = 1,72x-1
59. ex+3 = px
60. p1-x = ex
61. 32x + 3x - 2 = 0
62. 16x + 22x + 2x - 12 = 0
63. 9x - 22x + 2x+2 - 12 = 0
64. 32x + 3x+1 - 4 = 0
65. 4x+1 - 3 = 0
66. 3x+1 + 1 = 0
67. 36x - 6 # 6x = - 9
68. 25x - 8 # 5x = - 16
69. 2 # 49x + 11 # 7x + 5 = 0
70. 3 # 4x + 4 # 2x + 8 = 0
71. 3x - 14 # 3-x = 5
72. 4x - 10 # 4-x = 3

En los problemas 73 a 86, utilice una herramienta gráfica para resolver cada ecuación. Expresa tu respuesta redondeada a dos decimales.

73. log2 1x - 12 - log6 1x + 22 = 2
74. log5 1x + 12 - log4 1x - 22 = 1
75. e2x = x + 2
76. ex = - x
77. ex = x3
78. ex = x2
79. ln12x2 = - x + 2
80. en x = - x
81. ln x = - x2
82. ln x = x3 - 1
83. ex - ln x = 4
84. ex + ln x = 4
85. ex = - ln x
86. ex = lnx

Aplicaciones y extensiones

87. f1x2 = log2 1x + 32 y g1x2 = log2 13x + 12.
    (a) Resuelva f1x2 = 3. ¿Qué punto está en la gráfica de f ?
    (b) Resuelva g1x2 = 4. ¿Qué punto está en la gráfica de g?
    (c) Resuelva f1x2 = g1x2. ¿Se cruzan las gráficas de f y g ? ¿Si es así, donde?
    (d) Resuelva 1f + g2 1x2 = 7.
    (e) Resuelva 1f - g2 1x2 = 2.

88. f1x2 = log3 1x + 52 y g1x2 = log3 1x - 12.
    (a) Resuelva f1x2 = 2. ¿Qué punto está en la gráfica de f ?
    (b) Resuelva g1x2 = 3. ¿Qué punto está en la gráfica de g?
    (c) Resuelva f1x2 = g1x2. ¿Se cruzan las gráficas de f y g ? ¿Si es así, donde?
    (d) Resuelva 1f + g2 1x2 = 3.
    (e) Resuelva 1f - g2 1x2 = 2.

89. (a) Si f1x2 = 3x+1 y g1x2 = 2x+2 , grafique f y g en el mismo plano cartesiano.
    (b) Encuentre el(los) punto(s) de intersección de las gráficas de f y g resolviendo f1x2 = g1x2. Redondea las respuestas a tres decimales. Etiquete los puntos de intersección en la gráfica dibujada en la parte (a).
    (c) Con base en la gráfica, resuelva f1x2 7 g1x2.

90. (a) Si f1x2 = 5x-1 y g1x2 = 2x+1 , grafique f y g en el mismo plano cartesiano.
    (b) Encuentre el(los) punto(s) de intersección de las gráficas de f y g resolviendo f1x2 = g1x2. Etiquete los puntos de intersección en la gráfica dibujada en la parte (a).
    (c) Con base en la gráfica, resuelva f1x2 7 g1x2.

91. (a) Grafique f1x2 = 3x y g1x2 = 10 en el mismo plano cartesiano. avión.
    (b) Sombree la región delimitada por el eje y, f1x2 = 3x , y g1x2 = 10 en la gráfica dibujada en el inciso (a).
    (c) Resuelva f1x2 = g1x2 y etiquete el punto de intersección en la gráfica dibujada en el inciso (a).

92. (a) Grafique f1x2 = 2x y g1x2 = 12 en el mismo plano cartesiano. avión.
    (b) Sombree la región delimitada por el eje y, f1x2 = 2x , y g1x2 = 12 en la gráfica dibujada en el inciso (a).
    (c) Resuelva f1x2 = g1x2 y etiquete el punto de intersección en la gráfica dibujada en el inciso (a).

93. (a) Grafique f1x2 = 2x+1 y g1x2 = 2-x+2 en el mismo plano cartesiano.
    (b) Sombree la región delimitada por el eje y, f1x2 = 2x+1 , y g1x2 = 2-x+2 en la gráfica dibujada en el inciso (a).
    (c) Resuelva f1x2 = g1x2 y etiquete el punto de intersección en la gráfica dibujada en el inciso (a).

94. (a) Grafique f1x2 = 3-x+1 y g1x2 = 3x-2 en el mismo plano cartesiano.
    (b) Sombree la región delimitada por el eje y, f1x2 = 3-x+1 , y g1x2 = 3x-2 en la gráfica dibujada en el inciso (a).
    (c) Resuelva f1x2 = g1x2 y etiquete el punto de intersección en la gráfica dibujada en el inciso (a).

95. (a) Grafique f1x2 = 2x - 4.
    (b) Encuentre el cero de f.
    (c) Con base en la gráfica, resuelva f1x2 6 0.

96. (a) Grafique g1x2 = 3x - 9.
    (b) Encuentre el cero de g.
    (c) Con base en la gráfica, resuelva g1x2 7 0.

97. Un modelo de población La población mundial en 2018 era de 7.630 millones de personas y crecía a un ritmo del 1,1% anual. Suponiendo que esta tasa de crecimiento continúa, el modelo P1t2 = 7.6311.0112 $^{t-2018}$ representa la población P (en miles de millones de personas) en el año t.
    (a) Según este modelo, ¿cuándo la población del mundo será de 9 mil millones de personas?
    (b) Según este modelo, ¿cuándo crecerá la población del ¿El mundo tendrá 12.500 millones de personas?
    Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

98. Un modelo de población La población de un determinado país en 1999 era de 287 millones de personas. Además, la población del país crecía a un ritmo del 1,0% anual.
    Suponiendo que esta tasa de crecimiento continúa, el modelo P(t) = 287(1.010)t-1999 representa la población P (en millones de personas) en el año t. (a) Según este modelo, ¿cuándo llegará la población del país a 307 millones de personas?
    (b) Según este modelo, ¿cuándo llegará la población del país a 394 millones de personas?
    Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

Machine Translated by Google

99. Depreciación El valor V de un Honda Civic LX que tiene t años se puede modelar como V1t2 = 19,70510.8482 (a) Según el modelo, ¿cuándo valdrá el auto $14,000?

(b) Según el modelo, ¿cuándo valdrá el automóvil $10 000?

(c) Según el modelo, ¿cuándo valdrá el automóvil $7500?

Fuente: Libro Azul de Kelley

100. Depreciación El valor V de un Chevy Cruze LT que tiene t años se puede modelar como V1t2 = 19,20010.822 (a) Según el modelo, ¿cuándo valdrá el automóvil $12 000?

(b) Según el modelo, ¿cuándo valdrá el automóvil $9 000?

(c) Según el modelo, ¿cuándo valdrá el automóvil $3 000?

Fuente: Libro Azul de Kelley

Problemas de desafío En los problemas 101 a 105, resuelve cada ecuación. Expresar soluciones irracionales en forma exacta.

101. $123\ 22\ 10^{2x} = 2^{x2}$ 102. log2 1x + 12 - log4 x = 1 103. En x2 = 1En x2

104. log2 xlog2 x = 4 105. $2\log x = 2\log 23$

Explicar conceptos: discusión y escritura

106. Complete el motivo de cada paso en las siguientes dos soluciones.

Resuelva: $\log_3 1x - 12^2 = 2$

Solución A	Solución B
$\log_3 1x - 12^{2} = 2$	$\log_3 1x - 12\ 2^{2} = 2$
$1x - 12^2 = 32 = 9$ _____	$\log_3 1x - 12 = 2\log 3$ _____
1x - 12 = {3 _____	1x - 12 = 1 _____
x - 1 = - 3 o x - 1 = 3 _____	x - 1 = 31 = 3 _____
x = - 2 o x = 4 _____	x = 4 _____

Ambas soluciones dadas en la Solución A se verifican. Explique qué causó que la solución x = - 2 se perdiera en la Solución B.

Conserve su conocimiento

Los problemas 107 a 116 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

107. Resuelve: 4x3 + 3x2 - 25x + 6 = 0

108. Determina si la función es uno a uno:

510, - 42,12, - 22, 14, 02,16, 226

109. Para $f1x2 = \frac{x}{y\ g1x2 = x - 2}$ $\frac{x+5}{x-3}$, encuentre f g.

Luego encuentra el dominio de f g. _____ _____

110. Encuentra el dominio de f1x2 = 2x + 3 + 2x - 1.

111. Resuelve: $x - \sqrt{2x + 7} = 5$

112. Encuentra el cero real de la función f1x2 = 5x - 30.

113. Si $f1x2 = \frac{x}{y\ g1x2 = x - 2}$ $\frac{5}{x+2}$, encuentre 1f + g2 1x2.

114. Encuentra la distancia entre el centro del círculo.

$1x - 22^2 + 1$ año $+ 32^{2 = 25}$

y el vértice de la parábola y = - 21x - 62 115. Encuentre $^{2 + 9.}$

la tasa de cambio promedio f1x2 = log2 x
Del 4 al 16.

116. Racionaliza el numerador: $\frac{\sqrt{2x + 6} - \sqrt{2x}}{}$

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 5 - 3, 106 2. 5 - 2, 06 3.5 - 1.436 4.5 - 1.776

Machine Translated by Google

5.7 Modelos Financieros

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Interés simple (Sección A.8, págs. A63–A64)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 367.

OBJETIVOS 1 Determinar el valor futuro de una suma global de dinero (p. 361)

2 Calcule las tasas de rendimiento efectivas (p. 364)

3 Determine el valor presente de una suma global de dinero (p. 365)

4 Determine la tasa de interés o el tiempo necesario para duplicar un tanto Suma de dinero (pág. 366)

1 Determinar el valor futuro de una suma global de dinero

El interés es dinero pagado por el uso del dinero. La cantidad total pedida prestada (ya sea por un individuo a un banco en forma de préstamo o por un banco a un individuo en forma de cuenta de ahorros) se denomina principal . La tasa de interés, expresada como porcentaje, es el monto cobrado por el uso del principal durante un período de tiempo determinado, generalmente anualmente (es decir, por año).

TEOREMA Fórmula de interés simple

Si se toma prestado un capital de P dólares por un período de t años a una tasa de interés anual r, expresada como decimal, el interés I cobrado es

$$I = Prt \qquad (1)$$

El interés cobrado según la fórmula (1) se denomina interés simple.

En problemas que involucran intereses, el término período de pago se define de la siguiente manera.

Anualmente: una vez al año
Semestralmente: dos veces al año
Trimestral: cuatro veces al año
Mensual: 12 veces al año
Diariamente: 365 veces al año*

Cuando el interés adeudado al final de un período de pago se suma al principal de modo que el interés calculado al final del siguiente período de pago se base en este nuevo monto de principal (principal anterior + interés2), se dice que el interés ha sido compuesto. El interés compuesto es el interés pagado sobre el principal y sobre los intereses devengados previamente.

EJEMPLO 1 Calcular el interés compuesto

Una cooperativa de crédito paga un interés del 2% anual compuesto trimestralmente sobre un determinado plan de ahorro. Si se depositan $1000 en el plan y se deja acumular el interés, ¿cuánto queda en la cuenta después de 1 año?

Solución Utilice la fórmula de interés simple, I = Prt. El principal P es $1000 y la tasa de el interés es 2, = 0,02. Después del primer trimestre de un año, el tiempo t es el año, por lo que el 4 el interés ganado es

$$I = Impr = +1000 \# 0,02 \# = +5\frac{1}{4}$$

*Algunos bancos utilizan un “año” de 360 días. ¿Por qué crees que lo hacen?

(continuado)

Machine Translated by Google

El nuevo capital es P + I = $1000 + $5 = $1005. Al final del segundo trimestre, el interés sobre este principal es

$$\text{Yo} = \$1005 \# 0.02 \# \frac{1}{4} = \$5.03$$

Al final del tercer trimestre, el interés sobre el nuevo capital de $1005 + $5.03 = $1010.03 es

$$\text{Yo} = \$1010.03 \# 0.02 \# \frac{1}{4} = \$5.05$$

Finalmente, después del cuarto trimestre, el interés es

$$\text{Yo} = \$1015.08 \# 0.02 \# \frac{1}{4} = \$5.08$$

Después de 1 año, la cuenta contiene $1015,08 + $5,08 = $1020,16.

El patrón de cálculos realizados en el ejemplo 1 conduce a una fórmula general para el interés compuesto. Para este propósito, sea P el capital que se invertirá a una tasa de interés anual r que se capitaliza n veces al año, por lo que el tiempo de cada 1

El período de capitalización $\frac{}{n}$ año. (Para fines informáticos, r se expresa como decimal).

es El interés ganado después de cada período de capitalización viene dado por la fórmula (1).

$$\text{Interés} = \text{principal} \# \text{tasa} \# \text{tiempo} = P \# r \# \frac{1}{n} = P \# n \frac{r}{n}$$

La cantidad A después de un período de capitalización es

$$A = P + P \# n \frac{r}{n} = P \# a1 + \frac{r}{nb}$$

Después de dos períodos de capitalización, el monto A, basado en el nuevo capital

$P \# a1 + \frac{r}{nb}$, es

$$A = P \# a1 + \frac{r}{\text{norte segundo}} + P \# a1 + \frac{r}{\text{norte segundo}} \frac{r}{n} = P \# a1 + \frac{r}{\text{norte segundo}} a1 + \frac{r}{\text{norte segundo}} = P \# a1 + \frac{r}{nb}^2$$

Nuevo principal < Interés en nuevo director Factorizar $P \# a1 \cdot b \frac{r}{n}$

Después de tres períodos de capitalización, la cantidad A es

$$A = P \# a1 + \frac{r}{nb}^2 + P \# a1 + \frac{r}{nb}^2 \frac{r}{n} = P \# a1 + \frac{r}{nb}^2 a1 + \frac{r}{\text{norte segundo}} = P \# a1 + \frac{r}{nb}^3$$

Siguiendo de esta manera, después de n períodos de capitalización (1 año), el monto A es

$$A = P \# a1 + \frac{r}{nbn}$$

Debido a que t años contendrán n # t períodos de capitalización, la cantidad después de t años es

$$A = P \# a1 + \frac{r}{nb\,nt}$$

TEOREMA Fórmula del interés compuesto

El monto A después de t años debido a un capital P invertido a una tasa de interés anual r, expresado como decimal, compuesto n veces por año es

$$A = P \# a1 + \frac{r}{nb\,nt} \qquad (2)$$

En la ecuación (2), la cantidad A normalmente se denomina valor acumulado de la cuenta, y P se llama valor presente.

Machine Translated by Google

Exploración

Para observar los efectos del interés compuesto mensualmente sobre un depósito inicial de $1, gráfica $Y1 = a1 + \frac{r}{12}b^{12x}$ con r = 0,06 y r = 0,12 para 0… x … 30. ¿Cuál es el ¿Valor futuro de $1 en 30 años cuando la tasa de interés anual es r = 0,06 (6%)? ¿Cuál es el valor futuro de 1 dólar dentro de 30 años cuando la tasa de interés anual es r = 0,12 (12%)? ¿Duplicar la tasa de interés duplica el valor futuro?

Por ejemplo, para reelaborar el Ejemplo 1, use P = $1000, r = 0.02, n = 4 (trimestralmente capitalización), y t = 1 año para obtener

$$A = P \# a1 + \frac{r}{n}b^{nt} = 1000a1 + \frac{0,02}{4 \text{ segundo}}^{4\#1} = \$1020.15$$

El resultado obtenido aquí difiere ligeramente del obtenido en el Ejemplo 1 debido al redondeo.

Ahora trabaja el problema 7

EJEMPLO 2

Comparación de inversiones utilizando diferentes períodos de capitalización

Invertir $1000 a una tasa anual del 10% compuesta anualmente, semestralmente, trimestralmente, mensualmente y diariamente producirá las siguientes cantidades después de 1 año:

Capitalización anual 1n = 12: $A = P \# 11 + r2$

$= \$100011 + 0,102 = \$1100,00$

Capitalización semestral 1n = 22: $A = P \# a1 + \frac{r}{2 \text{ segundo}}^{2}$

$= \$100011 + 0,052^{2} = \$1102.50$

Capitalización trimestral 1n = 42: $A = P \# a1 + \frac{r}{4 \text{ segundo}}^{4}$

$= \$100011 + 0,0252^{4} = \$1103.81$

Capitalización mensual 1n = 122: $A = P \# a1 + 12b\frac{r}{12b}^{12}$

$= \$1000a1 + \frac{0,10}{}^{12} = \$1104.71$

Capitalización diaria 1n = 3652: $A = P \# a1 + 365b\frac{r}{}^{365} =$

$\$1000a1 + \frac{0,10}{365 \text{ segundo}}^{365} = \$1105.16$

Del Ejemplo 2, observe que el efecto de capitalizar con mayor frecuencia es que la cantidad después de 1 año es mayor. Esto lleva a la siguiente pregunta: ¿Qué pasaría con el monto después de 1 año si se aumentara sin límite el número de veces que se compone el interés?

Busquemos la respuesta. Supongamos que P es el principal, r es la tasa de interés anual y n es el número de veces que el interés se capitaliza cada año. La cantidad A después de 1 año es

$$A = P \# a1 + n b \frac{r}{n}$$

Reescribe esta expresión de la siguiente manera:

$$A = P \# a1 + n b \frac{r}{n} = P \# £1 + \frac{1}{\frac{r}{\text{norte}}}^{\text{norte}} = P \# C £1 + \frac{1}{\frac{r}{\text{norte}}}^{\text{norte} \geq n > r S r} = P \# \text{y} \; c\, a1 + h b \frac{1}{h \cdot \frac{r}{\text{norte}}}^{h\ r} \; d \quad (3)$$

Machine Translated by Google

¿Necesita revisar?
El número e se define en la página 323.

Ahora supongamos que el número n de veces que el interés se compone por el año se hace cada vez más grande; es decir, supongamos que n S q. Entonces $\frac{r}{n}$ S q, y el h = expresión entre paréntesis en la ecuación (3) es igual a e. Es decir, A S Per .

La Tabla 8 compara $a1 + \frac{r}{nbn__}$, para valores grandes de n, a er para r = 0,05, r = 0,10, r = 0,15 y r = 1. A medida que n se hace mayor, más se acerca $a1 + \frac{r}{nbn__}$ llega a er . No No importa la frecuencia de la capitalización, la cantidad después de 1 año tiene el límite superior Per .

Tabla 8

	$11 \cdot \text{norte } 2 \frac{r}{\text{norte}}$ norte · 100	norte · 1000	norte · 10.000	ejem
r = 0,05	1.0512580	1.0512698	1.051271	1.0512711
r = 0,10	1.1051157	1.1051654	1.1051704	1.1051709
r = 0,15	1.1617037	1.1618212	1.1618329	1.1618342
r = 1	2.7048138	2.7169239	2.7181459	2.7182818

Cuando el interés se compone de modo que el monto después de 1 año sea Por, el interés se dice que se compone continuamente.

TEOREMA Composición continua

La cantidad A después de t años debido a un capital P invertido a una tasa de interés anual r compuesta continuamente es

A = impertinente (4)

EJEMPLO 3 Usando la composición continua

La cantidad A que resulta de invertir un capital P de $1000 a una tasa anual r del 10% compuesto continuamente durante un tiempo t de 1 año es

A = $1000e0.10 = $1000 # 1.10517 = $1105.17

Ahora resuelve el problema 1 3

2 Calcular tasas de rendimiento efectivas

Supongamos que tiene $1000 para invertir y un banco le ofrece pagarle un interés anual del 3 por ciento compuesto mensualmente. ¿Qué tasa de interés simple se necesita para ganar la misma cantidad después de un año? Para responder a esta pregunta, primero determine el valor después de un año de la inversión de $1000 que genera un 3 por ciento compuesto mensual.

$A = +1000a1 + \frac{0{,}03}{12\ \text{segundo}}{}^{12}$ Utilice $A \cdot P\ a1 + n\ b\ \frac{r}{n}$ con P · +1000, r · 0,03, n · 12.
= $1030.42

Entonces el interés ganado es $30.42. Usando I = Prt con t = 1, I = +30,42 y P = $1000, la tasa de interés simple anual es 0,03042 = 3,042. Esta tasa de interés se conoce como tasa de interés efectiva.

Machine Translated by Google

La tasa de interés efectiva es la tasa de interés simple anual que produciría la misma cantidad que si se capitalizara n veces al año, o de forma continua, después de un año.

TEOREMA Tasa de interés efectiva

La tasa de interés efectiva rE de una inversión que gana una tasa de interés anual r está dada por

- Capitalización n veces por año: $rE = a1 + \frac{r}{nbn}__ - 1$
- Composición continua: $rE = er - 1$

EJEMPLO 4 Calcular la tasa de interés efectiva: ¿cuál es la mejor oferta?

Suponga que desea comprar un certificado de depósito (CD) a 5 años. Visita tres bancos para determinar sus tasas de CD. American Express le ofrece un interés anual del 2,15% compuesto mensualmente y First Internet Bank le ofrece un interés compuesto del 2,20% trimestralmente. Discover ofrece un 2,12% compuesto diario. Determine qué banco ofrece la mejor oferta.

Solución El banco que ofrece la mejor oferta es el que tiene la tasa de interés efectiva más alta.

American Express

$$rE = a1 + \frac{0.0215}{12 \text{ segundo}}^{12} - 1$$
$$\approx 1.02171 - 1$$
$$= 0,02171$$
$$= 2,171,$$

Primer banco de Internet

$$rE = a1 + \frac{0.022}{4 \text{ segundo}}^{4} - 1$$
$$\approx 1.02218 - 1$$
$$= 0,02218$$
$$= 2.218,$$

Descubrir

$$rE = a1 + \frac{0.0212}{365 \text{ segundo}}^{365} - 1$$
$$\approx 1.02143 - 1$$
$$= 0,02143$$
$$= 2,143,$$

La tasa de interés efectiva es más alta para First Internet Bank, por lo que First Internet Bank ofrece la mejor oferta.

Ahora resuelve el problema 2 3

3 Determinar el valor actual de una suma global de dinero

Cuando la gente en finanzas habla del "valor del dinero en el tiempo", generalmente se refieren al valor presente del dinero. El valor presente de los dólares A que se recibirán en una fecha futura es el principal que necesitaría invertir ahora para que crezca a dólares A en el período de tiempo especificado. El valor presente del dinero que se recibirá en una fecha futura es siempre menor que la cantidad que se recibirá, ya que la cantidad que se recibirá será igual al valor presente (dinero invertido ahora) más los intereses acumulados durante el período de tiempo.

La fórmula de interés compuesto (2) se utiliza para desarrollar una fórmula para el valor presente. Si P es el valor presente de A dólares que se recibirán después de t años a una tasa de interés anual r compuesta n veces por año, entonces, mediante la fórmula (2),

$$A = P \# a1 + \frac{r}{nb\ nt\ _}$$

Para resolver P, divide ambos lados por $a1 + \frac{r}{nb\ nt\ _}$. El resultado es

$$\frac{A}{a1 + \frac{r}{nb\ nt\ _}} = P \text{ o } P = A \# a1 + \frac{r}{\text{norte segundo -nt}}$$

Machine Translated by Google

TEOREMA Fórmulas del valor presente

El valor presente P de A dólares que se recibirán después de t años, suponiendo una tasa de interés anual r compuesta n veces por año, es

$$P = A \# \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt} \tag{5}$$

Si el interés se capitaliza continuamente, entonces

$$P = Ae^{-rt} \tag{6}$$

Para derivar (6), resuelva $A = Pert$ para P.

EJEMPLO 5

Cálculo del valor de un bono de cupón cero Un bono de cupón cero (que no devenga intereses) puede canjearse en 10 años por $1 000. ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar por ello ahora si desea recuperarlo?

(a) ¿8% compuesto mensualmente? (b) ¿7% compuesto continuamente?

Solución

(a) Para encontrar el valor presente de $1000, use la fórmula (5) con A = $1000, n = 12, r = 0,08 y t = 10.

$$P = A \# \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt} = \$1000\left(1 + \frac{0{,}08}{12 \text{ segundo}}\right)^{-12 \# 10} = \$450.52$$

Para obtener un rendimiento del 8% compuesto mensual, pague $450,52 por el bono.

(b) Aquí utilice la fórmula (6) con A = $1000, r = 0,07 y t = 10.

$$P = Ae^{-rt} = \$1000e^{-0.07 \# 10} = \$496.59$$

Para obtener un rendimiento del 7% compuesto continuamente, pague $496,59 por el bono.

Ahora resuelve el problema 1 5

4 Determine la tasa de interés o el tiempo necesario para duplicar una suma global de dinero

EJEMPLO 6

Determinación de la tasa de interés requerida para duplicar una inversión ¿Qué tasa de interés compuesto anualmente se necesita para duplicar una inversión en 5 años?

Solución

Si P es el principal y P debe duplicarse, entonces la cantidad A será 2P. Utilice la fórmula del interés compuesto con n = 1 y t = 5 para encontrar r.

$$A = P \# \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$2P = P \# (1 + r)^5 \qquad \text{Un} \cdot 2P, \text{norte} \cdot 1, t \cdot 5$$

$$2 = (1 + r)^5 \qquad \text{Divida ambos lados por P.}$$

$$r = 25\ 2 - 1 \qquad \text{Toma la raíz quinta de ambos lados.}$$

$$r = 25\ 2 - 1 \approx 1{,}148698 - 1 = 0{,}148698$$

La tasa de interés anual necesaria para duplicar el capital en 5 años es del 14,87%.

Ahora resuelve el problema 3 1

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 **Determinar el tiempo necesario para duplicar o triplicar una inversión**

(a) ¿Cuánto tiempo tardará una inversión en duplicar su valor si gana el 5%? compuesto continuamente?

(b) ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse a este ritmo?

Solución

(a) Si P es la inversión inicial y P se va a duplicar, entonces la cantidad A será 2P. Utilice la fórmula (4) para interés compuesto continuo con r = 0,05.

A = impertinente

$$2P = Pe^{0,05t} \qquad \text{Una} \cdot 2P,\ r \cdot 0,05$$

$$2 = e^{0.05t} \qquad \text{Cancela las P.}$$

$$0,05\,t = \ln 2 \qquad \text{Reescribe como un logaritmo.}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0,05} \approx 13,86 \qquad \text{Resuelve para t.}$$

Se necesitarán unos 14 años para duplicar la inversión.

(b) Para triplicar la inversión, sea A = 3P en la fórmula (4).

A = impertinente

$$3P = Pe^{0,05t} \qquad \text{Una} \cdot 3P,\ r \cdot 0,05$$

$$3 = e^{0,05t} \qquad \text{Cancela las P.}$$

$$0,05\,t = \ln 3 \qquad \text{Reescribe como un logaritmo.}$$

$$t = \frac{\ln 3}{0,05} \approx 21,97 \qquad \text{Resuelve para t.}$$

Se necesitarán unos 22 años para triplicar la inversión.

Ahora resuelve el problema 3 5

5.7 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. ¿Cuál es el interés adeudado cuando se piden prestados $500 durante 6 meses a una tasa de interés simple del 6% anual? (págs. A63-A64)

2. Si pide prestado $5000 y, después de 9 meses, cancela el préstamo por un monto de $5500, ¿qué tasa de interés anual se cobró? (págs. A63-A64)

Conceptos y vocabulario

3. El monto total pedido prestado (ya sea por un individuo a un banco en forma de préstamo o por un banco a un individuo en forma de cuenta de ahorros) se llama 4. Si se pide prestado un principal _____.
de P dólares para un período de t años a una tasa de interés anual r, expresada como decimal, el interés que cobré es . El interés cobrado según esta fórmula se llama_____ = _____
_____ _____.

5. Es la tasa de interés simple anual que produciría la misma cantidad que si se capitalizara n veces al año, o de forma continua, después de 1 año.

6. Opción múltiple El capital que se debe invertir ahora para que crezca hasta una cantidad determinada en un período de tiempo específico se llama capital. _____.
(a) valor presente (c) interés (b) valor futuro (d) tasa efectiva

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 14, encuentre la cantidad que resulta de cada inversión.

7. $100 invertidos al 4% compuesto trimestralmente después de un período de 2 años

8. $50 invertidos al 6% compuesto mensualmente después de un período de 3 años

9. $300 invertidos al 12% compuesto mensualmente después de un período de $1\frac{1}{2}$ años

10. $900 invertidos al 3% compuesto semestralmente después de 1 periodo de 2 $\frac{}{2}$ años

11. $700 invertidos al 6% compuesto diariamente después de un período de 2 años

12. $1200 invertidos al 5% compuesto diariamente después de un período de 3 años

13. $1000 invertidos al 11% compuesto continuamente después de un período de 2 años

14. $400 invertidos al 7% compuesto continuamente después de un período de 3 años

Machine Translated by Google

En los problemas 15 a 22, encuentre el capital necesario ahora para obtener cada cantidad; es decir, encuentre el valor presente.

15. Para obtener $100 después de 2 años al 6% compuesto mensual

16. Obtener $75 después de 3 años al 8% compuesto trimestralmente

17. Para obtener $800 después de $3\frac{1}{2}$ años al 7% compuesto mensualmente

18. Para obtener $1500 después de $2\frac{1}{2}$ años al 1,5% compuesto diario

19. Para obtener $300 después de 4 años al 3% compuesto diariamente

20. Para obtener $750 después de 2 años al 2,5% compuesto trimestralmente

21. Para obtener $800 después de $2\frac{1}{2}$ años al 8% compuesto continuamente

22. Para obtener $120 después de $3\frac{1}{4}$ años al 5% compuesto continuamente

En los problemas 23 a 26, encuentre la tasa de interés efectiva.

23. Por 5% compuesto trimestralmente

24. Por 6% compuesto mensual

25. Por 6% compuesto continuamente

26. Por 4% compuesto continuamente

En los problemas 27 a 30, determine la tasa que representa el mejor trato.

27. 9 % compuesto trimestralmente o $9\frac{1}{4}$, compuesto anualmente

28. 6 % compuesto trimestralmente o $6\frac{1}{4}$, compuesto anualmente

29. 8% compuesto semestralmente o 7,9% compuesto diariamente

30. 9% compuesto mensual o 8,8% compuesto diariamente

31. ¿Qué tasa de interés compuesto anualmente se requiere para ¿Duplicar una inversión en 3 años?

32. ¿ Qué tasa de interés compuesto anualmente se requiere para ¿Duplicar una inversión en 6 años?

33. ¿ Qué tasa de interés compuesto anualmente se requiere para ¿Triplicar una inversión en 10 años?

34. ¿ Qué tasa de interés compuesto anualmente se requiere para ¿Triplicar una inversión en 5 años?

35. (a) ¿Cuánto tiempo tarda una inversión en duplicar su valor si se invierte al 8% compuesto mensualmente?
(b) ¿Cuánto tiempo lleva si el interés se capitaliza continuamente?

36. (a) ¿Cuánto tiempo tarda una inversión en triplicar su valor si se invierte al 6% compuesto mensual?
(b) ¿Cuánto tiempo lleva si el interés se capitaliza continuamente?

37. ¿Qué tasa de interés compuesta continuamente producirá una tasa de interés efectiva del 6%?

38. ¿Qué tasa de interés compuesta trimestralmente producirá una tasa de interés efectiva del 7%?

Aplicaciones y extensiones

39. Tiempo necesario para alcanzar una meta Si Ángela tiene $100 para invertir al 2,5% anual compuesto mensualmente, ¿cuánto tiempo pasará antes de que tenga $175? Si la capitalización es continua, ¿cuánto tiempo durará?

40. Tiempo necesario para alcanzar una meta Si Tanisha tiene $1000 para invertir al 7% anual compuesto semestralmente, ¿cuánto tiempo pasará antes de que tenga $1400? Si la capitalización es continua, ¿cuánto tiempo durará?

41. Tiempo necesario para alcanzar una meta ¿ Cuántos años tomará para que una inversión inicial de $25 000 crezca a $80 000?
Supongamos una tasa de interés del 7% compuesta continuamente.

42. Tiempo necesario para alcanzar una meta ¿ Cuántos años tomará para que una inversión inicial de $50 000 crezca a $75 000?
Supongamos una tasa de interés del 16% compuesta continuamente.

43. Apreciación del precio de las viviendas ¿ Cuánto costará una casa de $160 000 dentro de 7 años si la apreciación del precio de las viviendas durante ese período promedia 8% compuesto anualmente?

44. Intereses de tarjetas de crédito Una tienda departamental cobra 1.25% mensual sobre el saldo impago a los clientes con cuentas a cargo (el interés se capitaliza mensualmente). Un cliente cobra $200 y no paga su factura durante 6 meses. ¿Cuál es la factura en ese momento?

45. Ahorrar para un automóvil Jerome comprará un automóvil usado por $6000 en 3 años. ¿Cuánto dinero debería pedirles a sus padres ahora para que, si lo invierte al 8% compuesto continuamente, tenga suficiente para comprar el auto?

46. Liquidación de un préstamo John necesita $3000 en 6 meses para liquidar un préstamo que no tiene privilegios de pago anticipado. Si tiene $3000 ahora, ¿cuánto debería ahorrar en una cuenta que paga 3% compuesto mensualmente para que en 6 meses tenga exactamente $3000?

47. Rendimiento de una acción Jerry está contemplando la compra de 100 acciones de una acción que se vende a $22 cada una. La acción no paga dividendos. La historia de la acción indica que debería crecer a una tasa anual del 13% anual. Utilice la capitalización anual para determinar cuánto valdrán las 100 acciones en 5 años.

48. Rendimiento de una inversión Un negocio comprado por $650 000 en 2010 se vende en 2013 por $850 000. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual de esta inversión?

49. Comparación de planes de ahorro Jim coloca $10 000 en una cuenta bancaria que paga 10,6% compuesto continuamente. Después de 2 años, ¿tendrá suficiente dinero para comprar un automóvil que cuesta $12,375? Si otro banco le paga a Jim un 11% compuesto semestralmente, ¿está ofreciendo una mejor oferta?

50. Planes de ahorro El 1 de enero, Kim coloca $1000 en un certificado de depósito que paga 6.8% compuesto continuamente y vence en 3 meses. Luego, Kim coloca los $1000 y los intereses en una cuenta de libreta que paga un 5,25% compuesto mensual. ¿Cuánto tiene Kim en la cuenta de libreta el 1 de mayo?

Machine Translated by Google

51. Comparación de inversiones Susan invierte £5000 en su cuenta de jubilación que paga un interés compuesto del 8% semestralmente. Su amiga Chloe invierte £5000 en otro 1

cuenta que paga 7 $\frac{}{2}$, compuesto continuamente. OMS

¿Tiene más dinero después de 20 años, Susan o Chloe?

52. Comparación de dos alternativas Supongamos que April tiene acceso a una inversión que pagará un interés compuesto continuo del 10%. ¿Qué es mejor: recibir $1000 ahora para que pueda aprovechar esta oportunidad de inversión o recibir $1325 después de 3 años?

53. Costos universitarios La matrícula anual promedio en una universidad privada de cuatro años fue de £14,630 en el año académico 2017-2018. Este fue un aumento del 6% respecto al año anterior.

(a) Si el costo de la universidad aumenta un 6% cada año, ¿cuál será la matrícula promedio para el año académico 2037-2038?

(b) Los planes de ahorro para la universidad permiten a las personas ahorrar dinero ahora para ayudar a pagar la universidad en el futuro. Si uno de esos planes ofrece una tasa del 4% compuesta continuamente, ¿cuánto se debería poner en un plan de ahorro para la universidad en 2019 para pagar un año de matrícula en una universidad privada de cuatro años para un estudiante de primer año en 2037?

54. Análisis de las tasas de interés de una hipoteca Colleen y Bill acaban de comprar una casa por $650 000 y el vendedor tiene una segunda hipoteca de $100 000. Prometen pagarle al vendedor $100 000 más todos los intereses acumulados dentro de 5 años. El vendedor les ofrece tres opciones de intereses sobre la segunda hipoteca:

(a) Interés simple al 6% anual

(b) 5,5% de interés compuesto mensualmente

(c) 5,25% de interés compuesto continuamente

¿Qué opción es mejor? Es decir, ¿qué resulta en pagar el menor interés por el préstamo?

55. Comparación de cuentas bancarias Se abren dos cuentas bancarias al mismo tiempo. El primero tiene un capital de $1000 en una cuenta que gana un 5% compuesto mensual. El segundo tiene un capital de $2000 en una cuenta que gana un interés compuesto anual del 4%. Determine el número de años, redondeado a la décima más cercana, en los que los saldos de las cuentas serán iguales.

56. Deuda federal per cápita En 2018, la deuda federal era de aproximadamente 21 billones de dólares. En 2018, la población estadounidense era de unos 327 millones. Suponiendo que la deuda federal aumenta aproximadamente un 5,5% anual y que la población estadounidense aumenta aproximadamente un 0,7% anual, determine la deuda per cápita (deuda total dividida por la población) en 2030.

Los problemas 57 a 62 requieren la siguiente discusión. La inflación es un término utilizado para describir la erosión del poder adquisitivo del dinero. Por ejemplo, si la tasa de inflación anual es del 3%, entonces $1000 de poder adquisitivo ahora tendrán solo $970 de poder adquisitivo en 1 año porque el 3% de los $1000 originales 10.03 * 1000 = 302 se han erosionado debido a la inflación. En general, si la tasa de inflación promedia r% anual durante n años, la cantidad A que $P comprará después de n años es

A = P # 11 - r2 n

donde r se expresa como decimal.

57. Inflación Si la tasa de inflación promedia el 2%, ¿cuál será el poder adquisitivo de $1000 en 3 años?

58. Inflación Si la tasa de inflación promedia 3,4%, ¿cuánto se comprarán con $2000 en 3 años?

59. Inflación Si el poder adquisitivo de $1000 es solo $930 después de 2 años, ¿cuál fue la tasa de inflación promedio?

60. Inflación Si la cantidad que se comprará con $2000 es solo $1850 después de 3 años, ¿cuál fue la tasa de inflación promedio?

61. Inflación Si la tasa de inflación promedio es del 4%, ¿cuánto tiempo pasará hasta que el poder adquisitivo se reduzca a la mitad?

62. Inflación Si la tasa de inflación promedio es del 2%, ¿cuánto tiempo pasará hasta que el poder adquisitivo se reduzca a la mitad?

Los problemas 63 a 66 involucran bonos cupón cero. Un bono cupón cero es un bono que se vende ahora con descuento y pagará su valor nominal en el momento de su vencimiento; no se realizan pagos de intereses.

63. Bonos de cupón cero Los abuelos de una niña están considerando comprar un bono de cupón cero con un valor nominal de $80 000 cuando nazca para que tenga suficiente dinero para su educación universitaria 17 años después. Si quieren una tasa de rendimiento del 6% compuesto anualmente, ¿cuánto deberían pagar por el bono?

64. Bonos de cupón cero Un bono de cupón cero se puede canjear en 20 años por $10 000. ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar por ello ahora si desea obtener una devolución de:

(a) ¿8% compuesto trimestralmente?

(b) ¿8% compuesto continuamente?

65. Bonos de cupón cero Si Pat paga $15 334,65 por un bono de cupón cero de valor nominal de $25 000 que vence en 8 años, ¿cuál es su tasa de rendimiento anual?

66. Bonos de cupón cero ¿A cuánto debería venderse por ahora un bono de cupón cero de valor nominal de $15 000, con vencimiento a 15 años, si su tasa de rendimiento ha de ser de 7,3% compuesto anualmente?

67. Tiempo para duplicar o triplicar una inversión La siguiente fórmula se puede utilizar para encontrar el número de años t necesarios para multiplicar una inversión m veces cuando r es la tasa de interés anual compuesta n veces al año.

$$t = \frac{\text{en m}}{\frac{r}{\text{norte lna1 + norte segundo}}}$$

(a) ¿ Cuántos años se necesitarán para duplicar el valor de una IRA que se capitaliza trimestralmente a una tasa del 13%?

(b) ¿ Cuántos años se necesitarán para triplicar el valor de una cuenta de ahorros que se capitaliza anualmente a una tasa anual del 7%?

(c) Dé una derivación de esta fórmula.

Machine Translated by Google

68. Es hora de alcanzar un objetivo de inversión La fórmula

$$t = \frac{\text{En A - En P}}{r}$$

se puede utilizar para encontrar el número de años t necesarios para que una inversión P crezca hasta un valor A cuando se capitaliza continuamente a una tasa anual r.

(a) ¿ Cuánto tiempo llevará aumentar una inversión inicial de $1000 a $4500 a una tasa anual del 5,75%?

(b) ¿Qué tasa anual se requiere para aumentar el valor de una cuenta IRA de $2000 a $30 000 en 35 años?

(c) Dé una derivación de esta fórmula.

Los problemas 69 a 72 requieren la siguiente discusión. El índice de precios al consumidor (IPC) indica el cambio relativo en el precio a lo largo del tiempo para una canasta fija de bienes y servicios. Es un índice de costo de vida que ayuda a medir el efecto de la inflación sobre el costo de bienes y servicios.
El IPC utiliza el período base 1982-1984 como comparación (el IPC para este período es 100). El IPC de marzo de 2018 fue de 249,55. Esto significa que 100 dólares en el período 1982-1984 tenían el mismo poder adquisitivo que 249,55 dólares en marzo de 2018. En general, si la tasa de inflación promedia el r% anual durante n años, entonces el índice IPC después de n años es

$$\text{IPC} = \text{IPC0}\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n}$$

donde IPC0 es el índice IPC al inicio del período de n años.
Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales de EE. UU.

69. Índice de Precios al Consumidor Si el IPC actual es 234,2 y la tasa de inflación anual promedio es 2,8%, ¿cuál será el IPC dentro de 5 años?

70. Índice de precios al consumidor

(a) El IPC fue 152,9 para 1995 y 197,8 para 2002. Suponiendo que la inflación anual se mantuvo constante durante este período, determine la tasa de inflación anual promedio.

(b) Utilizando la tasa de inflación del inciso (a), ¿en qué año llegará el IPC a 262?

71. Índice de Precios al Consumidor El período base del IPC cambió en 1998. Con la estructura de ponderaciones y partidas anteriores, el IPC para 1995 fue 456,5. Si la tasa de inflación anual promedio fue del 5,57%, ¿qué año se utilizó como período base para el IPC?

72. Índice de precios al consumidor Si la tasa de inflación anual promedio es del 2,3%, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse el índice IPC?

Explicar conceptos: discusión y escritura

73. Explica con tus propias palabras qué significa interés compuesto medio. ¿ Qué significa capitalización continua ?

74. Explique con sus propias palabras el significado de valor presente.

75. Pensamiento crítico Acaba de contratar la compra de una casa y buscará financiación por la cantidad de 100.000 dólares. Vas a varios bancos. El Banco 1 le prestará $100 000 a una tasa del 4,125% amortizada en 30 años con una comisión de originación del préstamo del 0,45%. El Banco 2 le prestará $100 000 a una tasa del 3,375% amortizada en 15 años con una comisión de originación del préstamo del 0,95%.
El Banco 3 le prestará $100.000 a una tasa del 4,25% amortizada en 30 años sin tarifa de originación del préstamo. El Banco 4 le prestará $100 000 a una tasa del 3,625% amortizada en 15 años sin tarifa de originación del préstamo. ¿Qué préstamo tomarías? ¿Por qué? Ser Seguro que tendrá buenas razones para su elección. Utilice la información de la tabla para ayudarle. Si no te importa el monto del pago mensual, ¿qué préstamo tomarías? Nuevamente, tenga buenas razones para su elección. Compara tu decisión final con la de otros en la clase. Conversar.

	Mensual Pago	Préstamo Tarifa de originación
Banco 1	$485	$450
Banco 2	$709	$950
Banco 3	$492	$0
Banco 4	$721	$0

Conserve su conocimiento

Los problemas 76 a 85 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

76. Encuentra el resto R cuando f 1x2 = 6x3 + 3x2 + 2x - 11 se divide por g1x2 = x - 1. ¿Es g un factor de f?

77. La función f1x2 = $\frac{x}{x-2}$ es uno a uno. encontrar f^{-1}.

78. Encuentra los ceros reales de

f1x2 = x5 - x4 - 15x3 - 21x2 - 16x - 20

Luego escribe f en forma factorizada.

79. Resuelve: log 2 1x + 32 = 2 log 2 1x - 32

80. Factorizar completamente: 2x4 + 6x3 - 50x2 - 150x

81. Si f1x2 = 5x2 + 4x - 8 y g1x2 = 3x - 1, encuentre 1f g21x2.

82. Encuentra el dominio y rango de f1x2 = - 2x2 - 8x + 1.

83. Para f1x2 = $\frac{2x2 - 5x - 4}{x - 7}$, encontrar todas las asíntotas verticales, asíntotas horizontales y asíntotas oblicuas, si las hubiera.

84. Si f1x2 = x2 - 4x - 3, encuentre una ecuación de la recta secante que contenga los puntos 13, f1322 y 15, f1522.

85. Encuentra el cociente de diferencias para f1x2 = 3x - 5.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. $15 2. $13\frac{1}{3}\%$

Machine Translated by Google

5.8 Modelos de Crecimiento y Decaimiento Exponenciales; Ley de Newton; Modelos logísticos de crecimiento y decadencia

OBJETIVOS 1 Modelo de población que obedece la ley del crecimiento desinhibido (p. 371)

2 poblaciones modelo que obedecen la ley de la decadencia desinhibida (p. 373)

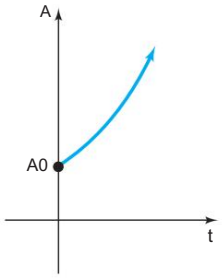
3 Utilice la ley de enfriamiento de Newton (p. 374)

4 Utilice modelos logísticos (p. 376)

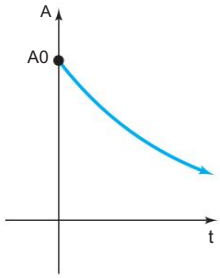
1 Poblaciones modelo que obedecen la ley del crecimiento desinhibido

Muchos fenómenos naturales siguen la ley de que una cantidad A varía con el tiempo t según la función

$$A(t) = A_0 e^{kt} \qquad (1)$$



(a) $A(t) = A_0 e^{kt}$, $k > 0$
Crecimiento exponencial



(b) $A(t) = A_0 e^{kt}$, $k < 0$
Decrecimiento exponencial

Figura 41

Aquí A_0 es la cantidad original $A(t) = A_0$ y $k \neq 0$ es una constante.

Si $k > 0$, entonces la ecuación (1) establece que la cantidad A aumenta con el tiempo; si $k < 0$, la cantidad A disminuye con el tiempo. En cualquier caso, cuando una cantidad A varía con el tiempo según la ecuación (1), se dice que sigue la ley exponencial, o la ley de crecimiento desinhibido $(k > 0)$ o decaimiento $(k < 0)$. Consulte la Figura 41.

Por ejemplo, en la sección 5.7 se demostró que el interés compuesto continuamente sigue la ley del crecimiento desinhibido. En esta sección veremos algunos fenómenos adicionales que siguen la ley exponencial.

La división celular es el proceso de crecimiento de muchos organismos vivos, como las amebas, las plantas y las células de la piel humana. Basado en una situación ideal en la que ninguna célula muere y no se producen subproductos, el número de células presentes en un momento dado sigue la ley del crecimiento desinhibido. En realidad, sin embargo, después de que haya pasado suficiente tiempo, el crecimiento a un ritmo exponencial cesará como consecuencia de factores como la falta de espacio vital y la disminución del suministro de alimentos. La ley del crecimiento desinhibido modela con precisión sólo las primeras etapas del proceso de división celular.

El proceso de división celular comienza con un cultivo que contiene células N_0. Cada célula del cultivo crece durante un cierto período de tiempo y luego se divide en dos células idénticas. Suponga que el tiempo necesario para que cada célula se divida en dos es constante y no cambia a medida que aumenta el número de células. Estas nuevas células luego crecen y, finalmente, cada una se divide en dos, y así sucesivamente.

Crecimiento desinhibido de las células

Un modelo que da el número N de células en un cultivo después de que ha pasado un tiempo t (en las primeras etapas de crecimiento) es

$$N(t) = N_0 e^{kt} \qquad k > 0 \qquad (2)$$

donde N_0 es el número inicial de células y k es una constante positiva que representa la tasa de crecimiento de las células.

El uso de la fórmula (2) para modelar el crecimiento de las células emplea una función que produce números reales positivos, aunque el número de células que se cuentan debe ser un número entero. Esta es una práctica común en muchas aplicaciones.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1 Crecimiento bacterial

Una colonia de bacterias que crece según la ley del crecimiento desinhibido se modela mediante la función N1t2 = 100e0.045t donde N se mide en gramos y t se mide en días.

(a) Determine la cantidad inicial de bacterias. (b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento de las bacterias? (c) ¿Cuál es la población después de 5 días? (d) ¿Cuánto tiempo le tomará a la población alcanzar los 140 gramos? (e) ¿Cuál es el tiempo de duplicación para la población?

Solución (a) La cantidad inicial de bacterias, N0, se obtiene cuando t = 0, por lo que

$$N0 = N102 = 100e0.045\# 0 = 100 \text{ gramos}$$ (b)

Compare N1t2 = 100e0.045t con N1t2 = N0 ekt. El valor de k, 0,045, indica una tasa de crecimiento del 4,5%. (c) La población después de 5 días es N152 = 100e0.045# 5 ≈ 125.2 gramos. (d) Para encontrar cuánto tiempo le toma a la población alcanzar los 140 gramos, resuelva la ecuación N1t2 = 140.

$$\begin{aligned} 100e0.045t &= 140 \\ e0.045t &= 1.4 && \text{Divide ambos lados de la ecuación por 100.} \\ 0{,}045\,t &= \text{en } 1{,}4 && \text{Reescribe como un logaritmo.} \\ t &= \frac{\text{en } 1.4}{0{,}045} && \text{Divide ambos lados de la ecuación por 0,045.} \\ &\approx 7{,}5 \text{ días} \end{aligned}$$

La población alcanza los 140 gramos en unos 7,5 días. (e) La población se duplica cuando N1t2 = 200 gramos, por lo que se calcula el tiempo de duplicación resolviendo la ecuación 200 = 100e0.045t para t.

$$\begin{aligned} 200 &= 100e0.045t \\ 2 &= e0.045t && \text{Divide ambos lados de la ecuación por 100.} \\ \text{En } 2 &= 0{,}045\,t && \text{Reescribe como un logaritmo.} \\ t &= \frac{\text{en } 2}{0.045} && \text{Divide ambos lados de la ecuación por 0,045.} \\ &\approx 15{,}4 \text{ días} \end{aligned}$$

La población se duplica aproximadamente cada 15,4 días.

Ahora trabaja el problema 1

EJEMPLO 2 Crecimiento bacterial

Una colonia de bacterias crece según la ley del crecimiento desinhibido.

(a) Si N es el número de celdas y t es el tiempo en horas, exprese N en función de t. (b) Si el número de bacterias se duplica en 3 horas, encuentre la función que da la número de células en el cultivo.

(c) ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse el tamaño de la colonia? (d) ¿Cuánto tiempo tardará la población en duplicarse por segunda vez (es decir, aumentar cuatro veces)?

Solución (a) Usando la fórmula (2), el número N de celdas en el momento t es

$$N1t2 = N0ekt$$

donde N0 es el número inicial de bacterias presentes y k es un número positivo.

Machine Translated by Google

(b) Para encontrar la tasa de crecimiento k, observe que el número de células se duplica en 3 horas, por lo que

$$N132 = 2N0$$

Dado que $N132 = N0ek\#\ 3$,

$$N0ek\ \#\ 3 = 2N0$$

$$e3k = 2 \qquad \text{Divide ambos lados por N0.}$$

$$3k = en\ 2 \qquad \text{Escribe la ecuación exponencial como un logaritmo.}$$

$$k = \ln 2 \approx 0{,}23105$$

La función que modela este proceso de crecimiento es por tanto

$$N1t2 = N0\ e0.23105t$$

(c) El tiempo t necesario para que el tamaño de la colonia se triplique requiere que N = 3N0. Sustituya 3N0 por N para obtener

$$3N0 = N0\ e0.23105t$$

$$3 = e0.23105t$$

$$0{,}23105\ t = en\ 3$$

$$t = \frac{en\ 3}{0.23105} \approx 4.755 \text{ horas}$$

Se necesitarán unas 4.755 horas, o 4 horas y 45 minutos, para que el tamaño de la colonia se triplique.

(d) Si una población se duplica en 3 horas, se duplicará por segunda vez en 3 horas más, por un tiempo total de 6 horas.

2 Poblaciones modelo que obedecen la ley de la decadencia desinhibida

Los materiales radiactivos siguen la ley de desintegración desinhibida.

Desintegración radiactiva desinhibida

La cantidad A de un material radiactivo presente en el momento t está dada por

$$A1t2 = A0ekt \qquad k\ 6\ 0 \qquad (3)$$

donde A0 es la cantidad original de material radiactivo y k es un número negativo que representa la tasa de desintegración.

Todas las sustancias radiactivas tienen una vida media específica, que es el tiempo necesario para que la mitad de la sustancia radiactiva se desintegre. La datación por carbono utiliza el hecho de que todos los organismos vivos contienen dos tipos de carbono, carbono-12 (un carbono estable) y carbono-14 (un carbono radiactivo con una vida media de 5730 años). Mientras un organismo vive, la proporción de carbono 12 a carbono 14 es constante. Pero cuando un organismo muere, la cantidad original de carbono-12 presente permanece sin cambios, mientras que la cantidad de carbono-14 comienza a disminuir. Este cambio en la cantidad de carbono-14 presente en relación con la cantidad de carbono-12 presente permite calcular cuándo murió el organismo.

EJEMPLO 3 Estimando la edad de las herramientas antiguas

Se descubrió que restos de madera quemada junto con antiguas herramientas de piedra en una excavación arqueológica en Chile contenían aproximadamente el 1,67% de la cantidad original de carbono-14. Si la vida media del carbono-14 es de 5730 años, ¿aproximadamente cuándo fue talado y quemado el árbol?

Machine Translated by Google

Solución Usando la fórmula (3), la cantidad A de carbono-14 presente en el momento t es

$$A1t2 = A0ekt$$

donde A0 es la cantidad original de carbono-14 presente y k es un número negativo. Primero buscamos el número k. Para encontrarlo, utilizamos el hecho de que después de 5730 años, la mitad de la Queda la cantidad original de carbono-14, por lo que $A157302 = A0.\frac{1}{2}$ Entonces

$$\frac{1}{2}A0 = A0ek\#^{5730}$$

$$\frac{1}{2} = e5730k \qquad \text{Divide ambos lados de la ecuación por A0.}$$

$$5730k = \text{en } 2^{\frac{1}{}} \qquad \text{Reescribe como un logaritmo.}$$

$$k = \text{en}\frac{1}{5730}\,2^{\frac{1}{}} \approx -0.000120968$$

Por lo tanto, la fórmula (3) se convierte en

$$A1t2 = A0e^{-0.000120968t}$$

Si la cantidad A de carbono-14 ahora presente es 1,67% de la cantidad original, sigue eso

$$0.0167A0 = A0e^{-0.000120968t}$$

$$0{,}0167 = e^{-0{,}000120968t} \qquad \text{Divide ambos lados de la ecuación por A0.}$$

$$-0{,}000120968t = \text{en } 0{,}0167 \qquad \text{Reescribe como un logaritmo.}$$

$$t = \frac{\text{en } 0{,}0167}{-0.000120968} \approx 33.830 \text{ años}$$

El árbol fue cortado y quemado hace unos 33.830 años. Algunos arqueólogos utilizan esta conclusión para argumentar que los humanos vivieron en América hace casi 34.000 años, mucho antes de lo que generalmente se acepta.

Ahora resuelve el problema 3

3 Utilice la ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton* establece que la temperatura de un objeto calentado disminuye exponencialmente con el tiempo hacia la temperatura del medio circundante.

Ley de enfriamiento de Newton

La temperatura u de un objeto calentado en un momento dado t se puede modelar mediante la siguiente función:

$$u1t2 = T + 1u0 - T2ekt \qquad k 6 0 \qquad (4)$$

donde T es la temperatura constante del medio circundante, u0 es la temperatura inicial del objeto calentado y k es una constante negativa.

EJEMPLO 4 Usando la ley de enfriamiento de Newton

Un objeto se calienta a 100°C (grados Celsius) y luego se deja enfriar en una habitación cuya temperatura del aire es de 30°C.

(a) Si la temperatura del objeto es de 80°C después de 5 minutos, ¿cuándo aumentará su temperatura? ser 50°C?

(b) Determine el tiempo transcurrido antes de que la temperatura del objeto sea de 35°C.

(c) ¿Qué notas sobre la temperatura a medida que pasa el tiempo?

*Nombrado en honor a Sir Isaac Newton 11643917272, uno de los cofundadores del cálculo.

Machine Translated by Google

Solución (a) Usando la fórmula (4) con T = 30 y u0 = 100, la temperatura u(t) (en grados Celsius) del objeto en el tiempo t (en minutos) es

$$u1t2 = 30 + 1100 - 302kt = 30 + 70kt \tag{5}$$

donde k es una constante negativa. Para encontrar k, use el hecho de que u = 80 cuando t = 5. Entonces

$$u1t2 = 30 + 70kt$$

$$80 = 30 + 70ek\#\ 5 \qquad u152 \cdot 80$$

$$50 = 70e5k \qquad \text{Simplificar.}$$

$$e5k = \frac{50}{70} \qquad \text{Resuelva para e5k .}$$

$$5k = en\ 7\ \frac{5}{} \qquad \text{Reescribe como un logaritmo.}$$

$$k = en\frac{1}{5}\ \frac{5}{7} \approx -0{,}0673 \qquad \text{Resuelve para k.}$$

Por lo tanto, la fórmula (5) se convierte en

$$u1t2 = 30 + 70e\text{-}0{,}0673t \tag{6}$$

Para encontrar t cuando u = 50°C, resuelve la ecuación

$$50 = 30 + 70e\text{-}0{,}0673t$$

$$20 = 70e\text{-}0{,}0673t \qquad \text{Simplificar.}$$

$$e\text{-}0.0673t = \frac{20}{70}$$

$$-0{,}0673t = en\ 7\ \frac{2}{} \qquad \text{Reescribe como un logaritmo.}$$

$$t = \frac{en\ \frac{2}{7}}{-0{,}0673} \approx 18{,}6 \text{ minutos} \qquad \text{Resuelve para t.}$$

La temperatura del objeto será de 50°C después de aproximadamente 18,6 minutos, o 18 minutos y 36 segundos.

(b) Utilice la ecuación (6) para encontrar t cuando u = 35°C.

$$35 = 30 + 70e\text{-}0{,}0673t$$

$$5 = 70e\text{-}0{,}0673t \qquad \text{Simplificar.}$$

$$e\text{-}0.0673t = \frac{5}{70}$$

$$-0{,}0673t = En\ 70\ \frac{5}{} \qquad \text{Reescribe como un logaritmo.}$$

$$t = \frac{en\ \frac{5}{70}}{-0{,}0673} \approx 39{,}2 \text{ minutos} \qquad \text{Resuelve para t.}$$

El objeto alcanzará una temperatura de 35°C después de unos 39,2 minutos.

(c) Mire la ecuación (6). A medida que t aumenta, el exponente - 0,0673t se vuelve ilimitado en la dirección negativa. Como resultado, el valor de e-0.0673t se acerca a cero, por lo que el valor de u, la temperatura del objeto, se acerca a 30°C, la temperatura del aire de la habitación.

Ahora resuelve el problema 1 3

Machine Translated by Google

4 Utilice modelos logísticos

El modelo de crecimiento exponencial A1t2 = A0ekt, k 7 0, supone un crecimiento desinhibido, lo que significa que el valor de la función crece sin límite. Recuerde que la división celular podría modelarse utilizando esta función, suponiendo que ninguna célula muere ni se producen subproductos. Sin embargo, la división celular eventualmente se ve limitada por factores como el espacio habitable y el suministro de alimentos. El modelo logístico que se presenta a continuación puede describir situaciones en las que el crecimiento o disminución de la variable dependiente es limitado.

Modelo Logístico

En un modelo logístico, la población P después del tiempo t viene dada por la función

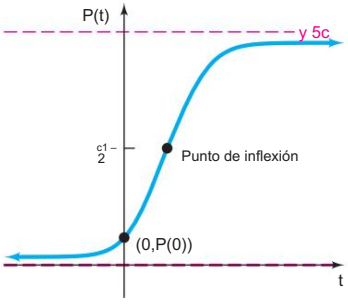
$$P1t2 = 1 \frac{C}{+ ae\text{-}bt} \qquad (7)$$

donde a, byc son constantes con a 7 0 yc 7 0. El modelo es un modelo de crecimiento si b 7 0; el modelo es un modelo de decaimiento si b 6 0.

El número c se llama capacidad de carga (para modelos de crecimiento) porque P1t2 = c. El el valor P1t2 se acerca a c cuando t se acerca al infinito; es decir, lím tSq

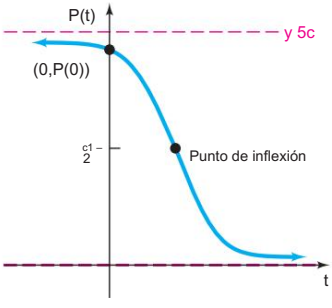
El número 0 b 0 es la tasa de crecimiento para b 7 0 y la tasa de decaimiento para b 6 0. La Figura 42(a) muestra la gráfica de una función de crecimiento logística típica, y la Figura 42(b) muestra la gráfica de una decaimiento logística típica función.

Figura 42



(a) P(t) 5 $\frac{C}{1 \; 1 \; ae2bt}$, b . 0

Crecimiento logístico



(b) P(t) 5 $\frac{C}{1 \; 1 \; ae2bt}$, segundo, 0

Decadencia logística

De las figuras se desprenden las siguientes propiedades de las funciones logísticas.

Propiedades del modelo logístico, ecuación (7)

- El dominio es el conjunto de todos los números reales. El rango es el intervalo 10, c2 donde c es la capacidad de carga.
- No hay intersecciones con el eje x; la intersección con el eje y es P102.
- Hay dos asíntotas horizontales: y = 0 e y = c.
- P1t2 es una función creciente si b 7 0 y una función decreciente si b 6 0.
- Hay un punto de inflexión donde P1t2 es igual a la capacidad de carga. $\frac{1}{2}$

  El punto de inflexión es el punto en el gráfico donde el gráfico cambia de cóncavo a cóncavo hacia abajo para funciones de crecimiento, y el punto donde el gráfico cambia de cóncavo hacia abajo a cóncavo hacia arriba para funciones de decaimiento.

- El gráfico es suave y continuo, sin esquinas ni espacios.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5

Población de moscas de la fruta

Las moscas de la fruta se colocan en una botella de leche de media pinta con un plátano (como alimento) y plantas de levadura (como alimento y como estímulo para poner huevos). Supongamos que la población de moscas de la fruta después de t días está dada por

$$P1t2 = 1 \frac{230}{+ 56,5e\text{-}0,37t}$$

(a) Indique la capacidad de carga y la tasa de crecimiento.

(b) Determine la población inicial.

(c) ¿Cuál es la población después de 5 días?

(d) ¿Cuánto tiempo le toma a la población llegar a 180?

(e) Utilice una herramienta gráfica para determinar cuánto tiempo le toma a la población alcanzar la mitad de la capacidad de carga.

Solución (a) Como t S q, e-0.37t S 0 y P1t2 S la botella tiene 230 $\frac{230}{1}$. La capacidad de carga de la media pinta.

moscas de la fruta. La tasa de crecimiento es 0 b 0 = 0 0,37 0 = 37, por día.

(b) Para encontrar el número inicial de moscas de la fruta en la botella de media pinta, evalúe P102.

$$P102 = 1 \frac{230}{+ 56,5e\text{-}0,37\#\ 0} = \frac{230}{1+56,5} = 4$$

Entonces, inicialmente, había 4 moscas de la fruta en la botella de media pinta.

(c) Después de 5 días, el número de moscas de la fruta en la botella de media pinta es

$$P152 = \approx 23 \frac{230}{1+ 56.5e\text{-}0.37\#\ 5}$$ moscas de la fruta

Después de 5 días, hay aproximadamente 23 moscas de la fruta en la botella.

(d) Para determinar cuándo la población de moscas de la fruta será 180, resuelva la ecuación

$$P1t2 = 180$$

$$\frac{230}{1 + 56,5e\text{-}0,37t} = 180$$

$$230 = 18011 + 56,5e\text{-}0,37t\ 2$$

$$0,2778 \approx 56,5e\text{-}0,37t$$ Divide ambos lados por 180.

$$0,2778 \approx 56,5e\text{-}0,37t$$ Resta 1 de ambos lados.

$$0.0049 \approx e\text{-}0.37t$$ Divide ambos lados por 56,5.

$$\ln 0.00492 \approx - 0.37t$$ Reescribe como una expresión logarítmica.

$$t \approx 14,4 \text{ días}$$ Divide ambos lados por·0,37.

Se necesitarán aproximadamente 14,4 días (14 días, 10 horas) para que la población alcance las 180 moscas de la fruta.

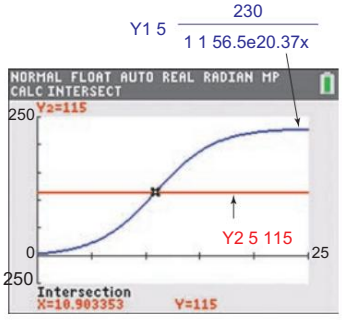


Figura 43 TI-84 Plus C

(e) La mitad de la capacidad de carga son 115 moscas de la fruta. Resuelve P1t2 = 115 graficando $Y1 = \frac{230}{1 + 56,5e\text{-}0,37t}$ y Y2 = 115, y usando INTERSECT. Ver Figura 43.

La población alcanzará la mitad de la capacidad de carga en aproximadamente 10,9 días (10 días, 22 horas).

Mire la Figura 43. Observe el punto donde la gráfica llega a 115 moscas de la fruta (la mitad de la capacidad de carga): la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. Usando el lenguaje del cálculo, decimos que la gráfica cambia de

Machine Translated by Google

aumentando a un ritmo creciente a aumentando a un ritmo decreciente. Para cualquier función de crecimiento logístico, cuando la población alcanza la mitad de la capacidad de carga, el crecimiento de la población comienza a desacelerarse.

Ahora resuelve el problema 2 3

Exploración

En el mismo rectángulo de visualización, grafica

$$Y1 = \frac{500}{1 + 24e\text{-}0{,}03t} \quad \text{y} \quad Y2 = \frac{500}{1 + 24e\text{-}0{,}08t}$$

¿Qué efecto tiene la tasa de crecimiento 0 b 0 sobre la función de crecimiento logístico?

EJEMPLO 6 Productos de madera

El modelo de productos de madera de EFISCEN clasifica los productos de madera según su vida útil. Hay cuatro clasificaciones: corto (1 año), medio corto (4 años), medio largo (16 años) y largo (50 años). Según los datos obtenidos del Instituto Forestal Europeo, el porcentaje de productos de madera restantes después de t años para productos de madera con una larga vida útil (como los utilizados en la industria de la construcción) viene dado por

$$P1t2 = 1\ \frac{100.3952}{+\ 0.0316e0.0581t}$$

(a) ¿Cuál es la tasa de decadencia?

(b) ¿Cuál es el porcentaje de productos de madera que quedan después de 10 años?

(c) ¿Cuánto tiempo toma para que el porcentaje de productos de madera restantes llegar al 50%?

(d) Explique por qué el numerador dado en el modelo es razonable.

Solución (a) La tasa de desintegración es 0 b 0 = 0 - 0,0581 0 = 5,81, por año.

(b) Evaluar P1102.

$$P1102 = 1\ \frac{100.3952}{+\ 0.0316e0.0581\#\ 10} \approx 95{,}0$$

Así, el 95% de los productos de madera de larga duración se conservan después de 10 años.

(c) Resuelva la ecuación P1t2 = 50.

$$\frac{100.3952}{1 + 0.0316e0.0581t} = 50$$

$$100.3952 = 5011 + 0.0316e0.0581t\ 2$$

$$2.0079 \approx 1 + 0.0316e0.0581t \quad \text{Divide ambos lados por 50.}$$

$$1.0079 \approx 0.0316e0.0581t \quad \text{Resta 1 de ambos lados.}$$

$$31.8956 \approx e0.0581t \quad \text{Divide ambos lados por 0,0316.}$$

$$\ln 131.89562 \approx 0.0581t \quad \text{Reescribe como una expresión logarítmica.}$$

$$t \approx 59{,}6 \text{ años} \quad \text{Divide ambos lados por 0,0581.}$$

Se necesitarán aproximadamente 59,6 años para que el porcentaje restante de productos de madera de larga duración alcance el 50%.

(d) El numerador de 100.3952 es razonable porque el porcentaje máximo posible de productos de madera restantes es 100%.

Machine Translated by Google

5.8 Evalúe su comprensión

Aplicaciones y extensiones

1. Crecimiento de una población de insectos El tamaño P de una determinada población de insectos en el tiempo t (en días) obedece a la función P1t2 = 900e0.07t .
   (a) Determine el número de insectos en t = 0 días.
   (b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la población de insectos?
   (c) ¿Cuál es la población después de 10 días?
   (d) ¿Cuándo llegará la población de insectos a 1170?
   (e) ¿Cuándo se duplicará la población de insectos?

2. Crecimiento de bacterias El número N de bacterias presentes en un cultivo en el tiempo t (en horas) obedece a la ley del crecimiento desinhibido N1t2 = 1000e0.01t .
   (a) Determine el número de bacterias en t = 0 horas.
   (b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento de las bacterias?
   (c) ¿Cuál es la población después de 4 horas?
   (d) ¿Cuándo llegará el número de bacterias a 1700?
   (e) ¿Cuándo se duplicará el número de bacterias?

3. Desintegración radiactiva El estroncio-90 es un material radiactivo que se desintegra según la función A1t2 = A0e1-0.0244t2 ,
   donde A0 es la cantidad inicial presente y A es la cantidad presente en el momento t (en años). Supongamos que un científico tiene una muestra de 800 gramos de estroncio-90.
   (a) ¿Cuál es la tasa de desintegración del estroncio-90?
   (b) ¿Cuánto estroncio-90 queda después de 20 años?
   (c) ¿Cuándo quedarán sólo 200 gramos de estroncio-90?
   (d) ¿Cuál es la vida media del estroncio-90?

4. Desintegración radiactiva El yodo-131 es un material radiactivo que se desintegra según la función A1t2 = A0e-0,087t ,
   donde A0 es la cantidad inicial presente y A es la cantidad presente en el momento t (en días). Supongamos que un científico tiene una muestra de 100 gramos de yodo-131.
   (a) ¿Cuál es la tasa de desintegración del yodo-131?
   (b) ¿Cuánto yodo-131 queda después de 9 días?
   (c) ¿Cuándo quedarán 70 gramos de yodo-131?
   (d) ¿Cuál es la vida media del yodo-131?

5. Crecimiento de una colonia de mosquitos La población de una colonia de mosquitos obedece a la ley del crecimiento desinhibido. (a) Si N es la población de la colonia y t es el tiempo en días, exprese N en función de t.

   (b) Si hay 1000 mosquitos inicialmente y hay 1400 después de 1 día, ¿cuál es el tamaño de la colonia después de 2 días?

   (c) ¿ Cuánto tiempo pasará hasta que haya 50.000 mosquitos?

6. Crecimiento bacteriano Un cultivo de bacterias obedece a la ley de crecimiento desinhibido.
   (a) Si N es el número de bacterias en el cultivo y t es el tiempo en horas, exprese N en función de t.
   (b) Si inicialmente hay 500 bacterias y después de 1 hora hay 800, ¿cuántas estarán presentes en el cultivo después de 5 horas?

   (c) ¿Cuánto tiempo pasará hasta que haya 20 000 bacterias?

7. Crecimiento demográfico La población de una ciudad del sur es creciendo según la ley exponencial.
   (a) Si N es la población de la ciudad y t es el tiempo en años, expresar N en función de t.
   (b) Si la población duplicó su tamaño en un período de 18 meses y la población actual es de 10 000, ¿cuál será la población dentro de 2 años?

8. Disminución de la población La población de una ciudad del medio oeste está disminuyendo según la ley exponencial.
   (a) Si N es la población de la ciudad y t es el tiempo en años, expresar N en función de t.
   (b) Si la población disminuyó de 900 000 a 800 000 entre 2016 y 2018, ¿cuál será la población en 2020?

9. Desintegración radiactiva La vida media del potasio radiactivo es de 1.300 millones de años. Si hay 10 gramos ahora, ¿cuántos habrá dentro de 100 años? ¿En 1000 años?

10. Desintegración radiactiva La vida media del radio es de 1690 años. Si hay 40 gramos ahora, ¿cuántos habrá dentro de 460 años?

11. Estimación de la edad de un árbol La vida media del carbono-14 es de 5600 años. Si un trozo de carbón vegetal elaborado con la madera de un árbol muestra sólo el 72% del carbono-14 que se espera en la materia viva, ¿cuándo murió el árbol?

12. Estimación de la edad Una hoja fosilizada contiene el 70% de su tamaño normal. cantidad de carbono-14. ¿Qué edad tiene el fósil?

13. Tiempo de enfriamiento de un molde para pizza Se retira un molde para pizza a las 2:00 pm de un horno cuya temperatura está fijada en 400°F y se lleva a una habitación que tiene una temperatura constante de 72°F. Después de 5 minutos, el molde para pizza estará a 300°F.
   (a) ¿ A qué hora la temperatura del recipiente es de 135°F?
   (b) Determine el tiempo que debe transcurrir antes de que la sartén es 220°.
   (c) ¿Qué observas sobre la temperatura como tiempo? pasa?

14. Ley de enfriamiento de Newton Un termómetro que marca 72°F se coloca en un refrigerador donde la temperatura es constante de 38°F.

   (a) Si el termómetro marca 60°F después de 2 minutos, ¿qué marcará después de 7 minutos?
   (b) ¿Cuánto tiempo pasará antes de que el termómetro marque 39°F?

   (c) Determinar el tiempo que debe transcurrir antes de que el termómetro marca 45°F.
   (d) ¿Qué observas sobre la temperatura como tiempo? pasa?

15. Ley de calentamiento de Newton Un termómetro que marca 8°C se lleva a una habitación con una temperatura constante de 35°C. Si el termómetro marca 15°C después de 3 minutos, ¿qué marcará después de estar en la habitación durante 5 minutos? ¿Durante 10 minutos?

   [Sugerencia: necesita construir una fórmula similar a la ecuación (4).]

Machine Translated by Google

16. Tiempo de calentamiento de una jarra de cerveza Una jarra de cerveza tiene una temperatura de 28°F. Se coloca en una habitación con una temperatura constante de 70°F. Después de 10 minutos, la temperatura de la jarra ha aumentado a 35°F. ¿Cuál será la temperatura de la jarra después de 30 minutos? ¿Cuánto tiempo le tomará a la jarra alcanzar una temperatura de 45°F? (Vea la pista dada para el problema 15.)

17. Descomposición del cloro en una piscina En determinadas condiciones del agua, el cloro libre (ácido hipocloroso, HOCl) de una piscina se descompone según la ley de descomposición desinhibida. Después de aplicar una descarga eléctrica a su piscina, Geoff analizó el agua y encontró que la cantidad de cloro libre era de 2,6 partes por millón (ppm). Veinticuatro horas después, Geoff volvió a analizar el agua y encontró que la cantidad de cloro libre era 2,3 ppm.

¿Cuál será la lectura después de 2 días (es decir, 48 horas)?
Cuando el nivel de cloro alcanza 1,0 ppm, Geoff debe volver a aplicar una descarga eléctrica a la piscina. ¿Cuánto tiempo puede aguantar Geoff antes de volver a sacudir la piscina?

18. Descomposición del pentóxido de dinitrógeno A 45°C, el pentóxido de dinitrógeno (N_2O_5) se descompone en dióxido nitroso (NO_2).
y oxígeno (O_2) según la ley de desintegración desinhibida. Una cantidad inicial de N_2O_5 0,25 M (M es una medida de concentración conocida como molaridad) se descompone en N_2O_5 0,15 M en 17 minutos. ¿Qué concentración de N_2O_5

permanecerá después de 30 minutos? ¿Cuánto tiempo pasará hasta que solo queden 0,01 M N_2O_5 ?

19. Descomposición de la sacarosa Al reaccionar con agua en una solución ácida a 35°C, la sacarosa ($C_{12}H_{22}O_{11}$) se descompone en glucosa ($C_6H_{12}O_6$) y fructosa ($C_6H_{12}O_6$)* según la ley de descomposición no inhibida. Una concentración inicial de 0,40 M de sacarosa se descompone en 0,36 M de sacarosa en 30 minutos. ¿Qué concentración de sacarosa quedará después de 2 horas? ¿Cuánto tiempo pasará hasta que solo queden 0,10 M de sacarosa?

20. Descomposición de la sal en agua La sal (NaCl) se descompone en agua en iones sodio (Na^+) y cloruro (Cl^-) según la ley de desintegración desinhibida. Si la cantidad inicial de sal es de 25 kilogramos y, al cabo de 10 horas, quedan 15 kilogramos de sal, ¿cuánta sal queda al cabo de 1 día? Cuánto tiempo se tarda

hasta $\frac{1}{\text{las } 2}$ ¿Queda un kilo de sal?

21. Radiactividad de Chernobyl Después de la liberación de material radiactivo a la atmósfera desde una central nuclear de un país en 1980, el heno de ese país quedó contaminado por un isótopo radiactivo (vida media de 6 días). Si es seguro alimentar a las vacas con heno cuando queda 9% del isótopo radiactivo, ¿cuánto tiempo tuvieron que esperar los granjeros para usar este heno?

22. Usuarios de Word Según una encuesta realizada por Olsten Staffing Services, el porcentaje de empresas que informan el uso de Microsoft Word t años desde 1984 viene dado por

$$P1t2 = 1 \frac{99.744}{+ 3.014e\text{-}0.799t}$$

(a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento en el porcentaje de Microsoft?
¿Usuarios de Word?

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente P = P1t2.

(c) ¿Cuál fue el porcentaje de usuarios de Microsoft Word?
¿en 1990?

(d) ¿ Durante qué año el porcentaje de Microsoft Word
¿Los usuarios llegan al 90%?

(e) Explique por qué el numerador dado en el modelo es razonable. ¿Qué implica?

23. Computadoras domésticas El modelo logístico

$$P1t2 = 1 \frac{95.4993}{+ 0.0405e0.1968t}$$

representa el porcentaje de hogares que no poseen una computadora personal t años desde 1984.

(a) Evaluar e interpretar P102.

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente P = P1t2.

(c) ¿Qué porcentaje de hogares no poseía una computadora personal en 1995?

(d) ¿ En qué año el porcentaje de hogares que no poseen una computadora personal alcanzó el 10%?

Fuente: Departamento de Comercio de EE. UU.

24. Agricultores El modelo logístico

$$W1t2 = 1 \frac{14.656.248}{+ 0,059e0,057t}$$

representa el número de trabajadores agrícolas en los Estados Unidos t años después de 1910.

(a) Evalúe e interprete W102.

(b) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente W = W1t2.

(c) ¿Cuántos trabajadores agrícolas había en los Estados Unidos?
¿en 2010?

d) ¿Cuándo llegó a 10.000.000 el número de trabajadores agrícolas en los Estados Unidos?

(e) Según este modelo, ¿qué sucede con el número de trabajadores agrícolas en Estados Unidos cuando t se aproxima a q?
Con base en este resultado, ¿cree que es razonable utilizar este modelo para predecir el número de trabajadores agrícolas en los Estados Unidos en 2060? ¿Por qué?

Fuente: Departamento de Agricultura de EE. UU.

25. Cumpleaños El modelo logístico

$$P1n2 = 1 + \frac{113.3198}{0.115e0.0912n}$$

modela la probabilidad de que, en una habitación de n personas, no haya dos personas que compartan el mismo cumpleaños.

(a) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente P = P1n2.

(b) En una sala de n = 15 personas, ¿cuál es la probabilidad de que no haya dos personas que cumplan años el mismo día?

(c) ¿ Cuántas personas deben haber en una habitación antes de que la probabilidad de que dos personas no compartan el mismo cumpleaños caiga por debajo del 10%?

(d) ¿Qué sucede con la probabilidad cuando n aumenta? Explique qué significa este resultado.

26. Población de una especie en peligro de extinción Los ambientalistas a menudo capturan una especie en peligro de extinción y la transportan a un ambiente controlado donde la especie puede producir descendencia y regenerar su población. Supongamos que se capturan seis águilas calvas americanas, se las transporta a Montana y se las libera. Según la experiencia, los ecologistas esperan que la población crezca según el modelo

$$P1t2 = 1 \frac{500}{+ 83,33e\text{-}0,162t}$$

donde t se mide en años.

*Nota del autor: Sorprendentemente, las fórmulas químicas de la glucosa y la fructosa son las mismas: no es un error tipográfico.

Machine Translated by Google

(a) Determine la capacidad de carga del medio ambiente.
(b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del águila calva?
(c) ¿Cuál es la población después de 3 años?
(d) ¿Cuándo será la población de 300 águilas?
(e) ¿ Cuánto tiempo le toma a la población alcanzar la mitad de la capacidad de carga?

27. Especies invasoras Un hábitat puede verse alterado por especies invasoras que desplazan o reemplazan a las especies nativas. El modelo logístico

$$P1t2 = \frac{431}{1 + 7{,}91e^{-0{,}017t}}$$

representa el número de especies invasoras presentes en los Grandes Lagos t años después de 1900.
(a) Evaluar e interpretar P102.
(b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento de las especies invasoras?
(c) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente P = P1t2.
(d) ¿Cuántas especies invasoras estaban presentes en los Grandes Lagos en 2000?
(e) ¿En qué año el número de especies invasoras fue 175?
Fuente: NOAA

28. Redes Sociales El modelo logístico

$$P1t2 = \frac{86.1}{1 + 2{,}12e^{-0{,}361t}}$$

da el porcentaje de estadounidenses que tienen un perfil en las redes sociales, donde t representa el número de años después de 2008.
(a) Evaluar e interpretar P102.
(b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento?
(c) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente P = P1t2.
(d) Durante 2017, ¿qué porcentaje de estadounidenses tenía un perfil en las redes sociales?
(e) ¿ En qué año el 69,3% de los estadounidenses tenían una red social? ¿perfil?
Fuente: Statista, 2018

Los problemas 29 y 30 utilizan la siguiente discusión: El crecimiento desinhibido se puede modelar mediante funciones exponenciales distintas de A1t2 = A0ekt. Por ejemplo, si una población inicial P0 requiere n unidades de tiempo para duplicarse, entonces la función P1t2 = P0 # 2t>n modela el tamaño de la población en el tiempo t. Asimismo, una población que requiere n unidades de tiempo para triplicarse se puede modelar mediante P1t2 = P0 # 3t>n .

29. Crecimiento de una población humana La población de una ciudad está creciendo exponencialmente.
(a) Si su población duplicó su tamaño en un período de 8 años y la población actual es 25 000, escriba una función exponencial de la forma P1t2 = P0 # 2t>n que modele la población.
(b) ¿Cuál será la población dentro de 3 años?
(c) ¿Cuándo llegará la población a 80.000 habitantes?
(d) Exprese el modelo del inciso (a) en la forma A1t2 = A0ekt.

30. Crecimiento de una población de insectos El crecimiento desenfrenado se puede modelar mediante funciones exponenciales distintas de A1t2 = A0ekt. Por ejemplo, si una población inicial P0 requiere n unidades de tiempo triples, entonces la función P1t2 = P0 132t>n modela la tamaño de la población en el momento t. Una población de insectos crece exponencialmente. Complete las partes a a d a continuación.
(a) Si la población se triplica en 30 días y inicialmente hay 40 insectos presentes, escriba una función exponencial de la forma P1t2 = P0 132t>n que modele la población.
(b) ¿Cuál será la población dentro de 47 días?
(c) ¿Cuándo llegará la población a 640?
(d) Exprese el modelo del inciso (a) en la forma A(t) = A0ekt.

Conserve su conocimiento

Los problemas 31 a 40 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

31. Encuentra la función lineal f cuya gráfica contiene los puntos (4, 1) y 18, -52.

32. Determina si las gráficas de la línea lineal

$$\frac{1}{x21y}$$

las funciones f 1x2 = 5x - 1 y g1x2 = x + 1 son paralelas, 5 perpendiculares o ninguna de las dos.

33. Escribe la expresión logarítmica en a z b como la suma y/o diferencia de logaritmos. Expresar potencias como factores.

34. Encuentra el dominio de $f1x2 = x2 \frac{x + 3}{+ 2x - 8}$.

35. Si $f1x2 = \frac{2x - 3}{x - 4}$ y $g1x2 = \frac{3x + 1}{x - 3}$, encuentre 1g - f2 1x2.

36. Encuentra la (s) intersección(es) en x y en y de la gráfica de f1x2 = 2x2 - 5x + 1.

37. Resuelve: $\frac{x + 1}{x} - \frac{x}{x + 1} = 2$

38. Para los datos proporcionados, utilice una utilidad gráfica para encontrar la línea de mejor ajuste. ¿Cuál es el coeficiente de correlación?

x	-4	-2		0	2	4	6
y	9	5	4	2	-1	-2	

39. Utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente f1x2 = x4 - 3x2 + 2x - 1 sobre el intervalo 3 - 3, 34. Luego, aproxime los valores máximos locales y los valores mínimos locales, y determine dónde f aumenta y dónde f disminuye. Redondea las respuestas a dos decimales.

40. escribir $\frac{10x}{312x + 32^{2/3}} + 512x + 32^{1/3}$ como cociente único en en el que solo aparecen exponentes positivos.

Machine Translated by Google

5.9 Construcción de modelos exponenciales, logarítmicos y logísticos a partir de datos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Construcción de modelos lineales a partir de datos (Sección 3.2, págs. 171–175)
- Construcción de modelos cúbicos a partir de datos (Sección 4.2, págs. 230 y 231)
- Construcción de modelos cuadráticos a partir de datos (Sección 3.4, págs. 196 y 197)

OBJETIVOS 1 Construir un modelo exponencial a partir de datos (p. 382)
2 Construya un modelo logarítmico a partir de datos (p. 384)
3 Construya un modelo logístico a partir de datos (p. 384)

En la Sección 3.2 analizamos cómo encontrar la función lineal de mejor ajuste 1y = ax + b2, en la Sección 3.4 analizamos cómo encontrar la función cuadrática de mejor ajuste 1y = ax2 + bx + c2, y en la Sección 4.2 analizamos cómo encontrar la función cúbica de mejor ajuste 1y = ax3 + bx2 + cx + d2.

En esta sección analizamos cómo utilizar una utilidad gráfica para encontrar ecuaciones de mejor ajuste que describan la relación entre dos variables cuando se piensa que la relación es exponencial 1y = abx2, logarítmico 1y = a + b ln x2, o logístico ¢y = $\frac{C}{1 + ae^{-bx}}$ ≤.

Como antes, dibujamos un diagrama de dispersión de los datos para ayudar a determinar el modelo apropiado a utilizar.

La Figura 44 muestra los diagramas de dispersión que normalmente se observan para los tres modelos.

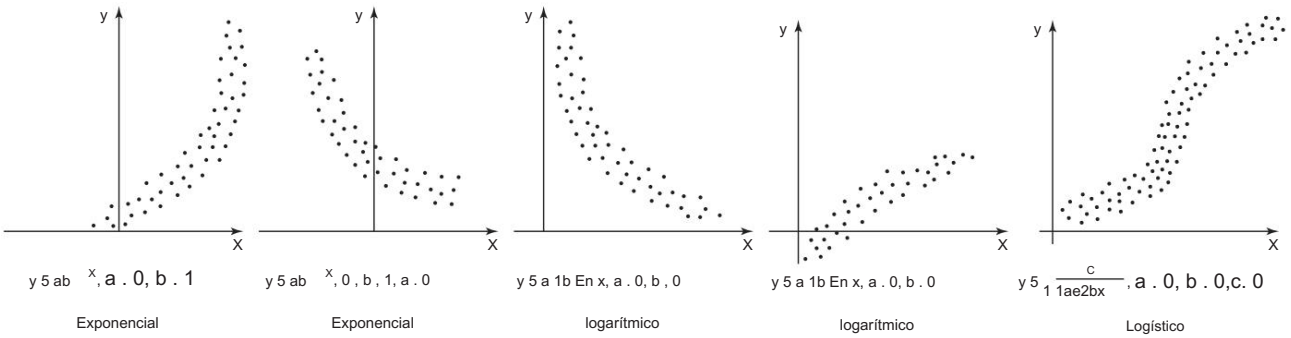


Figura 44

La mayoría de las utilidades gráficas tienen opciones de REGresión que ajustan los datos a un tipo específico de curva. Una vez ingresados los datos y obtenido un diagrama de dispersión, se selecciona el tipo de curva que se desea ajustar a los datos. Luego se utiliza esa opción REGresión para obtener la curva de mejor ajuste del tipo seleccionado.

El coeficiente de correlación r aparecerá sólo si el modelo se puede escribir como una expresión lineal. Resulta que r aparecerá para los modelos lineal, potencia, exponencial y logarítmico, ya que estos modelos se pueden escribir como una expresión lineal.

Recuerde, cuanto más cerca esté 0r0 de 1, mejor será el ajuste.

1 Construya un modelo exponencial a partir de datos

Vimos en la sección 5.7 que el dinero que genera intereses compuestos crece exponencialmente, y vimos en la sección 5.8 que los modelos de crecimiento y decadencia también pueden comportarse exponencialmente. El siguiente ejemplo muestra cómo los datos pueden conducir a un modelo exponencial.

EJEMPLO 1 Ajustar una función exponencial a los datos

Mariah depositó $20 000 en un fondo mutuo bien diversificado hace 6 años. Los datos del Cuadro 9 representan el valor de la cuenta cada año durante los últimos 7 años.

Machine Translated by Google

Tabla 9

Año, x	Valor de la cuenta, y
0	20.000
1	21,516
2	23.355
3	24.885
4	27.484
5	30.053
6	32.622

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión con el año como factor independiente. variable.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo exponencial a partir de los datos.

(c) Exprese la función encontrada en el inciso (b) en la forma A = A0ekt.

(d) Grafique la función exponencial encontrada en los incisos (b) o (c) en el diagrama de dispersión.

(e) Utilizando la solución del inciso (b) o (c), prediga el valor de la cuenta.
Después de 10 años.

(f) Interprete el valor de k encontrado en el inciso (c).

Solución

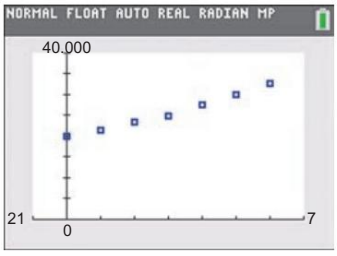


Figura 45 TI-84 Plus C

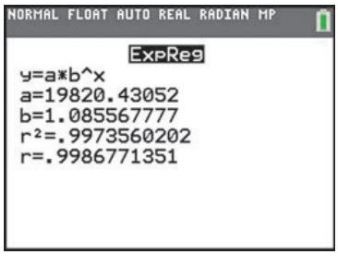


Figura 46 Modelo exponencial usando una TI-84 Plus C

(a) Ingrese los datos en la utilidad gráfica y dibuje el diagrama de dispersión como se muestra en Figura 45 en una TI-84 Plus C.

(b) Una utilidad gráfica ajusta los datos de la Tabla 9 a un modelo exponencial de la forma y = abx usando la opción REGresión EXPonencial. La Figura 46 muestra una TI-84 Plus C. Observe que 0r0 = 0,999, que y = abx = 19,820.4311.0855682 x
que es cercano a 1, lo que indica un buen ajuste.

(c) Para expresar y = abx en la forma A = A0ekt, donde x = t e y = A, proceda como sigue:

$$abx = A0ekt$$

Si x = t = 0, entonces a = A0. Esto lleva a

$$bx = ekt$$

$$bx = 1ek2\ t$$

$$b = ek \qquad x \cdot t$$

Porque y = abx = 19.820,4311,0855682 x , esto significa que a = 19.820,43 y b = 1,085568.

$$a = A0 = 19.820,43 \text{ y } b = ek = 1,085568$$

Para encontrar k, reescribe ek = 1,085568 como un logaritmo para obtener

$$k = \ln 11.0855682 \approx 0.08210$$

Como resultado, A = A0ekt = 19.820,43e0,08210t .

(d) Consulte la Figura 47 para ver el gráfico de la función exponencial de mejor ajuste en una TI-84 Plus C. La Figura 48 muestra el modelo exponencial usando Desmos.

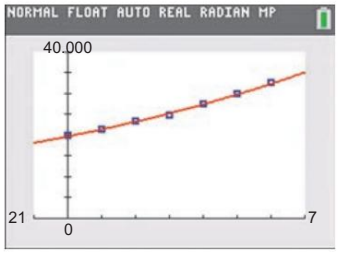


Figura 47

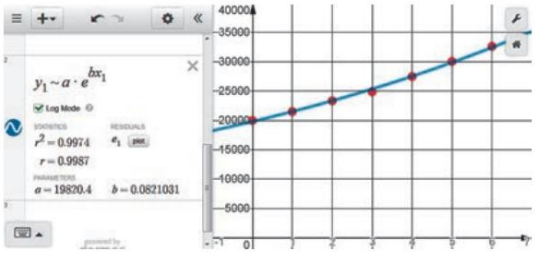


Figura 48 Modelo exponencial usando Desmos*

(e) Sea t = 10 en la función encontrada en el inciso (c). El valor previsto de la cuenta después de 10 años es

$$A = A0ekt = 19.820,43e0,082101102 \approx +45.047$$

(f) El valor de k = 0,08210 = 8,210% representa la tasa de crecimiento anual de la cuenta. Representa la tasa de interés ganada, suponiendo que la cuenta crece continuamente.

Ahora trabaja el problema 1

*Para que este resultado en Desmos coincida exactamente con el resultado de una TI-84 Plus C, se debe seleccionar la opción "Modo de registro". Consulte la función de ayuda en Desmos para obtener más información sobre esta opción.

Machine Translated by Google

2 Construya un modelo logarítmico a partir de datos

Algunas relaciones entre variables siguen un modelo logarítmico.

EJEMPLO 2 Ajustar una función logarítmica a los datos

Tabla 10

Presión atmosférica, p	altura, h
760	0
740	0,184
725	0.328
700	0.565
650	1.079
630	1.291
600	1.634
580	1.862
550	2.235

Jodi, una meteoróloga, está interesada en encontrar una función que explique la relación entre la altura de un globo meteorológico (en kilómetros) y la presión atmosférica (medida en milímetros de mercurio) sobre el globo. Ella recopila los datos que se muestran en la Tabla 10.

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos con presión atmosférica como variable independiente.

(b) Se sabe que la relación entre la presión atmosférica y la altura sigue un modelo logarítmico. Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo logarítmico a partir de los datos.

(c) Grafique la función logarítmica encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para predecir la altura del globo meteorológico si la presión atmosférica es de 560 milímetros de mercurio.

Solución

(a) Ingrese los datos en la herramienta gráfica y dibuje el diagrama de dispersión. Ver Figura 49.

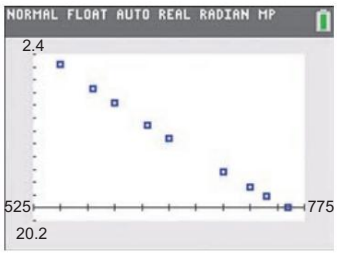


Figura 49 TI-84 Plus C

(b) Una utilidad gráfica ajusta los datos de la Tabla 10 a una función logarítmica de la forma y = a + b ln x usando la opción LOGarithm REGresion. La Figura 50 muestra el resultado en una TI-84 Plus C. El modelo logarítmico de los datos es

$$h1p2 = 45{,}7863 - 6{,}9025 \ln p$$

donde h es la altura del globo meteorológico y p es la presión atmosférica. Observe que 0r0 está cerca de 1, lo que indica un buen ajuste.

(c) La Figura 51 muestra la gráfica de h1p2 = 45,7863 - 6,9025 ln p en el diagrama de dispersión. La Figura 52 muestra el modelo logarítmico usando Desmos.

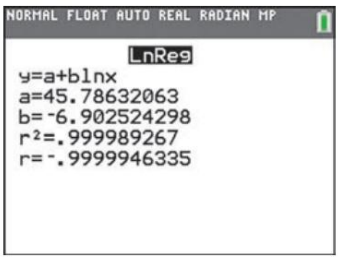


Figura 50 Modelo logarítmico usando una TI-84 Plus C

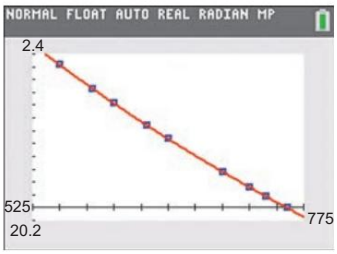


Figura 51

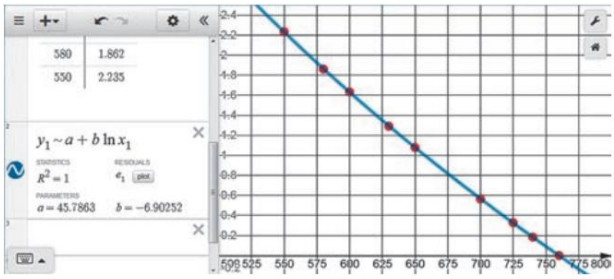


Figura 52 Modelo logarítmico usando Desmos

(d) Usando la función encontrada en el inciso (b), Jodi predice que la altura del globo meteorológico cuando la presión atmosférica es 560 será

$$h15602 = 45{,}7863 - 6{,}9025 \text{ en } 560$$
$$\approx 2.108 \text{ kilómetros}$$

Ahora resuelve el problema 5

3 Construya un modelo logístico a partir de datos

Los modelos de crecimiento logístico se pueden utilizar para modelar situaciones en las que el valor de la variable dependiente es limitado. Muchas situaciones del mundo real se ajustan a este escenario. Por ejemplo, la población de la raza humana está limitada por la disponibilidad de recursos naturales, como alimento y refugio. Cuando el valor de la variable dependiente es limitado, suele ser apropiado un modelo de crecimiento logístico.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3

Adaptación de una función logística a los datos

Los datos de la Tabla 11 representan la cantidad de biomasa de levadura en un cultivo después de t horas.

Tabla 11

Tiempo (horas)	Levadura Biomasa	Tiempo (horas)	Levadura Biomasa	Tiempo (horas)	Levadura Biomasa
0	9.6	7	257,3	14	640,8
1	18.3	8	350,7	15	651.1
2	29.0	9	441.0	decaído	655,9
3	47.2	10	513.3	17	659,6
4	71.1	11	559,7	18	661,8
5	119.1	12	594,8		
6	174,6	13	629,4		

Fuente: Tor Carlson (Über Geschwindigkeit und Grösse der Hefevermehrung in Würze, Biochemische Zeitschrift, Bd. 57, págs. 349–370, 1913)

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos con el tiempo como variable independiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo logístico a partir de los datos.

(c) Utilizando una herramienta gráfica, grafique la función encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) ¿Cuál es la capacidad de carga prevista del cultivo?

(e) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para predecir la población del cultivo en t = 19 horas.

Solución (a) Consulte la Figura 53 para ver un diagrama de dispersión de los datos en una TI-84 Plus C.

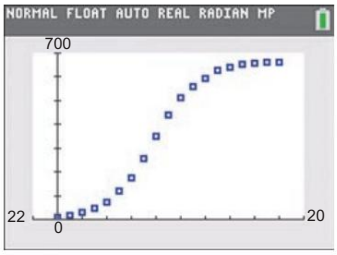


Figura 53 TI-84 Plus C

(b) Una utilidad gráfica ajusta los datos de la Tabla 11 a un modelo de crecimiento logístico del forma y = C / (1 + ae-bx) usando la opción de regresión LOGÍSTICA. La figura 54 muestra el resultado en una TI-84 Plus C. El modelo logístico a partir de los datos es

$$y = \frac{663.0}{1+ 71{,}6e\text{-}0{,}5470x}$$

donde y es la cantidad de biomasa de levadura en el cultivo y x es el tiempo.

(c) Consulte la Figura 55 para ver el gráfico del modelo logístico en una TI-84 Plus C. Figura 56 muestra el modelo logístico usando Desmos.

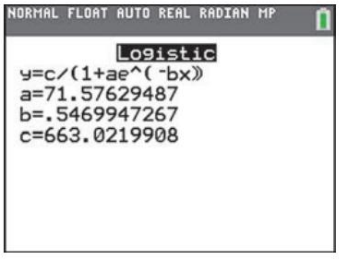


Figura 54 Modelo logístico utilizando una TI-84 Plus C

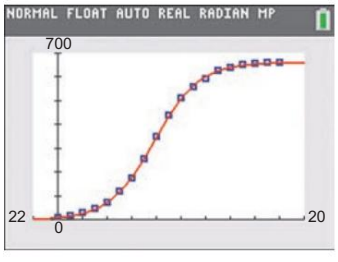


Figura 55

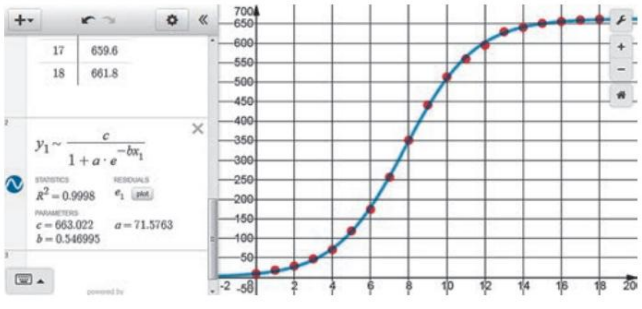


Figura 56 Modelo logístico usando Demos

(d) Según el modelo de crecimiento logístico encontrado en el inciso (b), la capacidad de carga del cultivo es 663.

(e) Utilizando el modelo de crecimiento logístico encontrado en la parte (b), la cantidad prevista de levadura la biomasa en t = 19 horas es

$$y = \frac{663.0}{1+ 71{,}6e\text{-}0{,}5470 \# 19} \approx 661{,}5$$

Ahora trabaja el problema 7

Machine Translated by Google

5.9 Evalúe su comprensión

Aplicaciones y extensiones

1. Biología Se coloca una cepa de E-coli Beu 397-recA441 en un caldo nutritivo a 30° Celsius y se deja crecer. Se recopilan los siguientes datos. La teoría establece que la cantidad de bacterias en la placa de Petri crecerá inicialmente según la ley del crecimiento desinhibido. La población se mide mediante un dispositivo óptico en el que se mide la cantidad de luz que pasa a través de la placa de Petri.

Tiempo (horas), x	Población, y
0	0,09
2.5	0,18
3.5	0,26
4.5	0,35
6	0,50

Fuente: Dra. Polly Lavery, Joliet universidad junior

(a) Dibuje un diagrama de dispersión tratando el tiempo como el factor independiente variable.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo exponencial a partir de los datos.

(c) Exprese la función encontrada en el inciso (b) en la forma N1t2 = N0ekt.

(d) Grafique la función exponencial encontrada en los incisos (b) o (c) en el diagrama de dispersión.

(e) Utilice la función exponencial del inciso (b) o (c) para predecir la población en x = 7 horas.

(f) Utilice la función exponencial de los incisos (b) o (c) para predecir cuándo la población llegará a 0,75.

2. Ingresos de Tesla, Inc. Los datos de la siguiente tabla representan los ingresos anuales de Tesla, Inc. de 2010 a 2017.

Año	Ingresos ($ mil millones)
2010 1x = 02	0,12
2011 1x = 12	0,20
2012 1x = 22	0,41
2013 1x = 32	2.01
2014 1x = 42	3.20
2015 1x = 52	4.05
2016 1x = 62	7.00
2017 1x = 72	11.76

Fuente: Tesla, Inc.

(a) Usando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos usando 0 para 2010, 1 para 2011, etc., como variable independiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo exponencial a partir de los datos.

(c) Exprese la función encontrada en el inciso (b) en la forma A1t2 = A0ekt.

(d) Grafique la función exponencial encontrada en los incisos (b) o (c) en el diagrama de dispersión.

(e) Utilice la función exponencial del inciso (b) o (c) para predecir los ingresos de Tesla en 2019.

(f) Interprete el significado de k en la función encontrada en parte (c).

3. Cáncer de mama en estadio avanzado Los datos de la siguiente tabla representan el porcentaje de pacientes que han sobrevivido después del diagnóstico de cáncer de mama en estadio avanzado en intervalos de 6 meses.

Tiempo después del diagnóstico (años)	Porcentaje de supervivencia
0,5	95,7
1	83,6
1.5	74.0
2	58,6
2.5	47,4
3	41,9
3.5	33,6

Fuente: Centros de tratamiento del cáncer de América

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos con el tiempo después del diagnóstico como variable independiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo exponencial a partir de los datos.

(c) Exprese la función encontrada en el inciso (b) en la forma A1t2 = A0ekt.

(d) Grafique la función exponencial encontrada en los incisos (b) o (c) en el diagrama de dispersión.

(e) ¿Utilizar el modelo para predecir el porcentaje de pacientes diagnosticados con cáncer en estadio avanzado que sobreviven 4 años después del diagnóstico inicial?

(f) Interprete el significado de k en la función encontrada en parte (c).

4. Química Un químico tiene una muestra de 100 gramos de material radiactivo. Registra la cantidad de material radiactivo cada semana durante 7 semanas y obtiene los siguientes datos:

Semana	Peso (en gramos)
0	100.0
1	88.3
2	75,9
3	69,4
4	59.1
5	51,8
6	45,5

Machine Translated by Google

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión con la semana como variable independiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo exponencial a partir de los datos.

(c) Exprese la función encontrada en el inciso (b) en la forma A1t2 = A0ekt.

(d) Grafique la función exponencial encontrada en los incisos (b) o (c) en el diagrama de dispersión.

(e) A partir del resultado obtenido en el inciso (b), determine la vida media del material radiactivo.

(f) ¿Cuánto material radiactivo quedará después de 50 semanas?

(g) ¿Cuándo habrá 20 gramos de material radiactivo?

5. Producción de leche Los datos de la siguiente tabla representan el número de granjas lecheras (en miles) y la cantidad de leche producida (en miles de millones de libras) en los Estados Unidos durante varios años.

Año	Granjas lecheras (miles)	Leche Producida (miles de millones de libras)
1980	334	128
1985	269	143
1990	193	148
1995	140	155
2000	105	167
2005	78	177
2010	63	193
2015	44	209

Fuente: Servicios Nacionales de Estadísticas Agrícolas

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos con el número de granjas lecheras como variable independiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo logarítmico a partir de los datos.

(c) Grafique la función logarítmica encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) En 2008, había 67 mil granjas lecheras en los Estados Unidos. Utilice la función del inciso (b) para predecir la cantidad de leche producida en 2008.

(e) La cantidad real de leche producida en 2008 fue de 190 mil millones de libras. ¿Cómo se compara tu predicción del inciso (d) con esto?

6. Redes sociales Los datos de la siguiente tabla representan el porcentaje de ciudadanos estadounidenses de 12 años o más que tienen un perfil en al menos una red social.

Año	Porcentaje en un Sitio de red social
2008 1x = 82	24
2009 1x = 92	34
2010 1x = 102	48
2011 1x = 112	52
2012 1x = 122	56
2013 1x = 132	62
2014 1x = 142	67
2015 1x = 152	73
2016 1x = 162	78
2017 1x = 172	81

Fuente: Statista.com

(a) Usando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos usando 8 para 2008, 9 para 2009, etc., como variable independiente y el porcentaje en sitios de redes sociales como variable dependiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo logarítmico a partir de los datos.

(c) Grafique la función logarítmica encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) Utilice el modelo para predecir el porcentaje de ciudadanos estadounidenses en Sitios de redes sociales en 2019.

(e) Utilice el modelo para predecir el año en el que el 98% de los ciudadanos estadounidenses estarán en sitios de redes sociales.

7. Modelo de población Los siguientes datos representan la población de los Estados Unidos. Un ecologista está interesado en construir un modelo que describa la población de Estados Unidos.

Año	Población
1900	76.212.168
1910	92.228.496
1920	106.021.537
1930	123.202.624
1940	132.164.569
1950	151.325.798
1960	179.323.175
1970	203.302.031
1980	226.542.203
1990	248.709.873
2000	281.421.906
2010	308.745.538

Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos utilizando los años desde 1900 como variable independiente y la población como variable dependiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo logístico a partir de los datos.

(c) Utilizando una herramienta gráfica, grafique la función encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) Con base en la función encontrada en el inciso (b), ¿cuál es la capacidad de carga de Estados Unidos?

(e) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para predecir la población de Estados Unidos en 2012.

(f) ¿Cuándo llegará la población de Estados Unidos a 350.000.000?

(g) Compare las cifras reales del censo de EE. UU. con las predicciones que se encuentran en las partes (e) y (f). Discuta cualquier diferencia.

8. Modelo de población Los datos que siguen en la página siguiente representan la población mundial. Un ecologista está interesado en construir un modelo que describa la población mundial.

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos utilizando los años desde 2000 como variable independiente y la población como variable dependiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo logístico a partir de los datos.

(c) Utilizando una herramienta gráfica, grafique la función encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) Con base en la función encontrada en el inciso (b), ¿cuál es la capacidad de carga del mundo?

(continuado)

Machine Translated by Google

(e) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para predecir la población del mundo en 2025.

f) ¿Cuándo llegará la población mundial a 10 mil millones?

Año	Población (miles de millones)	Año	Población (miles de millones)
2001	6.22	2010	6,96
2002	6.30	2011	7.04
2003	6.38	2012	7.13
2004	6.46	2013	7.21
2005	6.54	2014	7.30
2006	6.62	2015	7.38
2007	6.71	2016	7.47
2008	6,79	2017	7,55
2009	6,87	2018	7.63

Fuente: worldometers.info

9. Ingresos por publicidad en línea de prácticas mixtas Los datos de la siguiente tabla representan los ingresos por publicidad en línea de EE. UU. para los años 2005-2016.

Año	Ingresos por publicidad online en EE. UU. (miles de millones de dólares)
2005 1x = 02	12.5
2006 1x = 12	16.9
2007 1x = 22	21.2
2008 1x = 32	23.4
2009 1x = 42	22.7
2010 1x = 52	26.0
2011 1x = 62	31,7
2012 1x = 72	36,6
2013 1x = 82	42,8
2014 1x = 92	49,5
201 5 1x = 102	59,6
2016 1x = 112	72,5

Fuente: marketingcharts.com

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos usando 0 para 2005, 1 para 2006, y así sucesivamente como variable independiente, y los ingresos por publicidad en línea como variable dependiente.

(b) Con base en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso (a), decida qué modelo (lineal, cuadrático, cúbico, exponencial, logarítmico o logístico) cree que describe mejor la relación entre el año y los ingresos.

(c) Utilizando una utilidad gráfica, encuentre el modelo de mejor ajuste.

(d) Usando una herramienta gráfica, grafique la función encontrada en el inciso (c) en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso (a).

(e) Utilice su modelo para predecir los ingresos por publicidad en línea. en 2021.

10. Práctica mixta Edad versus colesterol total Los datos en la parte superior de la siguiente columna representan la edad y el colesterol total promedio para hombres adultos de distintas edades.

Edad	Total Colesterol
27	189
40	205
50	215
60	210
70	210
80	194

(a) Usando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos usando la edad, x, como variable independiente y el colesterol total, y, como variable dependiente.

(b) Con base en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso (a), decida cuál es el modelo (lineal, cuadrático, cúbico, exponencial, logarítmico o logístico) que crea que describe mejor la relación entre la edad y el colesterol total. Asegúrese de justificar su elección de modelo.

(c) Usando una herramienta gráfica, encuentre el modelo de mejor ajuste.

(d) Usando una herramienta gráfica, grafique la función encontrada en el inciso (c) en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso (a).

(e) Utilice su modelo para predecir el colesterol total de un hombre de 35 años.

11. Golf de práctica mixta Los datos siguientes representan el porcentaje esperado de putts que realizarán los golfistas profesionales en el PGA Tour, dependiendo de la distancia. Por ejemplo, se espera que se realice el 99,3% de los putts de 2 pies.

Distancia (pies)	Esperado Porcentaje	Distancia (pies)	Esperado Porcentaje
2	99,3	14	25.0
3	94,8	15	22.0
4	85,8	dieciséis	20.0
5	74,7	17	19.0
6	64,7	18	17.0
7	55,6	19	16.0
8	48,5	20	14.0
9	43.4	21	13.0
10	38.3	22	12.0
11	34.2	23	11.0
12	30.1	24	11.0
13	27.0	25	10.0

Fuente: TheSandTrap.com

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos con la distancia como variable independiente.

(b) Con base en el diagrama de dispersión dibujado en el inciso (a), decida cuál es el modelo (lineal, cuadrático, cúbico, exponencial, logarítmico o logístico) que crea que describe mejor la relación entre la distancia y el porcentaje esperado. Asegúrese de justificar su elección de modelo.

(c) Usando una herramienta gráfica, encuentre el modelo de mejor ajuste.

(d) Grafique la función encontrada en el inciso (c) en el diagrama de dispersión.

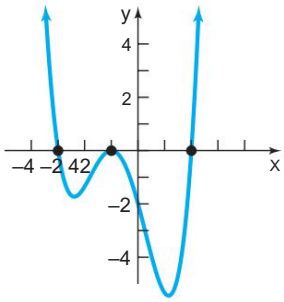
(e) Utilice la función encontrada en el inciso (c) para predecir qué porcentaje de putts de 30 pies se realizarán.

Machine Translated by Google

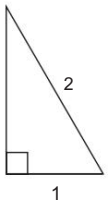
Conserve su conocimiento

Los problemas 12 a 21 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

12. Construya una función polinómica que tenga la gráfica que se muestra. (Es posible más de una respuesta).



13. Usa el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud exacta del lado sin etiqueta en el triángulo rectángulo dado.



14. Grafica la ecuación 1x - 32 15. ^{2} + y2 = 25.

Encuentra el punto medio del segmento de recta con puntos finales 1 - 7, 52 y 11, - 92.

16. Encuentra la función cuya gráfica tiene la forma de y = 2x, pero se desplazó 4 unidades hacia la derecha y se reflejó sobre el eje x.

17. Resuelve: 3x2 - 4x - 5 = 0

18. Resuelve: $\frac{x + 1}{x2 - 25}$ U 0

19. Usa el teorema del resto para encontrar el resto. cuando f1x2 = 3x5 - 7x4 - 27x3 + 67x2 - 36 se divide por x + 3. ¿Es x + 3 un factor de f1x2?

20. Encuentra la tasa de cambio promedio de f1x2 = 8x de a 3 $\frac{1}{}$ $\frac{2}{3}$.

21. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que f1x2 = - x4 + 2x3 - 5x + 1 tiene un cero en el intervalo 3 - 2, - 14. Luego, aproxima el cero correcto a dos decimales.

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Función compuesta (p. 295)

1f g2 1x2 = f1g1x2 2; El dominio de f g es el conjunto de todos los números x en el dominio de g para los cuales g1x2 está en el dominio de f.

Función uno a uno f (p. 303)

Una función para la cual dos entradas diferentes en el dominio corresponden a dos salidas diferentes en el rango

Para cualquier elección de elementos x1, x2 en el dominio de f, si x1 · x2, entonces f1x12 · f1x22.

Prueba de línea horizontal (p. 304)

Si cada línea horizontal corta la gráfica de una función f como máximo en un punto, f es uno a uno.

Función inversa f $^{\cdot 1}$ apagado _ (págs. 305, 310)

Para una función uno a uno y = f1x2, la correspondencia del rango de f al dominio de f.
Dominio de f = rango de ff $^{-1}$; rango de f = dominio de f $^{-1}$

$^{-1}$ 1f1x22 = x para todo x en el dominio de f

f1f $^{-1}$ 1x22 = x para todo x en el dominio de f $^{-1}$

Las gráficas de f y f $^{-1}$ son simétricos con respecto a la recta y = x.

Propiedades de la función exponencial (págs. 320, 322, 326)

f1x2 = Cax , un 7 1, C 7 0

Dominio: el intervalo 1 - q, q 2
Rango: el intervalo 10, q 2
intersecciones x: ninguna; intercepto en y: C
Asíntota horizontal: eje x 1y = 02 como x S - q
Creciente; cara a cara; liso; continuo
Consulte la Figura 21 para ver un gráfico típico.

f1x2 = Cax , 0 6 un 6 1, C 7 0

Dominio: el intervalo 1 - q, q 2
Rango: el intervalo 10, q 2
intersecciones x: ninguna; intercepto en y: C
Asíntota horizontal: eje x 1y = 02 como x S q
Decreciente; cara a cara; liso; continuo
Consulte la Figura 25 para ver un gráfico típico.

Machine Translated by Google

Número e (pág. 323)	Número al que se acerca la expresión a1 + $\frac{1}{n}$b^{n} como n S q	
Propiedad de los exponentes (p. 324)	Si au = av , entonces u = v.	
Logaritmo natural (pág. 335)	y = ln x si y sólo si x = ey .	
Propiedades de la función logarítmica (p. 340)	f1x2 = log x, a 7 1 1y = loga x si y sólo si x = ay 2	Dominio: el intervalo 10, q 2 Rango: el intervalo 1 - q, q 2 intercepción x: 1; intercepción y: ninguna Asíntota vertical: x = 0 (eje y) Creciente; cara a cara; liso; continuo Consulte la Figura 39(a) para ver un gráfico típico.
	f1x2 = log x, 0 6 a 6 1 1y = loga x si y sólo si x = ay 2	Dominio: el intervalo 10, q 2 Rango: el intervalo 1 - q, q 2 intercepción x: 1; intercepción y: ninguna Asíntota vertical: x = 0 (eje y) Decreciente; cara a cara; liso; continuo Consulte la Figura 39(b) para ver un gráfico típico.
Propiedades de los logaritmos (págs. 345–346, 349)	loga 1 = 0 loga a = 1 alogaM = M loga ar = r ar = er en un loga 1MN2 = loga M + loga N loga a M N b = loga M - loga N loga Señor = r loga M Si M = N, entonces loga M = loga N. Si loga M = loga N, entonces M = N.	

Fórmulas

Fórmula de cambio de base (p. 350)	loga M = $\frac{\text{iniciar sesión M}}{\log a}$ a · 1, b · 1 y M son números reales positivos
Fórmula de interés compuesto (p. 362)	A = P # a1 + $\frac{r}{n}$b nt
Composición continua (p. 364)	A = impertinente
Tasa de interés efectiva (p. 365)	$\frac{r}{n}$ - 1 Capitalización n veces por año: rE = a1 + n b n Composición continua: rE = er - 1
Fórmulas de valor presente (p. 366)	P = A # a1 + $\frac{r}{\text{norte segundo -nt}}$ o P = Ae-rt
Crecimiento o decadencia desinhibida (págs. 371, 373)	A1t2 = A0ekt k · 0; crecimiento, k 7 0; decadencia, k 6 0
Ley de enfriamiento de Newton (p. 374)	u1t2 = T + 1u0 - T2ekt k 6 0
Modelo logístico (pág. 376)	P1t2 = 1 $\frac{C}{+ ae-bt}$ a 7 0, c 7 0, segundo · 0

Objetivos

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
5.1	1 Formar una función compuesta (p. 295)	1, 2, 4, 5	1–6
	2 Encuentra el dominio de una función compuesta (p. 296)	2–4	4–6
5.2	1 Determinar si una función es uno a uno (p. 303)	1, 2	7(a), 8
	2 Obtén la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica de una función uno a uno (p. 306)	3	8
	3 Verificar una función inversa (p. 307)	4, 5	9, 10
	4 Encuentra la inversa de una función definida por una ecuación (p. 308)	6, 7, 8	11-14
5.3	1 Evaluar funciones exponenciales (p. 315)	1	15(a), (c), 48(a)
	2 Graficar funciones exponenciales (p. 319)	3–6	32–34, (a)–(c), 35(d)–(f)
	3 Defina el número e (p. 322)	pag. 323	
	4 Resolver ecuaciones exponenciales (p. 324)	7, 8	36, 37, 40, 42, 48(b)

Machine Translated by Google

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
5.4	1 Cambie declaraciones exponenciales a declaraciones logarítmicas y declaraciones logarítmicas a declaraciones exponenciales (p. 332)	2, 3	16, 17
	2 Evaluar expresiones logarítmicas (p. 333)	4	15(b), (d), 20, 47(b), 49(a), 50
	3 Determinar el dominio de una función logarítmica (p. 333)	5	18, 19, 35(a)
	4 Graficar funciones logarítmicas (pág. 334)	6, 7	32–34, (d)–(f), 35(b)–(c), 47(a)
	5 Resolver ecuaciones logarítmicas (p. 338)	8, 9	38, 47(c), 49(b)
5.5	1 Trabajar con las propiedades de los logaritmos (p. 345)	1, 2	21, 22
	2 Escribe una expresión logarítmica como suma o diferencia de logaritmos (pág. 347)	3–5	23–26
	3 Escribe una expresión logarítmica como un logaritmo único (p. 348)	6	27–29
	4 Evalúa logaritmos cuya base no es ni 46 ni e (p. 349)	7,	30, 31
5.6	1 Resolver ecuaciones logarítmicas (p. 354)	8 1–3	38, 41, 44
	2 Resolver ecuaciones exponenciales (p. 356)	4–6	39, 43, 45, 46
	3 Resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales usando una utilidad gráfica (p. 357)	7	36–46
5.7	1 Determinar el valor futuro de una suma global de dinero (p. 361)	1–3	51
	2 Calcular las tasas de rendimiento efectivas (p. 364)	4	51
	3 Determinar el valor presente de una suma global de dinero (p. 365)	5	52
	4 Determine la tasa de interés o el tiempo necesario para duplicar una suma global de dinero (p. 366)	6, 7	51
5.8	1 Modelo de poblaciones que obedecen la ley del crecimiento desinhibido (p. 371)	1, 2	55
	2 Poblaciones modelo que obedecen la ley de desintegración desinhibida (p. 373)	3	53, 56
	3 Utilice la ley de enfriamiento de Newton (p. 374)	4	54
	4 Utilizar modelos logísticos (p. 376)	5, 6	57
5.9	1 Construya un modelo exponencial a partir de datos (p. 382)	1	58
	2 Construya un modelo logarítmico a partir de datos (p. 384)	2	59
	3 Construya un modelo logístico a partir de datos (p. 384)	3	60

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 a 3, para cada par de funciones f y g, encuentre:

(a) 1f g2 122 (b) 1g f2 1 - 22 1. f1x2 = 3 - 4x; (c) 1f f2 142 (b) 1g g2 1 - 12

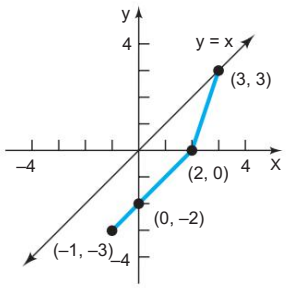
g1x2 = 3x2 - 10 En los problemas 4 a 6, encuentre 2. f1x2 = 2x + 2; g1x2 = 2x2 + 1 3. f1x2 = 2x2 - 1; g1x2 = 3x - 5

f f, f f y g g, g g para cada par de funciones. Indique el dominio de cada función compuesta.

4. f1x2 = 2 - x; g1x2 = 3x + 1 5. f1x2 = 2x - 1; g1x2 = x2 + 3x + 1 ; g1x2 = x - 1 6. f1x2 = $\frac{x + 1}{x}$ $\frac{1}{x}$

7. (a) Verifique que la función sea uno a uno. (b) Encuentre la inversa de la función dada.
Para la función 5 13, 22, 15, 102, 12, 52, 17, 32 6

8. A continuación se muestra la gráfica de una función f . Indique por qué f es uno a uno. Luego dibuja la gráfica de la función inversa f^{-1}.



En los problemas 9 y 10, verifique que las funciones f y g son inversas entre sí demostrando que f1g1x2 2 = x y g1f1x2 2 = x.
Indique los valores de x que deban excluirse del dominio de f y del dominio de g.

9. f1x2 = 5x - 10; g1x2 = $\frac{1}{x + 2}$ 5 10. f1x2 = $\frac{x - 4}{x}$; g1x2 = 1- $\frac{4}{x}$

Machine Translated by Google

En los problemas 11 a 14, cada función es uno a uno. Encuentra la inversa de cada función y comprueba tu respuesta. Encuentra el dominio y rango de f y f^{-1}.

11. $f(x) = \frac{2x+3}{5x-2}$ 12. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 13. $f(x) = \sqrt{2x-2}$ 14. $f(x) = x^3 + 1$

En el problema 15, f(x) = 3x y g(x) = log3 x.

15. Si f(x) = 4x y g(x) = log2 x, evalúe cada uno de los siguientes.

(a) f(2) (b) g(16) (c) f(-3) (d) $g(\sqrt{3})$

16. Convierta $3^5 = z$ en un enunciado equivalente que incluya un logaritmo.

17. Convierta $\log_3 z = 7$ en una declaración equivalente que involucre un exponente.

En los problemas 18 y 19, encuentre el dominio de cada función logarítmica.

18. f(x) = log(3x - 2) 19. H(x) = log2 (2 - 3x + 2)

En los problemas 20 a 22, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

20. $\log_3 27$ 21. $\ln e^{12}$ 22. $2\log_2 0.4$

En los problemas 23 a 26, escribe cada expresión como la suma y/o diferencia de logaritmos. Expresar potencias como factores.

23. $\log_5 \sqrt{xy^2}$, x > 0, y > 0, z > 0 24. $\log_2 (a^2 b^4)$, a > 0, b > 0

25. $\log(x^2\sqrt{2x+1})$, x > 0 26. $\ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x+2}\right)^2$, x > 2

En los problemas 27 a 29, escribe cada expresión como un logaritmo único.

27. $\frac{1}{2}\log_2 x^3 - 3\log_2 (x^2+1)$, x > 0 28. $\ln(x-1) + \ln x - \ln(x+1) - \ln(x^2-1)$

29. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 4\ln 1 - \frac{1}{2}\ln(x-4)^3 + \ln x^4$

30. Usa la fórmula de cambio de base y una calculadora para evaluar $\log_4 19$. Redondea tu respuesta a tres decimales.

31. Grafica $y = \log_3 x$ usando una herramienta gráfica y la fórmula de cambio de base.

En los problemas 32 a 35, para cada función f:

(a) Encuentre el dominio de f. (b) Gráfica (c) A partir de la gráfica, determine el rango y las asíntotas de f.

(d) Encuentre f^{-1}, la función inversa de f. f. (e) Encuentre el dominio y el rango de f^{-1}. (f) Gráfica f^{-1}.

32. $f(x) = 2^{x-3}$ 33. $f(x) = 1 + 3^{-x}$ 34. $f(x) = 3e^{x-2}$ 35. $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x+3)$

En los problemas 36 a 46, resuelve cada ecuación. Expresar soluciones irracionales en forma exacta.

36. $5^{3x+7} = 25$ 37. $3^{x^2+x} = 27$ 38. $\log_x 64 = -3$ 39. $5^x = 3^{x+2}$

40. $25^{2x} = 5^{x^2-12}$ 41. $\log_3(2x-2) = 2$ 42. $8 = 4^{x^2} \# 25^x$ 43. $2^x \# 5 = 10^x$

44. $\log_7(x+2) + \log_7(x-4) = 1$ $e^{1-x} = 5$ 46. $9^x + 4 \# 3^{x+3} = 0$

---

47. Supongamos que $f(x) = \log_2(x-2) + 1$.

(a) Gráfica f.

(b) ¿ Qué es f(6)? ¿Qué punto está en la gráfica de f ?

(c) Resuelva f(x) = 4. ¿Qué punto está en la gráfica de f ?

(d) Con base en la gráfica dibujada en el inciso (a), resuelva f(x) > 0.

(e) Encuentre $f^{-1}(x)$. Gráfico f^{-1} en el mismo plano cartesiano como f.

48. Amplificación del sonido La potencia de salida de un amplificador P (en vatios) está relacionada con su ganancia de voltaje en decibelios d mediante la fórmula

$$P = 25e^{0.1d}$$

(a) Encuentre la potencia de salida para una ganancia de voltaje en decibeles. de 4 decibeles.

(b) Para una potencia de salida de 50 vatios, ¿cuál es la ganancia de voltaje en decibeles?

49. Magnitud límite de un telescopio La utilidad de un telescopio está limitada por el brillo de la estrella a la que apunta y por el diámetro de su lente. Una medida del brillo de una estrella es su magnitud; cuanto más tenue es la estrella, mayor es su magnitud. Una fórmula para la magnitud límite L de un telescopio, es decir, la magnitud de la estrella más tenue que se puede utilizar para observar, está dada por

$$L = 9 + 5{,}1 \log d$$

donde d es el diámetro (en pulgadas) de la lente.

(a) ¿Cuál es la magnitud límite de un telescopio de 3,5 pulgadas?

(b) ¿Qué diámetro se requiere para ver una estrella de magnitud 14?

Machine Translated by Google

50. Valor de rescate El número de años n para que una pieza de maquinaria se deprecie hasta alcanzar un valor de rescate conocido se puede encontrar usando la fórmula

$$n = \frac{\text{registro s - registro i}}{\text{registro 11 - d2}}$$

donde s es el valor residual de la maquinaria, i es su valor inicial y d es la tasa anual de depreciación.

(a) ¿Cuántos años tardará una pieza de maquinaria en disminuir su valor de $90 000 a $10 000 si la tasa anual de depreciación es 0,20 (20 %)?

(b) ¿ Cuántos años tardará una máquina en perder la mitad de su valor si la tasa de depreciación anual es del 15%?

51. Financiar la educación universitaria Los abuelos de una niña compran un fondo de bonos de $10,000 que vence en 18 años para usarlo en su educación universitaria. El fondo de bonos paga un interés compuesto del 4% semestralmente. ¿Cuánto valdrá el fondo de bonos al vencimiento? ¿Cuál es la tasa de interés efectiva? ¿Cuánto tiempo le tomará al bono duplicar su valor bajo estos términos?

52. Financiar la educación universitaria Los abuelos de una niña desean comprar un bono que vence en 18 años para usarlo en su educación universitaria. El bono paga un interés del 4% compuesto semestralmente. ¿Cuánto deberían pagar para que el bono valga $85 000 al vencimiento?

53. Estimación de la fecha en que murió un hombre prehistórico Los huesos de un hombre prehistórico encontrados en el desierto de Nuevo México contienen aproximadamente el 5% de la cantidad original de carbono-14.
Si la vida media del carbono 14 es de 5730 años, ¿hace aproximadamente cuánto tiempo murió el hombre?

54. Temperatura de una sartén Se saca una sartén de un horno donde la temperatura es de 450°F y se coloca en una habitación donde la temperatura es de 70°F. Después de 5 minutos, la temperatura de la sartén es de 400°F. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que su temperatura sea de 150°F?

55. Población mundial La tasa de crecimiento anual de la población mundial en 2018 fue k = 1,1, = 0,011. La población del mundo en 2018 era 7.632.819.325. Dejando t = 0

representan 2018, utilice el modelo de crecimiento desinhibido para predecir la población mundial en el año 2024.
Fuente: worldometers.info

56. Desintegración radiactiva La vida media del cobalto radiactivo es de 5,27 años. Si ahora hay 100 gramos de cobalto radiactivo, ¿cuánto habrá dentro de 20 años? ¿Dentro de 40 años?

57. Crecimiento Logístico El modelo de crecimiento logístico

$$P1t2 = 1 \frac{0,8}{+ 1,67e\text{-}0,16t}$$

representa la proporción de automóviles nuevos con un sistema de posicionamiento global (GPS). Sea t = 0 el año 2006, t = 1
representan 2007, y así sucesivamente.

(a) ¿Qué proporción de automóviles nuevos en 2006 tenían GPS?

(b) Determine la proporción máxima de automóviles nuevos que tienen GPS.

(c) Utilizando una herramienta gráfica, grafique P = P1t2.

(d) ¿Cuándo el 75% de los coches nuevos tendrán GPS?

58. Aumento de la matrícula Los siguientes datos representan la matrícula y las tarifas estatales promedio (en dólares de 2017) en colegios y universidades públicas de cuatro años en los Estados Unidos desde el año académico 1990–91 hasta el año académico 2017–18.

Año académico	Matrícula y tasas (dólares de 2017)
1990–91 1x = 02	3580
1995–96 1x = 52	4510
2000–01 1x = 102	4970
2005–06 1x = 152	6880
2009–10 1x = 192	8040
2013–14 1x = 232	9310
2017–18 1x = 272	9970

Fuente: El College Board

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión con el año académico como variable independiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo exponencial a partir de los datos.

(c) Exprese la función encontrada en el inciso (b) en la forma A1t2 = A0ekt.

(d) Grafique la función exponencial encontrada en los incisos (b) o (c) en el diagrama de dispersión.

(e) Prediga el año académico en el que la matrícula promedio alcanzará los $16 000.

59. Factor de sensación térmica Los datos representan la velocidad del viento (mph) y el factor de sensación térmica a una temperatura del aire de 15°F.

Velocidad del viento (mph)	Escalofríos Factor (°F)
5	7
10	3
15	0
20	22
25	24
30	25
35	27

Fuente: Clima Nacional de EE. UU. Servicio

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión con la velocidad del viento como variable independiente.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo logarítmico a partir de los datos.

(c) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje la función logarítmica encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para predecir el factor de sensación térmica si la temperatura del aire es de 15°F y la velocidad del viento es de 23 mph.

60. Propagación de una enfermedad Jack y Diane viven en un pequeño pueblo de 50 personas. Desafortunadamente, tanto Jack como Diane están resfriados. Aquellos que entran en contacto con alguien que tiene esto.
el frío se resfriará ellos mismos. Los datos que siguen

La página siguiente representa el número de personas en el pequeño pueblo que se han resfriado después de t días.

(continuado)

Machine Translated by Google

días, t	Número de personas con frío, C
0	2
1	4
2	8
3	14
4	22
5	30
6	37
7	42
8	44

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos. Comente el tipo de relación que parece existir entre el número de días que han pasado y el número de personas resfriadas.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, construya un modelo logístico a partir de datos.

(c) Grafique la función encontrada en el inciso (b) sobre la dispersión trama.

(d) Según la función encontrada en el inciso (b), ¿cuál es el número máximo de personas que se resfriarán? En realidad, ¿cuál es el número máximo de personas que podrían resfriarse? (e) En algún momento entre el segundo y el tercer día, 10 personas del pueblo se resfriaron. Según el modelo encontrado en el inciso (b), ¿cuándo se resfriaron 10 personas?

(f) ¿Cuánto tiempo tardarán 46 personas en resfriarse?

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

1. Si f1x2 = $\frac{x + 2}{x - 2}$ y g1x2 = 2x + 5, encuentre:
   (a) f g e indique su dominio
   (b) 1g f2 1 - 22
   (c) 1f g2 1 - 22
2. Determina si la función es uno a uno.
   (a) y = 4x2 + 3
   (b) y = 2x + 3 - 5
3. Encuentra la inversa de f1x2 = $\frac{2}{3x - 5}$ y comprueba tu respuesta. Indique el dominio y el rango de f y f^{-1}.
4. Si el punto 13, - 52 está en la gráfica de una función uno a uno f, ¿qué punto debe estar en la gráfica de f^{-1}?

En los problemas 5 a 7, resuelve cada ecuación.

5. 3x = 243
6. log16 = 2
7. log5 x = 4

En los problemas 8 a 11, evalúa cada expresión. sin usar calculadora.

8. registro6 $\frac{1}{36}$
9. registrar 10.000
10. 8log2 5
11. En e7

En los problemas 12 y 13, para cada función f:
(a) Encuentre el dominio de f.
(b) Gráfica f.
(c) A partir de la gráfica de f, encuentre el rango y sus asíntotas. (d) Encuentre f^{-1}, la inversa de f.
(e) Encuentre el dominio y el rango de f (f) Grafique f^{-1}.

12. f1x2 = 4x+1 - 2
13. f1x2 = 1 - log5 1x - 22

En los problemas 14 a 19, resuelve cada ecuación. Expresar soluciones irracionales en forma exacta.

14. 5x+2 = 125
15. log1x + 92 = 2
16. 8 - 2e-x = 4
17. log1x2 + 3) = log1x + 62
18. 7x+3 = ex
19. log2 1x - 42 + log2 1x + 42 = 3

$\frac{4x3}{}$

20. Escribe log2 ¢ x2 - 3x - 18 ≤ como la suma y/o diferencia de logaritmos. Expresar potencias como factores.
21. Una muestra de 50 mg de una sustancia radiactiva se desintegra a 34 mg después de 30 días. ¿En cuánto tiempo quedarán 2 mg?
22. (a) Si se invierten $1000 al 5% compuesto mensual, ¿cuánto queda después de 8 meses?
    (b) Si quiere tener $1000 en 9 meses, ¿cuánto necesita colocar ahora en una cuenta de ahorros que pague 5% compuesto trimestralmente?
    (c) ¿ Cuánto tiempo le tomará duplicar su dinero si puede invertirlo al 6% compuesto anualmente?
23. El nivel de decibelios, D, del sonido viene dado por la ecuación

$$D = 10 \log¢ \frac{I}{Yo0 ≤}$$

donde I es la intensidad del sonido e I0 = 10-12 vatios por metro cuadrado.

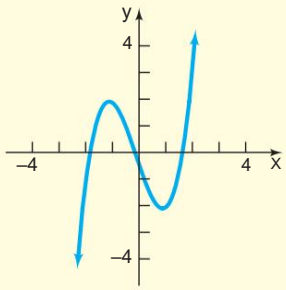
(a) Si el grito de una sola persona mide 80 decibelios, ¿qué volumen tendría el sonido si dos personas gritaran al mismo tiempo? Es decir, ¿qué volumen tendría el sonido si se duplicara la intensidad?

(b) El umbral de dolor para el sonido es de 125 decibeles. Si el Estadio Olímpico de Atenas 2004 (Olympiako Stadio Athinas 'Spyros Louis') tiene capacidad para 74.400 personas, ¿cuántas personas de la multitud necesitan gritar al mismo tiempo para que el nivel de sonido resultante alcance o supere el umbral de dolor? (Ignore cualquier posible amortiguación del sonido).

Machine Translated by Google

Revisión acumulativa

1. ¿La siguiente gráfica es la gráfica de una función? Si es así, ¿es el funcionar uno a uno?



2. Para la función f1x2 = 2x2 - 3x + 1, encuentre:
   (a) f132 (b) f1 - x2 (c) f1x + h2

3. Determina qué puntos están en la gráfica de x2 + y2 = 1.

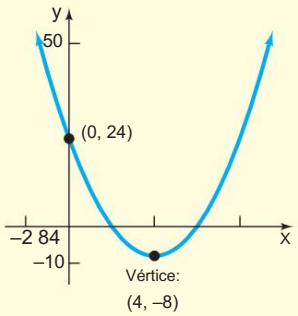
   (un) un 1/2, 1/2 segundo (b) un 23/4, 2/2 segundo

4. Resuelve la ecuación 31x - 22 = 41x + 52.

5. Grafica la recta 2x - 4y = 16.

6. (a) Grafique la función cuadrática f1x2 = - x2 + 2x - 3 determinando si su gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, eje de simetría, intersección con el eje y e intersección con el eje x, si corresponde.
   (b) Resuelva f1x2 … 0.

7. Determine la función cuadrática cuya gráfica se da en la figura.



8. Grafica f1x2 = 31x + 12 3 - 2 usando transformaciones.

9. Dado que f1x2 = x2 + 2 y g1x2 = 2/(x - 3),
   encuentre 1f g2 1x2 y establezca su dominio. ¿Qué es 1f g2 152?

10. Para la función polinómica f1x2
    = 3x4 - 15x3 - 12x2 + 60x
    (a) Determine el comportamiento final de la gráfica.
    (b) Encuentre las intersecciones x e y de la gráfica.
    (c) Encuentre los ceros reales y su multiplicidad, y determine si la gráfica cruza o toca el eje x en cada intersección.
    (d) Determine el número máximo de puntos de inflexión en la gráfica.
    (e) Grafique la función.

11. Para la función g1x2 = 3x + 2:
    (a) Grafique g usando transformaciones. Indique el dominio, el rango y la asíntota horizontal de la gráfica de g.
    (b) Determine la inversa de g. Indique el dominio, el rango y la asíntota vertical de la gráfica de g-1 .
    (c) En los mismos ejes de coordenadas que g, grafique g-1 .

12. Resuelve la ecuación: 4x-3 = 82x

13. Resuelve la ecuación: log3 1x + 12 + log3 12x - 3) = log9 9

14. Suponga que f1x2 = log3 1x + 22. Resuelva:
    (a) f1x2 = 0
    (b) f1x2 7 0
    (c) f1x2 = 3

15. Análisis de datos Los siguientes datos representan el porcentaje de todos los conductores por edad que han sido detenidos por la policía por cualquier motivo durante el último año. La edad mediana representa el punto medio del límite superior e inferior del rango de edad.

Rango de edad	Edad media, x	Porcentaje de abandono, y
16-19	17,5	18.2
20–29	24,5	16.8
30–39	34,5	11.3
40–49	44,5	9.4
50–59	54,5	7.7
Ú 60	69,5	3.8

(a) Utilizando una herramienta gráfica, dibuje un diagrama de dispersión de los datos tratando la edad mediana, x, como variable independiente.
(b) Determine un modelo que describa mejor la relación entre la edad mediana y el porcentaje de detenidos. Puede elegir entre modelos lineales, cuadráticos, cúbicos, exponenciales, logarítmicos y logísticos.
(c) Proporcione una justificación para el modelo que seleccionó en el inciso (b).

Machine Translated by Google

Proyectos del Capítulo

Proyecto basado en Internet

I. Depreciación de los automóviles Kelley Blue Book es una guía que proporciona el precio minorista actual de los automóviles. Puede acceder al Kelley Blue Book en línea en www.kbb.com.

1. Identifique tres automóviles que esté considerando comprar y encuentre el valor del Libro Kelley Blue de los automóviles para 0 (nuevo), 1, 2, 3, 4 y 5 años de antigüedad. En línea, el valor del automóvil se puede encontrar seleccionando Precio Nuevo/Usado.
   Ingrese el año, marca y modelo del automóvil nuevo o usado que está seleccionando. Para ser coherente, supongamos que los automóviles se conducirán 12 000 millas por año, por lo que un automóvil de 1 año tendrá 12 000 millas, un automóvil de 2 años tendrá 24 000 millas, y así sucesivamente. Elija las mismas opciones para cada año y seleccione Comprar en un evento privado al elegir un tipo de precio. Finalmente, determine el precio minorista sugerido para automóviles que están en excelente, bueno y regular estado. Deberías tener un total de 16 observaciones (1 para un auto nuevo, 3 para un auto de 1 año, 3 para un auto de 2 años, etc.).
2. Dibuje un diagrama de dispersión de los datos con la edad como variable independiente y el valor como variable dependiente usando Excel, una calculadora gráfica TI o alguna otra hoja de cálculo. El proyecto del Capítulo 3 describe cómo dibujar un diagrama de dispersión en Excel.
3. Determine la función exponencial de mejor ajuste. Grafique la función exponencial de mejor ajuste en el diagrama de dispersión. Para hacer esto en Excel, haga clic derecho en cualquier punto de datos en el diagrama de dispersión. Ahora seleccione Agregar línea de tendencia. Seleccione el botón de opción Exponencial y seleccione Mostrar ecuación en el gráfico. Ver Figura 57. Mueva la ventana Opciones de línea de tendencia a un lado, si es necesario, y verá la función exponencial de mejor ajuste mostrada en el diagrama de dispersión. ¿Crees que la función describe con precisión la relación entre la antigüedad del automóvil y el precio de venta sugerido?

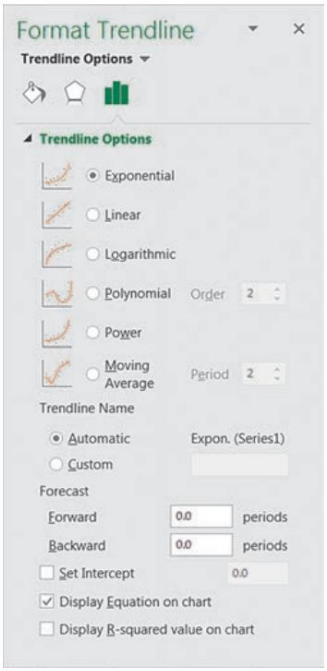


Figura 57

4. La función exponencial de mejor ajuste es de la forma y = Cerx, donde y es el valor de venta sugerido del automóvil y x es la antigüedad del automóvil (en años). ¿ Qué representa el valor de C ? ¿ Qué representa el valor de r ?
   ¿Cuál es la tasa de depreciación de cada automóvil que está considerando?
5. Escribe un informe que detalle qué auto comprarías según la tasa de depreciación que encontraste para cada auto.

Cita: Excel © 2018 Microsoft Corporation. Usado con permiso de Microsoft.

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC):

II. Café caliente Un restaurante de comida rápida quiere un recipiente especial para contener el café. El restaurante desea que el recipiente enfríe rápidamente el café de 200° a 130°F y mantenga el líquido entre 110° y 130°F el mayor tiempo posible. El restaurante tiene tres contenedores para elegir. ¿Cuál debería comprarse?

III. Proyecto en Motorola Fatiga térmica de conexiones de soldadura La confiabilidad del producto es una de las principales preocupaciones de un fabricante. Aquí se utiliza una transformación logarítmica para simplificar el análisis de la capacidad de un teléfono celular para resistir cambios de temperatura.

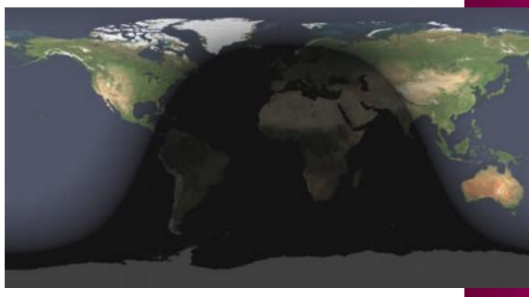
Machine Translated by Google

Trigonométrico Funciones

6

Duración del día revisada

La duración de un día depende del día del año y de la latitud del lugar. La latitud da la ubicación de un punto en la Tierra al norte o al sur del ecuador.
En el Capítulo 4 encontramos un modelo que describe la relación entre la duración del día y la latitud para un día específico del año. En el Proyecto de Internet al final de este capítulo, encontraremos un modelo que describe la relación entre la duración del día y el día del año para una latitud específica.



—Ver el Proyecto del Capítulo I basado en Internet—

Una mirada atras

En el Capítulo 2, comenzamos nuestra discusión sobre funciones. Definimos dominio y rango y variables independientes y dependientes; encontramos el valor de una función y graficamos funciones.
Continuamos nuestro estudio de funciones enumerando propiedades de funciones, como ser par o impar, y creamos una biblioteca de funciones, nombrando funciones clave y enumerando sus propiedades, incluida la gráfica. En el capítulo 5 introdujimos funciones exponenciales y logarítmicas, que clasificamos como funciones trascendentales.

Una mirada hacia el futuro

En este capítulo, continuamos estudiando funciones trascendentales definiendo las funciones trigonométricas, seis funciones que tienen una amplia aplicación. Encontramos su dominio y rango, los evaluamos, los graficamos y desarrollamos una lista de sus propiedades.

Hay dos enfoques ampliamente aceptados para el desarrollo de funciones trigonométricas: uno utiliza triángulos rectángulos; el otro usa círculos, especialmente el círculo unitario. En este texto, desarrollamos las funciones trigonométricas usando el círculo unitario. En el Capítulo 8 presentamos la trigonometría de triángulos rectángulos.

Describir

6.1 Ángulos, longitud de arco y circular Movimiento

6.2 Funciones trigonométricas: método del círculo unitario

6.3 Propiedades de la trigonométrica Funciones

6.4 Gráficas del seno y el coseno Funciones

6.5 Gráficas de la tangente, cotangente, Funciones cosecante y secante

6.6 Desplazamiento de Fase; Curva sinusoidal Adecuado

Revisión del capítulo

Prueba de capítulo

Revisión acumulativa

Proyectos del Capítulo

Machine Translated by Google

6.1 Ángulos, longitud de arco y movimiento circular

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Circunferencia y área de un círculo (Sección A.2, pág. A16)
- Movimiento uniforme (Sección A.8, págs. A66–A67)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 406.

OBJETIVOS 1 Ángulos y medida de grados (p. 398)
2 Convertir entre medidas decimales y grados, minutos y segundos para ángulos (p. 400)
3 Encuentra la longitud de un arco de círculo (p. 401)
4 Convertir de grados a radianes y de radianes a grados (p. 402)
5 Encuentra el área de un sector de un círculo (p. 404)
6 Encuentre la velocidad lineal de un objeto que viaja en movimiento circular (p. 405)

1 Medida de ángulos y grados

Un rayo, o media línea, es una porción de una línea que comienza en un punto V de la línea y se extiende indefinidamente en una dirección. El punto inicial V de un rayo se llama vértice. Ver Figura 1.

Figura 1 Un rayo o media línea

Cuando se dibujan dos rayos con un vértice común, forman un ángulo. A un rayo de un ángulo lo llamamos lado inicial y al otro lado terminal. El ángulo formado se identifica mostrando la dirección y cantidad de rotación desde el lado inicial hasta el lado terminal. Si la rotación es en sentido antihorario, el ángulo es positivo; si la rotación es en el sentido de las agujas del reloj, el ángulo es negativo. Ver Figura 2.

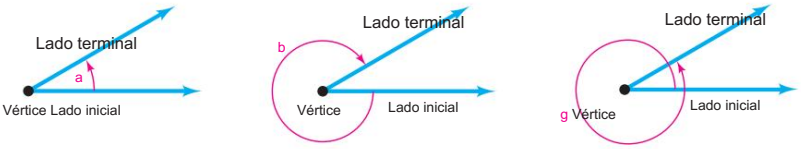


Figura 2

(a) En sentido antihorario rotación; ángulo positivo

(b) Rotación en el sentido de las agujas del reloj; ángulo negativo

(c) En sentido antihorario rotación; ángulo positivo

Las letras griegas minúsculas, como a (alfa), b (beta), g (gamma) y u (theta), se utilizan a menudo para indicar ángulos. Observe en la Figura 2(a) que el ángulo a es positivo porque la dirección de rotación desde el lado inicial al lado terminal es en sentido antihorario. El ángulo b en la Figura 2(b) es negativo porque la rotación es en el sentido de las agujas del reloj. El ángulo g en la Figura 2(c) es positivo. Observe que el ángulo a en la Figura 2(a) y el ángulo g en la Figura 2(c) tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal. Sin embargo, a y g son desiguales, porque la cantidad de rotación requerida para ir del lado inicial al lado terminal es mayor para el ángulo g que para el ángulo a.

¿Necesita revisar?
Las coordenadas rectangulares se analizan en la Sección 1.1, p. 38.

Se dice que un ángulo u está en posición estándar si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangular y su lado inicial coincide con el eje x positivo.
Ver Figura 3.

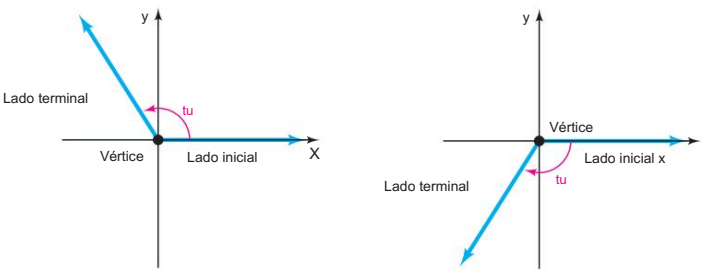


Figura 3 Posición estándar de un ángulo

(a) u está en posición estándar; eres positivo

(b) u está en posición estándar; tu eres negativo

Machine Translated by Google

Cuando un ángulo u está en posición estándar, el lado terminal estará en un cuadrante, en cuyo caso decimos que u está en ese cuadrante, o el lado terminal estará en el eje x o en el eje y, en el cual En este caso decimos que u es un ángulo cuadrantal. Por ejemplo, el ángulo u en la Figura 4(a) se encuentra en el cuadrante II, el ángulo u en la Figura 4(b) se encuentra en el cuadrante IV y el ángulo u en la Figura 4(c) es un ángulo cuadrantal.

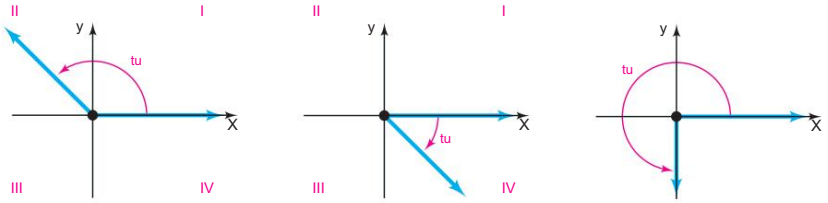


Figura 4 (a) u se encuentra en el cuadrante II (b) u se encuentra en el cuadrante IV (c) u es un ángulo cuadrantal

Los ángulos se miden determinando la cantidad de rotación necesaria para que el lado inicial coincida con el lado terminal. Las dos medidas comúnmente utilizadas para los ángulos son los grados y los radianes.

Medida de grado

NOTA HISTÓRICA Se decía que una rotación en sentido antihorario medía 360° porque el año babilónico tenía 360 días.

El ángulo formado al girar el lado inicial exactamente una vez en sentido antihorario hasta que coincida consigo mismo (1 revolución) se dice que mide 360 grados, abreviado 360°. Un grado, 1°, es $\frac{1}{360}$ revolución. Consulte la Figura 5. Como muestra la Figura 5(b), se acostumbra indicar un derecho o 2 ángulo usando el símbolo .

j

ángulo recto es un ángulo que mide 90°, o $\frac{1}{4}$ revolución; un ángulo llano es un ángulo que mide 180°, $\frac{1}{2}$

Figura 5 (a) 1 revolución en sentido antihorario, 3608 (b) ángulo recto, revolución $\frac{1}{4}$ en sentido antihorario, 908 (C) ángulo recto, revolución $\frac{1}{2}$ en sentido antihorario, 1808

También se acostumbra referirse a un ángulo que mide u grados como un ángulo de u grados.

EJEMPLO 1 Dibujar un ángulo

Dibuja cada ángulo en la posición estándar.

(a) 45° (b) - 90° (c) 225° (d) 405°

Solución (a) Un ángulo de 45° es $\frac{1}{2}$ de un ángulo recto. Ver Figura 6.

(b) Un ángulo de -90° es una $\frac{1}{4}$ revolución en el sentido de las agujas del reloj. Ver Figura 7.

(c) Un ángulo de 225° consiste en una rotación de 180° seguida de una rotación hasta 45°. Ver Figura 8.

(d) Un ángulo de 405° consta de 1 revolución (360°) seguida de una rotación hasta 45°. Ver Figura 9.

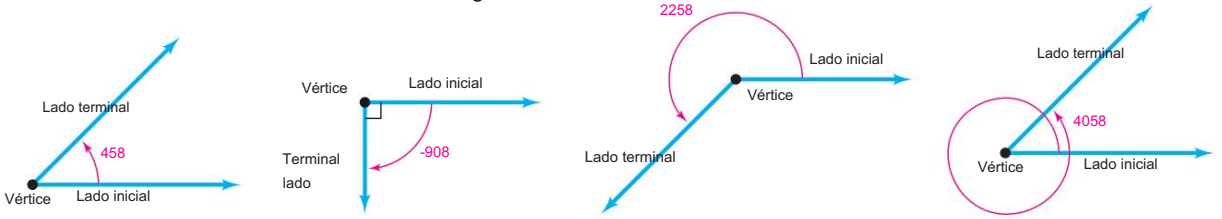


Figura 6 Ángulo de 45° Figura 7 - Ángulo de 90° Figura 8 Ángulo de 225° Figura 9 Ángulo de 405°

Ahora problema de trabajo 1 1

Machine Translated by Google

2 Convertir entre medidas decimales y grados, minutos y segundos para ángulos

Aunque se pueden obtener subdivisiones de un grado utilizando decimales, también se puede utilizar la noción de minutos y segundos . Un minuto, denotado por 1·, se define como $\frac{1}{\text{grado}}$. Un segundo, denotado por 1·, se define como minuto o, 60 60 1 $\frac{1}{\quad}$ equivalentemente, grado. Un ángulo de, digamos, 30 grados, 40 minutos, 10 segundos es 3600 escrito de forma compacta como 30°40′10″. Para resumir:

$$1 \text{ revolución en sentido antihorario} = 360° \qquad 1° = 60' \qquad 1' = 60'' \tag{1}$$

A veces es necesario convertir grados, minutos, segundos notación 1D°M′S″2 a una forma decimal, y viceversa.

EJEMPLO 2 Conversión entre forma decimal y grado, minuto, Segunda forma

(a) Convierta 50°6′21″ a decimal en grados. Redondea la respuesta a cuatro decimales.

(b) Convierta 21,256° a la notación de grados, minutos y segundos. Redondea la respuesta al segundo más cercano.

Solución (a) Porque 1′ = a 1 $\frac{5}{\quad}$ $_{60 \text{ segundo}}$ y 1″ = a 1 $\frac{5}{\quad}$ $_{60 \text{ b}}$ = un $\frac{1}{60}$ $_{60 \text{ segundo}}$, convertir de la siguiente manera:

$$50°6'21'' = 50° + 6' + 21'' = 50° + 6 \# 1' + 21 \# 1''$$

$$= 50° + 6 \# \text{a } 1 \frac{5}{\quad}_{60 \text{ segundo}} + 21 \# \text{un} \frac{1}{60}{}^{5}_{60 \text{ segundo}}$$

Convertir minutos y segundos a grados.

$$\approx 50° + 0{,}1° + 0{,}0058°$$

$$= 50{,}1058°$$

(b) Dado que 1° = 60′ y 1′ = 60″, proceda de la siguiente manera:

$$21{,}256° = 21° + 0{,}256°$$

$$= 21° + 0{,}256 \# 1°$$

$$= 21° + 0{,}256 \# 60'$$

Convertir fracciones de grados a minutos; 1· · 60′.

$$= 21° + 15{,}36'$$

$$= 21° + 15' + 0{,}36'$$

$$= 21° + 15' + 0{,}36 \# 1'$$

$$= 21° + 15' + 0{,}36 \# 60''$$

Convertir fracciones de minutos a segundos; 1′ · 60″.

$$= 21° + 15' + 21{,}6''$$

$$\approx 21°15'22''$$

Redondea al segundo más cercano. ■

COMENTARIO Las calculadoras gráficas (y algunas calculadoras científicas) tienen la capacidad de convertir grados, minutos, segundos a forma decimal y viceversa. Consulta tu manual de propietario.

Ahora resuelve los problemas 5 9 y 6 5

En muchas aplicaciones, como describir la ubicación exacta de una estrella o la posición precisa de un barco en el mar, se utilizan ángulos medidos en grados, minutos e incluso segundos. Para efectos de cálculo, estos se transforman a forma decimal. En otras aplicaciones, especialmente en el cálculo, los ángulos se miden utilizando radianes.

Medida en radianes

Un ángulo central es un ángulo positivo cuyo vértice está en el centro de un círculo. Los rayos de un ángulo central subtienden (intersectan) un arco en el círculo. Si el radio del círculo es r

Machine Translated by Google

y la longitud del arco subtendido por el ángulo central también es r, entonces la medida del ángulo es 1 radian. Véase la Figura 10(a).

Para un círculo de radio 1, los rayos de un ángulo central con medida de 1 radian subtienden un arco de longitud 1. Para un círculo de radio 3, los rayos de un ángulo central con medida de 1 radian subtienden un arco de longitud 3. Ver Figura 10(b).

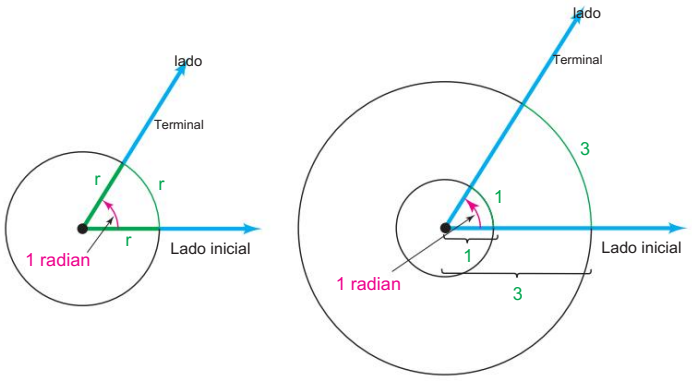


Figura 10 (a) (b)

3 Encuentra la longitud de un arco de círculo

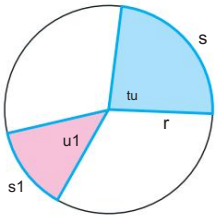


Figura 11 $\frac{tu}{u1} = \frac{s}{s1}$

Consideremos ahora un círculo de radio r y dos ángulos centrales, u y u1, medidos en radianes. Supongamos que estos ángulos centrales subtienden arcos de longitudes s y s1, respectivamente, como se muestra en la Figura 11. Desde la geometría, la razón de las medidas de los ángulos es igual a la razón de las longitudes correspondientes de los arcos subtendidos por estos ángulos; eso es,

$$\frac{tu}{u1} = \frac{s}{s1} \qquad (2)$$

Supongamos que u1 = 1 radianes. Consulte nuevamente la Figura 10(a). La longitud s1 del arco subtendido por el ángulo central u1 = 1 radian es igual al radio r del círculo.

Entonces s1 = r, por lo que la ecuación (2) se reduce a

$$\frac{tu}{1} = \frac{s}{r} \quad \text{o} \quad s = ru \qquad (3)$$

TEOREMA Longitud del arco

Para un círculo de radio r, un ángulo central de u radianes subtiende un arco cuya longitud s es

$$s = ru \qquad (4)$$

NOTA Las fórmulas deben ser consistentes con las unidades utilizadas. En la fórmula (4), escribimos

$$s = r\,tu$$

Para ver las unidades, usa la ecuación (3) y escribe

$$\frac{\text{tus radianes}}{\text{1 radian}} = \frac{\text{unidades de longitud}}{\text{r unidades de longitud}}$$

$$\text{s unidades de longitud} = \text{r unidades de } \frac{\text{tus radianes}}{\text{longitud 1 radian}}$$

Los radianes se cancelan, quedando

$$\text{s unidades de longitud} = 1\text{r unidades de longitud}2u \quad s \cdot r\,U$$

donde u parece "adimensional" pero, de hecho, se mide en radianes. Entonces, en la fórmula s = r u, la dimensión de u es radianes, y se puede utilizar cualquier unidad de longitud conveniente (como pulgadas o metros) para s y r.

j

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3

Encontrar la longitud de un arco de círculo

Encuentre la longitud del arco de un círculo de 2 metros de radio subtendido por un ángulo central de 0,25 radianes.

Solución

Utilice la fórmula (4) con r = 2 metros y u = 0,25. La longitud s del arco es

$$s = ru = 2 \# 0{,}25 = 0{,}5 \text{ metros}$$

Ahora problema de trabajo 7 1

4 Convertir de Grados a Radianes y de Radianes a Grados

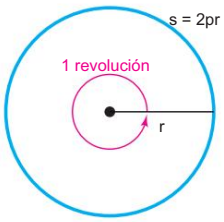


Figura 12 1 revolución = 2p radianes

Con dos formas de medir ángulos, es importante poder convertir de una medida a la otra. Considere un círculo de radio r. Un ángulo central de 1 revolución subtiende un arco igual a la circunferencia del círculo. Vea la Figura 12. Debido a que la circunferencia de un círculo de radio r es igual a 2pr, sustituya s por 2pr en la fórmula (4) para encontrar que, para un ángulo u de 1 revolución,

s = ru	
2pr = ru	U · 1 revolución; s · 2Pr
u = 2p radianes	Resuelve para U.

De esto tenemos

$$1 \text{ revolución} = 2p \text{ radianes} \qquad (5)$$

Como 1 revolución = 360°, tenemos

$$360° = 2p \text{ radianes}$$

Dividiendo ambos lados por 2 se obtiene

$$180° = p \text{ radianes} \qquad (6)$$

Divide ambos lados de la ecuación (6) por 180. Luego

$$1 \text{ grado} = \frac{p}{180} \text{ radián}$$

Divida ambos lados de la ecuación (6) por p. Entonces

$$\frac{180}{p} \text{ grados} = 1 \text{ radian}$$

Tenemos las siguientes dos fórmulas de conversión:*

$$1 \text{ grado} = \frac{p}{180} \text{ radianes} \qquad 1 \text{ radian} = \frac{180}{\text{grados}_{p}} \qquad (7)$$

EJEMPLO 4

Convertir de grados a radianes

Convierte cada ángulo en grados a radianes.

(a) 60° (b) 150° (c) - 45° (d) 90° (mi) 107°

*Algunos estudiantes prefieren usar la proporción dada y resolver $\frac{\text{Grados}}{180°} = \frac{\text{radianes}}{p}$. Luego sustituye por lo que es la medida buscada.

Machine Translated by Google

Solución (a) $60° = 60 \# 1 \text{ grado} = 60 \# \text{radianes} = 180 \quad \frac{\pi}{3}$ radianes

(b) $150° = 150 \# 1° = 150 \# \text{radianes} = \frac{\pi}{180} \quad \frac{5\pi}{6}$

(c) $-45° = -45 \# \text{radianes} = -\frac{\pi}{180} \quad 4 \quad \frac{\pi}{4}$ radián

(d) $90° = 90 \# \text{radianes} = 180 \quad \frac{\pi}{2}$ radianes

(e) $107° = 107 \# \text{radianes} \approx 1{,}868$ radianes

El ejemplo 4, partes (a) a (d), ilustra que los ángulos que son fracciones "agradables" de una revolución se expresan en radianes como múltiplos fraccionarios de p, en lugar de como decimales. Por ejemplo, un ángulo recto, como en el ejemplo 4(d), se deja en la forma $\frac{\pi}{2}$ radianes, que es exacto, en lugar de utilizar la aproximación $2 \quad \frac{\pi}{2} \approx \frac{3.1416}{2} = 1{,}5708$ radianes.

Cuando las fracciones no sean "agradables", use la aproximación decimal del ángulo, como en el Ejemplo 4(e).

Ahora resuelve los problemas 2 3 y 4 9

EJEMPLO 5 Convertir de radianes a grados

Convierte cada ángulo en radianes a grados.

(a) $\frac{\pi}{6}$ radianes (b) $6 \quad \frac{3\pi}{2}$ radianes (c) $-\frac{7\pi}{4}$ radianes (d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes (e) 3 radianes

Solución (a) $\frac{\pi}{6}$ radianes $= 6 \quad \frac{\pi}{6} \# 1 \text{ radianes} = 6 \quad \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 30°$

(b) $\frac{3\pi}{2}$ radianes $= \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 270°$

(c) $-\frac{7\pi}{4}$ radianes $= -4 \quad \frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= -315°$

(d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes $= \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 420°$

(e) $3 \text{ radianes} = 3 \# \text{grados} \approx \frac{180}{\pi} 171{,}89°$

Ahora resuelve el problema 3 5

La Tabla 1 enumera las medidas en grados y radianes de algunos ángulos comunes. Debería aprenda a sentirse igualmente cómodo usando cualquiera de las medidas.

tabla 1

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Grados	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 Ancho de campo de la lente de una cámara DSLR

Para ángulos pequeños, la longitud del arco subtendido por un ángulo central es aproximadamente igual a la longitud de la cuerda que está subtendida. Utilice este hecho para aproximar el ancho del campo (el ancho del paisaje que la lente puede visualizar) de una lente de cámara de 400 mm a una distancia de 750 pies si el ángulo de visión de la lente es de 6°12′.

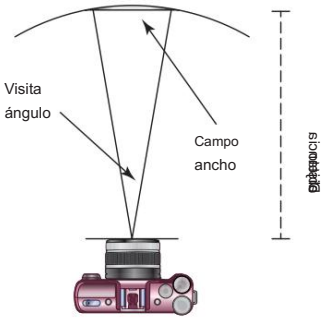


Figura 13 Ángulo de visión de la cámara

Solución Ver Figura 13. La medida del ángulo central es 6°12′, pero recuerda que el ángulo en la fórmula (4) debe estar en radianes. Entonces comience convirtiendo el ángulo a radianes.

$$u = 6°12' = 6{,}2° = 6{,}2 \# \text{ radianes} \approx 0{,}108 \text{ radianes}$$

c

12· · 0,2°

Utilice u = 0,108 radianes y r = 750 pies en la fórmula (4). El ancho de campo para la lente a una distancia de 750 pies de la cámara es aproximadamente

$$s = ru = 750 \# 0{,}108 = 81 \text{ pies}$$

NOTA Si la medida de un ángulo se da como 5, se entiende que significa 5 radianes; si la medida de un ángulo es 5°, significa 5 grados.

Cuando un ángulo se mide en grados, siempre se muestra el símbolo del grado. Sin embargo, cuando un ángulo se mide en radianes, normalmente omitimos la palabra radianes. Entonces si la medida de un ángulo es 6, se entiende que significa 6 radián.

Ahora problema de trabajo 107

5 Encuentra el área de un sector de un círculo

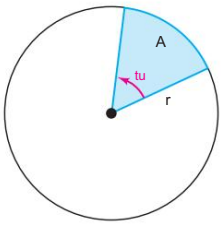


Figura 14 Sector de un círculo

Considere un círculo de radio r. Supongamos que u, medido en radianes, es un ángulo central de este círculo. Ver Figura 14. Buscamos una fórmula para el área A del sector (mostrado en azul) formado por el ángulo u.

Considere un círculo de radio r y dos ángulos centrales u y u1, ambos medidos en radianes. Ver Figura 15. Desde la geometría, la razón de las medidas de los ángulos es igual a la razón de las áreas correspondientes de los sectores formados por estos ángulos. Eso es,

$$\frac{tu}{u1} = \frac{A}{A1}$$

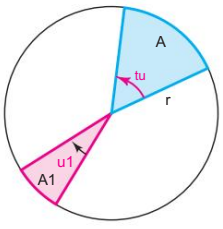


Figura 15 $\frac{tu}{u1} = \frac{A}{A1}$

Ahora supongamos que u1 = 2p radianes. Entonces A1 = área del círculo = pr para A, ^{2}. Resolviendo encontramos

$$A = A1 \quad \frac{tu}{u1} \quad 2 = pr \qquad \frac{tu}{2p} = \frac{1}{2} r2u_$$

c

A1 · Pr2 ; U1 · 2P

TEOREMA Área de un sector

El área A del sector de un círculo de radio r formado por un ángulo central de u radianes es

$$\text{Una} \quad = \frac{1}{2} r2u_ \qquad (8)$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7

Encontrar el área de un sector de un círculo

Encuentre el área del sector de un círculo de radio 2 pies formado por un ángulo de 30°. Redondea la respuesta a dos decimales.

Solución

Utilice la fórmula (8) con r = 2 pies y u = 30° = u debe estar $\frac{\pi}{6}$ radián. [Recuerde, en la fórmula (8), en radianes.]

$$\text{Una} = \frac{1}{2}r^2u = \pi 2^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$$

El área A del sector es 1.05 pies cuadrados, redondeado a dos decimales.

Ahora problema de trabajo 7 9

6 Encuentre la velocidad lineal de un objeto que viaja en movimiento circular

La velocidad promedio de un objeto es la distancia recorrida dividida por el tiempo transcurrido. Para el movimiento a lo largo de un círculo, distinguimos entre velocidad lineal y velocidad angular.

DEFINICIÓN Velocidad lineal

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de un círculo de radio r con rapidez constante. si _ es la distancia recorrida en el tiempo t en este círculo, entonces la velocidad lineal v del objeto se define como

$$v = \frac{s}{t} \qquad (9)$$

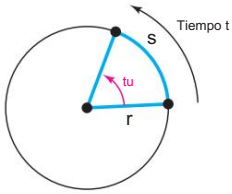


Figura 16 $v = \frac{s}{t}$

Mientras este objeto viaja a lo largo del círculo, supongamos que u (medido en radianes) es el ángulo central barrido en el tiempo t. Ver Figura 16.

DEFINICIÓN Velocidad angular

La velocidad angular v (la letra griega minúscula omega) de un objeto es el ángulo u (medido en radianes) barrido, dividido por el tiempo transcurrido t; eso es,

$$v = \frac{tu}{t} \qquad (10)$$

La velocidad angular es la forma en que se describe la velocidad de giro de un motor. Por ejemplo, un motor al ralentí a 900 rpm (revoluciones por minuto) es aquel que gira a una velocidad angular de

$$900 = 900\,\frac{\text{revoluciones}}{\text{minuto}} \qquad \frac{\text{revoluciones}}{\text{minuto}} \cdot 2\pi\,\frac{\text{radianes}}{\text{revolución}} = 1800\pi\,\frac{\text{radianes}}{\text{minuto}}$$

Existe una relación importante entre la velocidad lineal y la velocidad angular:

$$\text{velocidad lineal} = v = \frac{s}{t} = \frac{ru}{t} = r\cdot\frac{tu}{t} = r\cdot v$$

(9) (10)

$$v = rv \qquad (11)$$

donde v se mide en radianes por unidad de tiempo.

Machine Translated by Google

Cuando utilice la fórmula (11), v = rv, recuerde que v = $\frac{s}{t}$ (la velocidad lineal) tiene las dimensiones de longitud por unidad de tiempo (como pies por segundo o millas por hora), r (el radio del movimiento circular) tiene la misma dimensión de longitud que s, y v (la velocidad angular) tiene la dimensión de radianes por unidad de tiempo. Si la velocidad angular se da en términos de revoluciones por unidad de tiempo (como suele ser el caso), asegúrese de convertirla a radianes por unidad de tiempo, utilizando el hecho de que 1 revolución = 2p radianes, antes de usar la fórmula (11). .

EJEMPLO 8 Encontrar velocidad lineal

Un niño hace girar una piedra atada al extremo de una cuerda de 2 pies a una velocidad de 180 revoluciones por minuto (rpm). Encuentre la rapidez lineal de la roca cuando se suelta.

Solución Mire la Figura 17. La roca se mueve alrededor de un círculo de radio r = 2 pies. El La velocidad angular v de la roca es

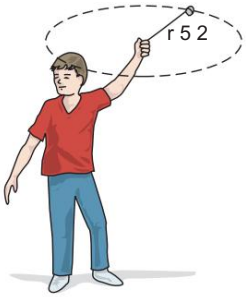


Figura 17

$$v = 180 = 180 \frac{\text{revoluciones}}{\text{minuto}} \frac{\text{revoluciones}}{\text{de revolución}} \frac{\text{radianes}}{360p} = \frac{\text{radianes}}{\text{minuto}}$$

De la fórmula (11), v = rv, la velocidad lineal v de la roca es

$$v = rv = 2 \text{ pies} \# 360p \approx 2262 = 720p \frac{\text{radianes}}{\text{minuto}} \frac{\text{pies}}{\text{minuto}} \frac{\text{pies}}{\text{minuto}}$$

La rapidez lineal de la roca cuando se suelta es 2262 pies>min ≈ 25,7 mi>h.

Ahora problema de trabajo 9 9

6.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. ¿Cuál es la fórmula para la circunferencia C de un círculo de radio r? ¿ Cuál es la fórmula para calcular el área A de un círculo de radio r? (pág. A16)

2. Si un objeto tiene una velocidad de r pies por segundo y recorre una distancia d (en pies) en tiempo t (en segundos), entonces d _____. = (págs. A66-A67)

Conceptos y vocabulario

3. Un ángulo u está formado si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangular y su lado inicial coincide con el eje x positivo.

4. A _____ _____ es un ángulo positivo cuyo vértice está en el centro de un círculo.

5. Opción múltiple Si el radio de un círculo es r y la longitud del arco subtendido por un ángulo central también es r, entonces la medida del ángulo es 1 (a) grado _____.
(c) segundo (b) minuto
(d) radianes

6. En una circunferencia de radio r, subtiende un ángulo central de u un arco de longitud s _____radianes ; el área del sector formado por = este ángulo u es A =_____.

7. Opción múltiple 180° = _____ radianes
(a) $\frac{pag}{2}$ (b) p (C) $\frac{3p}{2}$ (d) 2p

8. Un objeto viaja en un círculo de radio r con rapidez constante. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t en el círculo y u es el ángulo central (en radianes) barrido en el tiempo t, entonces la velocidad lineal del objeto es v = y la velocidad angular del objeto es v = _____.

9. Verdadero o Falso La velocidad angular v de un objeto que viaja en un círculo de radio r es el ángulo u (medido en radianes) barrido, dividido por el tiempo transcurrido t.

10. Verdadero o Falso Para el movimiento circular en un círculo de radio r, la velocidad lineal es igual a la velocidad angular dividida por r.

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 22, dibuja cada ángulo en la posición estándar.

11. 30° 12. 60° 13. - 120° 14. 135° 15. 540° 16. 450°

17. $\frac{4p}{3}$ 18. $\frac{3p}{4}$ 19. $-\frac{2p}{3}$ 20. $-6\frac{pag}{}$ 21. $\frac{21p}{4}$ 22. $\frac{16p}{3}$

En los problemas 23 a 34, convierta cada ángulo en grados a radianes. Expresa tu respuesta como múltiplo de p.

23. 30° 24. 120° 25. 330° 26. 495° 27. - 30° 28. - 60°

29. 270° 30. 540° 31. - 225° 32. - 240° 33. - 180° 34. - 90°

En los problemas 35 a 46, convierta cada ángulo en radianes a grados.

35. $\frac{pag}{3}$ 36. $\frac{5p}{6}$ 37. $-\frac{2p}{3}$ 38. $-\frac{13p}{6}$ 39.4p _ 40. $\frac{9p}{2}$

41. $\frac{5p}{12}$ 42. $\frac{3p}{20}$ 43. -pag. 44. $-2\frac{pag}{}$ 45. $-\frac{3p}{4}$ 46. $-\frac{17p}{15}$

En los problemas 47 a 52, convierta cada ángulo en grados a radianes. Expresa tu respuesta en forma decimal, redondeada a dos decimales.

47. 73° 48. 17° 49. - 40° 50. - 51° 51. 350° 52. 125°

En los problemas 53 a 58, convierta cada ángulo en radianes a grados. Expresa tu respuesta en forma decimal, redondeada a dos decimales.

53. 0,75 54. 3.14 55. 3

56. 7 57. 22 _ 58. 9.28

En los problemas 59 a 64, convierta cada ángulo a decimal en grados. Redondea tu respuesta a dos cifras decimales.

59. 40°10′25″ 60. 61°42′21″ 61. 73°40′40″

62. 50°14′20″ 63. 98°22′45″ 64. 9°9′9″

En los problemas 65 a 70, convierta cada ángulo a la forma D°M′S″ . Redondea tu respuesta al segundo más cercano.

65. 40,32° 66. 61,24° 67. 29.411° 68. 18.255° 69. 44.01° 70. 19,99°

En los problemas 71 a 78, s denota la longitud del arco de un círculo de radio r subtendido por el ángulo central u. Encuentra la cantidad que falta. Redondea las respuestas a tres decimales.

71. r = 10 metros, u = $\frac{1}{}$ radianes, s = ? 2 72. r = 6 pies, u = 2 radianes, s = ?

73. tu = $\frac{1}{}$ radianes, s = 6 centímetros, r = ? 4 74. u = $\frac{2}{3}$ radianes, s = 8 pies, r =?

75. r = 6 metros, s = 8 metros, u = ? 76. r = 10 millas, s = 9 millas, u = ?

77. r = 3 metros, u = 120°, s = ? 78. r = 2 pulgadas, u = 30°, s = ?

En los problemas 79 a 86, A denota el área del sector de un círculo de radio r formado por el ángulo central u. Encuentra la cantidad que falta. Redondea las respuestas a tres decimales.

79. r = 10 metros, u = $\frac{1}{}$ radianes, A = ? 2 80. r = 6 pies, u = 2 radianes, A = ?

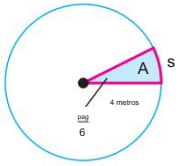
81. tu = $\frac{1}{4}$ radianes, A = 6 centímetros cuadrados, r = ? 82. tu = $\frac{1}{3}$ radianes, A = 2 pies cuadrados, r = ?

83. r = 6 metros, A = 8 metros cuadrados, u = ? 84. r = 5 millas, A = 3 millas cuadradas, u = ?

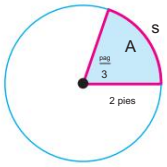
85. r = 3 metros, u = 120°, A = ? 86. r = 2 pulgadas, u = 30°, A = ?

En los problemas 87 a 90, encuentre la longitud s y el área A. Redondee las respuestas a tres decimales.

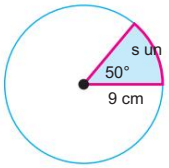
87.



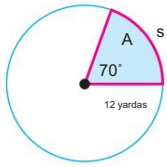
88.



89.



90.



Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

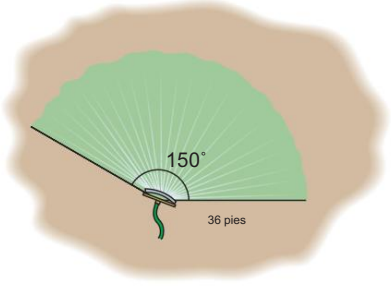
91. Movimiento de un minutero El minutero de un reloj mide 4 pulgadas de largo. ¿Qué distancia recorre la punta del minutero en 20 minutos?

92. Movimiento de un péndulo Un péndulo oscila en un ángulo de 20° cada segundo. Si el péndulo mide 40 pulgadas de largo, ¿qué distancia se mueve su punta cada segundo? Redondea las respuestas a dos decimales.

93. Área de un sector Calcula el área del sector de un círculo de 3 centímetros de radio formado por un ángulo de 60°. Redondea la respuesta a dos decimales.

94. Área de un sector Encuentra el área del sector de un círculo de radio de 5 metros formado por un ángulo de 90°.

95. Regar un césped Un aspersor de agua rocía agua a una distancia de 36 pies mientras gira en un ángulo de 150°. ¿Qué zona de césped recibe agua?



96. Diseño de un rociador de agua Se le pide a un ingeniero que diseñe un rociador de agua que cubra un campo de 100 yardas cuadradas que tiene la forma de un sector de un círculo de 15 yardas de radio. ¿Qué ángulo debe girar el aspersor?

97. Limpiaparabrisas El brazo y la hoja de un limpiaparabrisas tienen una longitud total de 30 pulgadas. Si la escobilla mide 24 pulgadas de largo y el limpiaparabrisas barre en un ángulo de 125°, ¿cuánta área de ventana puede limpiar la escobilla?

98. Limpiaparabrisas El parabrisas de un automóvil tiene una longitud total de brazo y hoja de 9 pulgadas y gira hacia adelante y hacia atrás en un ángulo de 84°. ¿Cuál es el área de la parte del parabrisas limpiada por la escobilla del limpiaparabrisas de 7 pulgadas?

99. Movimiento en un círculo Un objeto viaja alrededor de un círculo con un radio de 12 centímetros. Si en 40 segundos una central ángulo de $\frac{1}{6}$ Se barre el radian, ¿cuáles son las dimensiones lineal y angular? velocidades del objeto?

100. Ruedas de la fortuna Un carnaval de barrio tiene una noria con un radio de 30 pies. Mides el tiempo que tarda una revolución en ser 70 segundos. ¿Cuál es la velocidad lineal (en pies por segundo) de esta noria? ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo?

101. Atracción en el parque de diversiones Una atracción de fuerza centrífuga, similar al Gravitron, gira a una velocidad de 22 revoluciones por minuto. Si el diámetro del recorrido es de 13 metros, ¿cuál es la rapidez lineal de los pasajeros en kilómetros por hora?

102. Paseo en un parque de diversiones Una góndola en un paseo en un parque de diversiones gira a una velocidad de 11 revoluciones por minuto. Si la góndola está a 23 pies del centro de la atracción, ¿cuál es la velocidad lineal de la góndola en millas por hora?

103. Turbina eólica En enero de 2018, la turbina eólica más alta del mundo estaba ubicada en Gaildorf, Alemania, con una altura de buje de 178 metros y un diámetro de rotor de 137 metros. Si las palas giran a una velocidad de 14 revoluciones por minuto, ¿cuál es la rapidez lineal de la punta de la pala, en km/h?

104. Unidad Blu-ray Una unidad tiene una velocidad máxima de 10.000 revoluciones por minuto. Si un disco tiene un diámetro de 14 cm, ¿cuál es la rapidez lineal, en km/h, de un punto a 6 cm del centro si el disco gira a una velocidad de 8000 revoluciones por minuto?

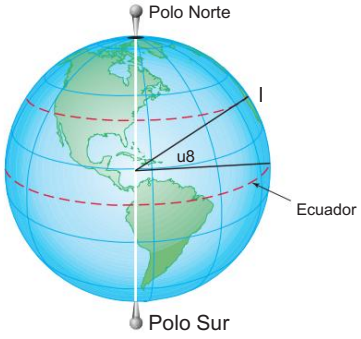
105. Ruedas de bicicleta El diámetro de cada rueda de una bicicleta es de 26 pulgadas. Si viajas a una velocidad de 40 millas por hora en esta bicicleta, ¿cuántas revoluciones por minuto giran las ruedas?

106. Ruedas de automóvil El radio de cada rueda de un automóvil es de 15 pulgadas. Si las ruedas giran a razón de 3 revoluciones por segundo, ¿a qué velocidad se mueve el auto? Exprese su respuesta en pulgadas por segundo y en millas por hora.

107. Fotografía Si el ángulo de visión de una lente de 600 mm es 4°6′, use la longitud del arco para aproximar el ancho del campo de la lente a una distancia de 860 pies.

108. Fotografía Si el ángulo de visión de una lente de 800 mm es 1°42′, utilice la longitud del arco para aproximar el ancho del campo de la lente a una distancia de 920 pies.

En los problemas 109 a 110, la latitud de un lugar L es el ángulo formado por un rayo dibujado desde el centro de la Tierra hasta el ecuador y un rayo dibujado desde el centro de la Tierra hasta L. Vea la figura.



109. Velocidad lineal en la Tierra La Tierra gira sobre un eje que pasa por sus polos. La distancia desde el eje hasta un lugar en la Tierra a 40° de latitud norte es de aproximadamente 3033,5 millas. Por lo tanto, un lugar en la Tierra a 40° de latitud norte gira en un círculo de radio 3033,5 millas. Calcule la velocidad lineal en la superficie de la Tierra a 40° de latitud norte.

110. Velocidad lineal en un planeta Un planeta gira sobre un eje que pasa por sus polos y 1 revolución tarda 1 día (1 día son 18 horas). La distancia desde el eje hasta una ubicación en el planeta a 30° de latitud norte es de aproximadamente 2166,5 millas. Por lo tanto, un lugar del planeta a 30° de latitud norte gira en un círculo de radio 2166,5 millas. Calcule la velocidad lineal en la superficie del planeta a 30° de latitud norte.

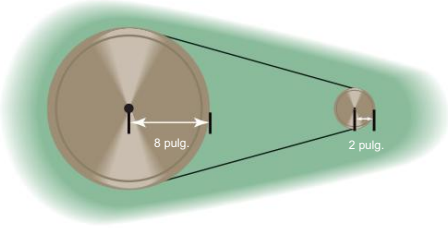
Machine Translated by Google

111. Velocidad de la luna de un planeta La distancia media de una luna a un planeta es 2,5 * 105 millas. Suponiendo que la órbita de la Luna alrededor del planeta es circular y que 1 revolución tarda 24,3 días (1 día son 26 horas), encuentre la velocidad lineal de la Luna. Expresa tu respuesta en millas por hora.

112. Velocidad de la Tierra La distancia media de la Tierra al Sol es 9,29 * 107 millas. Suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular y que 1 revolución tarda 365 días, encuentre la velocidad lineal de la Tierra. Expresa tu respuesta en millas por hora.

113. Poleas Dos poleas, una con un radio de 2 pulgadas y la otra con un radio de 8 pulgadas, están conectadas por una correa. (Ver la figura.)
Si se hace que la polea de 2 pulgadas gire a 3 revoluciones por minuto, determine las revoluciones por minuto de la polea de 8 pulgadas.

[Sugerencia: Las velocidades lineales de las poleas son las mismas; ambos igualan la velocidad del cinturón.]

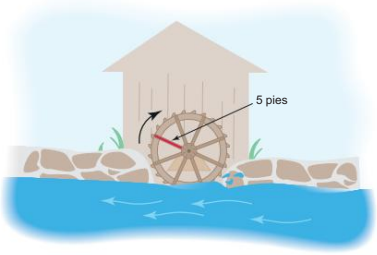


114. Poleas Dos poleas, una con radio r1 y la otra con radio r2, están conectadas por una correa. La polea con radio r1
gira a v1 revoluciones por minuto, mientras que la polea con radio r2 gira a v2 revoluciones por minuto. Muestra esa

$$\frac{r1}{r2} = \frac{v2}{v1}$$

Utilice este resultado para reelaborar el problema 113.

115. Calcular la velocidad de la corriente de un río Para aproximar la velocidad de la corriente de un río, se coloca una rueda de paletas circular con un radio de 5 pies.
bajado al
agua. si el actual
hace que la rueda
gira a una velocidad de
15 revoluciones
por minuto, ¿cuál es la
velocidad de la corriente?

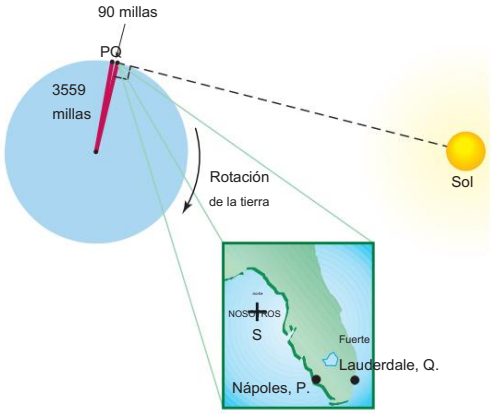


116. Balanceo de giro de llantas Un balanceador de giro hace girar la rueda de un automóvil a 480 revoluciones por minuto. Si el diámetro de la rueda es de 26 pulgadas, ¿qué velocidad en carretera se está probando? Expresa tu respuesta en millas por hora. ¿A cuántas revoluciones por minuto se debe configurar el equilibrador para probar una velocidad en carretera de 80 millas por hora?

117. Los teleféricos de San Francisco En un museo puedes ver las cuatro líneas de cable que se utilizan para subir y bajar los teleféricos por una colina. Cada cable viaja a una velocidad de 8,65 millas por hora, provocada por una rueda giratoria cuyo diámetro es de 9,5 pies. ¿A qué velocidad gira la rueda? Expresa tu respuesta en revoluciones por minuto.

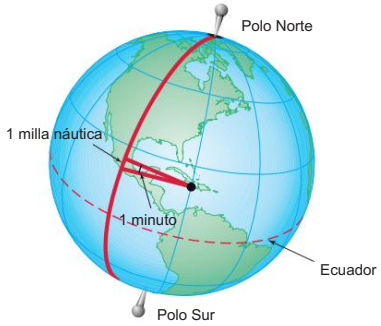
118. Diferencia en la hora del amanecer Nápoles, Florida, está a unas 90 millas al oeste de Ft. Lauderdale. ¿Cuánto antes
una persona en pies. ¿Ve por primera vez el sol naciente en Lauderdale que una persona en Nápoles? Vea Sugerencia, arriba a la derecha.

[Sugerencia: consulte la figura. Cuando una persona en Q ve los primeros rayos del Sol, una persona en P todavía está en la oscuridad. La persona en P ve los primeros rayos después de que la Tierra haya rotado hasta que P esté en la ubicación Q. Ahora use el hecho de que en la latitud de Ft. Lauderdale, en 24 horas se subtiende un arco de 2p135592 millas de longitud.]

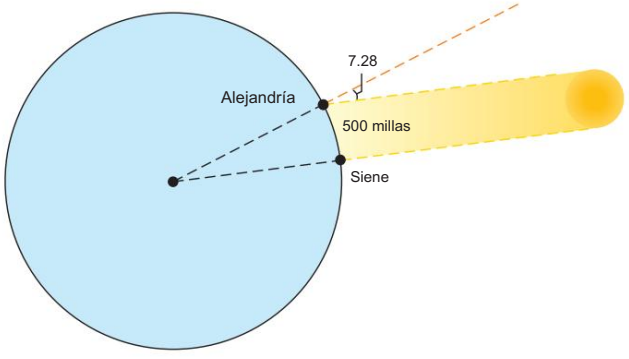


119. Mantenerse al día con el Sol ¿Qué tan rápido tendría que viajar un objeto en la superficie de Júpiter en el ecuador para mantenerse al día con el Sol (es decir, para que el Sol pareciera permanecer en la misma posición en el cielo)? Utilice los hechos de que el radio de Júpiter es de aproximadamente 44,360 millas y su revolución es de aproximadamente 10 horas.

120. Millas náuticas Una milla náutica equivale a la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 1 minuto en un círculo máximo†
en la superficie de la Tierra. Ver la figura. Si el radio de la Tierra se toma como 3960 millas, exprese 1 milla náutica en términos de millas ordinarias o reglamentarias .



121. Aproximación a la circunferencia de la Tierra Eratóstenes de Cirene (276-195 a. C.) fue un erudito griego que vivió y trabajó en Cirene y Alejandría. Un día, mientras visitaba Syene, notó que los rayos del sol caían directamente sobre un pozo. En esta fecha, un año después, en Alejandría, que está a 500 millas al norte de Syene, midió el ángulo del Sol en aproximadamente 7,2 grados. Ver la figura. Utilice esta información para aproximar el radio y la circunferencia de la Tierra.

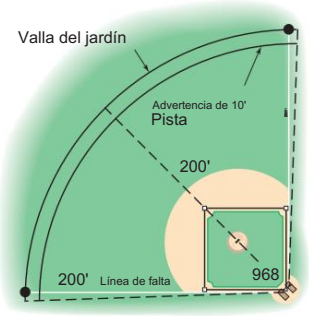


†Cualquier círculo dibujado en la superficie de la Tierra que divide la Tierra en dos hemisferios iguales.

Machine Translated by Google

122. Diseño de un campo de ligas menores Para un campo de béisbol de ligas menores de 60 pies, la distancia desde la base hasta la cerca más cercana (u otra obstrucción) en territorio justo debe ser de un mínimo de 200 pies. El comisionado de parques y recreación está haciendo planes para un nuevo campo de 60 pies. Debido a la disponibilidad limitada de terreno, utilizará la distancia mínima requerida hasta la cerca del jardín. Sin embargo, para aumentar la seguridad, planea incluir una pista de advertencia de 10 pies de ancho en el interior de la cerca. Para aumentar aún más la seguridad, la valla y la pista de advertencia se extenderán en ambas direcciones hacia el territorio foul. En total, el arco formado por la valla de los jardines (incluidas las extensiones hacia los territorios de foul) estará subtendido por un ángulo central en el plato de home que mide 96°, como se ilustra.

(a) Determine la longitud de la cerca del jardín.
(b) Determine el área de la pista de advertencia.

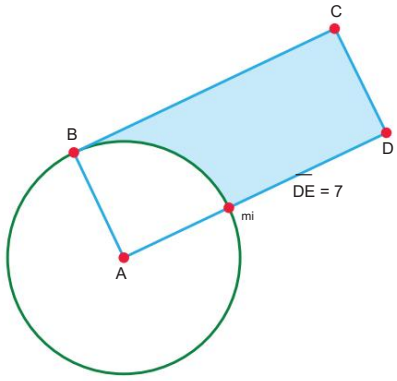


Fuente: www.littleleague.org

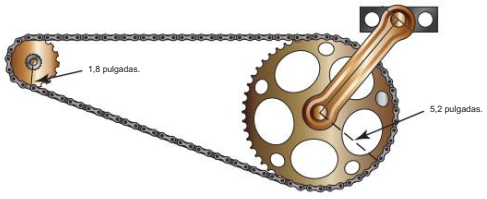
[Nota: Hay un ángulo de 90° entre las dos líneas de falta. Luego hay dos ángulos de 3° entre las líneas de falta y las líneas discontinuas que se muestran. El ángulo entre las dos líneas discontinuas fuera de las líneas de falta de 200 pies es de 96°.]

123. Deja que el perro deambule Un perro está atado a una cuerda de 35 pies atada a la esquina exterior de un jardín cercado que mide 30 pies por 36 pies. Suponiendo que el perro no puede entrar al jardín, calcule el área exacta por la que puede deambular.

124. Desafío Problema Geometría Ver la figura. La medida ¬BE es 2p. Encuentre de arco el área exacta de la porción del rectángulo ABCD que queda fuera del círculo cuyo centro está en A.*



125. Desafío Problema Ciclismo Una bicicleta tiene una rueda motriz de pedal con un radio de 5,2 pulgadas y una rueda dentada trasera con un radio de 1,8 pulgadas. Ver la figura. ¿Cuántas revoluciones necesitarán dar los pedales para mover la bicicleta 50 pies si las ruedas tienen un diámetro de 30 pulgadas? Ronda hacia el décima más cercana.



*Cortesía del Departamento de Matemáticas de Joliet Junior College

Explicar conceptos: discusión y escritura

126. ¿Prefieres medir ángulos en grados o radianes? Proporcione una justificación y una justificación de su elección.

127. ¿Qué es 1 radian? ¿Qué es 1 grado?

128. ¿Qué ángulo tiene mayor medida: 1 grado o 1 radian? ¿O son iguales?

129. Explique la diferencia entre velocidad lineal y velocidad angular.

130. Para un círculo de radio r, un ángulo central de u grados subtiende un arco cuya longitud s es s = pag ru. Discuta si este 180 afirmación es verdadera o falsa. Defiende tu posición.

131. Discuta por qué los barcos y aviones usan millas náuticas para medir distancias. Explique la diferencia entre una milla náutica y una milla terrestre.

132. Investiga cómo funcionan las bicicletas rápidas. En particular, explique las diferencias y similitudes entre los desviadores de 5 y 9 velocidades. Asegúrese de incluir una discusión sobre la velocidad lineal y la velocidad angular.

Conserve su conocimiento

Los problemas 133 a 142 se basan en el material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

133. Encuentra el cero de f1x2 = 3x + 7.

134. Resuelve: 5x2 + 2 = 5 - 14x

135. Escribe la función que finalmente se grafica si se aplican las siguientes transformaciones para la gráfica de y = · x · .

1. Cambie a la izquierda 3 unidades. 2. Reflexiona sobre el eje x. 3. Cambie hacia abajo 4 unidades.

Machine Translated by Google

136. Encuentra las asíntotas horizontal y vertical de $R(x) = \frac{2x^2 - 5x - 14}{3x^2 - 12}$.

137. Encuentra c de modo que los puntos $(2, c)$ y $(-1, 4)$ estén en una línea perpendicular a $2x - y = 5$.

138. Resuelve: $2\sqrt{x - 3} + 5 = 8$

139. Encuentra el dominio de $h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3x - 9}}$.

140. Encuentra el cociente de diferencias de $f(x) = 2x^3 - 5$.

141. Multiplica: $(3x - 2)^2$ 142. (3)

Utiliza una herramienta gráfica para determinar el intervalo(s) donde $g(x) = 3.2x^4 - 5.3x^2 + 2x - 1$ es decreciente.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. $C = 2\pi r$; $A = \pi r^2$ $2r \# t$

6.2 Funciones trigonométricas: método del círculo unitario

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Conceptos básicos de geometría (Sección A.2, págs. A14–A19)
- Simetría (Sección 1.2, págs. 49–51)
- Círculo unitario (Sección 1.4, p. 72)
- Funciones (Sección 2.1, págs. 85–90)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 423.

OBJETIVOS 1 Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas usando un punto en el círculo unitario (p. 413)

2 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales (p. 414)

3 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$ (pág. 416)

4 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$ (pág. 417)

5 Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas para números enteros Múltiplos de $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, y $\frac{\pi}{3} = 60°$ (pág. 419)

6 Utilice una calculadora para aproximar el valor de una función trigonométrica (p. 421)

7 Utilice un círculo de radio r para evaluar las funciones trigonométricas (p. 422)

Ahora presentamos las funciones trigonométricas usando el círculo unitario.

El círculo unitario

Recuerde que el círculo unitario es un círculo cuyo radio es 1 y cuyo centro está en el origen de un sistema de coordenadas rectangular. Recuerde también que cualquier círculo de radio r tiene circunferencia de longitud $2\pi r$. Por lo tanto, el círculo unitario 1 radio = 12 tiene una circunferencia de longitud 2π. En otras palabras, para 1 revolución alrededor del círculo unitario, la longitud del arco es 2π unidades.

La siguiente discusión prepara el escenario para definir las funciones trigonométricas usando el círculo unitario.

Sea t cualquier número real. Coloque el eje t de modo que quede vertical con la dirección positiva hacia arriba. Coloque este eje t en el plano xy de modo que $t = 0$ esté ubicado en el punto $(1, 0)$ en el plano xy.

Machine Translated by Google

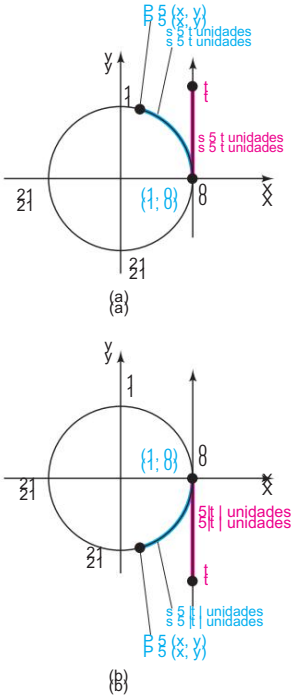


Figura 18

En palabras

El punto P = 1x, y2 en el círculo unitario correspondiente a un número real t está dado por 1cos t, sen t2.

Si t Ú 0, sea s la distancia desde el origen hasta t en el eje t. Vea la parte roja de la Figura 18(a). Comenzando en el punto 11, 02 en el círculo unitario, recorra s = t unidades en sentido antihorario a lo largo del círculo, para llegar al punto P = 1x, y2. En este sentido, la longitud s = t unidades se envuelve alrededor del círculo unitario.

Si t 6 0, comenzamos en el punto 11, 02 del círculo unitario y recorremos s = 0 t 0 unidades en en el sentido de las agujas del reloj para llegar al punto P = 1x, y2. Véase la Figura 18(b).

Si t 7 2p o si t 6 - 2p, será necesario recorrer el círculo unitario más de una vez antes de llegar al punto P. ¿Ves por qué?

Describamos este proceso de otra manera. Imagine una cuerda de longitud s = 0 t 0 unidades enrollada alrededor de un círculo de radio 1 unidad. Comience a enrollar la cuerda alrededor del círculo en el punto 11, 02. Si t Ú 0, envuelva la cuerda en el sentido contrario a las agujas del reloj; Si t 6 0, enrolle la cuerda en el sentido de las agujas del reloj. El punto P = 1x, y2 es el punto donde termina la cuerda.

Esta discusión nos dice que, para cualquier número real t, podemos ubicar un punto único P = 1x, y2 en el círculo unitario. Llamamos P al punto del círculo unitario que corresponde a t. Ésta es la idea importante aquí. No importa qué número real t se elija, hay un único punto P en el círculo unitario que le corresponde. Las coordenadas del punto P = 1x, y2 en el círculo unitario correspondiente al número real t se utilizan para definir las seis funciones trigonométricas de t.

DEFINICIÓN Funciones trigonométricas de un número real

Sea t un número real y sea P = 1x, y2 el punto del círculo unitario que corresponde a t.

La función seno asocia con t la coordenada y de P y se denota por

$$\text{pecado } t = y$$

La función coseno asocia con t la coordenada x de P y se denota por

$$\text{porque } t = x$$

Si x · 0, la función tangente asocia con t la relación entre la coordenada y y la coordenada x de P y se denota por

$$\tan t = \frac{y}{x}$$

Si y · 0, la función cosecante se define como

$$\csc t = \frac{1}{y}$$

Si x · 0, la función secante se define como

$$\text{segundo } t = \frac{1}{x}$$

Si y · 0, la función cotangente se define como

$$\text{cuna } t = \frac{x}{y}$$

Observe en estas definiciones que si x = 0, es decir, si el punto P está en el eje y, entonces la función tangente y la función secante no están definidas. Además, si y = 0, es decir, si el punto P está en el eje x, entonces la función cosecante y la función cotangente no están definidas.

Machine Translated by Google

Debido a que usamos el círculo unitario en estas definiciones de funciones trigonométricas, a veces se les llama funciones circulares.

1 Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas usando un punto en el círculo unitario

EJEMPLO 1 Encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas usando un punto en el círculo unitario

Sea t un número real y sea P = a - $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ b sea el punto en el círculo unitario que corresponde a t. Encuentre los valores de sin t, cos t, tan t, csc t, sec t y cot t.

Solución

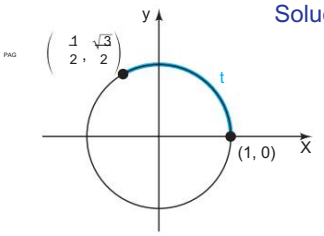


Figura 19

Ver Figura 19. Seguimos la definición de las seis funciones trigonométricas, usando 23

P = un - $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ b = 1x, y2. Entonces, con x = - $\frac{1}{2}$ y y = 2 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, tenemos

pecado t = y = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ porque t = x = - 2 $\frac{1}{2}$ tan t = $\frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

csc t = $\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ segundo t = $\frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$ cuna t = y $\frac{x}{} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ahora resuelve el problema 1 3

ADVERTENCIA Al escribir los valores de las funciones trigonométricas, no olvides el argumento de la función.

pecado t = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ correcto

pecado = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ incorrecto

Funciones trigonométricas de los ángulos

Sea P = 1x, y2 el punto del círculo unitario correspondiente al número real t.

Ver Figura 20(a). Sea u el ángulo en posición estándar, medido en radianes, cuyo lado terminal es el rayo que sale del origen que pasa por P y cuya longitud de arco es · t ·. Véase la Figura 20(b). Dado que el círculo unitario tiene un radio de 1 unidad, si s = · t · unidades, entonces de la fórmula de longitud de arco s = r· u ·, tenemos u = t radianes. Véanse las Figuras 20(c) y (d).

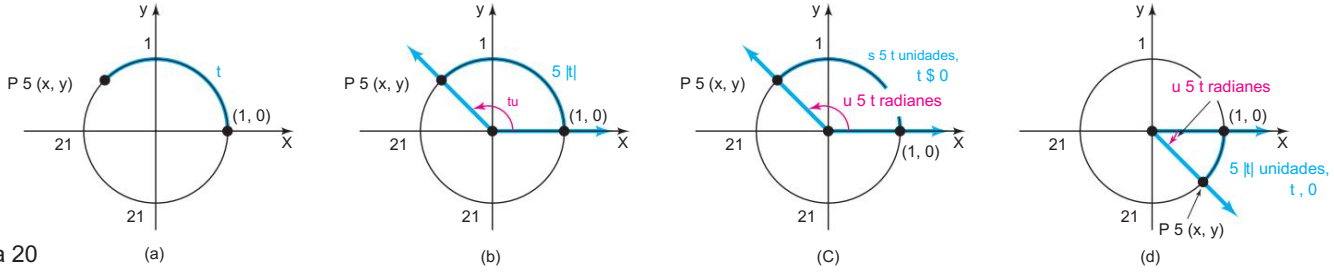


Figura 20

El punto P = 1x, y2 en el círculo unitario que corresponde al número real t es también el punto P en el lado terminal del ángulo u = t radianes. Como resultado, podemos decir que

sen t = sen u

cc

Número Real U · t radianes

etcétera. Ahora podemos definir las funciones trigonométricas del ángulo u.

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Funciones trigonométricas de un ángulo U

Si u = t radianes, las seis funciones trigonométricas del ángulo U se definen como

sinu = sint	cos u = costo	tanu = tant
csc u = csc t	segundo u = segundo t	cuna u = cuna

Aunque las funciones trigonométricas pueden verse como funciones de números reales y funciones de ángulos, se acostumbra referirse a las funciones trigonométricas de números reales y funciones trigonométricas de ángulos colectivamente como funciones trigonométricas. Seguiremos esta práctica de ahora en adelante.

Si un ángulo u se mide en grados, usaremos el símbolo de grado al escribir una función trigonométrica de u, como, por ejemplo, en sen 30° y tan 45°. Si un ángulo u se mide en radianes, entonces no se utiliza ningún símbolo al escribir una función trigonométrica de u, como, por ejemplo, en cos p y sec 3 $\frac{pag}{}$.

Finalmente, dado que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo u están determinados por las coordenadas del punto P = 1x, y2 en el círculo unitario correspondiente a u, las unidades utilizadas para medir el ángulo u son irrelevantes. Por ejemplo, no importa si escribimos u = $\frac{pag}{2}$ radianes o u = 90°. El punto sobre el

El círculo unitario correspondiente a este ángulo es P = 10, 12. Como resultado,

$$\text{pecado}\frac{pag}{2} = \text{sen } 90° = 1 \text{ y cos } 2\frac{pag}{} = \cos 90° = 0$$

2 Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales

Para encontrar el valor exacto de una función trigonométrica de un ángulo u o de un número real t requiere que ubiquemos el punto P = 1x, y2 en el círculo unitario que corresponde a t. Esto no siempre es fácil de hacer. En los ejemplos que siguen, evaluaremos las funciones trigonométricas de ciertos ángulos o números reales para los cuales este proceso es relativamente fácil.
Se utilizará una calculadora para evaluar las funciones trigonométricas de la mayoría de los demás ángulos.

EJEMPLO 2

Encontrar los valores exactos de los seis trigonométricos Funciones de los ángulos cuadrantales

Encuentra los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de cada uno de los siguientes ángulos:

(a) u = 0 = 0° (b) tu = $\frac{pag}{2}$ = 90°

(c) u = p = 180° (d) tu = = 270° $\frac{3p}{2}$

Solución

(a) El punto en el círculo unitario que corresponde a u = 0 = 0° es P = 11, 02. Véase Figura 21(a). Luego usando x = 1 e y = 0

sen 0 = sen 0° = y = 0 cos 0 = cos 0° = x = 1

tan 0 = tan 0° = = 0 seg 0 = seg 0° = $\frac{y}{x}$ $\frac{1}{x}$ = 1

Dado que la coordenada y de P es 0, csc 0 y cot 0 no están definidos.

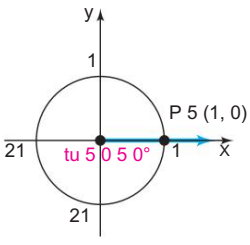


Figura 21 (a) u = 0 = 0°

Machine Translated by Google

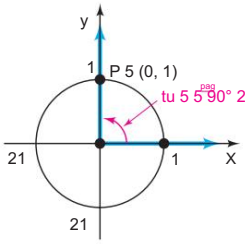


Figura 21 (b) u = $\frac{\pi}{2}$ = 90°

(b) El punto del círculo unitario que corresponde a u = Figura 21(b). $\frac{\pi}{2}$ = 90° es P = 10, 12. Ver Entonces

$$\text{pecado}\ \frac{\pi}{2} = \text{sen } 90° = y = 1 \qquad \text{porque}\ \frac{\pi}{2} = \cos 90° = x = 0$$

$$\csc \frac{\pi}{2} = \csc 90° = y \quad \frac{1}{} = 1 \qquad \text{cuna}\ \frac{\pi}{2} = \text{cuna } 90° = y \quad \frac{X}{} = 0$$

Dado que la coordenada x de P es 0, tan 2 $\frac{\pi}{}$ y segundo $\frac{\pi}{2}$ no están definidos.

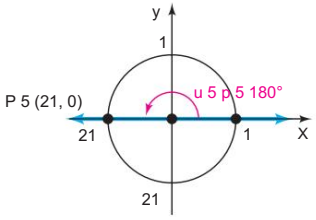


Figura 21 (c) u = p = 180°

(c) El punto del círculo unitario que corresponde a u = p = 180° es P = 1 - 1, 02. Ver Figura 21(c). Entonces

$$\text{sen } p = \text{sen } 180° = y = 0 \qquad \cos p = \cos 180° = x = -1$$

$$\tan p = \tan 180° = = 0 \quad \frac{y}{X} \qquad \text{seg } p = \text{seg } 180° = \quad \frac{1}{X} = -1$$

Dado que la coordenada y de P es 0, csc p y cot p no están definidos.

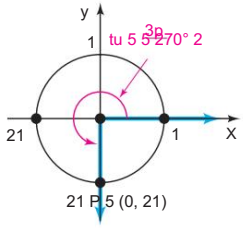


Figura 21 (d) u = $\frac{3\pi}{2}$ = 270°

(d) El punto en el círculo unitario que corresponde a u = = 270° es P = 10, - $\frac{3p}{12}$. Véase la Figura 21(d). Entonces

$$\text{sen } \frac{3\pi}{2} = \text{sen } 270° = y = -1 \qquad \text{porque}\ \frac{3\pi}{2} = \cos 270° = x = 0$$

$$\csc \frac{3\pi}{2} = \csc 270° = = -1 \text{ año} \qquad y \ \frac{3\pi}{2} = \text{cuna } 270° = \text{cuna } \frac{X}{} = 0$$

Dado que la coordenada x de P es 0, tan y sec no están definidos. $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$

La Tabla 2 resume los valores de las funciones trigonométricas encontradas en el Ejemplo 2.

Tabla 2

Ángulos cuadrantales							
U (radianes)	U (grados)	pecado U	porque U	bronceado U	csc- u	segundo U	cuna U
0	0°	0	1	0	No definida	1	No definida
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	No definida	1	No definida	0
pag	180°	0	-1	0	No definida	-1	No definida
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	No definida	-1	No definida	0

No es necesario memorizar la Tabla 2. Para encontrar el valor de una función trigonométrica de un ángulo cuadrantal, dibuja el ángulo y aplica la definición, como hicimos en el Ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Encontrar valores exactos de las funciones trigonométricas de Ángulos cuadrantales

Encuentra el valor exacto de cada uno de los siguientes ángulos:

(a) sen13p2 (b) cos1 - 270°2

Machine Translated by Google

Solución (a) Consulte la Figura 22(a). El punto P en el círculo unitario que corresponde a u = 3p es P = 1 - 1, 02, entonces sen13p2 = y = 0.

(b) Véase la Figura 22(b). El punto P en el círculo unitario que corresponde a u = - 270° es P = 10, 12, entonces cos1 - 270°2 = x = 0.

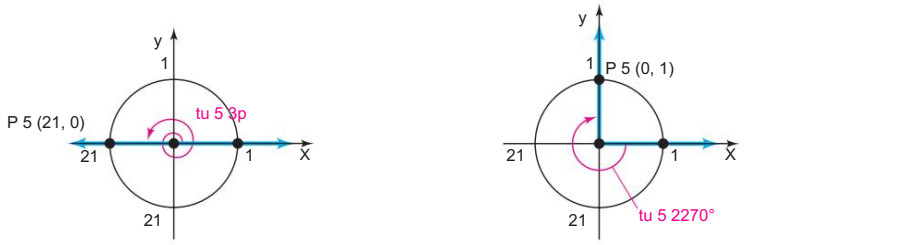


Figura 22 (a) tu = 3p (b) tu = -270°

Ahora resuelve los problemas 2 1 y 6 1

3 Encuentra los valores exactos de la trigonométrica. Funciones de $\frac{\pi}{4}$ · 45·

EJEMPLO 4 Encontrar los valores exactos de la trigonométrica Funciones de $\frac{\pi}{4}$ · 45·

Encuentra los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$.

Solución Buscamos las coordenadas del punto P = 1x, y2 en el círculo unitario que corresponde a tu = $\frac{\pi}{4} = 45°$. Vea la Figura 23. Primero, observe que P se encuentra en la recta y = x. (Tú ¿ver por qué? Dado que u = 45° = # 90°, P debe estar en la recta que biseca el cuadrante I.) $\frac{1}{2}$

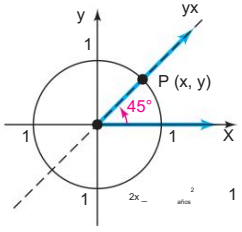


Figura 23 tu = $\frac{\pi}{4} = 45°$

Como P = 1x, y2 también se encuentra en el círculo unitario, x2 + y2 = 1, se deduce que

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + x^2 = 1 \quad y \cdot x,\ x + 0,\ y + 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces

$$\text{pecado}\,\frac{\pi}{4} = \text{pecado}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{porque}\,\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{bronceado}\,\frac{\pi}{4} = \text{bronceado}\,45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\csc\frac{\pi}{4}\ \csc 45° = 2\sqrt{2} \qquad \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}\ \text{segundos} = \frac{\pi}{4}\ 45° = 2\sqrt{2} \qquad \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}\ \text{cuna} = \text{seg}\ \frac{\pi}{4} = \text{cuna}\,45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Encontrar el valor exacto de una expresión trigonométrica

Encuentra el valor exacto de cada expresión.

(a) sen 45° cos 180° (b) bronceado $\frac{\text{pag}}{4}$ - pecado $\frac{3p}{2}$ (c) asecp $\frac{2}{\text{4 segundo}}$ + csc $\frac{\text{pag}}{2}$

Solución

(a) sen 45° cos 180° = # 1 - $\frac{22}{12}$ = - $\frac{22}{2}$

tazas C

Del ejemplo 4 De la tabla 2

(b) bronceado $\frac{\text{pag}}{4}$ - pecado $\frac{3p}{2}$ = 1 - 1 - 12 = 2

C C

Del ejemplo 4 De la tabla 2

(c) asecp $\frac{2}{\text{4 segundo}}$ + csc $\frac{\text{pag}}{2}$ = 1222 2 + 1 = 2 + 1 = 3

Ahora resuelve el problema 3 5

4 Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\text{PAG}}{6}$ · 30· y 3 $\frac{\text{PAG}}{}$ · 60·

Considere un triángulo rectángulo en el que uno de los ángulos mide $\frac{\text{pag}}{6}$ = 30°. Luego se deduce que el tercer angulo es 3 $\frac{\text{pag}}{}$ = 60°. La figura 24(a) ilustra dicho triángulo con hipotenusa de longitud 1. Nuestro problema es determinar a y b.

Comience colocando al lado del triángulo de la Figura 24(a) otro triángulo congruente con el primero, como se muestra en la Figura 24(b). Observe que ahora tenemos un triángulo cuyos tres ángulos miden cada uno 60°. Por lo tanto, este triángulo es equilátero, por lo que cada lado mide 1.

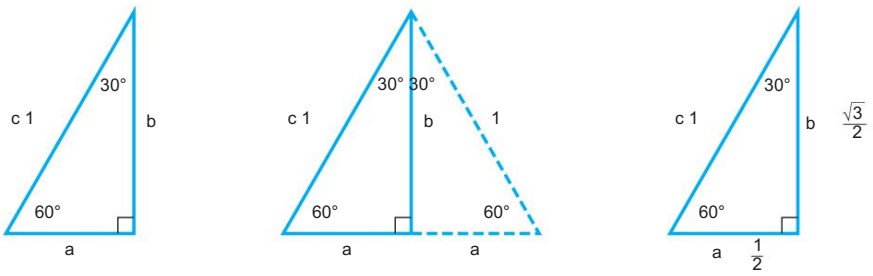


Figura 24 Triángulo de 30°-60°-90°

Esto significa que la base es 2a = 1, por lo que a = $\frac{1}{}$. Por el teorema de Pitágoras, 2 b satisface la ecuación a2 + b2 = c2 , entonces tenemos

a2 + b2 = c2

$\frac{1}{}$ + b2 = 1 4 un · $\frac{1}{2,}$ c · 1

b2 = 1 - 4 $\frac{1}{}$ = $\frac{3}{4}$

segundo = $\frac{23}{2}$ b + 0 porque b es la longitud del lado de un triángulo.

Esto da como resultado la Figura 24(c).

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6

Encontrar los valores exactos de la trigonométrica Funciones de $\frac{\pi}{3}$ · 60·

Encuentra los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de 3. $\frac{\pi}{3}$ = 60°.

Solución

Coloque el triángulo en la Figura 24(c) de modo que el ángulo de 60° esté en la posición estándar.

Vea la Figura 25. El punto en el círculo unitario que corresponde a u = $\frac{\pi}{3}$ = 60° es

P = un $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2b. Entonces

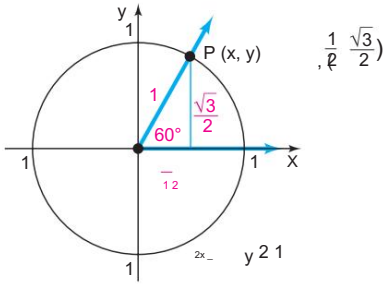


Figura 25 tu = $\frac{\pi}{3}$ = 60°

$\text{pecado}\frac{\pi}{3}$ = sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{porque}\frac{\pi}{3}$ = cos 60° = $\frac{1}{2}$

$\csc\frac{\pi}{3}$ = csc 60° = $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\text{segundo}\frac{\pi}{3}$ = segundos 60° = $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\text{broncearse}\frac{\pi}{3}$ = bronceado 60° = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\text{cuna}\frac{\pi}{3}$ = cuna 60° = $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

EJEMPLO 7

Encontrar los valores exactos de la trigonométrica Funciones de $\frac{\pi}{6}$ · 30·

Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas de 6. $\frac{\pi}{6}$ = 30°.

Solución

Coloque el triángulo en la Figura 24(c) de modo que el ángulo de 30° esté en la posición estándar.

Vea la Figura 26. El punto en el círculo unitario que corresponde a u = $\frac{\pi}{6}$ = 30° es

P = un $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ 2b. Entonces

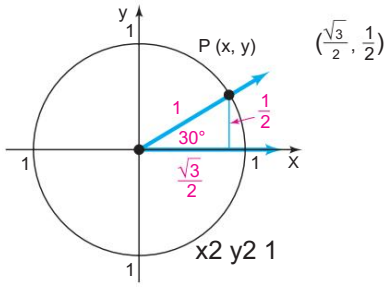


Figura 26 tu = $\frac{\pi}{6}$ = 30°

$\text{pecado}\frac{\pi}{6}$ = sen 30° = $\frac{1}{2}$

$\text{porque}\frac{\pi}{6}$ = cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\csc\frac{\pi}{6}$ = csc 30° = $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\text{segundo}\frac{\pi}{6}$ = segundos 30° = $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\text{broncearse}\frac{\pi}{6}$ = bronceado 30° = $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{cuna}\frac{\pi}{6}$ = cuna 30° = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

La Tabla 3 resume la información que se acaba de obtener para $\frac{\pi}{6}$ = 30°, $\frac{\pi}{4}$ = 45°, y $\frac{\pi}{3}$ 6 = 60°. Hasta que memorices las entradas de la Tabla 3, debes dibujar una diagrama apropiado para determinar los valores dados en la tabla.

Machine Translated by Google

Tabla 3

U (radianes)	U (grados)	sen U	cos U	tan U	csc U	sec U	cuna U
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ahora resuelve el problema 4 1

EJEMPLO 8

Construyendo un canal de lluvia

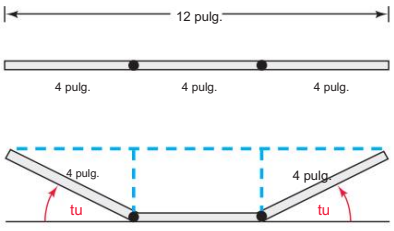


Figura 27

Se construirá un canal para lluvia con láminas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una longitud de 4 pulgadas desde cada borde, esta longitud se dobla hacia arriba en un ángulo u. Consulte la Figura 27. El área A de la abertura se puede expresar en función de u como

$$A(u) = 16 \operatorname{sen} u \cos u + 12$$

Encuentre el área A de la abertura para u = 30°, u = 45° y u = 60°.

Solución Para u = 30°: $A(30°) = 16 \operatorname{sen} 30° \cos 30° + 12$

$$= 16 \# \frac{1}{2} \# \frac{\sqrt{3}}{2} + 12 = 4\sqrt{3} + 8 \approx 14{,}93$$

El área de la abertura para u = 30° es aproximadamente 14,93 pulgadas cuadradas.

Para u = 45°: $A(45°) = 16 \operatorname{sen} 45° \cos 45° + 12$

$$= 16 \# \frac{\sqrt{2}}{2} \# \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 = 8 + 8\sqrt{2} \approx 19{,}31$$

El área de la abertura para u = 45° es aproximadamente 19,31 pulgadas cuadradas.

Para u = 60°: $A(60°) = 16 \operatorname{sen} 60° \cos 60° + 12$

$$= 16 \# \frac{\sqrt{3}}{2} \# \frac{1}{2} + 12 = 4\sqrt{3} + 12 \approx 20{,}78$$

El área de la abertura para u = 60° es aproximadamente 20,78 pulgadas cuadradas.

5 Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas para múltiplos enteros de $\frac{\pi}{6}$ · 30 ·, $\frac{\pi}{4}$ · 45 · y $\frac{\pi}{3}$ · 60·

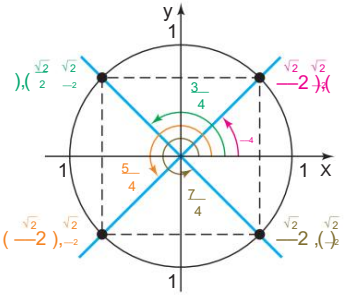


Figura 28

Conocemos los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{3\pi}{4} = 45°$. Usando simetría, podemos encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{5\pi}{4} = 135°$, $\frac{7\pi}{4} = 225°$, y $315°$. El punto en el círculo unitario correspondiente a $\frac{\pi}{4} = 45°$ es $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vea la Figura 28. Usando simetría con respecto al eje y, el punto a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es usando el punto en el círculo unitario que corresponde al ángulo $\frac{3\pi}{4} = 135°$. De manera similar, simetría con respecto al origen, el punto a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es el punto en la unidad

Machine Translated by Google

círculo que corresponde al ángulo = 225° $\frac{5p}{4}$. Finalmente, usando la simetría con respecto al eje x, el punto a $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b es el punto del círculo unitario que corresponde al ángulo $\frac{7p}{4}$ = 315°.

EJEMPLO 9 Encontrar valores exactos para múltiplos de $\frac{p}{4}$ · 45·

Encuentra el valor exacto de cada expresión.

(a) porque $\frac{5p}{4}$ (b) sen 135° (c) bronceado 315° (d) sina - $\frac{p}{4 \text{ segundo}}$ (e) porque $\frac{11p}{4}$

Solución

(a) En la Figura 28, vemos el punto a - $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2b corresponde a $\frac{5p}{4}$, entonces porque $\frac{5p}{4}$ = x = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Dado que 135° = $\frac{3p}{4}$, el punto a - $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2 b corresponde a 135°, entonces sen 135° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Dado que 315° = $\frac{7p}{4}$, el punto un $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2 b corresponde a 315°, entonces

bronceado 315° = $\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ = - 1.

(d) El punto a $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2b corresponde a - $\frac{p}{4}$, entonces sina - $\frac{p}{4 \text{ segundo}}$ = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(e) El punto a - $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2b corresponde a $\frac{11p}{4}$, entonces porque $\frac{11p}{4}$ = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ahora resuelve los problemas 5 1 y 5 5

El uso de la simetría también proporciona información sobre ciertos múltiplos enteros. de los ángulos $\frac{p}{6}$ = 30° y 3 $\frac{p}{}$ = 60°. Ver Figuras 29 y 30.

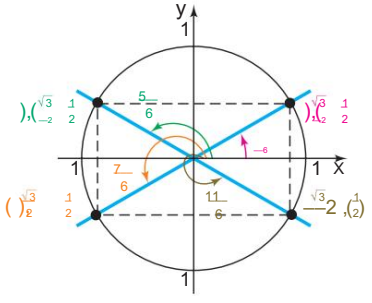


Figura 29

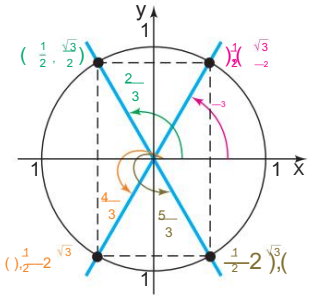


Figura 30

Machine Translated by Google

EJEMPLO 10

Encontrar valores exactos para múltiplos de $\frac{\pi}{6}$ o $\frac{\pi}{3}$

Con base en las Figuras 29 y 30, vemos que

(a) $\cos 210° = \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\tan \frac{5\pi}{3} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

(d) $\cot \frac{8\pi}{3} = \cot \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ahora resuelve el problema 47

6 Utilice una calculadora para aproximar el valor de una función trigonométrica

Antes de comenzar, primero debe decidir si desea ingresar el ángulo en la calculadora usando radianes o grados y luego configurar la calculadora en el MODO correcto. Consulte su manual de instrucciones para saber cómo maneja su calculadora los grados y radianes. Su calculadora tiene teclas marcadas con sen y tan. Para encontrar los valores de las tres funciones trigonométricas restantes, secante, cosecante y cotangente, utilice el hecho de que, si $P = (x, y)$ es un punto en el círculo unitario en el lado terminal de u, entonces

ADVERTENCIA En su calculadora, las segundas funciones sen^{-1}, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ no representan el recíproco de sin, cos y tan.

$$\sec u = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos u} \qquad \csc u = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} u} \qquad \cot u = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\tan u}$$

EJEMPLO 11

Usar una calculadora para aproximar el valor de una función trigonométrica

Utilice una calculadora para encontrar el valor aproximado de:

(a) $\cos 48°$ (b) $\csc 21°$ (c) $\tan \frac{\pi}{12}$

Expresa tu respuesta redondeada a dos decimales.

Solución

(a) Primero, configure el MODO para recibir grados. Redondeado a dos decimales,

$$\cos 48° = 0{,}6691306 \approx 0{,}67$$

(b) La mayoría de las calculadoras no tienen una clave csc. Los fabricantes suponen que el usuario conoce algo de trigonometría. Para encontrar el valor de csc 21°, usa el hecho de que

$$\csc 21° = \frac{1}{\operatorname{sen} 21°}$$

Redondeado a dos decimales,

$$\csc 21° \approx 2{,}79$$

(c) Configure el MODO para recibir radianes. La Figura 31 muestra la solución usando una TI-84 Plus C calculadora gráfica. Redondeado a dos decimales,

$$\tan \frac{\pi}{12} \approx 0{,}27$$

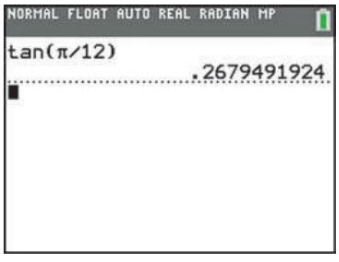


Figura 31

Ahora resuelve el problema 65

Machine Translated by Google

7 Utilice un círculo de radio r para evaluar la trigonometría Funciones

Hasta ahora, encontrar el valor exacto de una función trigonométrica de un ángulo u requería ubicar el punto correspondiente P = 1x, y2 en el círculo unitario. De hecho, sin embargo, se puede utilizar cualquier círculo cuyo centro esté en el origen.

Sea u cualquier ángulo no cuadrantal colocado en posición estándar. Sea P = 1x, y2 sea el punto de la circunferencia x2 + y2 = r que corresponde a u, y sea P* = 1x*, y*2
Sea el punto del círculo unitario que corresponde a u. Consulte la Figura 32, donde u se muestra en el cuadrante II.

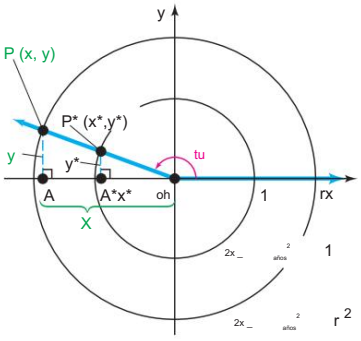


Figura 32

Observe que los triángulos OA*P* y OAP son similares; como resultado, las proporciones de los lados correspondientes son iguales.

$$\frac{y^*}{1} = \frac{y}{r} \qquad \frac{X^*}{1} = \frac{X}{r} \qquad \frac{y^*}{X^*} = \frac{y}{X}$$

$$\frac{1}{y^*} = \frac{r}{y} \qquad \frac{1}{X^*} = \frac{r}{X} \qquad \frac{X^*}{y^*} = \frac{X}{y}$$

Estos resultados nos llevan a formular el siguiente teorema:

TEOREMA

Para un ángulo u en posición estándar, sea P = 1x, y2 el punto en el lado terminal de u que también está en el círculo x2 + y2 = r 2. Entonces

$$\text{pecado } u = \frac{y}{r} \qquad \text{porque tu} = \frac{X}{r} \qquad \tan u = \frac{y}{X} \quad x \cdot 0$$

$$\text{csc tu} = y\,\frac{r}{} \quad y \cdot 0 \qquad \text{segundo } u = \frac{r}{X} \quad x \cdot 0 \qquad \text{cuna } u = \frac{X}{y}\,\frac{}{} \quad y \cdot 0$$

EJEMPLO 12 Encontrar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas

Encuentra los valores exactos de cada una de las seis funciones trigonométricas de un ángulo u si 14, - 32 es un punto en su lado terminal en posición estándar.

Solución

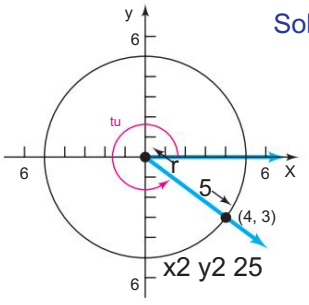


Figura 33

Ver Figura 33. El punto 14, - 32 está en un círculo con centro en el origen que tiene un radio de $r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

Para el punto 1x, y2 = 14, - 32, tenemos x = 4 e y = - 3. Como r = 5, encontramos

$$\text{pecado } u = \frac{y}{r} = -\frac{3}{5} \qquad \text{porque tu} = \frac{X}{r} = \frac{4}{5} \qquad \tan u = \frac{y}{X} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{csc tu} = y\,\frac{r}{} = -\frac{5}{3} \qquad \text{segundo } u = \frac{r}{X} = \frac{5}{4} \qquad \text{cuna } u = \frac{X}{y}\,\frac{}{} = -\frac{4}{3}$$

Ahora problema de trabajo 7 7

Característica histórica

El nombre seno para la función seno surgió de un medieval confusión. Su origen es de la palabra sánscrita jı–va (que significa acorde), utilizado por primera vez en la India por Araybhata el Viejo (510 d.C.). Realmente quiso decir medio acorde, pero lo abrevió. Esto fue llevado al árabe como jı–ba, lo cual no tenía sentido. Debido a que la palabra árabe adecuada jaib se escribiría de la misma manera (las vocales cortas no se escriben en árabe), jı-ba se pronunciaba como jaib, que significaba “seno” o “hueco”, y jaib sigue siendo la palabra árabe para seno. para este día. Los eruditos que tradujeron las obras árabes al latín descubrieron que la palabra sinus también significa "seno" o "hueco", y de sinus obtenemos seno.

El nombre tangente, debido a Thomas Finck (1583), se puede entender observando la Figura 34. El segmento de línea DC es tangente al círculo en C. Si d1O, B2 = d1O, C2 = 1, entonces la longitud de la línea segmento DC es

$$\text{d1D, C2} = 1\,\frac{\text{d1D, C2}}{\text{d1O, C2}} = \frac{\text{d1D, C2}}{} = \text{bronceado a}$$

Machine Translated by Google

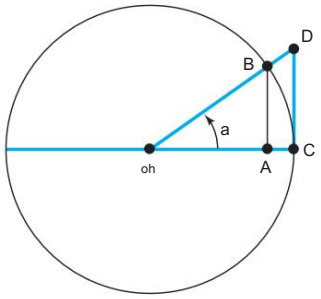


Figura 34

El antiguo nombre de la tangente es umbra versa (que significa sombra convertida), en referencia al uso de la tangente para resolver problemas de altura con sombras.

Los nombres de las funciones restantes surgieron de la siguiente manera. si un y b son ángulos complementarios, entonces cos a = sen b. Como b es el complemento de a, era natural escribir el coseno de a como sen co a. Probablemente por razones relacionadas con la facilidad de pronunciación, co migró al frente y luego el coseno recibió una abreviatura de tres letras para coincidir con sin, sec y tan. Las otras dos cofunciones fueron tratadas de manera similar, excepto que las formas largas cotan y cosec sobreviven hasta el día de hoy en algunos países.

6.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. En un triángulo rectángulo, con catetos a y b e hipotenusa c, el teorema de Pitágoras establece que . (pág. A14)
2. El valor de la función f1x2 = 3x - 7 en 5 es (págs. 87-90)
3. Verdadero o Falso Para una función y = f1x2, para cada x en el dominio, hay exactamente un elemento y en el rango. (págs. 85–87)
4. Si dos triángulos son semejantes, entonces los ángulos son _____ correspondientes y las longitudes de los lados correspondientes son _____. (págs. A16–A19)
5. ¿Qué punto es simétrico con respecto al eje y al punto un $\left(\frac{2}{3}, 2b\right)$? (págs. 49 a 51)
6. Si 1x, y2 es un punto en el círculo unitario en el cuadrante IV y si $x = \frac{23}{2}$, ¿Qué es y? (pág. 72)

Conceptos y vocabulario

7. Opción múltiple ¿Qué función toma como entrada un número real t que corresponde a un punto P = 1x, y2 en el círculo unitario y genera la coordenada x?
(a) seno (b) coseno (c) tangente 8. El (d) secante punto en el círculo unitario que corresponde a u = $\frac{\pi}{2}$ es PAG · _____.
9. El punto del círculo unitario que corresponde a u = $\frac{\pi}{4}$ es PAG · _____.
10. Verdadero o Falso Se pueden encontrar valores exactos para el seno de cualquier ángulo.
11. Para cualquier ángulo u en posición estándar, sea P = 1x, y2 el punto en el lado terminal de u que también está en el círculo. x2 + y2 = r2. Entonces, sen u · y cos u · ___.
12. Opción múltiple El punto del círculo unitario que corresponde a tu = $\frac{\pi}{3}$ es
(un) un $\left(\frac{23}{2}, \frac{2}{2}\right)$ segundo
(b) un $\left(\frac{22}{2}, \frac{22}{2}\right)$ segundo
(c) un $\left(\frac{23}{2}, \frac{1}{2}\right)$ segundo
(d) a23, $\frac{223}{3}$ segundo

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 20, P = 1x, y2 es el punto del círculo unitario que corresponde a un número real t. Encuentra los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de t.

13. un $\left(\frac{23}{2}, \frac{1}{2}\right)$ segundo
14. un $\left(\frac{23}{2}, \frac{2}{2}\right)$ segundo
15. un $\left(-\frac{1}{5}, \frac{226}{5}\right)$ segundo
16. un $\left(-\frac{2}{5}, \frac{221}{5}\right)$ segundo
17. un $\left(\frac{22}{2}, \frac{22}{2}\right)$ segundo
18. un $\left(-\frac{22}{2}, \frac{22}{2}\right)$ segundo
19. un $\left(-\frac{25}{3}, \frac{2}{3}\right)$ segundo
20. un $\left(\frac{222}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ segundo

Machine Translated by Google

En los problemas 21 a 30, encuentre el valor exacto. No use una calculadora.

21. pecado $\frac{11p}{2}$ 22. cos17p2 23. cuna $\frac{7p}{2}$ 24. tan16p2 25. seg18p2

26. csc $\frac{11p}{2}$ 27. pecado1 - 3p2 28. cosa - $\frac{3p}{2 \text{ segundo}}$ 29. tan1 - 3p2 30. seg1 - p2

En los problemas 31 a 46, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

31. sen 30° - cos 45° 32. sen 45° + cos 60° 33. cos 180° - sen 180° 34. sen 90° + tan 45°

35. sen 45° cos 45° 36. bronceado 45° cos 30° 37. seg 30° cuna 45° 38. csc 45° bronceado 60°

39. 5 cos 90° - 8 sen 270° 40. 4 sen 90° - 3 tan 180° 41. 2 pecado $\frac{\text{pag}}{3}$ - 3 bronceado $\frac{\text{pag}}{6}$ 42. 2 pecado $\frac{\text{pag}}{4}$ + 3 bronceado $\frac{\text{pag}}{4}$

43. 3csc 3 $\frac{\text{pag}}{}$ + cuna $\frac{\text{pag}}{4}$ 44. 2 seg 4 $\frac{\text{pag}}{}$ + 4 cuna $\frac{\text{pag}}{3}$ 45. seg p - csc 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 46. cs 2 $\frac{\text{pag}}{}$ + cuna $\frac{\text{pag}}{2}$

En los problemas 47 a 64, encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo dado. Si alguno no está definido, diga "no definido". No use una calculadora.

47. $\frac{2p}{3}$ 48. $\frac{5p}{6}$ 49. 240° 50. 210° 51. $\frac{3p}{4}$ 52. $\frac{11p}{4}$

53. $\frac{13p}{6}$ 54. $\frac{8p}{3}$ 55. 405° 56. 390° 57. - $\frac{\text{pag}}{3}$ 58. - $\frac{\text{pag}}{6}$

59. - 240° 60. - 135° 61. $\frac{5p}{2}$ 62.5p _ 63. - $\frac{13p}{6}$ 64. - $\frac{14p}{3}$

En los problemas 65 a 76, use una calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión redondeado a dos decimales.

65. pecado 28° 66. cos 14° 67. cuna 70° 68. seg 21°

69. pecado $\frac{\text{pag}}{8}$ 70. bronceado $\frac{\text{pag}}{10}$ 71. csc $\frac{5p}{13}$ 72. cuna $\frac{\text{pag}}{12}$

73. bronceado 1 74. pecado 1 75. bronceado 1° 76. pecado 1°

En los problemas 77 a 84 se da un punto en el lado terminal de un ángulo u en posición estándar. Encuentra el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas de u.

77. 1 - 3, 42 78. 15, - 122 79. 1 - 1, - 22 80. 12, - 32

81. 1 - 1, 12 82. 1 - 2, - 22 83. 10,3, 0,42 84. un $\frac{\text{—}}{\text{p}}$, $\frac{1}{4 \text{ segundo}}$

---

85. Encuentra el valor exacto de:

bronceado 60° + bronceado 150°

86. Encuentra el valor exacto de:

sen 45° + sen 135° + sen 225° + sen 315°

87. Encuentra el valor exacto de:

bronceado 40° + bronceado 140°

88. Encuentra el valor exacto de:

sen 40° + sen 130° + sen 220° + sen 310°

89. Si f1u2 = cos u = 0,3, encuentre f1u + p2.

90. Si f1u2 = sen u = 0,1, encuentre f1u + p2.

91. Si f1u2 = cot u = - 2, encuentre f1u + p2.

92. Si f1u2 = tan u = 3, encuentre f1u + p2.

93. Si cos u = 3 $\frac{2}{}$, encontrar segundo u.

94. Si sen u = 5 $\frac{1}{}$, encontrar csc u.

En los problemas 95 a 106, f1u2 = sen u y g1u2 = cos u. Encuentre el valor exacto de cada función a continuación si u = 60°. No use una calculadora.

95. g1u2 96. f1u2 97. ga u $\frac{\text{—}}{2 \text{ segundo}}$ 98. f au $\frac{\text{—}}{2 \text{ segundo}}$

99. 3g1u24 ^{2} 100. 3f1u24 ^{2} 101. g12u2 102. f12u2

103. 2g1u2 104. 2f1u2 105. g1-u2 106. f1-u2

Machine Translated by Google

Práctica mixta En los problemas 107 a 116, f1x2 = sen x, g1x2 = cos x, h1x2 = 2x y p1x2 = $\frac{x}{2}$. Encuentre el valor de cada uno de los siguientes:

107. 1f - g2 160°2

108. 1f + g2 130°2

109. 1f # g2 a4p $\overline{3}$ b

110. 1f # g2 a3p $\overline{4b}$

111. 1g p2 160°2

112. 1f h2 ap 6 $\overline{b}$

113. 1h f 2 a5p $\overline{6}$ b

114. 1p g2 1315°2

115. (a) Encuentre la brecha $\overline{6b}$ a ¿Qué punto está en la gráfica de g?

(b) Suponiendo 0... x ... $\overline{\text{pag}}$, g es uno a uno.* Utilice el resultado 2 del inciso (a) para encontrar un punto en la gráfica de g-1 .

(c) ¿Qué punto está en la gráfica de y = 2gax - $\overline{\text{pag}}$ 6 b si x = $\frac{\text{pag}}{6}$?

116. (a) Encuentre f p $\overline{4b}$. ¿Qué punto está en la gráfica de f?

(b) Suponiendo 0... x ... $\overline{\text{pag}}$, f es uno a uno.* Utilice el resultado de 2 parte (a) para encontrar un punto en la gráfica de f^{-1}.

(c) ¿Qué punto está en la gráfica de y = f ax + $\overline{\text{pag}}$ 4b - 3 si x = $\frac{\text{pag}}{4}$?

Aplicaciones y extensiones

117. Encuentra dos ángulos negativos y tres positivos, expresados en radianes, para los cuales el punto en el círculo unitario que corresponde a cada ángulo es un - $\frac{1}{2}, \frac{\overline{23}}{2b}$.

118. Encuentra dos ángulos negativos y tres positivos, expresados en radianes, para los cuales el punto en el círculo unitario que corresponde a cada ángulo es un - $\frac{\overline{22}}{2}, \frac{\overline{22}}{2b}$.

119. Usa una calculadora en modo radianes para completar la siguiente tabla.

¿Qué se puede concluir sobre el valor de f1u2 = $\frac{\text{broncearte}}{\text{tu}}$ a medida que te acercas a 0?

Ud.	0,5	0,4	0,2	0.1	0,01	0.001	0.0001	0.00001
broncearte								
f1u2 = $\frac{\text{broncearte}}{\text{tu}}$								

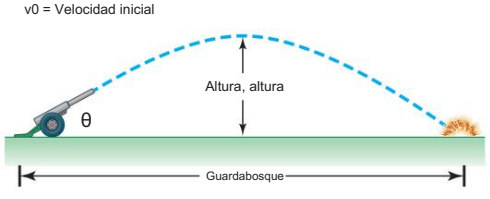
120. Usa una calculadora en modo radianes para completar la siguiente tabla.

¿Qué conjeturas sobre el valor de g1u2 = $\frac{\text{porque tu - 1}}{\text{tu}}$ cuando u se aproxima a 0?

Ud.	0,5	0,4	0,2	0.1	0,01	0.001	0.0001	0.00001
porque tu - 1								
g1u2 = $\frac{\text{porque tu - 1}}{\text{tu}}$								

Para los problemas 121 a 124 de la página siguiente, utilice la siguiente discusión.

Movimiento del proyectil La trayectoria de un proyectil disparado con una inclinación u a la horizontal con velocidad inicial v0 es una parábola (ver la figura).



El alcance R del proyectil, es decir, la distancia horizontal que recorre el proyectil, se encuentra usando la función

$$R1u2 = \frac{v_0^2 \text{ pecado12u2}}{g}$$

donde g ≈ 32,2 pies por segundo por segundo ≈ 9,8 metros por segundo por segundo es la aceleración debida a la gravedad. La altura máxima H del proyectil viene dada por la función

$$H1u2 = \frac{v_0^2 \text{ 1sin u2}^2}{2g}$$

*En la Sección 7.1, analizamos la restricción de dominio necesaria para que la función sea uno a uno.

Machine Translated by Google

En los problemas 121 a 124, encuentre el rango R y la altura máxima H. Redondea las respuestas a dos decimales. Vea la discusión en la página anterior.

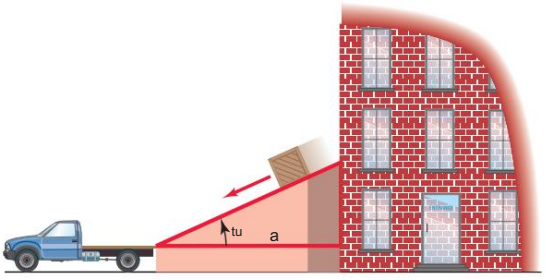
121. El proyectil se dispara en un ángulo de 30° con respecto a la horizontal con una velocidad inicial de 150 metros por segundo.

122. El proyectil se dispara en un ángulo de 45° con la horizontal con una velocidad inicial de 150 pies por segundo.

123. El proyectil se dispara en un ángulo de 50° con respecto a la horizontal con una velocidad inicial de 200 pies por segundo.

124. El proyectil se dispara en un ángulo de 25° con respecto a la horizontal con una velocidad inicial de 500 metros por segundo.

125. Plano inclinado Ver la figura.



Si se ignora la fricción, el tiempo t (en segundos) requerido para que un bloque se deslice hacia abajo por un plano inclinado (ver la figura) viene dado por la fórmula t

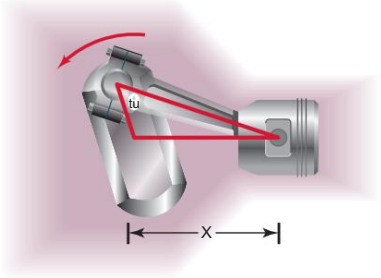
$$t1u2 = A\ 2a\ \frac{}{g\ \text{pecado}\ u\ \text{porque}\ u},$$

donde a es la longitud (en pies) de la base y g ≈ 32 pies por segundo por segundo es la aceleración debida a la gravedad.

¿Cuánto tiempo le toma a un bloque deslizarse hacia abajo por un plano inclinado con base a = 70 pies cuando
(a) tu = 30°
(b) tu = 45°
(c) tu = 60°

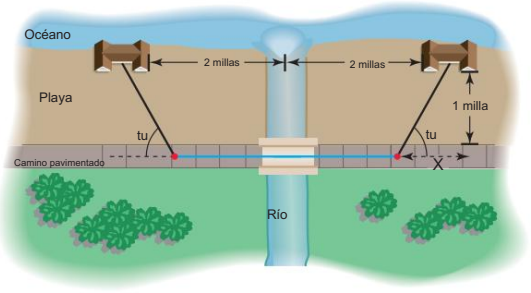
126. Motores de pistón En cierto motor de pistón, la distancia x (en centímetros) desde el centro del eje impulsor hasta la cabeza de un pistón está dada por la siguiente función, donde u es el ángulo entre la manivela y la trayectoria del cabeza del pistón. Ver la figura. Encuentre x cuando u = 30° y u = 45°.

$$x1u2 = \text{sen}\ u + \frac{}{249 + 0{,}6\ \text{sen}12u2}$$



127. Calcular el tiempo de un viaje Dos casas están ubicadas a 4 millas de distancia, cada una a 1 milla de una carretera paralela al océano. Sally puede trotar 4 mph a lo largo de la carretera, pero sólo 2 mph en la arena. Debido a un río entre las dos casas, es necesario correr sobre la arena hasta el camino, continuar por el camino y luego trotar sobre la arena para llegar de una casa a la otra. Para 0° 6 u 6 90°, el tiempo T para llegar de una casa a la otra es función de u, como se muestra.

$$T1u2 = 1 + \frac{2}{2\ \text{pecado}\ u} - \frac{1}{2\ \text{bronceado}}, \qquad 0° \le u \le 90°$$

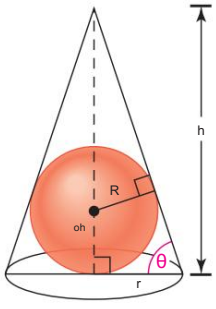


(a) Calcule el tiempo T para u = 30°. ¿Cuánto tiempo estará Sally en la carretera pavimentada?
(b) Calcule el tiempo T para u = 45°. ¿Cuánto tiempo estará Sally en la carretera pavimentada?
(c) Calcule el tiempo T para u = 60°. ¿Cuánto tiempo estará Sally en la carretera pavimentada?
(d) Calcule el tiempo T para u = 90°. Describe el camino recorrido. ¿Por qué no se puede utilizar la fórmula para T ?

128. Diseño de finas piezas decorativas Un diseñador de artes decorativas planea comercializar esferas de oro macizo encerradas en conos de cristal transparente. Cada esfera tiene un radio fijo R y estará encerrada en un cono de altura h y radio r. Ver la figura. Se pueden usar muchos conos para encerrar la esfera, cada uno con un ángulo inclinado u diferente. El volumen V del cono se puede expresar en función del ángulo inclinado u del cono como

$$V1u2 = 3\ \frac{\text{pR3}}{1\tan u2}\ \frac{11 + \text{seg}\ u2\ 1^{3}}{2}, \qquad 0° \le u \le 90°$$

¿Qué volumen V se requiere para encerrar una esfera de 2 centímetros de radio en un cono cuyo ángulo inclinado u es de 30°? 45°? 60°?



Utilice lo siguiente para responder los problemas 129 a 132. El ángulo de visión, u, de un objeto es el ángulo que forma el objeto en la lente del ojo del espectador. Esto también se conoce como tamaño percibido o angular del objeto. El ángulo de visión está relacionado con la altura, H y la distancia del objeto. desde el espectador, D, a través de la fórmula $\tan\frac{tu}{2} = \frac{h}{2D.}$

129. Seguir muy cerca Mientras conduce, Arletha observa el auto que tiene delante con un ángulo de visión de 26°. Si el auto tiene 5.5 pies de ancho, ¿qué tan cerca está Arletha del auto que tiene delante?

Machine Translated by Google

130. Distancia de visualización El Monumento a Washington en Washington, DC tiene 555 pies de altura. Si un turista ve el monumento con un ángulo de visión de 8°, ¿a qué distancia, al pie más cercano, se encuentra del monumento?

131. Altura del árbol Un guardabosques observa un árbol que está a 190 pies de distancia con un ángulo de visión de 21°. ¿Qué tan alto es el árbol?

132. Radio de la Luna Un astrónomo observa la luna.

con un ángulo de visión de 0,52°. Si la distancia promedio de la Luna a la Tierra es de 384,400 km, ¿cuál es su radio al kilómetro más cercano?

133. Distancia del proyectil Se dispara un objeto formando un ángulo u con la horizontal con una velocidad inicial de v0 pies por segundo. Ignorando la resistencia del aire, la longitud de la trayectoria del proyectil está dada por

$$L1u2 = \frac{v_0^2}{32}\,\text{csin u - 1cos u2}\,{}^{2} \quad \text{\# alnctana p - 2u 4 dormitorios}$$

donde 0 6 u 6 $\frac{\text{pag}}{2}$.

(a) Encuentre la longitud de la trayectoria del objeto para los ángulos u = $\frac{\text{pag}}{6}, \frac{\text{pag}}{4}$, y 3 $\frac{\text{pag}}{}$ si la velocidad inicial es 128 pies por segundo.

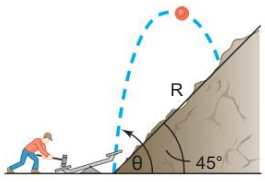
(b) Usando una herramienta gráfica, determine el ángulo requerido para que el objeto tenga una longitud de trayectoria de 550 pies si la velocidad inicial es de 128 pies por segundo.

(c) ¿Qué ángulo resultará en el camino más largo? ¿Cómo se compara este ángulo con el ángulo que da como resultado el rango más largo? (Véanse los problemas 121 a 124).

134. Fotografía La longitud L de la cuerda que une los extremos de un arco en un círculo de radio r subtendido por un ángulo central u, 0 6 u … p, está dada por L = r22 - 2 cos u. Utilice este hecho para aproximar el ancho del campo (el ancho del paisaje que la lente puede visualizar) de una lente de cámara de 450 mm a una distancia de 920 pies si el ángulo de visión de la lente es de 30.

$\frac{\text{pag}}{}$

135. Movimiento de proyectil Un objeto es impulsado hacia arriba en un ángulo u, 45° 6 u 6 90°, con la horizontal con una velocidad inicial de v0 pies por segundo desde la base de un plano inclinado que forma un ángulo de 45° con el horizontal. Ver la figura.



Si se ignora la resistencia del aire, la distancia R que recorre por el plano inclinado en función de u está dada por

$$R1u2 = 3\text{sen12u2} - \frac{v_0^2\,022}{32}\,\text{cos12u2 - 14}$$

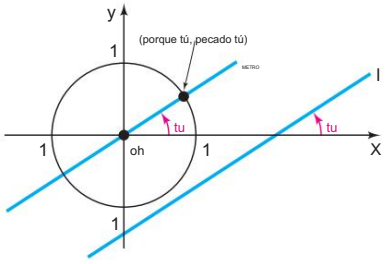
(a) Encuentre la distancia R que recorre el objeto a lo largo del plano inclinado si la velocidad inicial es 32 pies por segundo y u = 60°.

(b) Grafique R = R1u2 si la velocidad inicial es de 32 pies por segundo.

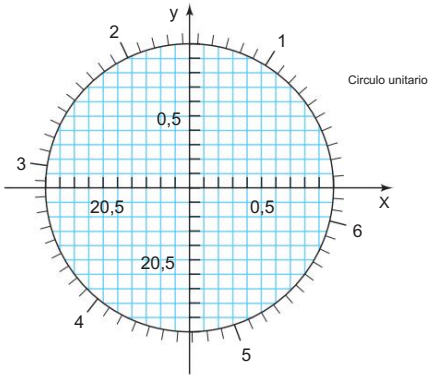
(c) ¿Qué valor de u hace que R sea mayor?

136. Si u, 0 6 u 6 p, es el ángulo entre el eje x positivo y una línea no horizontal y no vertical L, demuestre que la pendiente m de L es igual a tan u. El ángulo u se llama inclinación de L.

[Sugerencia: vea la figura, donde hemos dibujado la línea M paralelo a L y pasando por el origen. Utilice el hecho de que M interseca el círculo unitario en el punto 1cos u, sen u2.]



En los problemas 137 y 138, utilice la figura para aproximar el valor de las seis funciones trigonométricas en t a la décima más cercana. Luego usa una calculadora para aproximar cada una de las seis funciones trigonométricas en t.



137. (a) t = 2 (b) t = 4

138. (a) t = 1 139. (b) t = 5,1

Problema de desafío Sea u la medida de un ángulo, en radianes, en posición estándar con 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 6 u 6p. Encuentra el exacto Coordenada x de la intersección del lado terminal de u con el círculo unitario, dado cos2 u - sen u = - $\frac{1}{9}$. Indique la respuesta como una sola fracción, completamente simplificada, con denominador racionalizado.

140. Sea u la medida de un ángulo, en radianes, en estándar 3p posición con p 6 u 6 $\frac{}{2}$. Encuentre la coordenada y exacta de la intersección del lado terminal de u con el círculo unitario, dado porque u + sen2u = $\frac{19}{25}$. Expresa la respuesta como una sola fracción.

141. Problema de desafío Si el lado terminal de un ángulo contiene el punto 15n, - 12n2 con n 7 0, encuentre sen u.

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

142. Escribe un breve párrafo que explique cómo calcular rápidamente las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

143. Escribe un breve párrafo que explique cómo calcular rápidamente las funciones trigonométricas de 0°, 90°, 180° y 270°.

144. ¿Cómo explicarías el significado de la función seno a un compañero de estudios que acaba de terminar álgebra universitaria?

145. Dibuja un círculo unitario. Etiqueta los ángulos 0, 6 $\frac{\text{pag}}{}$, $\frac{\text{pag}}{4}$, $\frac{\text{pag}}{3}$, $\frac{7p}{4}$, $\frac{11p}{6}$, 2p y las coordenadas de los puntos de la unidad. círculo que corresponde a cada uno de estos ángulos. Explique cómo se puede usar la simetría para encontrar las coordenadas de puntos en el círculo unitario para ángulos cuyos lados terminales están en los cuadrantes II, III y IV.

Conserve su conocimiento

Los problemas 146 a 155 se basan en el material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

146. Encuentra el dominio de f1x2 = ln15x + 22.

147. Si la función polinómica P1x2 = x4 - 5x3 - 9x2 + 155x - 250 tiene ceros de 4 + 3i y 2, encuentre los ceros restantes de la función.

148. Encuentra el resto cuando P1x2 = 8x4 - 2x3 + x - 8 se divide por x + 2.

149. Área de la acera Se va a colocar una acera con un ancho uniforme de 3 pies alrededor de un jardín circular con un diámetro de 24 pies. Encuentra el área exacta de la acera.

150. Encuentra los ceros reales de f1x2 = 3x2 - 7x - 9.

151. Si g1x2 = $\frac{1}{x2 + 1}$, encuentre f1x2 de modo que f1g1x2 2 = $\frac{x2 + 1}{2}$.

152. Si f1x2 = x2 - 3 y g1x2 = - x + 3, determine donde g1x2 Ú f1x2.

153. Resuelve int1x + 32 = - 2.

154. Si el punto 13, - 42 está en la gráfica de y = f1x2, ¿qué punto correspondiente debe estar en la gráfica de $\frac{1}{2}$f1x -32?

155. Si g1x2 = $\frac{x2}{4} \cdot \frac{1}{x2,}$ simplificar $\overline{21 + 3g1x2\ 4^{2}}$.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. c2 = a2 + b2 2. 8 3. Verdadero 4. igual; proporcional 5. un - $\frac{1}{2}$, $\frac{\overline{23}}{\text{2 segundo}}$ 6. - 2 $\frac{1}{}$

6.3 Propiedades de las funciones trigonométricas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Funciones (Sección 2.1, págs. 83–95) • Funciones pares e impares (sección 2.3, págs. 109 a 111)

Identidad (Sección A.6, pág. A44)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 439.

OBJETIVOS 1 Determinar el dominio y el rango de las funciones trigonométricas (p. 429)

2 Determinar el período de las funciones trigonométricas (p. 431)

3 Determinar los signos de las funciones trigonométricas en un cuadrante dado (p. 432)

4 Encuentre los valores de las funciones trigonométricas usando identidades fundamentales (p. 433)

5 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas de un ángulo dado una de las funciones y el cuadrante del ángulo (p. 435)

6 Utilice propiedades pares e impares para encontrar los valores exactos de la ecuación trigonométrica Funciones (pág. 438)

Machine Translated by Google

1 Determinar el dominio y el rango de las funciones trigonométricas

Sea u un ángulo en posición estándar y sea P = 1x, y2 el punto del círculo unitario que corresponde a u. Ver Figura 35. Entonces, según la definición dada anteriormente,

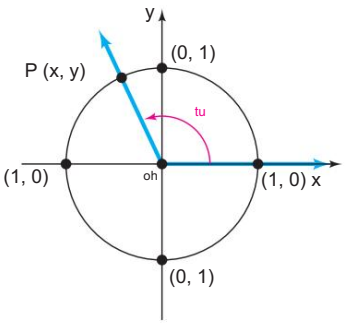


Figura 35

seno u = y porque tu = x tan u = $\frac{y}{x}$ x · 0

csc tu = y $\frac{1}{}$ y · 0 seg u = $\frac{1}{x}$ x · 0 cuna u = y $\frac{x}{}$ y · 0

Para sen u y cos u, no hay que preocuparse por dividir por 0, por lo que u puede ser cualquier ángulo. De ello se deduce que el dominio de la función seno y la función coseno es el conjunto de todos los números reales.

- El dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales.
- El dominio de la función coseno es el conjunto de todos los números reales.

Para la función tangente y la función secante, la coordenada x de P = 1x, y2 no puede ser 0 ya que esto resulta en la división por 0. Vea la Figura 35. En el círculo unitario, hay dos puntos de este tipo, 10, 12 y 10, - 12. Estos dos puntos corresponden a los ángulos $\frac{pag}{2}$ 190°2 y 1270°2 $\frac{3p}{2}$ o, más generalmente, a cualquier ángulo que sea un múltiplo entero impar de $\frac{pag}{2}$ 190°2, como { $\frac{pag}{2}$ 1 {90°2, { $\frac{3p}{2}$ 1 {270°2, { $\frac{5p}{2}$ 1 {450°2, y así sucesivamente. Semejante Los ángulos deben excluirse del dominio de la función tangente y de la función secante.

- El dominio de la función tangente es el conjunto de todos los números reales, excepto múltiplos enteros impares de 2 $\frac{pag}{}$ 190°2.
- El dominio de la función secante es el conjunto de todos los números reales, excepto múltiplos enteros impares de 2 $\frac{pag}{}$ 190°2.

Para la función cotangente y la función cosecante, la coordenada y de P = 1x, y2 no puede ser 0 ya que esto resulta en una división por 0. Vea la Figura 35. En el círculo unitario, hay dos puntos de este tipo, 11, 02 y 1 - 1, 02. Estos dos puntos corresponden a los ángulos 010°2 y p1180°2. o, más generalmente, a cualquier ángulo que sea un múltiplo entero de p1180°2, como 010°2, {p1 {180°2, {2p1 {360°2, {3p1 {540°2, etc.
Por tanto, estos ángulos deben excluirse del dominio de la función cotangente y de la función cosecante.

- El dominio de la función cotangente es el conjunto de todos los números reales, excepto múltiplos enteros de p1180°2.
- El dominio de la función cosecante es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos enteros de p1180°2.

Machine Translated by Google

A continuación determinamos el rango de cada una de las seis funciones trigonométricas. Consulte nuevamente la Figura 35. Sea P = 1x, y2 el punto en el círculo unitario que corresponde al ángulo u. Se deduce que - 1 … x … 1 y - 1 … y … 1. Como sen u = y y cos u = x, tenemos

$$-1 \le \sin u \le 1 \qquad -1 \le \cos u \le 1$$

El rango tanto de la función seno como de la función coseno consta de todos los números reales entre -1 y 1, inclusive. Usando notación de valor absoluto, tenemos 0sen u 0 … 1 y 0 cos u 0 … 1.

Si u no es un múltiplo entero de p1180°2, entonces csc u = . Dado que y = $\frac{1}{\text{sen u}}$ e y

0 y 0 = 0sen u 0 … 1, se deduce que 0 csc u 0 = $\frac{1}{0\text{sen u }0} = \frac{1}{0\ y\ 0}$ Ú 1 a 1y … - 1 o y $\frac{1}{}$ Ú 1b.

Dado que csc u $\frac{1}{}$ = y, el rango de la función cosecante se compone de todos los números reales menos mayor o igual a - 1 o mayor o igual a 1. Es decir,

$$\csc u \le -1 \text{ o } \csc u \ge 1$$

Si u no es un múltiplo entero impar de 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 190°2, entonces seg u = $\frac{1}{x}$. Dado que x = cos u y

0 x 0 = 0 cos u 0 … 1, se deduce que 0sec u 0 = 0 $\frac{1}{\cos u\ 0\ 1} = \frac{1}{0x0}$ Ú 1 a 1x … - 1 o $\frac{1}{x}$ Ú 1b.

Dado que seg u = $\frac{}{x}$, El rango de la función secante está formado por todos los números reales menores que o igual a - 1 o mayor o igual a 1. Es decir,

$$\sec u \le -1 \text{ o } \sec u \ge 1$$

El rango tanto de la función tangente como de la función cotangente es el conjunto de todos los números reales.

$$-\infty < \tan u < \infty \qquad -\infty < \cot u < \infty$$

Se le pide que demuestre esto en los problemas 123 y 124.

La Tabla 4 resume estos resultados.

Tabla 4

Símbolo de función	Dominio	Rango
seno	f1u2 = sen u Todos los números reales f1u2 =	Todos los números reales del -1 al 1, inclusive
coseno	cos u Todos los números reales	Todos los números reales del -1 al 1, inclusive
tangente	f1u2 = tan u Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros impares de 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 190°2	todos los números reales
cosecante	f1u2 = csc u Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros de p 1180°2	Todos los números reales menores o iguales a -1 o mayores o iguales a 1
secante	f1u2 = sec u Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros impares de 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 190°2	Todos los números reales menores o iguales a -1 o mayores o iguales a 1
cotangente	f1u2 = cot u Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros de p 1180°2	todos los números reales

Ahora problema de trabajo 9 7

Machine Translated by Google

2 Determinar el período de las funciones trigonométricas.

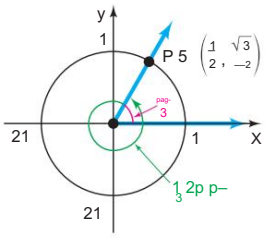


Figura 36 sina $\frac{\pi}{3}$ + 2pb = sin cosa $\frac{\pi}{3}$;

p $\frac{\pi}{3}$ + 2pb = porque $\frac{\pi}{3}$

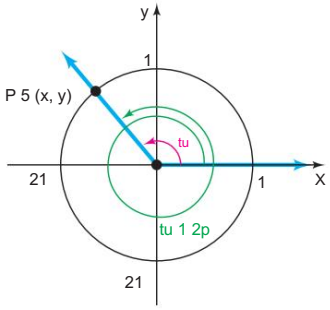


Figura 37 sen 1u + 2pk2 = sen u;

porque 1u + 2pk2 = porque u

Mire la Figura 36. Esta figura muestra que para un ángulo de 3 $\frac{\pi}{3}$ radianes el correspondiente el punto P en el círculo unitario es un $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2b. Observe que, para un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ + 2p radianes, el punto correspondiente P en el círculo unitario también es un $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2b. Entonces

$$\text{pecado}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y sina p} \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi b = y \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{porque}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{cosa p} \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi b = \frac{1}{2}$$

Este ejemplo ilustra una situación más general. Para un ángulo u dado, medido en radianes, supongamos que conocemos el punto correspondiente P = 1x, y2 en el círculo unitario. Ahora suma 2p a u. El punto del círculo unitario correspondiente a u + 2p es idéntico al punto P del círculo unitario correspondiente a u. Vea la Figura 37. Los valores de las funciones trigonométricas de u + 2p son iguales a los valores de las funciones trigonométricas correspondientes de u.

Si sumamos (o restamos) múltiplos enteros de 2p a u, los valores de la función seno y coseno permanecen sin cambios. Es decir, para todos ustedes.

$$\text{sen}1u + 2\pi k2 = \text{sen } u \qquad \cos 1u + 2\pi k2 = \cos u \qquad (1)$$

donde k es cualquier número entero.

Las funciones que exhiben este tipo de comportamiento se denominan funciones periódicas.

DEFINICIÓN Función Periódica y Período Fundamental

Una función f se llama periódica si hay un número positivo p con la propiedad de que siempre que u esté en el dominio de f, también lo estará u + p, y

$$f1u + p2 = f1u2$$

Si existe un número p más pequeño, este valor más pequeño se llama período (fundamental) de f.

Según la ecuación (1), las funciones seno y coseno son periódicas. De hecho, las funciones seno y coseno tienen período 2p. Se le pide que demuestre este hecho en los problemas 125 y 126. Las funciones secante y cosecante también son periódicas con período 2p, y las funciones tangente y cotangente son periódicas con período p. Se le pide que pruebe estas afirmaciones en los problemas 127 al 130.

Estos hechos se resumen a continuación:

Propiedades periódicas

$$\text{sen}1u + 2p2 = \text{sen } u \quad \cos 1u + 2p2 = \cos u \quad \tan 1u + p2 = \tan u$$
$$\csc 1u + 2p2 = \csc u \quad \sec 1u + 2p2 = \sec u \quad \cot 1u + p2 = \cot u$$

En palabras

La tangente y la cotangente tienen período p; los demás tienen período 2p.

Debido a que las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen un período 2p, una vez que conocemos sus valores en un intervalo de longitud 2p, conocemos todos sus valores; de manera similar, dado que las funciones tangente y cotangente tienen un período p, una vez que conocemos sus valores en un intervalo de longitud p, conocemos todos sus valores.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1 Encontrar valores exactos utilizando propiedades periódicas

Encuentra el valor exacto de cada uno de los siguientes ángulos:

(como en $\frac{17p}{4}$ (b) cos15p2 (c) bronceado $\frac{5p}{4}$

Solución

(a) Es mejor dibujar primero el ángulo, como se muestra en la Figura 38(a). Desde el periodo de la función seno es 2p, cada revolución completa se puede ignorar dejando el ángulo $\frac{pag}{4}$. Entonces

$$\text{pecado}\,\frac{17p}{4} = \text{sina p}\,\frac{}{4} + 4pb = \text{pecado}\,\frac{pag}{4} = \frac{22}{2}$$

(b) Véase la Figura 38(b). Como el período de la función coseno es 2p, cada revolución completa se puede ignorar dejando el ángulo p. Entonces

$$\cos 15p2 = \cos 1p + 4p2 = \cos p = -1$$

(c) Véase la Figura 38(c). Dado que el período de la función tangente es p, cada mitad La revolución se puede ignorar dejando el ángulo. $\frac{pag}{4}$. Entonces

$$\text{broncearse}\,\frac{5p}{4} = \text{tana p}\,\frac{}{4} + pb = \text{bronceado}\,\frac{pag}{4} = 1$$

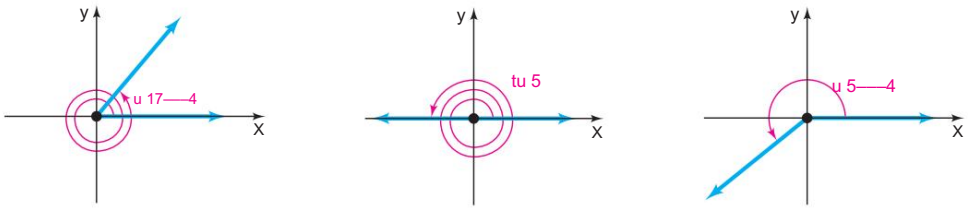


Figura 38

(a) (b) (C)

Las propiedades periódicas de las funciones trigonométricas nos serán de gran ayuda cuando estudiemos sus gráficas más adelante en este capítulo.

Ahora problema de trabajo 1 1

3 Determinar los signos de las funciones trigonométricas en un cuadrante dado

Sea P = 1x, y2 el punto del círculo unitario que corresponde al ángulo u. Si sabemos en qué cuadrante se encuentra el punto P , entonces podemos determinar los signos de las funciones trigonométricas de u. Por ejemplo, si P = 1x, y2 se encuentra en el cuadrante IV, como se muestra en la Figura 39, entonces sabemos que x 7 0 y y 6 0. En consecuencia,

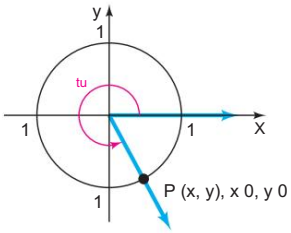


Figura 39

u en el cuadrante IV, x 7 0, y 6 0

$$\text{sen } u = y\ 6\ 0 \qquad \text{porque tu} = x\ 7\ 0 \qquad \text{tanu} = 6\ 0\ \frac{y}{x}$$

$$\text{csc tu} = \frac{1}{y}\ 6\ 0 \text{ segundos } u = 7\ 0\ \frac{1}{x} \qquad \text{cuna u} = \frac{x}{y}\ 6\ 0$$

La Tabla 5 enumera los signos de las seis funciones trigonométricas para cada cuadrante. La Figura 40 proporciona dos ilustraciones.

Tabla 5

Cuadrante de P	pecado U, csc U	cos U, seg U	bronceado U, cuna U
I	Positivo	Positivo	Positivo
II	Positivo	Negativo	Negativo
III	Negativo	Negativo	Positivo
IV	Negativo	Positivo	Negativo

Machine Translated by Google

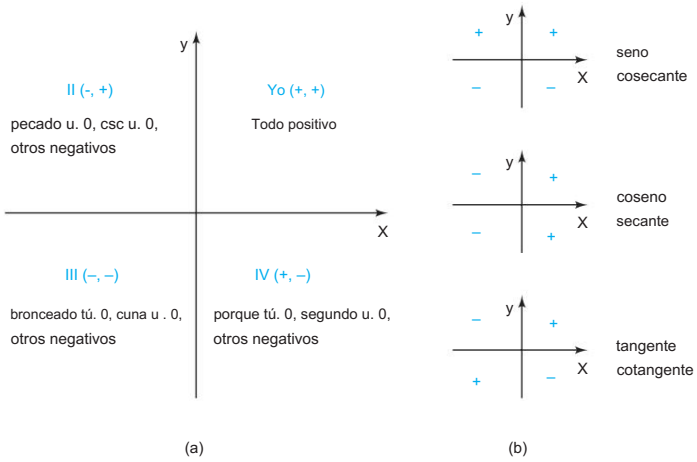


Figura 40 Signos de las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 2 Encontrar el cuadrante en el que se encuentra un ángulo U

Si sen u 6 0 y cos u 6 0, nombra el cuadrante en el que se encuentra el ángulo u.

Solución

Sea P = 1x, y2 el punto del círculo unitario correspondiente a u. Entonces sen u = y 6 0 y cos u = x 6 0. Como los puntos en el cuadrante III tienen x 6 0 e y 6 0, u se encuentra en el cuadrante III.

Ahora resuelve el problema 2 7

4 Encuentre los valores de las funciones trigonométricas usando Identidades fundamentales

Si P = 1x, y2 es el punto del círculo unitario correspondiente a u, entonces

$$\text{seno } u = y \qquad \text{porque tu} = x \qquad \tan u = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \cdot 0$$

$$\csc tu = \frac{1}{y} \quad \text{si } y \cdot 0 \qquad \text{segundo } u = \frac{1}{X} \quad \text{si } x \cdot 0 \qquad \cot u = y \qquad \frac{x}{} \quad \text{si } y \cdot 0$$

Con base en estas definiciones, tenemos las identidades recíprocas:

Identidades recíprocas

$$\csc tu = \frac{1}{\text{pecado u}} \qquad \text{seg } u = \frac{1}{\text{porque u}} \qquad \text{cuna } u = \frac{1}{\tan u} \tag{2}$$

Otras dos identidades fundamentales son las identidades cocientes.

Identidades de cociente

$$\tan u = \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} \qquad \text{cuna } u = \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}} \tag{3}$$

Las pruebas de identidades (2) y (3) se derivan de las definiciones de la ecuación trigonométrica. funciones. (Véanse los problemas 131 y 132.)

Si sen u y cos u son conocidos, las identidades (2) y (3) facilitan encontrar los valores de las funciones trigonométricas restantes.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 **Encontrar valores exactos usando identidades cuando se dan el seno y el coseno**

Dado sen u = $\frac{\sqrt{25}}{5}$ y cos u = $\frac{\sqrt{225}}{5}$, Encuentra los valores exactos de los cuatro restantes.

Funciones trigonométricas de u usando identidades.

Solución

Basado en una identidad de cociente de (3), tenemos

$$\tan u = \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} = \frac{\frac{\sqrt{25}}{5}}{\frac{\sqrt{225}}{5}} = \frac{1}{2}$$

Luego usamos las identidades recíprocas de (2) para obtener

$$\csc tu = \frac{1}{\text{pecado u}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{25}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 25 \text{ segundos u} = \frac{1}{\text{porque tú}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{225}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{225}} = \frac{\sqrt{25}}{2} \quad \text{cuna u} \frac{1}{= \tan u} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Ahora resuelve el problema 3 5

La ecuación del círculo unitario es x2 + y2 = 1 o, equivalentemente,

$$y2 + x2 = 1$$

Si P = 1x, y2 es el punto del círculo unitario que corresponde al ángulo u, entonces y = sen u y x = cos u, entonces tenemos

$$1\text{pecado u2}^{2} + 1\cos u2^{2} = 1 \qquad (4)$$

Es costumbre escribir sen2 u en lugar de 1sen u2 y así ^{2}, cos2 u en lugar de 1cos u2^{2}, y sucesivamente. Con esta notación, podemos reescribir la identidad (4) como

$$\text{sen2 u} + \cos2 u = 1 \qquad (5)$$

Si cos u · 0, podemos dividir cada lado de la identidad (5) entre cos2 u.

$$\frac{\text{pecado2 tu}}{\cos2 tu} + \frac{\cos2 tu}{\cos2 tu} = \frac{1}{\cos2 tu}$$

$$\frac{^{2}}{\text{un pecado ub}} + 1 = \text{un } 1\frac{^{2}}{\text{porque ub}}$$

Ahora use las identidades (2) y (3) para obtener

$$\tan2 u + 1 = \text{seg2 u} \qquad (6)$$

De manera similar, si sen u · 0, podemos dividir ambos lados de la identidad (5) entre sen2 u y usar identidades (2) y (3) para obtener 1 + cot2 u = csc2 u, que escribimos como

$$\cot2 u + 1 = \csc2 u \qquad (7)$$

Machine Translated by Google

Las identidades en (5), (6) y (7) se conocen como identidades pitagóricas.
Colectivamente, las identidades en (2), (3) y (5)-(7) se denominan Identidades Fundamentales.

Identidades fundamentales

- $\tan u = \cos \frac{\text{pecado } u}{u\ 1}$
- $\text{cuna } u = \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado } u}$
- $\csc u = \text{sen } \frac{}{u}$
- $\text{segundo } u = \frac{1}{\text{porque tú}}$
- $\text{cuna } u = \frac{1}{\tan u}$
- $\text{sen2 } u + \cos2 \ u = 1$
- $\tan2 \ u + 1 = \sec2 \ u$
- $\cot2 \ u + 1 = \csc2 \ u$

EJEMPLO 4 Encontrar el valor exacto de una expresión trigonométrica usando identidades

Encuentra el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

(a) $\tan 20° - \cos \frac{\text{pecado } 20°}{20°}$

(b) $\text{pecado2} \frac{\text{pag}}{12} + \frac{1}{\text{seg2} \frac{\text{pag}}{12}}$

Solución

(a) $\tan 20° - = \tan 20° - \frac{\text{pecado } 20°}{\cos 20° \ c} \tan 20° = 0$

(b) $\text{pecado2} \frac{\text{pag}}{12} + \frac{1}{\text{seg2} \frac{\text{pag}}{12}} = \text{sen2} + \cos2 = 1 \quad \frac{\text{pag}}{12}$

$\frac{\text{pecado U}}{\text{porque U}} \cdot \text{bronceado U}$

$\text{cosU} \cdot \overset{\text{ae}}{\frac{1}{\text{seguro}}} \qquad \overset{\text{ae}}{\text{sen2 U} \cdot \text{cos2 U} \cdot 1}$

Ahora problema de trabajo 7 9

5 Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas de un ángulo dada una de las funciones y el cuadrante del ángulo

Muchos problemas requieren encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas restantes cuando se conoce el valor de una de ellas y se puede encontrar el cuadrante en el que se encuentra u. Hay dos enfoques para resolver estos problemas. Un enfoque utiliza un círculo de radio r; el otro usa identidades.

Cuando se utilizan identidades, a veces se requiere una reorganización. Por ejemplo, la identidad pitagórica.

$$\text{sen2 } u + \cos2 \ u = 1$$

se puede resolver para sen u en términos de cos u (o viceversa) de la siguiente manera:

$$\text{sen2 } u = 1 - \cos2 \ u$$

$$\text{sen } u = \{ 21 - \cos2 \ u$$

donde se usa el signo + si sen u 7 0 y el signo - se usa si sen u 6 0. De manera similar, en tan2 u + 1 = sec2 u, podemos resolver para tan u (o sec u), y en cot2 u + 1 = csc2 u, podemos resolver para cot u (o csc u).

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Encontrar valores exactos dado un valor y el signo de otro

Dado que sen u = $\frac{1}{3}$ y cos u 6 0, encuentre el valor exacto de cada uno de los 3 restantes cinco funciones trigonométricas.

Solución

Opción 1 Usando un círculo

Supongamos que P = 1x, y2 es el punto de un círculo que corresponde a u. Desde pecado u = $\frac{1}{3}$ 7 0 y cos u 6 0, el punto P = 1x, y2 está en el cuadrante II. Porque seno u = $\frac{1}{3} = \frac{y}{r}$, dejamos y = 1 y r = 3. El punto P = 1x, y2 = 1x, 12 que corresponde a u se encuentra en el círculo de radio 3 centrado en el origen: x2 + y2 = 9. Ver Figura 41.

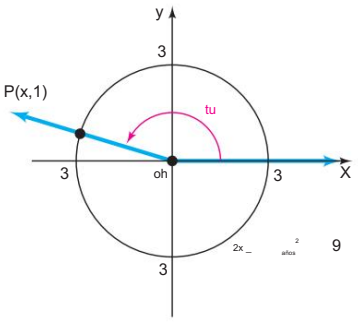


Figura 41

Para encontrar x, utilizamos el hecho de que x2 + y2 = 9, y = 1 y P está en el cuadrante II 1, por lo que x 6 02.

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + 1^2 = 9 \qquad y \cdot 1$$

$$x^2 = 8$$

$$x = -\sqrt{222} \quad x * 0$$

Como x = - 222, y = 1 y r = 3, encontramos que

porque tu = $\frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{212}}{3}$ tan u = $\frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{222}} = -\frac{\sqrt{22}}{4}$

csc tu = y $\frac{r}{} = \frac{3}{1} = 3$ segundo u = $\frac{r}{x} = \frac{3}{-\sqrt{222}} = -\frac{\sqrt{322}}{4}$ cuna u = $\frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{222}}{1} = -\sqrt{222}$

opcion 2 Usando identidades

Primero, resuelva la identidad (5), sen2 u + cos2 u = 1, para cos u.

$$\text{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$\cos^2 u = 1 - \text{sen}^2 u$$

$$\text{porque } u = \{\sqrt{1 - \text{sen}^2 u}$$

Como cos u 6 0, elige el signo menos y usa el hecho de que sen u = $\frac{1}{3}$.

$$\text{porque } u = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 u} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\sqrt{222}}{3}$$

pecado U · $\frac{1}{3}$

Ahora, use senu = $\frac{1}{3}$ y cos u = $-\frac{\sqrt{222}}{3}$ e identidades fundamentales.

tan u = $\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{\sqrt{222}}{3}} = \frac{1}{-\sqrt{222}} = -\frac{\sqrt{22}}{4}$ cuna u $\frac{1}{= \tan u} = -\sqrt{222}$

segundo u = $\frac{1}{\text{porque tú}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{222}}{3}} = \frac{-3}{\sqrt{222}} = -\frac{\sqrt{322}}{4}$ csc u = $\frac{1}{\text{sen u}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Machine Translated by Google

Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de U cuando Se conoce el valor de una función y se conoce el cuadrante de U

Dado el valor de una función trigonométrica y el cuadrante en el que se encuentra u, el valor exacto de cada una de las cinco funciones trigonométricas restantes se puede encontrar de dos maneras.

Opción 1 usando un círculo de radio r

Paso 1: Dibuja un círculo centrado en el origen que muestre la ubicación del ángulo u y el punto P = 1x, y2 que corresponde a u. El radio del círculo que contiene P = 1x, y2 es r = 2x2 + y2 .

Paso 2: Asigne un valor a dos de las tres variables x, y, r según el valor de la función trigonométrica dada y la ubicación de P.

Paso 3: Utilice el hecho de que P se encuentra en el círculo x2 + y2 = r 2 para encontrar el valor de como la variable que falta.

Paso 4: aplica el teorema de la página 422 para encontrar los valores de las funciones trigonométricas restantes.

Opción 2 usando identidades

Utilice identidades apropiadas para encontrar el valor de cada función trigonométrica restante.

EJEMPLO 6

Dado el valor de una función trigonométrica y el Signo de otro, encuentre los valores de los restantes

Dado que tan u = $\frac{1}{2}$ y sen u 6 0, encuentre el valor exacto de cada uno de los cinco restantes funciones trigonométricas de u.

Solución

Opción 1

Usando un círculo

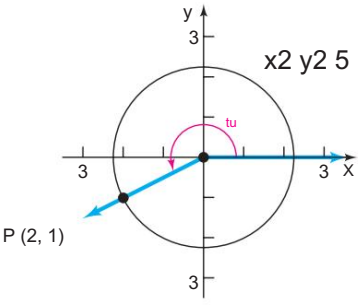


Figura 42 tanu = 2 $\frac{1}{2}$; u en el cuadrante III

Paso 1: Dado que tan u = 2 $\frac{1}{2}$ 7 0 y sen u 6 0, el punto P = 1x, y2 que corresponde a u se encuentra en el cuadrante III. Ver Figura 42.

Paso 2: Dado que tan u = 2 $\frac{1}{2} = \frac{y}{x}$ y u se encuentra en el cuadrante III, sean x = - 2 e y = - 1.

Paso 3: Con x = - 2 e y = - 1, entonces r = 2x2 + y2 = 21 - 22, entonces $\sqrt{}$ 2 + 1 - 12 2 = 25, P se encuentra en el círculo x2 + y2 = 5.

Paso 4: aplique el teorema de la página 422 usando x = - 2, y = - 1 y r = 25.

pecado u = $\frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{25}} = -\frac{\sqrt{25}}{5}$ porque tu = $\frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{25}} = -\frac{\sqrt{225}}{5}$

csc tu = y $\frac{r}{} = \frac{\sqrt{25}}{} = -25$ seg u = - 1 $\frac{r}{x} = \frac{\sqrt{25}}{-2} = -\frac{\sqrt{25}}{2}$ cuna u = $\frac{x}{y} = \frac{-2}{-1} = 2$

opcion 2

Usando identidades

Como se conoce el valor de tan u, utilice la identidad pitagórica que involucra tan u, es decir, tan2 u + 1 = sec2 u. Dado que tan u = cuadrante $\frac{1}{2}$ 7 0 y sen u 6 0, entonces u está en III, donde sec u 6 0.

tan2 u + 1 = seg2 u — Identidad pitagórica

un 1 segundo 2 + 1 = seg2 u — bronceado U · $\frac{1}{2}$

seg2 u = + 1 = 4 $\frac{5}{4}$ — Proceda a resolver el segundo U.

segundo u = - $\frac{\sqrt{25}}{2}$ — segundos U * 0

Machine Translated by Google

Ahora sabemos tan u = y sec u = - . Usando identidades recíprocas, encontramos

$$\text{porque u} \quad \frac{1}{\text{= seg u}} = \frac{1}{-\frac{25}{2}} = - \quad \frac{2}{25} = - \quad \frac{225}{5}$$

$$\text{cuna u} = \frac{1}{\text{broncearte}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Para encontrar sen u, utilice el siguiente razonamiento:

$$\tan u = \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} \quad \text{entonces sen u = 1tan u2 1cos u2 = a2b \# a-} \quad \frac{225}{\text{5 segundo = -}} \quad \frac{25}{5}$$

$$\text{csc tu} = \frac{1}{\text{pecado u}} = \frac{1}{-\frac{25}{5}} = - \quad \frac{5}{25} = -25$$

Ahora resuelve el problema 4 3

6 Utilice propiedades pares e impares para encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas

Recuerde que una función f es par si f1 - u2 = f1u2 para todo u en el dominio de f; una función f es impar si f1 - u2 = - f1u2 para todo u en el dominio de f. Ahora demostraremos que las funciones trigonométricas seno, tangente, cotangente y cosecante son funciones impares y las funciones coseno y secante son funciones pares.

En palabras
El coseno y la secante son funciones pares; las otras son funciones impares.

TEOREMA Propiedades pares-impares

sen1 - u2 = - sen u	cos1 - u2 = cos u	tan1 - u2 = - tan u
csc1 - u2 = - csc u	seg1 - u2 = seg u	cuna1 - u2 = - cuna u

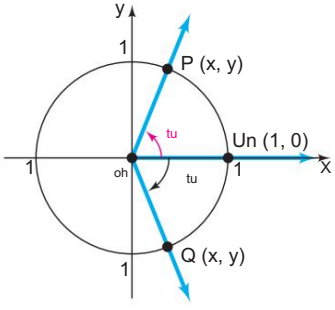


Figura 43

Prueba Sea P = 1x, y2 el punto del círculo unitario que corresponde al ángulo u. Vea la Figura 43. Usando simetría, el punto Q en el círculo unitario que corresponde al ángulo -u tendrá coordenadas 1x, -y2 . Usando la definición de funciones trigonométricas, tenemos

$$\text{sen u = y sen1 - u2 = - y} \qquad \text{porque tu = x} \qquad \text{cos1 - u2 = x}$$

entonces

$$\text{sen1 - u2 = - y = - sen u} \qquad \text{cos1 - u2 = x = cos u}$$

Ahora, usando estos resultados y algunas de las identidades fundamentales, tenemos

$$\tan 1 - u2 = \frac{\text{pecado1 - u2}}{\text{cos1 - u2}} = \frac{\text{-pecado}}{\text{porque tú}} = - \tan u \qquad \text{cuna1 - u2} \quad \frac{1}{\text{= tan1 - u2}} = \frac{1}{\text{- bronceado}} = - \text{cuna u}$$

$$\text{seg1 - u2} = \frac{1}{\text{cos1 - u2}} = \frac{1}{\text{cos u}} = \text{seg u} \qquad \text{csc1 - u2} = \frac{1}{\text{sen1 - u2}} = \frac{1}{\text{-pecado}} = - \text{csc u}$$

■

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Encontrar valores exactos utilizando propiedades pares e impares

Encuentra el valor exacto de cada uno de los siguientes ángulos:

(a) sen1 - 45°2 (b) cos1 - p2 (c) cota - $\frac{3p}{2}$ (d) tana - $\frac{37p}{4}$

Solución

(a) sen1 - 45°2 = - sen 45° = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C

Función impar

(b) cos1 - p2 = cos p = - 1

C

incluso función

(c) cota - $\frac{3p}{2}$ b = - cuna $\frac{3p}{2}$ = 0

C

Función impar

(d) tana - $\frac{37p}{4}$ b = - bronceado $\frac{37p}{4}$ = - tana $\frac{p}{4}$ + 9pb = - bronceado $\frac{p}{4}$ = - 1

C C

Función impar El período es P.

Ahora problema de trabajo 5 9

6.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. El dominio de la función f1x2 = $\frac{x + 1}{2x + 1}$ es _____.

2. Una función para la cual f1x2 = f1 - x2 para todo x en el dominio de f se llama función(n). (págs. 109-111)

3. Verdadero o Falso La función f1x2 = 1x es par. (págs. 109-111)

4. Verdadero o Falso La ecuación $x^2 + 2x = 1x + 12^2 - 1$ es un identidad. (pág. A44)

Conceptos y vocabulario

5. Las funciones seno, coseno, cosecante y secante tienen punto; las funciones _____ tangente y cotangente tienen periodo.

6. El dominio de la función tangente es _____.

7. Opción múltiple ¿ Cuál de las siguientes no está en el rango? de la función seno?

(a) $\frac{p}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) -0,37 (d) - 1

8. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes funciones es par?

(a) coseno (b) seno 9. sen2 u + cos2 u = _____ (c) tangente (d) cosecante

10. Verdadero o Falso sec u = $\frac{1}{\text{sen } u}$

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 26, utiliza el hecho de que las funciones trigonométricas son periódicas para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

11. pecado 405° 12. cos 420° 13. pecado 390° 14. bronceado 405° 15. segundos 540° 16. csc 450°

17. seg 420° 18. cuna 390° 19. pecado $\frac{9p}{4}$ 20. porque $\frac{33p}{4}$ 21. csc $\frac{9p}{2}$ 22. tan121p2

23. cuna $\frac{17p}{4}$ 24. seg $\frac{17p}{4}$ 25. seg $\frac{25p}{6}$ 26. bronceado $\frac{19p}{6}$

En los problemas 27 a 34, nombre el cuadrante en el que se encuentra el ángulo u .

27. sen u 7 0, cos u 6 0 31. cos u 6 0, tan u 7 0 28. sen u 6 0, porque u 7 0 29. porque u 7 0, tan u 7 0 30. sen u 6 0, tan u 6 0

32. porque u 7 0, tan u 6 0 33. csc u 7 0, porque u 6 0 34. seg u 6 0, sen u 7 0

Machine Translated by Google

En los problemas 35 a 42 se dan sen u y cos u . Encuentra el valor exacto de cada una de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

35. pecado u = - $\frac{3}{5}$, porque tu $\frac{4}{=}$

36. pecado u = $\frac{4}{5}$, porque tu = - $\frac{3}{5}$

37. pecado u = - $\frac{25}{5}$, porque tu = - $\frac{225}{5}$

38. sen u = 5 $\frac{225}{222}$, porque tu = $\frac{5\ 25}{5}$

39. pecado u = $\frac{23}{2}$, porque tu = $\frac{1}{2}$

40. pecado u = $\frac{1}{2}$, porque tu = $\frac{23}{2}$

41. pecado u = $\frac{}{3}$, porque tu = - $\frac{1}{3}$

42. pecado u = - $\frac{1}{3}$, porque tu = $\frac{222}{3}$

En los problemas 43 a 58, encuentre el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas restantes de u.

43. sen u = $\frac{12}{13,\ 4}$ u en el cuadrante II

44. porque tu = $\frac{3}{5}$, u en el cuadrante IV

45. pecado u = - $\frac{5}{13,}$ u en el cuadrante III

46. porque tu = - $\frac{}{5}$, u en el cuadrante III

47. porque tu = $\frac{4}{5}$, 270° 6 y 6 360°

48. sen u = $\frac{5}{13,\ 1}$ 90° 6 y 6 180°

49. pecado u = - $\frac{2}{3}$, p 6 u 6 $\frac{3p}{2}$

50. porque tu = - 3 $\frac{1}{}$, $\frac{pag}{2}$ 6 u 6p

51. porque tu = - 4 $\frac{}{}$, bronceado tu 7 0

52. sen u = 3 $\frac{2}{}$, bronceado tu 6 0

53. csc u = 3, cot u 6 0

54. seg u = 2, sen u 6 0

55. cuna u = $\frac{4}{3}$, porque eres 6 0

56. tan u = 4 $\frac{3}{}$, pecado u 6 0

57. seg u = - 2, tan u 7 0

58. tan u = - 3 $\frac{1}{}$, pecado u 7 0

En los problemas 59 a 76, utilice las propiedades par-impar para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

59. pecado1 - 60°2

60. cos1 - 30°2

61. pecado1 - 135°2

62. tan1 - 30°2

63. csc1 - 30°2

64. seg1 - 60°2

65. cos1 - 270°2

66. pecado1 - 90°2

67. pecado1 - p2

68. tana - $\frac{pag}{4\ segundo}$

69. sina - $\frac{pag}{3\ segundo}$

70. cosa - 74. $\frac{pag}{4\ segundo}$

71. sina - 75. $\frac{3p}{2\ segundo}$

72. tan1-p2

73. seg1 - p2

csca - $\frac{pag}{4\ segundo}$

csca - $\frac{pag}{3\ segundo}$

76. seca - $\frac{pag}{6\ segundo}$

En los problemas 77 a 88, utilice las propiedades de las funciones trigonométricas para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

77. seg2 18° - tan2 18°

78. sen2 40° + cos2 40°

79. pecado 80° csc 80°

80. bronceado 10° cuna 10°

81. cuna 20° - $\frac{\cos 20°}{\text{pecado } 20°}$

82. bronceado 40° $\frac{\text{pecado } 40°}{- \cos 40°}$

83. bronceado 200° # cuna 20°

84. cos 400° # seg 40°

85. seca - $\frac{pag}{18}$ b # cos $\frac{37p}{18}$

86. sina - $\frac{pag}{12}$ b csc $\frac{25p}{12}$

87. $\frac{\text{pecado } 70°}{\text{+ tan1- 70°2 cos1- 430°2}}$

88. $\frac{\text{sen1 - 20°2}}{\text{porque } 380°}$ + bronceado 200°

---

89. Si cos u = 0,2, encuentre el valor de:

porque u + cos1u + 2p2 + cos1u + 4p2

90. Si sen u = 0,3, encuentre el valor de:

sen u + sen1u + 2p2 + sen1u + 4p2

91. Si cot u = - 2, encuentre el valor de:

cuna u + cuna1u - p2 + cuna1u - 2p2

92. Si tan u = 3, encuentre el valor de:

tan u + tan1u + p2 + tan1u + 2p2

93. Encuentra el valor exacto de:

cos 1° + cos 2° + cos 3° + g + cos 358° + cos 359°

94. Encuentra el valor exacto de:

sen 1° + sen 2° + sen 3° + g + sen 358° + sen 359°

95. ¿Cuál es el dominio de la función coseno?

96. ¿Cuál es el dominio de la función seno?

97. ¿ Para qué números u no está definido f1u2 = tan u?

98. ¿ Para qué números u no está definido f1u2 = cot u?

99. ¿ Para qué números u no está definido f1u2 = csc u?

100. ¿Para qué números u no está definido f1u2 = sec u?

101. ¿Cuál es el rango de la función coseno?

102. ¿Cuál es el rango de la función seno?

103. ¿Cuál es el rango de la función cotangente?

Machine Translated by Google

104. ¿Cuál es el rango de la función tangente?

105. ¿Cuál es el rango de la función cosecante?

106. ¿Cuál es el rango de la función secante?

107. ¿ La función coseno es par, impar o ninguna de las dos? es su grafica ¿simétrico? ¿Con respecto a qué?

108. ¿ La función seno es par, impar o ninguna de las dos? es su grafica ¿simétrico? ¿Con respecto a qué?

109. ¿ La función cotangente es par, impar o ninguna de las dos? es su grafica ¿simétrico? ¿Con respecto a qué?

110. ¿ La función tangente es par, impar o ninguna de las dos? es su grafica ¿simétrico? ¿Con respecto a qué?

111. ¿ La función cosecante es par, impar o ninguna de las dos? es su grafica ¿simétrico? ¿Con respecto a qué?

112. ¿ La función secante es par, impar o ninguna de las dos? es su grafica ¿simétrico? ¿Con respecto a qué?

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 113 a 118, utilice las propiedades periódica y par-impar.

113. Si f1u2 = cos u y f1a2 = 4 $\frac{1}{}$, encontrar el valor exacto de:

(a) f1- a2 (b) f1a2 + f1a + 2p2 + f1a - 2p2

114. Si f1x2 = cos1x2 y f1a2 = 2 $\frac{1}{}$, encontrar el valor exacto de siguiente.

(a) f1 - a2 (b) f1a2 + f1a + 2p2 + f1a + 4p2

115. Si f1u2 = cot u y f1a2 = - 3, encuentre el valor exacto de:

(a) f1 - a2 (b) f1a2 + f1a + p2 + f1a + 4p2

116. Si f1x2 = cot1x2 y f1a2 = 2, encuentre el valor exacto de lo siguiente.

(a) f1 - a2 (b) f1a2 + f1a + p2 + f1a + 2p2

117. Si f1u2 = csc u y f1a2 = 2, encuentre el valor exacto de:

(a) f1- a2 (b) f1a2 + f1a + 2p2 + f1a + 4p2

118. Si f1x2 = sec1x2 y f1a2 = - 11, encuentre el valor exacto de lo siguiente.

(a) f1- a2 (b) f1a2 + f1a + p2 + f1a + 4p2

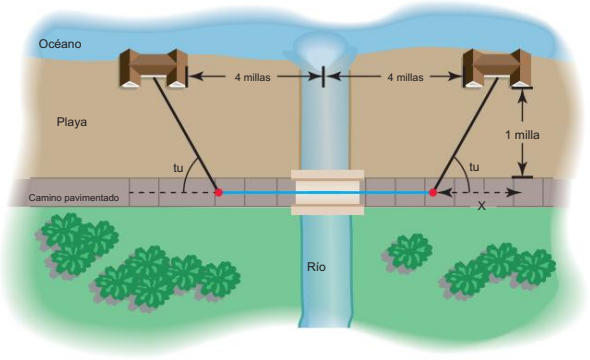
119. Calcular el tiempo de un viaje Dos casas frente al mar están ubicadas a 8 millas de distancia en un tramo recto de playa, cada una a una distancia de 1 milla de un camino pavimentado paralelo al océano. Sally puede trotar a 8 millas por hora en un camino pavimentado, pero sólo a 3 millas por hora en la arena de la playa. Debido a que un río fluye directamente entre las dos casas, es necesario trotar en la arena hasta el camino, continuar por el sendero y luego trotar directamente de regreso en la arena para ir de una casa a la otra.
Ver la figura. El tiempo T para llegar de una casa a otra en función del ángulo u que se muestra en la figura es

$$T1u2 = 1 + \frac{2}{3 \text{ pecado } u} - \frac{1}{4 \text{ bronceado}} \qquad 0 6 u 6 \frac{\text{pag}}{2}$$

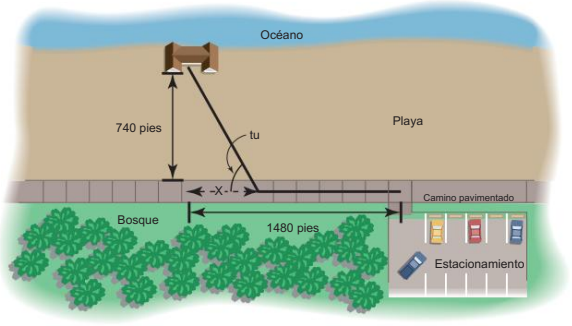
(a) Calcule el tiempo T para tan u = $\frac{1}{4}$.

(b) Describa el camino seguido.

(c) Explique por qué u debe ser mayor que 14°.



120. Calcular el tiempo de un viaje Desde un estacionamiento quieres caminar hasta una casa en el océano. La casa está ubicada a 1480 pies por un camino pavimentado paralelo a la playa, que tiene 740 pies de ancho. A lo largo del sendero, puedes caminar 330 pies/min, pero en la playa solo puedes caminar 130 pies/min. Calcula el tiempo T si caminas directamente desde el estacionamiento hasta la casa.



121. Población de depredadores En las relaciones depredador-presa, las poblaciones de depredador y presa suelen ser cíclicas. En un área de conservación, los guardabosques monitorean la población de zorro rojo y han determinado que la población puede modelarse mediante la función

$$P1t2 = 40 \text{ cosa pt } \overline{\quad 6 \text{ b} + 110}$$

donde t es el número de meses desde que comenzó el seguimiento.
Utilice el modelo para estimar la población de zorros rojos en el área de conservación después de 10 meses, 20 meses y 30 meses.

Machine Translated by Google

122. Volumen pulmonar El volumen pulmonar normal en reposo V, en ml, para hombres adultos varía durante el ciclo respiratorio y puede aproximarse mediante el modelo.

$$V(t) = 250 \sin\left(\frac{2\pi(t - 1.25)}{5}\right) + 2650$$

donde t es el número de segundos después de que comienza la respiración. Utilice el modelo para estimar el volumen de aire en los pulmones de un hombre después de 2,5 segundos, 10 segundos y 17 segundos.

123. Demuestre que el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

124. Demuestre que el rango de la función cotangente es el conjunto de todos los números reales.

125. Demuestre que el período de f1u2 = sen u es 2p.

[Sugerencia: Supongamos que 0 6 p 6 2p existe de modo que sen1u + p2 = sen u para todo u. Sea u = 0 para encontrar p. Entonces deja tu = $\frac{\pi}{2}$ para obtener una contradicción.]

126. Demuestre que el período de f1u2 = cos u es 2p.

127. Demuestre que el período de f1u2 = sec u es 2p.

128. Demuestre que el período de f1u2 = csc u es 2p.

129. Demuestre que el período de f1u2 = tan u es p.

130. Demuestre que el período de f1u2 = cot u es p.

131. Demuestre las identidades recíprocas dadas en la identidad (2).

132. Demuestre las identidades del cociente dadas en la identidad (3).

133. Establecer la identidad:

$$(\sin u \cos u)^2 + (\sin u - \cos u)^2 = 1$$

134. Problema de desafío Si 2 sen2 u + 3 cos2 u = 3 sen u cos u + 1 con u en el cuadrante I, encuentre los valores posibles para cot u.

135. Problema de desafío si sen14u2 = cos12u2 y $0 < 4u < \frac{\pi}{2}$, encuentre el valor exacto de sin18u2 + cot14u2 - 2.

136. Problema de desafío Si tan u = 3 - sec u con u en el cuadrante I, ¿Qué es sen u + cos u?

137. Problema de desafío Encuentra el valor exacto de sen u - cos u si cos u - 8 sen u = 7 y 180° 6 u 6 270°.

Explicar conceptos: discusión y escritura

138. Escribe cinco propiedades de la función tangente. Explica el significado de cada uno.

139. Describe tu comprensión del significado de un periódico. función.

140. Explique cómo encontrar el valor de sen 390° usando propiedades periódicas.

141. Explique cómo encontrar el valor de cos1 - 45°2 usando propiedades par-impar.

142. Explica cómo encontrar el valor de sen 390° y cos 1 - 45°2 usando el círculo unitario.

Conserve su conocimiento

Los problemas 143 a 152 se basan en el material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

143. Dado: f1x2 = x2 - 3 y g1x2 = x - 7, encuentre 1f g2 1x2.

144. Grafica f1x2 = - 2x2 + 12x - 13 usando transformaciones. Encuentra el vértice y el eje de simetría.

145. Resuelve exactamente: ex-4 = 6

146. Encuentra los ceros reales de f1x2 = x3 - 9x2 + 3x - 27.

147. Resuelve: $\sqrt{2x + 2} - \sqrt{2x - 5} = 2$

148. Si los ceros reales de g1x2 son - 2 y 3, ¿cuáles son los ceros reales de g1x + 62?

149. Resuelve: log4 1x - 52 = 2

150. Encuentre c de modo que f1x2 = 6x2 - 28x + c tenga un valor mínimo de $\frac{7}{3}$.

151. Encuentra las intersecciones de la gráfica de - 3x + 5y = 15.

152. Encuentra el cociente de diferencias para f1x2 = $\frac{3}{x^2 - 5x + 1}$.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. $e^{x \cdot \ln 2}$ 2. incluso 3. Falso 4. Verdadero

Machine Translated by Google

6.4 Gráficas de las funciones seno y coseno

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Técnicas gráficas: transformaciones (Sección 2.5, págs. 134–143)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 452.

OBJETIVOS 1 Graficar la función seno y = sen x y funciones de la forma y = A sin1vx2 (p. 443)

2 Grafique la función coseno y = cos x y funciones de la forma y = A cos1vx2 (p. 445)

3 Determinar la amplitud y el período de funciones sinusoidales (p. 446)

4 Graficar funciones sinusoidales usando puntos clave (p. 448)

5 Encuentre una ecuación para una gráfica sinusoidal (p. 452)

Queremos graficar las funciones trigonométricas en el plano xy. Entonces usamos los símbolos tradicionales x para la variable independiente (o argumento) e y para la variable dependiente de cada función. Entonces las seis funciones trigonométricas se escriben como

y = f1x2 = sen xy = f1x2 = csc x	y = f1x2 = cos xy = f1x2 = seg x	y = f1x2 = tanx y = f1x2 = cuna x

Aquí la variable independiente x representa un ángulo, medido en radianes. Sin embargo, en cálculo, x generalmente se trata como un número real. Como se señaló anteriormente, éstas son formas equivalentes de ver x.

1 Grafique la función seno y · sen x y funciones de la forma y · A sen1Vx2

Debido a que la función seno tiene un período 2p, solo es necesario graficar y = sen x en el intervalo 30, 2p4. El resto del gráfico consistirá en repeticiones de esta parte del gráfico.

Para comenzar, considere la Tabla 6, que enumera algunos puntos en la gráfica de y = sen x, 0… x …2p. Como muestra la tabla, la gráfica de y = sen x, 0… x … 2p, comienza en el origen. Cuando x aumenta de 0 a 2 $\frac{\pi}{6}$, el valor de y = sen x aumenta de 0 a 1; a medida que x aumenta desde $\frac{\pi}{2}$ a p a $\frac{3\pi}{2}$, el valor de y disminuye de 1 a 0 a -1; a medida que x aumenta de $\frac{3\pi}{2}$ a 2p, el valor de y aumenta de -1 a 0. Trazar el puntos enumerados en la Tabla 6 y conectarlos con una curva suave produce el gráfico que se muestra en la Figura 44.

Tabla 6

xy · sen x		1x, y2
0	0	(0, 0)
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}$ segundo
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$, 1b
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}$ segundo
pag	0	(pag.0)
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}$ segundo
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\frac{3\pi}{2}$, -1b
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}$ segundo
2p	0	(2p, 0)

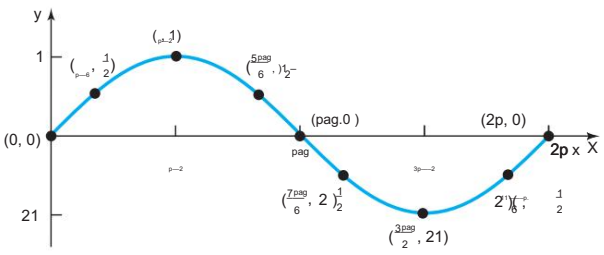


Figura 44 y = sen x, 0… x … 2p

Machine Translated by Google

La gráfica de la Figura 44 es un período o ciclo de la gráfica de y = sen x. Para obtener una gráfica más completa de y = sen x, continúe la gráfica en cada dirección, como se muestra en la Figura 45.

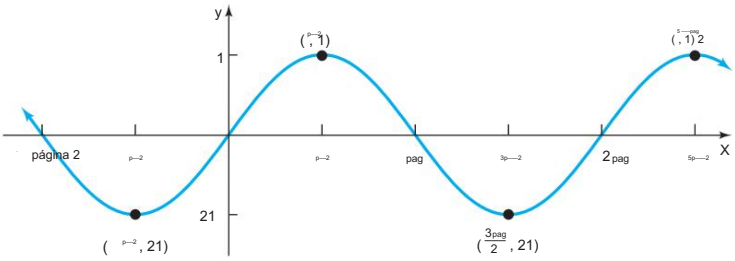


Figura 45 y = sen x, - q 6 x 6 q

La gráfica de y = sen x ilustra algunas propiedades de la función seno.

Propiedades de la función seno y · sen x

- El dominio es el conjunto de todos los números reales.
- El rango consta de todos los números reales del - 1 al 1, inclusive.
- La función seno es una función impar, como lo indica la simetría de la gráfica con respecto al origen.
- La función seno es periódica, con período 2p.
- Las intersecciones en x son c. - 2p, -p, 0, p, 2p, 3p, c ; la intersección con el eje y es 0.
- El valor máximo es 1 y ocurre en x = c. $-\frac{3p}{2}, \frac{pag}{2}, \frac{5p}{2}, \frac{9p}{2}$, C;

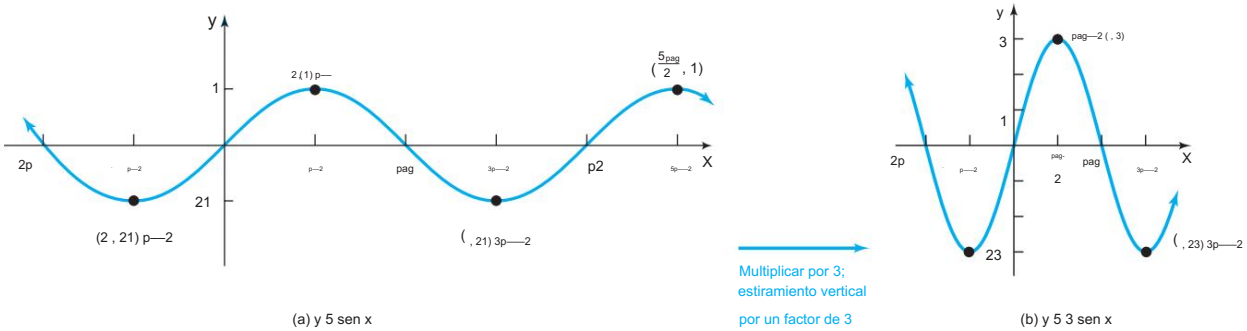
  el valor mínimo es - 1 y ocurre en x = c. $-\frac{pag}{2}, \frac{3p}{2}, \frac{7p}{2}, \frac{11p}{2}$, c

Ahora problema de trabajo 1 1

EJEMPLO 1 Graficar funciones de la forma y · A sen x usando transformaciones

Grafica y = 3 sen x usando transformaciones. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de la función.

Solución La Figura 46 ilustra los pasos.



(a) y 5 sen x (b) y 5 3 sen x

Figura 46

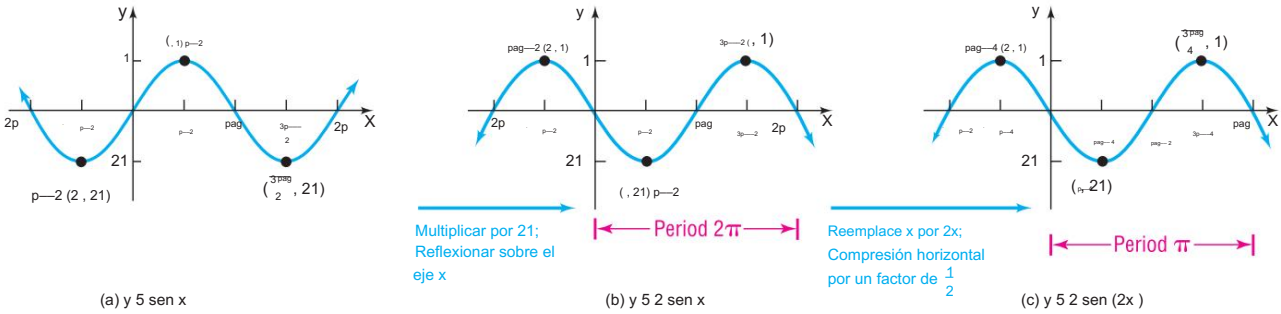
El dominio de y = 3 sen x es el conjunto de todos los números reales, o 1 - q, q 2. El rango es 5y· - 3 … y … 36, o 3 - 3, 34.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Graficar funciones de la forma y · A sen 1Vx2 usando transformaciones

Grafique y = - sin12x2 usando transformaciones. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de la función. Identifica el período de la función y = - sin12x2.

Solución La Figura 47 ilustra los pasos.



(a) y 5 sen x (b) y 5 2 sen x (c) y 5 2 sen (2x)

Figura 47

El dominio de y = - sin12x2 es el conjunto de todos los números reales, o 1 - q, q 2. El el rango es 5y· - 1 … y … 16, o 3 - 1, 14 .

El período de la función y = - sen12x2 es p debido a la horizontal compresión del período original 2p por un factor de 1/2. Ver Figura 47(c).

Ahora resuelve el problema 3 9 usando transformaciones.

2 Grafique la función coseno y · cos x y funciones de la forma y · A cos1Vx2

La función coseno también tiene período 2p. Para graficar y = cos x, comience construyendo la Tabla 7, que enumera algunos puntos en la gráfica de y = cos x, 0… x … 2p. Como muestra la tabla, la gráfica de y = cos x, 0… x … 2p, comienza en el punto 10, 12.

Cuando x aumenta de 0 a 2 pag/3 hasta p, el valor de y disminuye de 1 a 0 a -1; como x aumenta de p a 2p, el valor de 3p/2 y aumenta de - 1 a 0 a 1. Como antes,

Trace los puntos en la Tabla 7 para obtener un período o ciclo del gráfico. Ver Figura 48.

Tabla 7

xy · porque x		(x,y)
0	1	(0, 1)
pag/3	1/2	ap/3 , 1/2 segundo
pag/2	0	ap/2 , 0b
2p/3	- 1/2	un 2p/3 , - 1/2 segundo
pag	-1	(p,-1)
4p/3	- 1/2	un 4p/3 , - 1/2 segundo
3p/2	0	un 3p/2 , 0b
5p/3	1/2	un 5p/3 , 1/2 segundo
2p	1	(2p, 1)

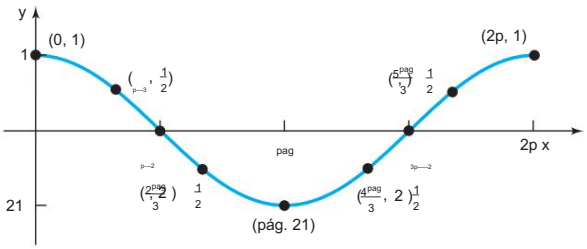


Figura 48 y = cos x, 0 … x … 2p

Se obtiene una gráfica más completa de y = cos x continuando la gráfica en cada dirección, como se muestra en la Figura 49.

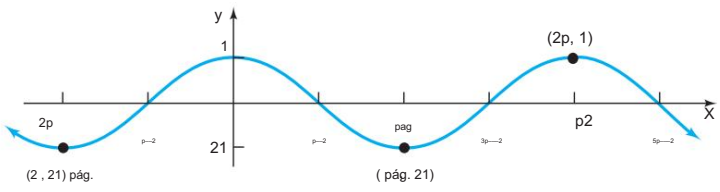


Figura 49 y = cos x, - q 6 x 6 q

Machine Translated by Google

La gráfica de y = cos x ilustra algunas propiedades de la función coseno.

Propiedades de la función coseno

- El dominio es el conjunto de todos los números reales.
- El rango consta de todos los números reales del - 1 al 1, inclusive.
- La función coseno es una función par, como lo indica la simetría de la gráfica con respecto al eje y.
- La función coseno es periódica, con período 2p.
- Las intersecciones en x son c. $-\frac{3p}{2}, -\frac{pag}{2}, \frac{pag}{2}, \frac{3p}{2}, \frac{5p}{2}$, C; la intersección con el eje y es 1.
- El valor máximo es 1 y ocurre en x = c. - 2p, 0, 2p, 4p, 6p, c;
  el valor mínimo es - 1 y ocurre en x = c. - p, p, 3p, 5p, c .

EJEMPLO 3 Graficar funciones de la forma y · A cos1Vx2 usando transformaciones

Grafica y = 2 cos13x2 usando transformaciones. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de la función. Identifica el período de la función y = 2 cos13x2.

Solución La Figura 50 muestra los pasos.

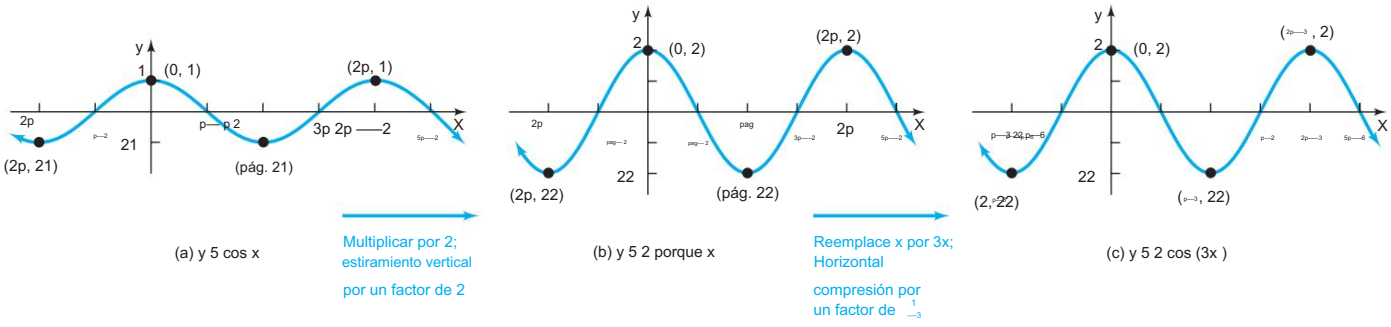


Figura 50

El dominio de y = 2 cos13x2 es el conjunto de todos los números reales, o 1 - q, q 2. El el rango es 5y· - 2 … y … 26, o 3 - 2, 24 .

El periodo de la función y = 2 cos13x2 se debe a la compresión de $\frac{2p}{3}$ el período original 2p por el factor de $\frac{1}{3}$. Ver Figura 50(c).

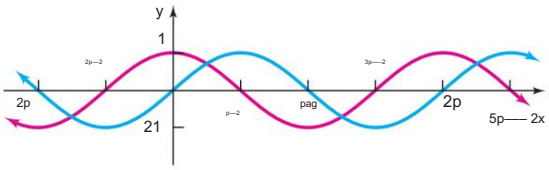
Ahora resuelve el problema 4 3 usando transformaciones.

3 Determinar la amplitud y el período de funciones sinusoidales

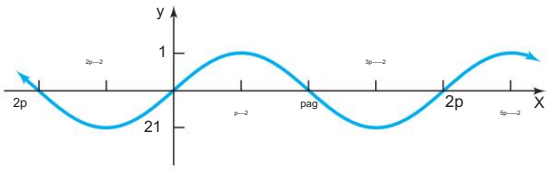
La función seno y la función coseno se denominan funciones sinusoidales. La discusión a continuación proporciona la justificación de esta definición.

Comience desplazando la gráfica de y = cos x hacia la derecha 2 $\frac{pag}{}$ unidades para obtener la gráfica de y = cos ax - $\frac{pag}{}$ 2b. Ver Figura 51(a). Ahora mira la gráfica de y = sen x en la Figura 51(b). Observe que la gráfica de y = sen x es la misma que la gráfica de y = cos ax - $\frac{pag}{}$ 2b.

Machine Translated by Google



(a) y 5 cos x y 5 cos (x 2)



(b) y 5 sen x

Figura 51

Con base en la Figura 51, conjeturamos que

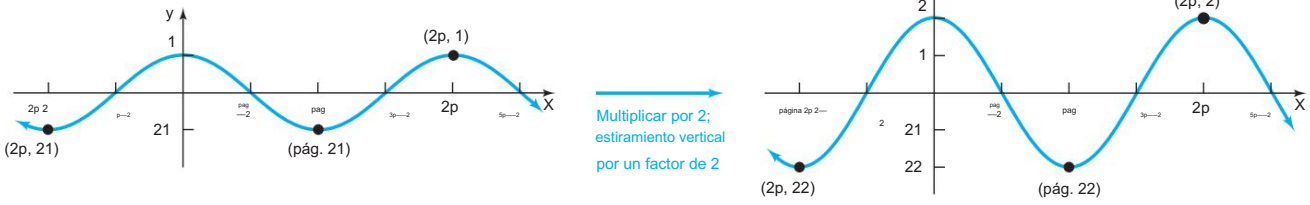
Ver el concepto

Grafica Y1 = sen x e Y2 = cos ax - 2b. ¿Cuántas gráficas ves?

senx = cos hacha -

Esto lo demostramos en el capítulo 7. Debido a esta relación, las gráficas de funciones de la forma y = A sen1vx2 o y = A cos1vx2 se conocen como gráficas sinusoidales.

La Figura 52 utiliza transformaciones para obtener la gráfica de y = 2 cos x. Tenga en cuenta que el los valores de y = 2 cos x se encuentran entre - 2 y 2, inclusive.



(a) y 5 cos x

(b) y 5 2 porque x

Figura 52

En palabras

La amplitud determina el estiramiento o compresión vertical de la gráfica de y = sen x o y = cos x.

Los valores de las funciones y = A sen x e y = A cos x, donde A · 0, satisfacen las desigualdades

- 0 A0 … A sen x … 0 A0 y - 0 A0 … A cos x … 0 A0

respectivamente. El número 0 A0 se llama amplitud de y = A sen x o y = A cos x. Ver Figura 53.

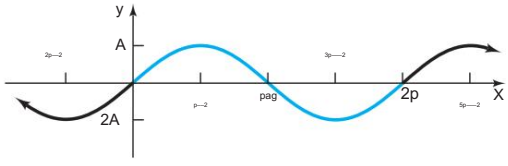


Figura 53 y = A sen x, A 7 0; periodo = 2p

Si v 7 0, las funciones y = sin1vx2 e y = cos1vx2 tienen período T = . A

mira por qué, recuerda que la gráfica de y = sin1vx2 se obtiene de la gráfica de y = sinx realizando una compresión o estiramiento horizontal por un factor Este horizontal v.

La compresión reemplaza el intervalo 30, 2p4, que contiene un período del gráfico.

de y = sen x, por el intervalo c 0, que contiene un período del gráfico

de y = sen1vx2. Es por eso que la función y = 2 cos13x2, graficada en la Figura 50(c), con v = 3, tiene periodo .

Machine Translated by Google

Un período de la gráfica de y = sin1vx2 o y = cos1vx2 se llama ciclo. La Figura 54 ilustra la situación general. La parte azul del gráfico es un ciclo.

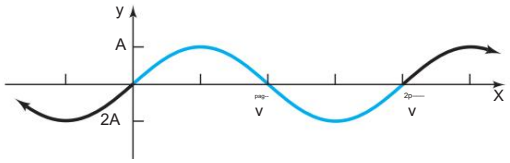


Figura 54 y = A sen1vx2, A 7 0, v 7 0; período = $\frac{2p}{v}$

Si v 7 0 e y = sin1 -vx2 o y = cos1 -vx2, usamos las propiedades par-impar de las funciones seno y coseno, que son

$$\text{sen1 -vx2} = -\text{ sen1vx2 y cos1 -vx2} = \text{cos1vx2}$$

Esto nos da una forma equivalente en la que el coeficiente de x es positivo. Por ejemplo,

$$\text{sen1 - 2x2} = -\text{ sen12x2 y cos1 - px2} = \text{cos1px2}$$

Por esto, podemos suponer que v 7 0.

TEOREMA

Si v 7 0, la amplitud y el período de y = A sen1vx2 e y = A cos1vx2 están dados por

$$\text{Amplitud} = 0\,A0 \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2p}{v} \qquad (1)$$

EJEMPLO 4 Encontrar la amplitud y el período de una función sinusoidal

Determine la amplitud y el período de y = 3 sen14x2.

Solución Comparando y = 3 sen14x2 con y = A sen1vx2, observe que A = 3 y v = 4. De la ecuación (1),

$$\text{Amplitud} = 0\,A0 = 3 \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2p}{v} = \frac{2p}{4} = \frac{pag}{2}$$

Ahora resuelve el problema 1 7

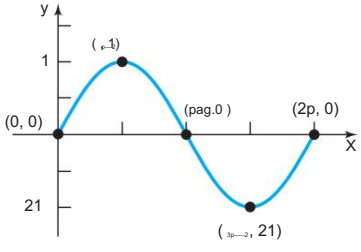
4 Graficar funciones sinusoidales usando puntos clave

Hasta ahora, hemos graficado funciones de la forma y = A sin1vx2 o y = A cos1vx2 utilizando transformaciones. Ahora presentamos otro método que se puede utilizar para graficar estas funciones.

La Figura 55 muestra un ciclo de las gráficas de y = sen x e y = cos x en el intervalo 30, 2p4. Cada gráfico consta de cuatro partes correspondientes a los cuatro subintervalos:

$$\text{c } 0, \frac{pag}{2}\text{ d , cp }\frac{}{2}\text{, pd, cp, }\frac{3p}{2d}\text{,c 3p }\frac{}{2}\text{, 2p d}$$

Cada subintervalo tiene una longitud de $\frac{pag}{2.}$ (el período 2p dividido por 4) y los puntos finales de 3p estos intervalos x = 0, x = $\frac{pag}{2}$, x = pag, x = $\frac{}{2}$, x = 2p dan lugar a cinco puntos clave sobre cada gráfico, como se muestra en la Figura 55.



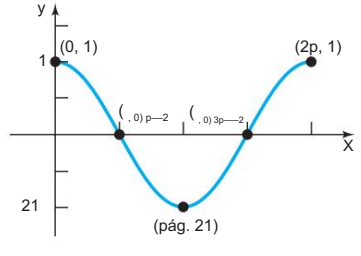


Figura 55

Machine Translated by Google

El siguiente ejemplo ilustra cómo se pueden utilizar estos cinco puntos clave para obtener la gráfica de una función sinusoidal.

EJEMPLO 5 Graficar una función sinusoidal usando puntos clave

Grafica y = 3 sen14x2 usando puntos clave.

Solución paso a paso Paso 1

Determine la amplitud y el período de la función sinusoidal.

Comparando y = 3 sen14x2 con y = A sen1vx2, observe que A = 3 y v = 4, por lo que 2p la amplitud es ·A· = 3 y el período es $\frac{2p}{v} = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$. Porque la amplitud es 3, 2 la gráfica de y = 3 sen14x2 se encuentra entre - 3 y 3 en el eje y. porque el periodo es $\frac{p}{2}$, un ciclo comienza en x = 0 y termina en x = $\frac{p}{2}$.

Paso 2 Divide el intervalo J0, 2p $\overline{v\ r}$ en cuatro subintervalos de la misma longitud.

Divida el intervalo c 0, c 0, $\frac{p}{2}$ d en cuatro subintervalos, cada uno de $\frac{p}{2}$, 4 = $\frac{p}{8}$, como sigue:

$\frac{p}{8}$ pb $\frac{}{8}$, $\frac{p}{8}$ + $\frac{p}{}$ longitud $\frac{}{8}$d = $\frac{p}{}$pb $\frac{}{4}$, $\frac{p}{4}$ + $\frac{p}{8}$ d = cp $\frac{}{4}$, $\frac{3p}{8}$ pa 3p $\frac{}{8}$, $\frac{3p}{8}$ + $\frac{p}{8}$ re = c 3p $\frac{}{8}$, $\frac{p}{}$ 2 días

Los puntos finales de los subintervalos son 0, 8. $\frac{p}{}$, $\frac{p}{4}$, $\frac{3p}{8}$, $\frac{p}{}$. Estos números representan 2 las coordenadas x de los cinco puntos clave del gráfico.

Paso 3 Utilice los puntos finales de los subintervalos del Paso 2 para obtener cinco puntos clave en el gráfico.

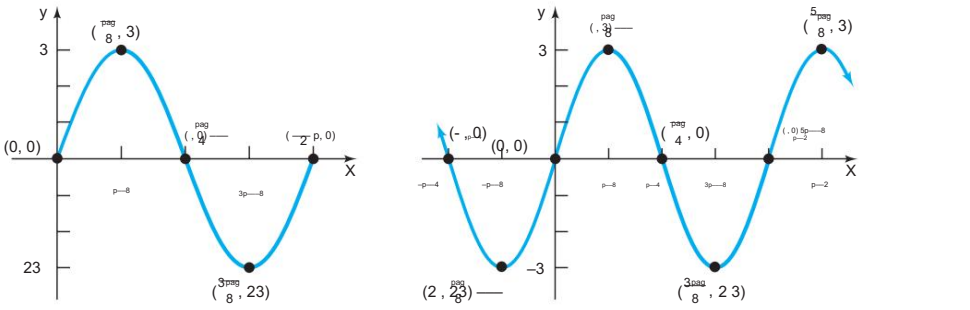
NOTA Los cinco puntos clave 1x, y2 también se pueden encontrar utilizando los cinco puntos finales (Paso 2) como coordenadas x. Entonces las coordenadas y son el producto de A = 3 y las coordenadas y de los cinco puntos clave de y = sen x. j

Para obtener las coordenadas y de los cinco puntos clave de y = 3 sen14x2, evalúe y = 3 sen 14x2 en cada punto final encontrado en el Paso 2. Luego, los cinco puntos clave son

10, 02 ap $\frac{}{8}$, 3b ap $\frac{}{4}$, 0b un 3p $\frac{}{8}$, - 3b ap $\frac{}{2}$, 0b

Paso 4 Traza los cinco puntos clave y dibuja una gráfica sinusoidal para obtener la gráfica de un ciclo. Extiende la gráfica en cada dirección.

Trace los cinco puntos clave obtenidos en el Paso 3 y complete la gráfica de la curva sinusoidal como se muestra en la Figura 56(a). Extienda la gráfica en cada dirección para obtener la gráfica completa que se muestra en la Figura 56(b). Observe que aparecen puntos clave adicionales cada 8 $\frac{p}{}$ radián.



(a) (b) y 5 3 sen (4x)

Figura 56

Ahora resuelva el problema 3 5 usando puntos clave

Grafica y = 3 sen14x2 usando transformaciones. ¿Qué método gráfico prefieres?

Machine Translated by Google

RESUMEN

Pasos para graficar una función sinusoidal de la forma y · A sin1Vx2 o y · A cos1Vx2 usando puntos clave

Paso 1: Determine la amplitud y el período de la función sinusoidal.

Paso 2: Divide el intervalo c 0, $\frac{2p}{vd}$ en cuatro subintervalos de la misma longitud.

Paso 3: utilice los puntos finales de estos subintervalos para obtener cinco puntos clave en el gráfico.

Paso 4: Traza los cinco puntos clave y dibuja una gráfica sinusoidal para obtener la gráfica de un ciclo. Ampliar el gráfico en cada dirección para completarlo.

EJEMPLO 6 Graficar una función sinusoidal usando puntos clave

Grafica y = 2 sina - $\frac{pag}{2}$ xb usando puntos clave.

Solución Dado que la función seno es impar, use la forma equivalente:

$$y = -2 \sin\left(p \ \frac{}{2}xb\right)$$

Paso 1: Compara y = - 2 sina p $\frac{}{2}$ xb a y = A sen1vx2. Entonces A = - 2

yv = $\frac{pag}{2}$, entonces la amplitud es 0 A0 = 0 - 2 0 = 2 y el periodo

es T = $\frac{2p}{v} = \frac{2p}{\frac{pag}{2}}$ = 4. La gráfica de y = - 2 sina p $\frac{}{2}$ xb se encuentra entre - 2 y 2 en el eje y. Un ciclo comienza en x = 0 y termina en x = 4.

Paso 2: Divida el intervalo 30, 44 en cuatro subintervalos, cada uno de longitud 4, 4 = 1. Las coordenadas x de los cinco puntos clave son

0	0 + 1 = 1	1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4
1ra coordenada x	2da coordenada x	3ra coordenada x	4ta coordenada x	5ta coordenada x

Paso 3: Evaluar y = - 2 sina p $\frac{}{2}$ xb en cada una de las cinco coordenadas x.

- en x = 0, y = - 2 sen 0 = 0
- en x = 1, y = - 2 sen 2
- en x = $\frac{pag}{}$ = - 2
- en x = 2, y = 0
- en x = 3, y = 2

4, y = 0

Los cinco puntos clave del gráfico son

10, 02 11, - 22 12, 02 13, 22 14, 02

Paso 4: Traza estos cinco puntos y completa la gráfica de la función seno como se muestra en la Figura 57(a). Amplíe la gráfica en cada dirección para obtener la Figura 57(b).

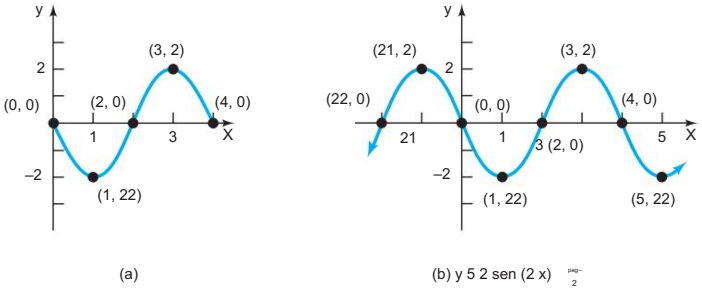


Figura 57

COMENTARIO Para graficar una función sinusoidal de la forma y = A sen 1vx2 o y = A cos 1vx2 usando una utilidad gráfica, use la amplitud para configurar Ymin e Ymax, y use el período para configurar Xmín y Xmáx. ■

Ahora resuelva el problema 3 9 usando puntos clave

Machine Translated by Google

Si la función que se va a graficar es de la forma y = A sin1vx2 + B 3 o y = A cos1vx2 + B4, primero grafique y = A sin1vx2 3 o y = A cos1vx2 4 y luego use un desplazamiento vertical.

EJEMPLO 7 Graficar una función sinusoidal usando puntos clave

Grafica y = - 4 cos1px2 - 2 usando puntos clave. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de y = - 4 cos(px) - 2.

Solución

Comienza graficando la función y = - 4 cos1px2.

Comparando y = - 4 cos1px2 con y = A cos1vx2, observe que A = - 4 y v = p.

La amplitud es 0 A0 = 0 - 4 0 = 4, y el período es T = $\frac{2p}{v} = \frac{2p}{pag} = 2.$

La gráfica de y = - 4 cos1px2 se encuentra entre - 4 y 4 en el eje y. un ciclo comienza en x = 0 y termina en x = 2.

Divida el intervalo [0, 2] en cuatro subintervalos, cada uno de longitud 2, 4 = 2 $\frac{1}{—}$.

Las coordenadas x de los cinco puntos clave son

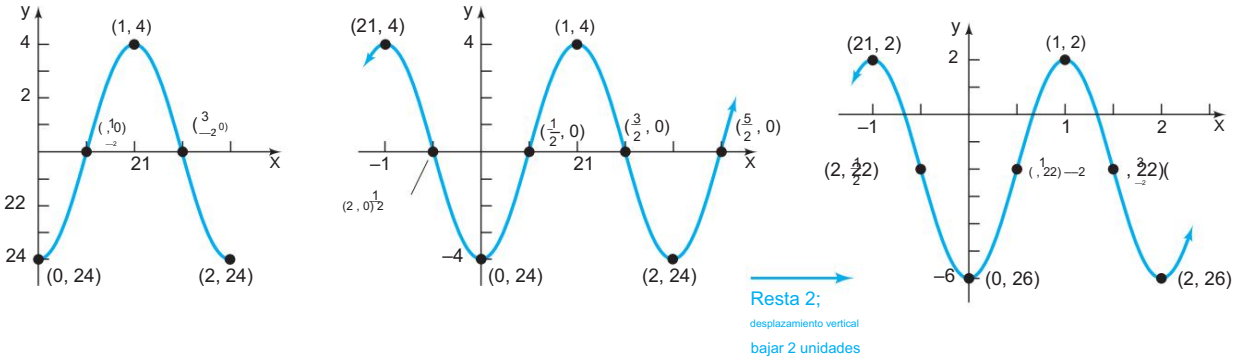
0	$0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{—} = 1$	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} + \frac{1}{—} = 2$
1er coordenada x	2.ª coordenada x	2 3er coordenada x	cuarta coordenada x	2 5to coordenada x

Ahora evalúe y = - 4 cos1px2 en cada una de las cinco coordenadas x enumeradas anteriormente.

10, - 42 un 1 $\overline{2}$, 0b 11, 42 un 3 $\overline{2}$, 0b 12, - 42

Traza estos cinco puntos y completa la gráfica de la función coseno como se muestra en la Figura 58(a). Extienda la gráfica en cada dirección para obtener la Figura 58(b), la gráfica de y = - 4 cos1px2.

Un desplazamiento vertical hacia abajo de 2 unidades da la gráfica de y = - 4 cos1px2 - 2, como se muestra en la Figura 58(c).



(a) (b) y 5 24 cos (px) (c) y 5 24 cos (px) 2 2

Figura 58

El dominio de y = - 4 cos1px2 - 2 es el conjunto de todos los números reales, o 1 - q, q 2.

El rango de y = - 4 cos1px2 - 2 es {y · - 6 … y … 2}, o 3 - 6, 24 .

Ahora problema de trabajo 4 9

Machine Translated by Google

5 Encuentre una ecuación para una gráfica sinusoidal

EJEMPLO 8 Usar una gráfica para encontrar una ecuación para una función sinusoidal

Encuentre una ecuación para la gráfica sinusoidal que se muestra en la Figura 59.

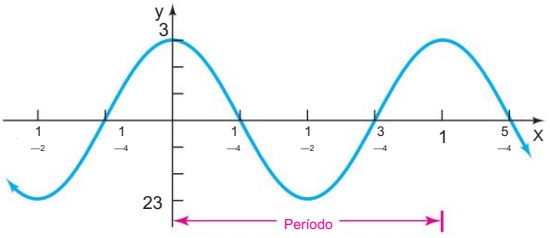


Figura 59

Solución

La gráfica tiene las características de una función coseno. ¿Ves por qué? El valor máximo, 3, ocurre en x = 0. Por lo tanto, la ecuación puede verse como un coseno 2p

función y = A cos1vx2 con A = 3 y periodo T = 1. Entonces = 1, entonces v = 2p.
La función coseno cuya gráfica se muestra en la Figura 59 es

$$y = A \cos 1vx2 = 3 \cos 12px2$$

EJEMPLO 9 Usar una gráfica para encontrar una ecuación para una función sinusoidal

Encuentre una ecuación para la gráfica sinusoidal que se muestra en la Figura 60.

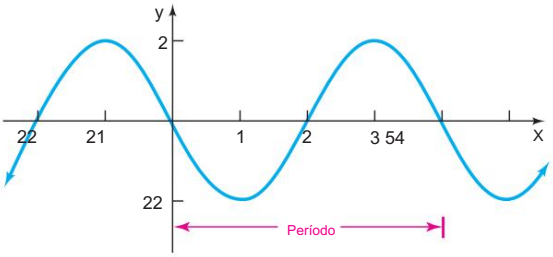


Figura 60

Solución

La gráfica es sinusoidal, con amplitud 0 A0 = 2. El período es 4, por lo que $\frac{2p}{v} = 4$,

o v = $\frac{pag}{}$. Dado que la gráfica pasa por el origen pero decrece cerca del origen, 2

la gráfica es la de una función seno reflejada respecto del eje x. Esto requiere que A = - 2.
La función seno cuya gráfica se muestra en la Figura 60 es

$$y = A \sin 1vx2 = -2 \sin a p \quad \overline{2xb}\ _$$

NOTA La ecuación también podría verse como una función coseno con un desplazamiento horizontal, pero es más fácil verla como una función seno.

Ahora resuelve los problemas 5 7 y 6 1

6.4 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Usa transformaciones para representar gráficamente y = 3x2 . (págs. 134-143)

2. Usa transformaciones para representar gráficamente y = $\overline{22x}$. (págs. 134-143)

Machine Translated by Google

Conceptos y vocabulario

3. El valor máximo de y = sen x, 0… x … 2p, es _____ y ocurre en x = _____.

4. Si la función y = A sin1vx2, A 7 0, tiene amplitud 3 y período 2, entonces A = _____ y v = 5. La función y = - 3 cos16x2 tiene amplitud _____ y período _____.

6. Verdadero o Falso Las gráficas de y = sen x e y = cos x son idénticas excepto por un desplazamiento horizontal.

7. Verdadero o Falso Para y = 2 sin1px2, la amplitud es 2 y la el periodo es $\frac{\text{pag}}{2}$.

8. Verdadero o Falso La gráfica de la función seno tiene infinitas intersecciones en el eje x.

9. Opción múltiple Un período de la gráfica de y = sen 1vx2 o y = cos 1vx2 se llama a(n).
(a) amplitud (b) cambio de fase
(c) transformación (d) ciclo

10. Opción múltiple Para graficar y = 3 sen (- 2x) usando puntos clave, se podría graficar la forma equivalente.
(a) y = - 3 sen 1 - 2x2 (b) y = - 2 sen 13x2
(c) y = 3 sen 12x2 (d) y = - 3 sen 12x2

Desarrollo de habilidades

11. f1x2 = sen x
(a) ¿ Cuál es la intersección y de la gráfica de f?
(b) ¿Para qué números x, - p … x … p, la gráfica de f es creciente?
(c) ¿ Cuál es el máximo absoluto de f?
(d) ¿Para qué números x, 0… x … 2p, f1x2 = 0?
(e) ¿Para qué números x, - 2p … x … 2p, f1x2 = 1? ¿ Dónde f1x2 = - 1?
(f) ¿Para qué números x, - 2p … x … 2p, f1x2 = - $\frac{1}{2}$?
(g) ¿ Cuáles son las intersecciones x de f?

12. g1x2 = porque x
(a) ¿ Cuál es la intersección y de la gráfica de g?
(b) ¿Para qué números x, - p … x … p, es la gráfica de g ? ¿decreciente?
(c) ¿ Cuál es el mínimo absoluto de g?
(d) ¿Para qué números x, 0… x … 2p, g1x2 = 0?
(e) ¿Para qué números x, - 2p… x … 2p, g1x2 = 1? ¿ Dónde g1x2 = - 1?
(f) ¿Para qué números x, - 2p … x … 2p, g1x2 = ? $\frac{23}{2}$
(g) ¿ Cuáles son las intersecciones x de g?

En los problemas 13 a 22, determine la amplitud y el período de cada función sin representar gráficamente.

13. y = 3 porque x

14. y = 5 sen x

15. y = - sina 1 $\frac{}{2}$ xb

16. y = - 3 cos14x2

17. y = 6 sen1px2

18. y = - 3 cos13x2

19. y = $\frac{4}{3}$ sina $\frac{}{2}$ xb

20. y = - $\frac{1}{7}$ cosa $\frac{}{7}$xb _

21. y = $\frac{9}{5}$ cosas - $\frac{3p}{2}$xb _

22. y = $\frac{10}{9}$ siná - $\frac{2p}{5}$xb _

En los problemas 23 a 32, relacione la función dada con una de las gráficas (A) a (J).

23. y = 2 cosa p $\frac{}{2}$ xb

24. y = 2 sina p $\frac{}{2}$ xb

25. y = 3 cos12x2

26. y = 2 cosa 1 $\frac{}{2}$ xb

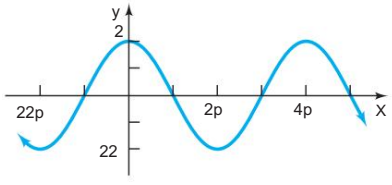
27. y = 2 sen 1 $\frac{}{2}$ xb

28. y = - 3 sen12x2

29. y = - 2 cosa p $\frac{}{2}$xb _

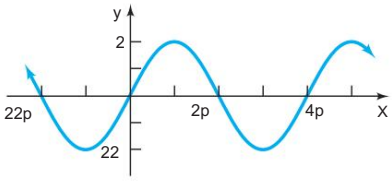
30. y = - 2 cosa 1 $\frac{}{2}$xb _

31. y = - 2 sina 1 $\frac{}{2}$xb _

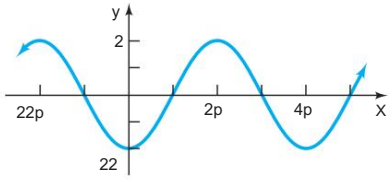


(A)

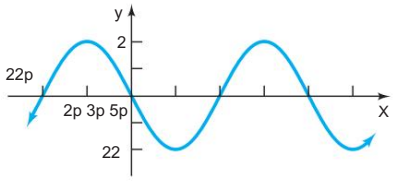
32. y = 3 sen12x2



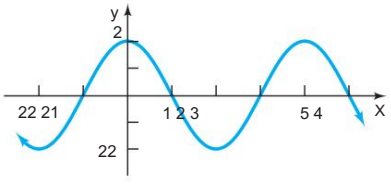
(B)



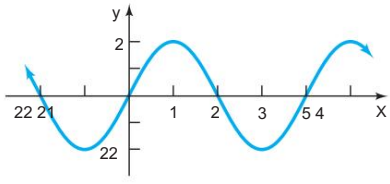
(C)



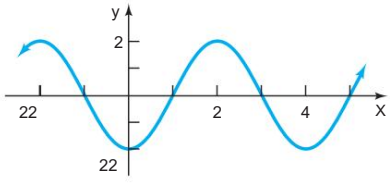
(D)



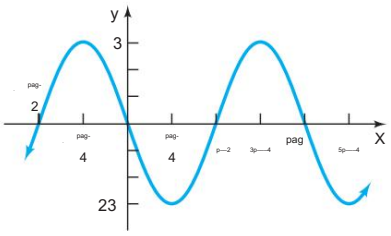
(MI)



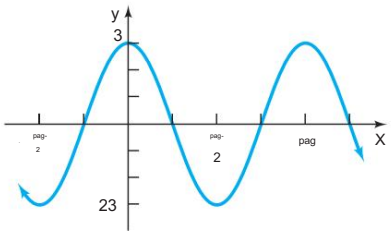
(F)



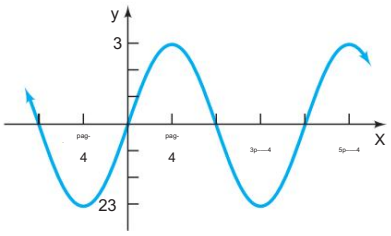
Machine Translated by Google



(H)



(I)



(j)

En los problemas 33 a 56, grafica cada función usando transformaciones o el método de puntos clave. Asegúrese de etiquetar los puntos clave y mostrar al menos dos ciclos. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de cada función.

33. y = 3 senx

34. y = 4 porque x

35. y = - 4 sen x

36. y = - 3 porque x

37. y = sen13x2

38. y = cos14x2

39. y = sen1 - 2x2

40. y = cos1 - 2x2

41. y = 2 cosa 1 4xb _

42. y = 2 sina 1 2xb _

43. y = - 1/2 cos12x2

44. y = - 4 sina 1 8xb _

45. y = 3 porque x + 2

46. y = 2 sen x + 3

47. y = 4 sina p 2xb - 2

48. y = 5 cos1px2 - 3

49. y = - 6 sina p 3 xb + 4 5

50. y = - 3 cosa p 4 xb + 2 3

51. y = 2 - 4 cos13x2

52. y = 5 - 3 sen12x2

53. y = 9/cosa - 3p/2xb _

54. y = 5/sina - 2p/3xb _

55. y = - 1/2 senas8xb + 3/2

56. y = - 3/2 cosas4xb + 1/2

En los problemas 57 a 60, escriba la ecuación de una función seno que tenga las características dadas.

57. Amplitud: 3
Periodo: p

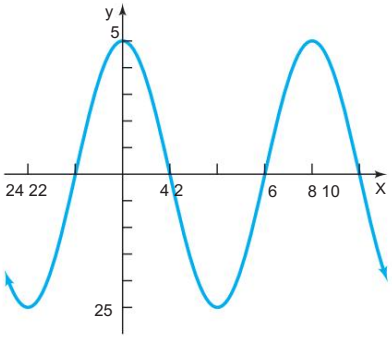
58. Amplitud: 2
Periodo: 4p

59. Amplitud: 4
Periodo 1

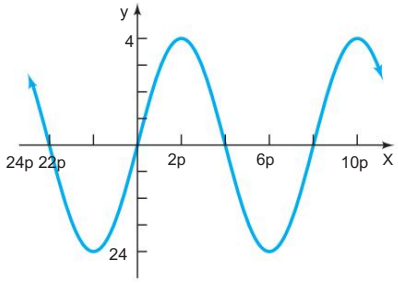
60. Amplitud: 3
Periodo: 2

En los problemas 61 a 74, encuentre una ecuación para cada gráfica.

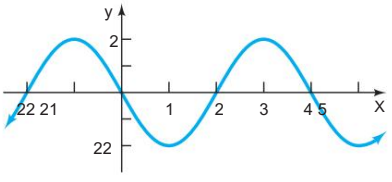
61.



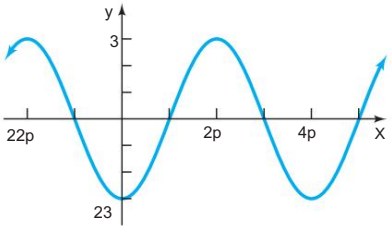
62.

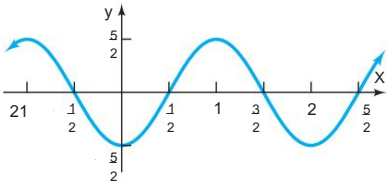


63.

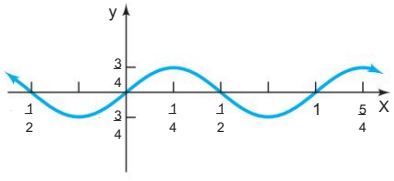


64.



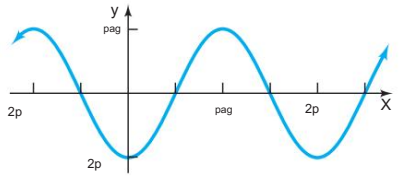


66.

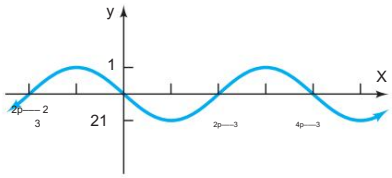


Machine Translated by Google

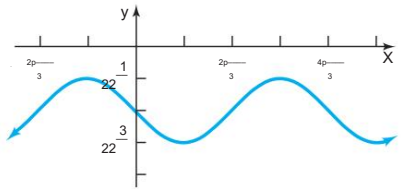
67.



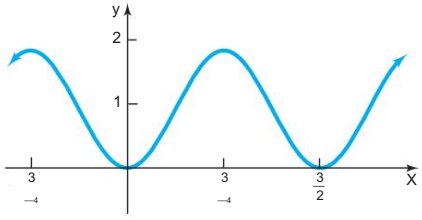
68.



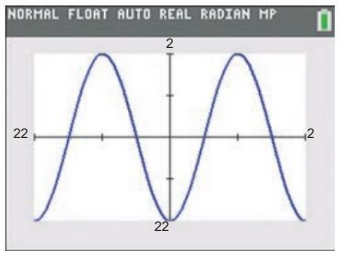
69.



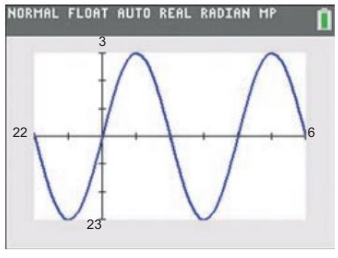
70.



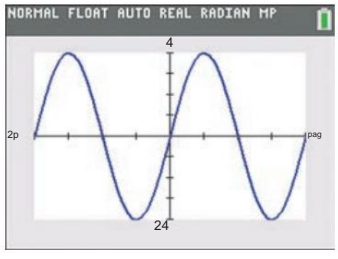
71.



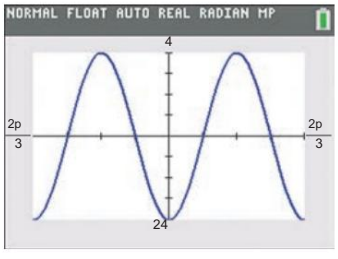
72.



73.



74.



Práctica mixta En los problemas 75 a 78, encuentre la tasa de cambio promedio de f de 0 a 2 $\frac{\text{pag}}{}$.

75. f1x2 = porque x

76. f1x2 = sen x

77. f1x2 = cos12x2

78. f1x2 = pecado $2^{\frac{X}{}}$

Práctica mixta En los problemas 79 a 82, encuentre 1f g2 1x2 y 1g f2 1x2 y represente gráficamente cada una de estas funciones.

79. f1x2 = porque x

g1x2 = $\frac{1}{2}$x

80. f1x2 = sen x

g1x2 = 4x

81. f1x2 = -3x

g1x2 = sen x

82. f1x2 = - 2x

g1x2 = porque x

Aplicaciones y extensiones

83. Grafica f1x2 = c senx si 0 … x 0 porque x si $\frac{5p}{4}$ … x … 2p

si 0... x ...p

84. Gráfica g1x2 = b 2 semx porque x + 1 si p 6 x … 2p

85. Grafica y = 0sen x 0 , - 2p… x … 2p.

86. Grafica y = 0 cos x 0 , - 2p… x … 2p.

87. Circuitos de corriente alterna (CA) La corriente I, en amperios, que fluye a través de un circuito de CA (corriente alterna) en el tiempo t, en segundos, es

I1t2 = 120 sen130pt2 t Ú 0

¿Cuál es el período? ¿Cuál es la amplitud? Grafique esta función en dos períodos.

88. Circuitos de corriente alterna (CA) La corriente I, en amperios, que fluye a través de un circuito de CA (corriente alterna) en el tiempo t, en segundos, es

I1t2 = 220 sen160pt2 t Ú 0

¿Cuál es el período? ¿Cuál es la amplitud? Grafique esta función en dos períodos.

Machine Translated by Google

89. Generadores de corriente alterna (CA) El voltaje V producida por un generador de CA es sinusoidal. En función del tiempo, el voltaje V es

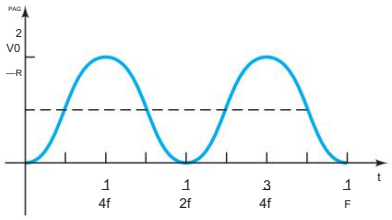
$$V(t) = V_0 \operatorname{sen}(2\pi f t)$$

donde f es la frecuencia, el número de oscilaciones completas (ciclos) por segundo. [En Estados Unidos y Canadá, f es 60 hercios (Hz).] La potencia P entregada a una resistencia R en cualquier momento t se define como

$$P(t) = \frac{[3V(t)]^2}{R}$$

(a) Demuestre que $P(t) = \frac{V_0^2}{R}\operatorname{sen}^2(2\pi f t)$.

(b) La gráfica de P se muestra en la figura. Exprese P como una función sinusoidal.



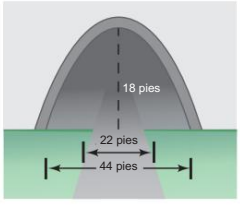
Energía en un generador de CA.

(c) Deducir que

$$\operatorname{sen}^2(2\pi f t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(4\pi f t)]$$

90. Despacho del túnel Un carril único

La carretera pasa por un túnel en forma de medio ciclo de curva sinusoidal. La abertura tiene 44 pies de ancho al nivel de la carretera y 18 pies de alto en su punto mas alto.



(a) Encuentre una ecuación para la curva sinusoidal que se ajusta a la abertura. Coloque el origen en el extremo izquierdo de la abertura.

(b) Si el camino tiene 22 pies de ancho con arcenes de 11 pies a cada lado, ¿cuál es la altura del túnel al borde del camino?

91. Modelado de la presión arterial Varios artículos de investigación utilizan un gráfico sinusoidal para modelar la presión arterial. Supongamos que la presión arterial de un individuo está modelada por la función

$$P(t) = 20 \operatorname{sen}(7\pi t) + 100$$

donde el valor máximo de P es la presión sistólica, que es la presión cuando el corazón se contrae (late), el valor mínimo es la presión diastólica y t es el tiempo, en segundos. La frecuencia cardíaca es el número de latidos por minuto.

(a) ¿Cuál es la presión sistólica del individuo?

(b) ¿Cuál es la presión diastólica del individuo?

(c) ¿Cuál es la frecuencia cardíaca del individuo?

92. Modelado de mareas La siguiente función modela la altura del agua H, en pies, en una estación de monitoreo en Charleston, Sur. Carolina.

$$H(t) = 2{,}91 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{149}t + 1{,}360\right) + 2{,}97$$

donde t es el número de horas después de la medianoche.

(a) ¿Cuál es la altura del agua durante la marea alta?

(b) ¿Cuál es la altura del agua durante la marea baja?

(c) ¿Cuál es el tiempo entre la marea alta y la baja?

93. Modelado de la temperatura mensual promedio La siguiente función modela la temperatura mensual promedio T, en °F, para Indianápolis, Indiana.

$$T(x) = 23{,}65 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{3}\right) + 51{,}75$$

donde x es el mes (enero = 1, febrero = 2, etc.).

(a) ¿Cuál es la temperatura mensual promedio más alta?

(b) ¿Cuál es la temperatura mensual promedio más baja?

(c) ¿Cuál es el tiempo entre las temperaturas promedio más altas y más bajas?

94. Modelado de horas de luz diurna La siguiente función modela el número de horas de luz diurna en Miami, Florida.

$$D(x) = 1{,}615 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}x - 1{,}39\right) + 12{,}135$$

donde x es el día del año.

(a) ¿Cuántas horas de luz hay en el día más largo?

(b) ¿Cuántas horas de luz hay en el día más corto?

(c) ¿Cuál es el tiempo entre el día más largo y el más corto?

95. Noria La función

$$h(t) = -100 \cos\left(\frac{\pi}{50}t\right) + 105$$

representa la altura h, en pies, de un asiento en una noria en función del tiempo t, donde t se mide en segundos.

(a) ¿A qué altura llega un asiento en la noria?

(b) ¿Qué tan cerca del suelo se encuentra un asiento?

(c) Si un viaje dura 5 minutos, ¿cuántas veces dará la vuelta un pasajero?

(d) ¿Cuál es la rapidez lineal de la noria en millas por hora? Redondear a un decimal.

96. Patrón de retención La función

$$d(t) = 50 \cos\left(\frac{\pi}{39}t\right) + 60$$

representa la distancia d, en millas, desde el aeropuerto después de t minutos de que se le pide a un avión que vuele en un patrón de espera circular.

(a) ¿Cuál es la distancia promedio del avión desde el aeropuerto durante un ciclo?

(b) ¿Cuánto tiempo le toma al avión completar un ciclo en el patrón de espera?

(c) ¿Cuál es la velocidad del avión, en millas por hora, mientras está en patrón de espera?

(d) Si el avión viaja 1,8 millas por galón de combustible, ¿cuánto combustible se utiliza en un ciclo del patrón de espera?

Machine Translated by Google

97. Biorritmos En la teoría de los biorritmos, una función sinusoidal de la forma

$$P(t) = 50 \sin(\pi t/2) + 50$$

se utiliza para medir el porcentaje P del potencial de una persona en el momento t, donde t se mide en días y t = 0 es el día en que nace la persona. Comúnmente se miden tres características:

Potencial físico: período de 23 días.

Potencial emocional: periodo de 28 días

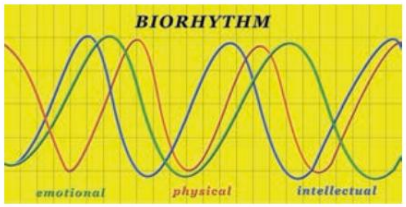
Potencial intelectual: plazo de 33 días

(a) Encuentre v para cada característica.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, grafique las tres funciones en la misma pantalla.

(c) ¿Hay un momento t en el que las tres características tienen un potencial del 100%? ¿Cuando es?

(d) Suponga que hoy tiene 20 años (t = 7305 días). Describe tu potencial físico, emocional e intelectual para los próximos 30 días.



98. Problema de desafío Si $y = A \sin(Bx - C) + D$, $A \neq 0$, ¿Para qué valores de D la gráfica quedará completamente debajo del eje x?

99. Problema de desafío Si $A \neq 0$, encuentre las intersecciones de la grafico de

$$y = A \cos(3(Bx - C)) + A$$

Explicar conceptos: discusión y escritura

100. Explica cómo escalarías los ejes x y y antes de graficar $y = 3 \cos(\pi x/2)$.

101. Explique el término amplitud en relación con la gráfica de una función sinusoidal.

102. Explique el término período en relación con la gráfica de un función sinusoidal.

103. Explique cómo se utilizan la amplitud y el período de una gráfica sinusoidal para establecer la escala en cada eje de coordenadas.

104. Encuentre una aplicación en su campo principal que conduzca a un gráfico sinusoidal. Escribe un resumen de tus hallazgos.

Conserve su conocimiento

Los problemas 105 a 114 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

105. Si $f(x) = x^2 - 5x + 1$, encuentre $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

106. Encuentre el vértice de la gráfica de $g(x) = -3x^2 + 12x - 7$.

107. Encuentra las intersecciones de la gráfica de $h(x) = 3|x + 2| - 1$.

108. Resuelve: $3x - 2|5x + 16| = -|3x + 4| + x^2$

109. Determine el tiempo necesario para que una inversión de $1500 se duplique si gana 4% de interés compuesto trimestralmente. Redondea tu respuesta con un decimal.

110. Resuelve $e^{3x} = 7$.

111. Encuentre la asíntota oblicua de $g(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

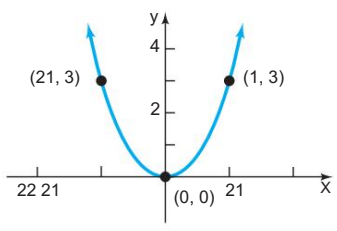
112. Determine el intervalo en el que $f(x) = -6x^2 - 19x + 7$ es decreciente.

113. Escribe el conjunto $\{x \mid x \ldots -2 \text{ o } x \geq \frac{4}{3}\}$ usando notación de intervalo.

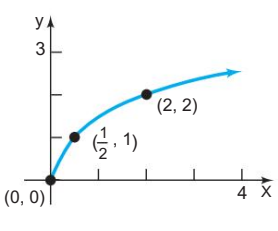
114. Resuelve: $\log(x - 3) - \log(x + 3) = \log(x - 4)$

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. Estiramiento vertical por un factor de 3



2. Compresión horizontal por un factor de $\frac{1}{2}$



Machine Translated by Google

6.5 Gráficas de las funciones tangente, cotangente, cosecante y secante

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Asíntotas verticales (Sección 4.3, págs. 236–239)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 463.

OBJETIVOS 1 Graficar la función tangente y = tan x y la función cotangente y = cot x (p. 458)

2 Funciones gráficas de la forma y = A tan(vx) + B y y = A cot(vx) + B (p. 460)

3 Grafique la función cosecante y = csc x y la función secante y = sec x (p. 461)

4 Funciones gráficas de la forma y = A csc (vx) + B y y = A sec (vx) + B (p. 462)

1 Grafique la función tangente y · tan x y la función cotangente y · cot x

Debido a que la función tangente tiene un período p, solo necesitamos determinar la gráfica en algún intervalo de longitud p. El resto del gráfico consta de repeticiones de ese 3p.

grafico. Porque la función tangente no está definida en . . . , - $\frac{\text{pag}}{2}$, - $\frac{\text{pag}}{2}$, $\frac{\text{pag}}{2}$, $\frac{3p}{2}$, ,

nos concentramos en el intervalo a - $\frac{\text{pag}}{2}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ b, de longitud p, y construya la Tabla 8, que

enumera algunos puntos en la gráfica de y = tan x, - 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 6x6 _ _ $\frac{\text{pag}}{}$. Trazamos los puntos en 2

la mesa y conéctelos con una curva suave. Consulte la Figura 61 para ver una gráfica parcial de y = tan x,

donde - 3 $\frac{\text{pag}}{}$ … X … $\frac{\text{pag}}{3}$.

Tabla 8 xy · tan x

		(x,y)
- $\frac{\text{pag}}{3}$	- 23 ≈ -1,73	a-p 3 , - 23b
- $\frac{\text{pag}}{4}$	-1	a - $\frac{\text{pag}}{4}$, -1b
- $\frac{\text{pag}}{6}$	- $\frac{23}{3}$ ≈ -0,58	a-p 6 , - $\frac{23}{3 \text{ segundo}}$
0	0	(0, 0)
$\frac{\text{pag}}{6}$	$\frac{23}{3}$ ≈ 0,58	ap 6 , $\frac{23}{3 \text{ segundo}}$
$\frac{\text{pag}}{4}$	1	ap 4 , 1b
$\frac{\text{pag}}{3}$	23 ≈ 1,73	ap 3 , 23b

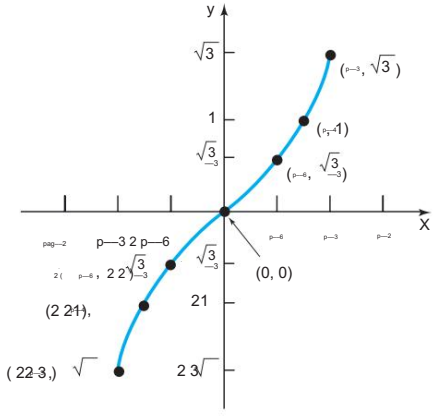


Figura 61 y = tan x, - 3 $\frac{\text{pag}}{}$ … X … $\frac{\text{pag}}{3}$

Para completar un período de la gráfica de y = tan x, investiga el comportamiento de . Sin embargo, la función cuando x se aproxima, $\frac{\text{pag}}{}$ y 2 $\frac{\text{pag}}{}$ tenga cuidado, porque y = tan x no es 2 definida en estos números. Para determinar este comportamiento, utilice la identidad

$$\text{bronceado } x = \frac{\text{pecado } x}{\text{porque } x}$$

Machine Translated by Google

Consulte la Tabla 9. Si x está cerca de $\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$ pero sigue siendo menor que $2\ \frac{\pi}{2}$, entonces el seno x es cercano a 1, y cos x es positivo y cercano a 0. (Para ver esto, consulte las gráficas de la función seno y la función coseno). $\frac{\text{pecado x}}{\text{porque x}}$ es positivo y grande, entonces, como x S $\frac{\pi}{2}$ desde la izquierda, entonces tan x S q. En otras palabras, la línea vertical x = $\frac{\pi}{2}$ es un asíntota vertical de la gráfica de y = tan x.

Tabla 9

X	pecado x	porque x	y · tan x
$\frac{\pi}{3} \approx 1,05$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} \approx 1,73$
1.5	0.9975	0.0707	14.1
1,57	0.9999	7,96 * 10-4	1255,8
1.5707	0.9999	9,6* 10-5	10.381
$\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$	1	0	Indefinido

Si x está cerca de - 2 $\frac{\pi}{2}$ pero sigue siendo mayor que - 2 $\frac{\pi}{2}$, entonces sen x está cerca de - 1, cos x es positivo y cercano a 0, y la relación $\frac{\text{pecado x}}{\text{porque x}}$ es negativo y grande. Es decir, como x S - 2 $\frac{\pi}{2}$ desde la derecha, entonces tan x S - q. En otras palabras, la línea vertical x = - 2 $\frac{\pi}{2}$ también es un asíntota vertical de la gráfica de y = tan x.

Con estas observaciones se puede completar un período del gráfico. Obtener el Complete la gráfica de y = tan x repitiendo este período, como se muestra en la Figura 62.

Verifique: Grafique Y1 = tan x y compare el resultado con la Figura 62.
Utilice TRACE para ver qué sucede cuando x se acerca a $\frac{\pi}{2}$ pero permanece menos de 2 $\frac{\pi}{2}$.

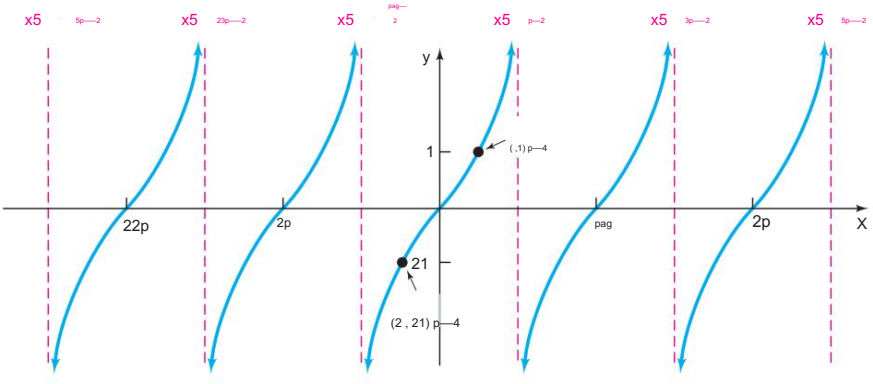


Figura 62 y = tan x, - q 6 x 6 q, x no es igual a múltiplos impares de - q 6 y 6 q $\frac{\pi}{2}$,

La gráfica de y = tan x en la Figura 62 ilustra las siguientes propiedades.

Propiedades de la función tangente

- El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
- El rango es el conjunto de todos los números reales.
- La función tangente es una función impar, como lo indica la simetría de la gráfica con respecto al origen.
- La función tangente es periódica, con período p.
- Las intersecciones en x son c , - 2p, -p, 0, p, 2p, 3p, c ; la intersección con el eje y es 0.
- Las asíntotas verticales ocurren en x = c , $-\frac{3p}{2}$, $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3p}{2}$, c

Ahora resuelve los problemas 7 y 1 5.

Machine Translated by Google

La gráfica de la función cotangente y · cot x

La gráfica de y = cot x se puede obtener de la misma manera que la gráfica de y = tan x.
El período de y = cot x es p. Como la función cotangente no está definida para múltiplos enteros de p, concéntrese en el intervalo 10, p2. La tabla 10 enumera algunos puntos de la gráfica de y = cot x, 0 6 x 6 p.
Para determinar el comportamiento de y = cot x cerca de 0 y p, use la identidad cot x = $\frac{\text{porque x}}{\text{sen x}}$. Cuando x se acerca a 0 pero sigue siendo mayor que 0, el valor de cos x es cercano a 1 y el valor de sen x es positivo y cercano a 0. La proporción $\frac{\text{porque x}}{\text{pecado x}}$ es positivo y grande; entonces si x S 0 desde la derecha, entonces cot x S q.

De manera similar, cuando x se aproxima a p pero permanece menor que p, el valor de cos x se aproxima a -1, y el valor de sen x es positivo y cercano a 0. La relación sen x y grande; $\frac{\text{porque x}}{\text{entonces}}$ = cuna x es negativa como x S p desde la izquierda, entonces cot x S - q. La Figura 63 muestra el gráfico.

Tabla 10

xy · cuna x	(x,y)
$\frac{\text{pag}}{6}$	23	ap$\frac{}{6}$, 23b
$\frac{\text{pag}}{4}$	1	ap$\frac{}{4}$, 1b
$\frac{\text{pag}}{3}$	$\frac{23}{3}$	ap$\frac{}{3}$, $\frac{23}{3}$ segundo
$\frac{\text{pag}}{2}$	0	ap$\frac{}{2}$, 0b
$\frac{2p}{3}$	$\frac{23}{3}$	un $\frac{2p}{3}$, $\frac{23}{3}$ segundo
$\frac{3p}{4}$	-1	un $\frac{3p}{4}$, -1b
$\frac{5p}{6}$	- 23 a 5p	$\frac{}{6}$, - 23b

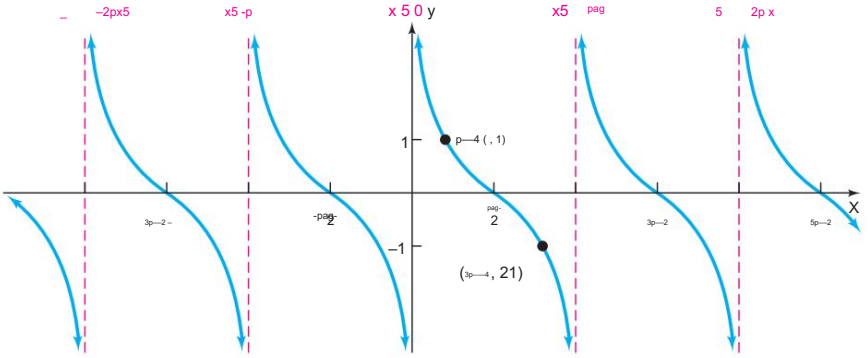


Figura 63 y = cot x, - q 6 x 6 q, x no es igual a múltiplos enteros de p, - q 6 y 6 q

2 Graficar funciones de la forma y · A tan1Vx2 · B y y · A cot1Vx2 · B

Para funciones tangentes, no existe el concepto de amplitud ya que el rango de la función tangente es 1 - q, q 2. La función de A en y = A tan 1vx2 + B es proporcionar la magnitud del tramo vertical. El período de y = tan x es p, por lo que el período de y = A tan 1vx2 + B es causado por la compresión horizontal de la gráfica por v, 1 un factor de $\frac{\text{pag}}{\text{V}}$. Finalmente, la presencia de B indica un desplazamiento vertical.

EJEMPLO 1 Graficar una función de la forma y · A tan1Vx2 · B

Grafica y = 2 tan x - 1. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de la función y = 2 tan x - 1.

Solución La Figura 64 muestra los pasos usando transformaciones.

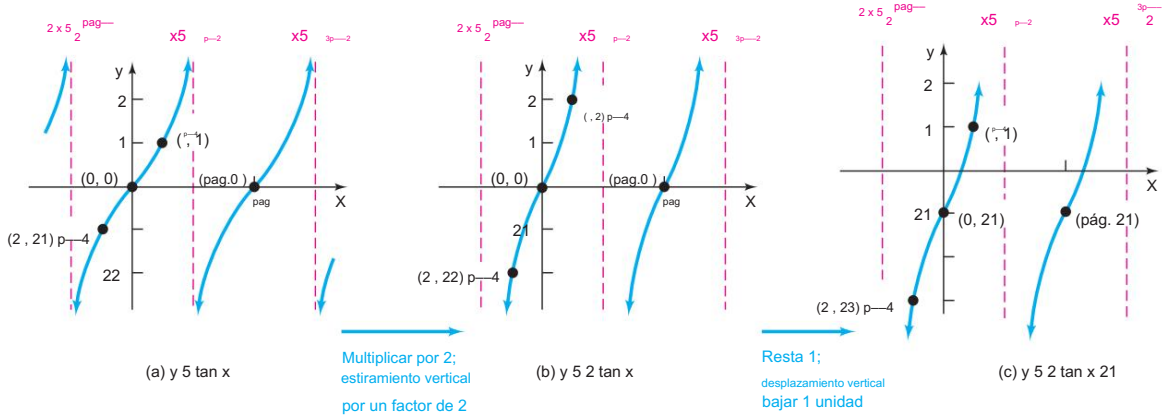


Figura 64

(a) y 5 tan x

Multiplicar por 2; estiramiento vertical por un factor de 2

(b) y 5 2 tan x

Resta 1; desplazamiento vertical bajar 1 unidad

(c) y 5 2 tan x 21

Machine Translated by Google

El dominio de y = 2 tan x - 1 es e x ` x · $\frac{kp}{2}$, k es un número entero impar f, y el rango es el conjunto de todos los números reales, o 1 - q, q 2.

Ahora resuelve el problema 2 1

La gráfica de y = A cot1vx2 + B tiene características similares a las de la función tangente. La función cotangente y = A cot1vx2 + B tiene periodo La función v. cotangente no tiene amplitud. La función $\frac{pag}{}$ de A es proporcionar la magnitud del tramo vertical; la presencia de B indica un desplazamiento vertical.

EJEMPLO 2 Graficar una función de la forma y · A cot 1Vx2 · B

Grafique y = 3 cot12x2. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de y = 3 cot12x2.

Solución La Figura 65 muestra los pasos usando transformaciones.

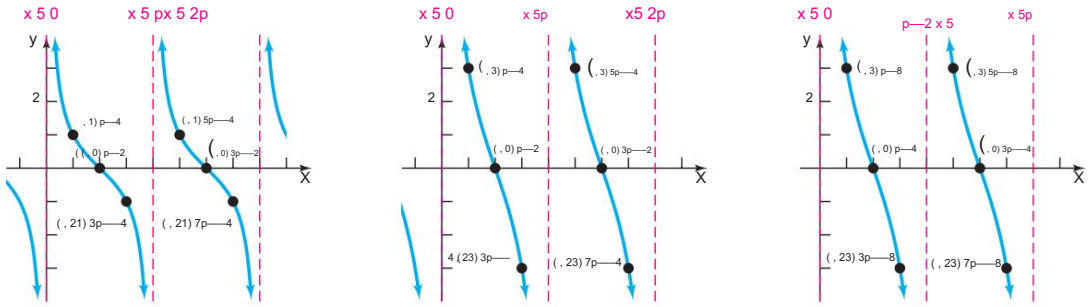


Figura 65 (a) y 5 cuna x → Multiplicar por 3; Estiramiento vertical por un factor de 3 (b) y 5 3 cuna x → Reemplace x por 2x; Compresión horizontal por un factor de $\frac{1}{2}$ (c) y 5 3 cuna (2x)

El dominio de y = 3 cot12x2 es e x ` x · $\frac{kp}{2}$, k es un número entero f, y el rango es el conjunto de todos los números reales, o 1 - q, q 2.

Observe en la Figura 65(c) que el período de y = 3 cot12x2 es $\frac{pag}{2}$ debido a la compresión del período original p por un factor de $\frac{1}{}$. Observe que las asíntotas 2 son x = - 2 $\frac{pag}{}$, x = 0, x = $\frac{pag}{2}$, x = pag, x = $\frac{3p}{2}$, y así sucesivamente, también debido a la compresión.

Ahora resuelve el problema 2 3

3 Grafique la función cosecante y · csc x y la secante Función y · seg x

Las funciones cosecante y secante, a veces denominadas funciones recíprocas, se grafican haciendo uso de las identidades recíprocas.

$$\text{cscx} = _ \frac{1}{\text{pecado x}} \quad \text{y segundo x} = \frac{1}{\text{porque x}}$$

Machine Translated by Google

Por ejemplo, el valor de la función cosecante y = csc x en un número dado x es igual al recíproco del valor correspondiente de la función seno, siempre que el valor de la función seno no sea 0. Si el valor de sen x es 0, entonces x es un múltiplo entero de p. En esos números, la función cosecante no está definida. De hecho, la gráfica de la función cosecante tiene una asíntota vertical en cada múltiplo entero de p. La Figura 66 muestra el gráfico.

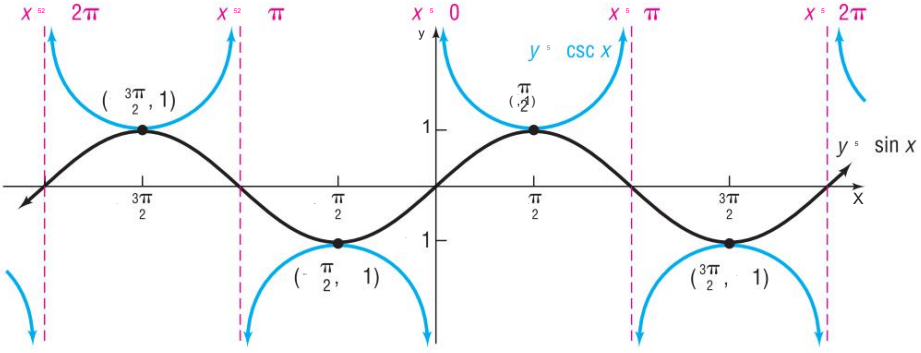


Figura 66 y = csc x, - q 6 x 6 q, x no es igual a múltiplos enteros de p, 0 y 0 Ú 1

Usando la idea de recíprocos, la gráfica de y = sec x se obtiene de manera similar. Ver Figura 67.

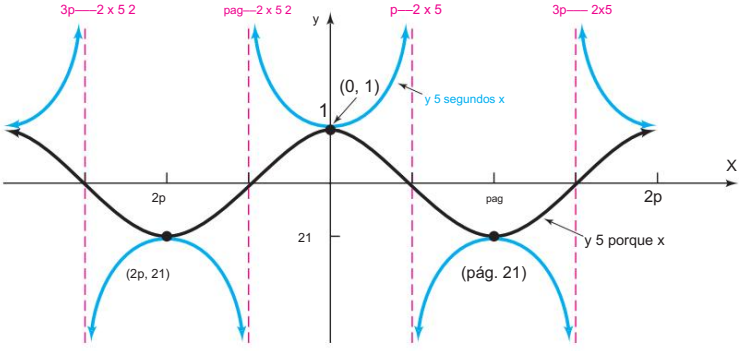


Figura 67 y = sec x, - q 6 x 6 q, x no es igual a múltiplos impares de $\frac{pag}{2}$, 0 y 0 Ú 1

4 Funciones gráficas de la forma y · A csc1Vx2 · B y y · A sec1Vx2 · B

El papel de A en estas funciones es establecer el rango. El rango de y = csc x es 5y· y … - 1 o y Ú 16 ; el rango de y = A csc x es 5y ·y … - ·A· o y Ú ·A·6

debido al estiramiento vertical del gráfico por un factor de ·A·. Al igual que con el seno 2p

y funciones coseno, el período de y = csc1vx2 e y = sec1vx2 se convierte en $\frac{v}{1}$

debido a la compresión horizontal del gráfico por un factor de La presencia v. de B indica que se requiere un desplazamiento vertical.

EJEMPLO 3 Graficar una función de la forma y · A csc1Vx2 · B

Grafica y = 2 csc x - 1. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de y = 2 csc x - 1.

Machine Translated by Google

Solución Usamos transformaciones. La Figura 68 muestra los pasos requeridos.

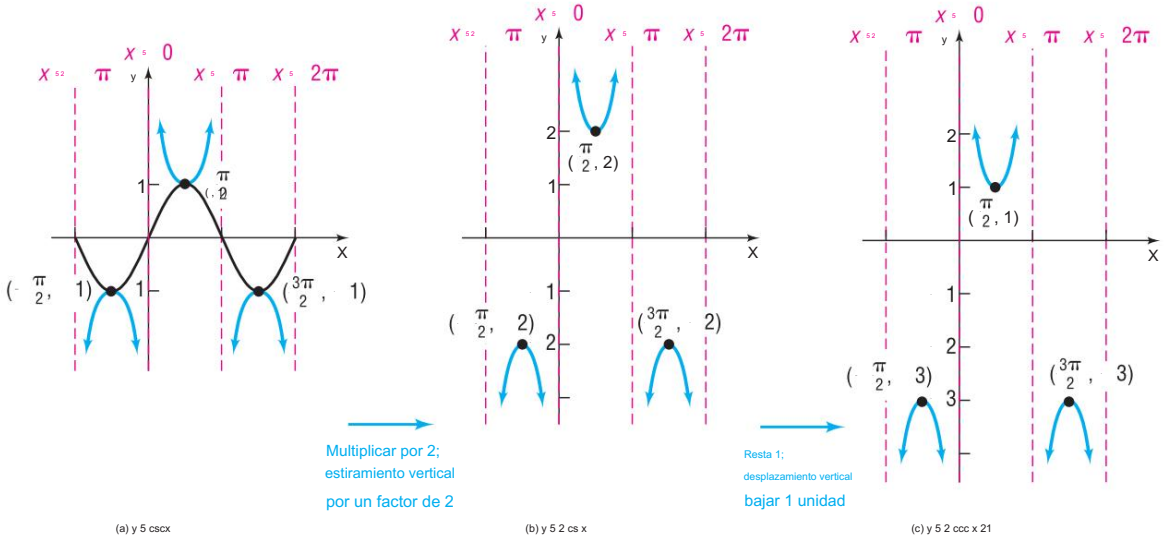


Figura 68 (a) y 5 cscx (b) y 5 2 cs x (c) y 5 2 ccc x 21

El dominio de y = 2 csc x - 1 es 5x· x · kp, k un número entero6. El rango es 5y· y … - 3 o y Ú 16, o usando notación de intervalo, 1 - q, - 34 31, q 2.

Ahora trabaja el problema 2 9

6.5 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La gráfica de $y = \frac{3x - 6}{x - 4}$ tiene una asíntota vertical. Qué ¿verdad? (págs. 236-239)

2. Verdadero o Falso Si x = 3 es una asíntota vertical de la gráfica de una función racional R, entonces como x S 3, · R1x2· S q. (págs. 236-239)

Conceptos y vocabulario

3. La gráfica de y = tan x es simétrica con respecto a la _____ y tiene asíntotas verticales en _____.

4. La gráfica de y = sec x es simétrica con respecto a la _____ y tiene asíntotas verticales en _____.

5. Opción múltiple Es más fácil graficar y = sec x primero dibujando la gráfica de _____.
(a) y = sen x (b) y = cos x (c) y = tan x (d) y = csc x

6. Verdadero o Falso Las gráficas de y = tan x, y = cot x, y = sec x e y = csc x tienen cada una infinitas asíntotas verticales.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 16, si es necesario, consulte las gráficas de las funciones para responder cada pregunta.

7. ¿Cuál es la intersección y de y = tanx?

8. ¿Cuál es la intersección y de y = cot x?

9. ¿Cuál es la intersección con el eje y de y = cscx?

10. ¿Cuál es la intersección y de y = secx?

11. ¿ Para qué números x, - 2p… x … 2p, csc x = 1?
¿ Para qué números x csc x = - 1?

12. ¿ Para qué números x, - 2p… x … 2p, sec x = 1?
¿ Para qué números x sec x = - 1?

13. ¿ Para qué números x, - 2p … x … 2p, la gráfica de y = csc x tiene asíntotas verticales?

14. ¿ Para qué números x, - 2p … x … 2p, la gráfica de y = sec x tiene asíntotas verticales?

15. ¿ Para qué números x, - 2p … x … 2p, la gráfica de y = tan x tiene asíntotas verticales?

16. ¿ Para qué números x, - 2p … x … 2p, la gráfica de y = cot x tiene asíntotas verticales?

Machine Translated by Google

En los problemas 17 a 40, grafica cada función. Asegúrese de etiquetar los puntos clave y mostrar al menos dos ciclos. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de cada función.

17. y = - 2 tan x

18. y = 3 tan x

19. y = - 3 cuna x

20. y = 4 cuna x

21. y = tana p 2 xb

22. y = tana 1 2 xb

23. y = cota 1 4 xb

24. y = cota p 4 xb

25. y = — csc x 2

26. y = 2 segundos x

27. y = - 4 segundos x

28. y = - 3 csc x

29. y = 4 seca 1 2 xb

30. y = $\frac{1}{2}$ csc12x2

31. y = - 3 seca p 2 xb

32. y = - 2 csc1px2

33. y = 2 cuna x - 1

34. y = tana 1 4 xb + 1

35. y = csca 3p 2xb 2

36. y = seca 2p 3 xb + 2

37. y = 3 cota 1 2 xb - 2

38. y = tana 1 4xb - 2

39. y = 3 seca 1 4 xb + 1

40. y = 2 csca 1 3 xb - 1

Práctica mixta En los problemas 41 a 44, encuentre la tasa de cambio promedio de f de 0 a 6 $\frac{\pi}{4}$.

41. f1x2 = segundo x

42. f1x2 = tan x

43. f1x2 = seg12x2

44. f1x2 = tan12x2

Práctica mixta En los problemas 45 a 48, encuentre 1 f g2 1x2 y 1g f 2 1x2 y represente gráficamente cada una de estas funciones.

45. f1x2 = 2 seg x

g1x2 = $\frac{1}{2}$ x

46. f1x2 = tan x g1x2

= 4x

47. f1x2 = $\frac{1}{2}$ x

g1x2 = 2 csc x

48. f1x2 = - 2x g1x2

= cuna x

Práctica mixta En los problemas 49 y 50, grafica cada función.

49. g1x2 = c csc x si 0 6 x 6 p

0 si x = p

cuna x si p 6 x 6 2p

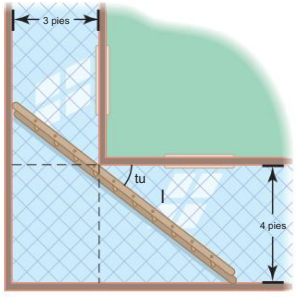
50. f1x2 = 0 si x = $\frac{\pi}{2}$

e tan x si 0 6 x 6 $\frac{\pi}{2}$

segundo x si $\frac{\pi}{2}$ 6x ... p

Aplicaciones y extensiones

51. Llevar una escalera alrededor de una esquina Dos pasillos, uno de 3 pies de ancho y el otro de 4 pies de ancho, se encuentran en ángulo recto. Ver la figura.



(a) Demuestre que la longitud L de la escalera mostrada en función del ángulo u es

L1u2 = 3 seg u + 4 csc u

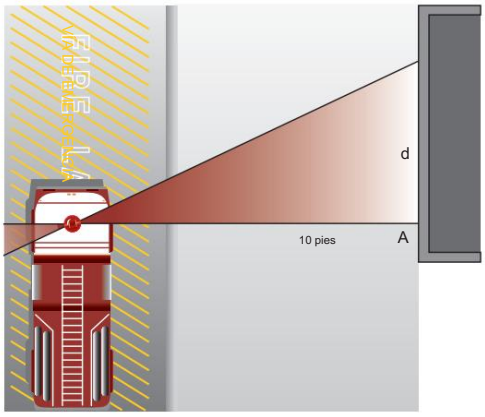
(b) Grafique L = L1u2, 0 6 u 6 $\frac{\pi}{2}$.

(c) ¿ Para qué valor de u es L el menor? (d)

¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que se puede llevar alrededor de la esquina? ¿Por qué este es también el valor mínimo de L?

Machine Translated by Google

52. Una baliza giratoria Supongamos que un camión de bomberos está estacionado frente a un edificio como se muestra en la figura.



La baliza de luz encima del camión de bomberos está ubicada a 10 pies de la pared y tiene una luz a cada lado. Si la luz de la baliza gira 1 revolución cada 2 segundos, entonces un modelo para determinar la distancia d, en pies, a la que se encuentra la baliza de luz desde el punto A en la pared después de t segundos está dado por

d1t2 = · 10 tan1pt2 ·

(a) Grafique d1t2 = · 10 tan1pt2 · para 0 … t … 2.

(b) ¿ Para qué valores de t la función no está definida? Explica qué significa esto en términos del haz de luz en la pared.

(c) Complete la siguiente tabla.

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4		
d1t2 · 10 tan1Pt2							

(d) Calcule 0,1 - $\frac{d10.12 - d102}{0}$, $\frac{d10.22 - d10.12}{0,2 - 0,1}$, etcétera, para cada valor consecutivo de t. estos se llaman primero diferencias.

(e) Interprete las primeras diferencias encontradas en el inciso (d). ¿Qué le sucede a la velocidad del haz de luz como d? aumenta?

53. Gráfico de exploración

y = tan x e y = - cotax + $\frac{pag}{2 \text{ segundo}}$

¿Crees que tan x = - cotax + $\frac{pag}{2b}$?

54. Problema de desafío ¿ Cuáles son el dominio y el rango de f1x2 = log 1tan x2? Encuentra las asíntotas verticales.

55. Problema de desafío ¿Cuáles son el dominio y el rango de f1x2 = ln ·sin x·? Encuentra las asíntotas verticales.

Conserve su conocimiento

Los problemas 56 a 65 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

56. Factores: 125p3 - 8q6

57. Pintar una habitación Hazel puede pintar una habitación en 2 horas menos que su amiga Gwyneth. Trabajando juntos, pueden pintar la habitación en 2,4 horas. ¿Cuánto tiempo le toma a cada mujer pintar la habitación ella sola?

58. Resuelve: 9x-1 = 3x2-5

59. Usa la pendiente y la intersección con el eje y para representar gráficamente la función lineal.

f 1x2 = x $\frac{1}{4}$3

60. Encuentra el dominio de y = log4 a x - 4b .

61. Si f1x2 = $\frac{x + 1}{x - 2}$ y g1x2 = 3x - 7, encuentre 1g f2 132.

62. Si f1x2 = x2 - 3x, encuentre $\frac{f1x2 - f1c2}{x - c}$.

63. Encuentra las intersecciones de la gráfica de la función.

f1x2 = $\frac{2x2 + x - 6}{x + 3}$

64. Completa el cuadrado en x para escribir 2x2 + 2x + 26 en la forma 2u2 + a2 .

65. Encuentra el dominio de f1x2 = 24 5x - 2 - 3.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. x = 4 2. Verdadero

6.6 Desplazamiento de Fase; Ajuste de curva sinusoidal

OBJETIVOS 1 Graficar funciones sinusoidales de la forma y = A sen1vx - f2 + B (pág. 465)

2 Construya modelos sinusoidales a partir de datos (p. 469)

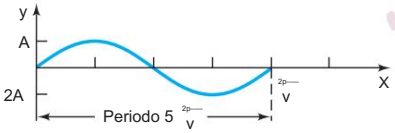


Figura 69 Un ciclo de y = A sen1vx2, A 7 0, v 7 0

1 Graficar funciones sinusoidales de la forma y · A sen1Vx · F2 · B

Hemos visto que la gráfica de y = A sen 1vx2, v 7 0, tiene amplitud 0 A0 y período T = $\frac{2p}{v}$. Se puede dibujar un ciclo cuando x varía de 0 a $\frac{2p}{v}$, o equivalente, ya que vx varía de 0 a 2p. Ver Figura 69.

Machine Translated by Google

Consideremos ahora la gráfica de

$$y = A \text{ sen } 1vx - f2$$

que también puede escribirse como

$$y = A \text{ sincvax - f vb } \overline{d}$$

donde v 7 0 y f (la letra griega phi) son números reales. La gráfica es una curva sinusoidal con amplitud ·A·. Como vx - f varía de 0 a 2p, se traza un período. Este período comienza cuando

$$vx - f = 0 \text{ o } x = \frac{F}{v}$$

y termina cuando

$$vx - f = 2p \text{ o } x = \frac{F}{v} + \frac{2p}{v}$$

Ver Figura 70.

Observe que la gráfica de $y = A \text{ sen } 1vx - f2 = A \text{ sincvax - f vb } \overline{d}$ es la misma que la gráfica de y = A sen1vx2, excepto que se ha desplazado ` f $\overline{v}$ ` unidades (a la derecha si f 7 0 y hacia la izquierda si f 6 0). Este número se llama desplazamiento de fase de la gráfica de y = A sen1vx - f2.

NOTA El principio y el final del
El período también se puede encontrar resolviendo la desigualdad:

$$0 \ldots vx - f \ldots 2p$$
$$f \ldots vx \ldots 2p+f$$
$$\frac{F}{v} \ldots X \ldots \frac{2p}{v} + \frac{F}{v}$$

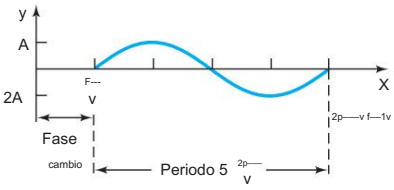


Figura 70 Un ciclo de y =
A sen1vx - f2,
A 7 0, v 7 0, f 7 0

Para las gráficas de y = A sen1vx - f2 o y = A cos1vx - f2, v 7 0,

$$\text{Amplitud} = 0\,A0 \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2p}{v} \qquad \text{Cambio de fase} = \frac{F}{v}$$

El desplazamiento de fase es hacia la izquierda si f 6 0 y hacia la derecha si f 7 0.

EJEMPLO 1 Encontrar la amplitud, el período y el cambio de fase de una sinusoidal Función y gráfica

Encuentre la amplitud, el período y el desplazamiento de fase de y = 3 sen12x - p2 y represente gráficamente la función.

Solución Utilice los mismos cuatro pasos utilizados para graficar funciones sinusoidales de la forma y = A sen 1vx2 o y = A cos 1vx2 dado en la página 450.

Paso 1: Comparar

$$y = 3 \text{ sen12x - p2} = 3 \text{ sen 2ax - } \frac{\text{pag}}{\text{2 dormitorios}}$$

a

$$y = A \text{ sin1vx - f2} = A \text{ sincvax - f vb } \overline{d}$$

tenga en cuenta que A = 3, v = 2 y f = p. La gráfica es una curva sinusoidal con amplitud 0 A0 = 3, período $T = \frac{2p}{v} = \frac{2p}{2} =$ p, y cambio de fase $= \frac{F}{v} = \frac{\text{pag}}{2}$.

Paso 2: La gráfica de y = 3 sen12x - p2 se encuentra entre - 3 y 3 en el eje y. Uno el ciclo comienza en $x = \frac{F}{v} = \frac{\text{pag}}{}$ y termina en $x = 2 \quad \frac{F}{v} + \frac{2p}{v} = \frac{\text{pag}}{2} + p = \frac{3p}{2}$.

Machine Translated by Google

NOTA El intervalo que define uno
El ciclo también se puede encontrar resolviendo la desigualdad.

0 … 2x - p … 2p

Entonces

p... 2x ... 3p

$\frac{pag}{2}$ … X … $\frac{3p}{2}$ j

Para encontrar los cinco puntos clave, divida el intervalo $\frac{3p}{2}$ d en cuatro subintervalos, cada uno de longitud p , 4 = $\frac{pag}{4}$, encontrando los siguientes valores de x:

$\frac{pag}{2}$ $\frac{pag}{2} + \frac{pag}{4} = \frac{3p}{4}$ $\frac{3p}{4} + \frac{pag}{4}$ =pp + $\frac{pag}{4} = \frac{5p}{4}$ $\frac{5p}{4} + \frac{pag}{4} = \frac{3p}{2}$

1er coordenada x — 2da coordenada x — 3ra coordenada x — 4ta coordenada x — 5ta coordenada x

Paso 3: Utilice estos valores de x para determinar los cinco puntos clave del gráfico:

ap2 , 0b un 3p 4 , 3b 1p, 02 un 5p 4 , - 3b un 3p 2 , 0b

Paso 4: Traza estos cinco puntos y completa la gráfica de la función seno como se muestra en la Figura 71(a). Amplíe la gráfica en cada dirección para obtener la Figura 71(b).

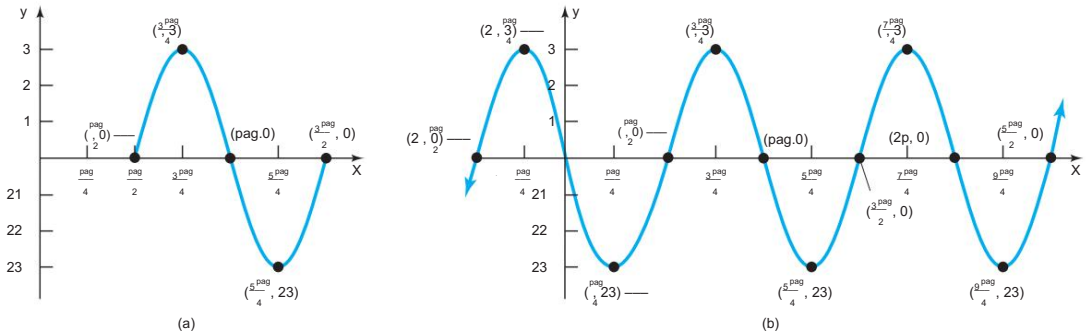


Figura 71

La gráfica de y = 3 sen 12x - p2 = 3 sen 2ax - $\frac{pag}{2}$ bd también se puede obtener usando transformaciones. Ver Figura 72.

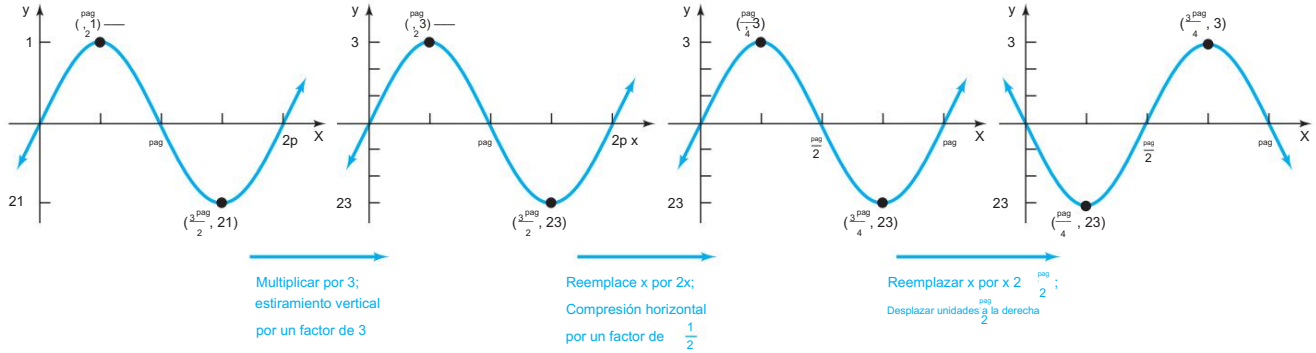


Figura 72 (a) y 5 sen x (b) y 5 3 sen x (c) y 5 3 sen (2x) (d) y 5 3 sen [2 (x 2)] p——2

5 3 pecado (2x 2 p)

Machine Translated by Google

Para graficar una función sinusoidal de la forma y = A sen1vx - f2 + B, primero grafica la función y = A sen1vx - f2 y luego aplica un desplazamiento vertical.

EJEMPLO 2 Encontrar la amplitud, el período y el cambio de fase de una sinusoidal Función y gráfica

Encuentre la amplitud, el período y el desplazamiento de fase de y = 2 cos14x + 3p2 + 1 y represente gráficamente la función.

Paso 1 de la solución : comparar

$$y = 2\cos 14x + 3p2 = 2\cos c\,4a x + \frac{3p}{4\ \text{dormitorios}}$$

a

$$y = A\cos 1vx - f2 = A\cos cvax - f\ vb\ d$$

Tenga en cuenta que A = 2, v = 4 y f = - 3p. La gráfica es una curva coseno con amplitud 0 A0 = 2, período $T = \frac{2p}{v} = \frac{2p}{4} = \frac{pag}{2}$, y cambio de fase $= \frac{F}{v} = - \frac{3p}{4}$.

NOTA El intervalo que define uno
El ciclo también se puede encontrar resolviendo la desigualdad.

0... 4x + 3p... 2p

Entonces

- 3p … 4x … - p

$- \frac{3p}{4} \ldots x \ldots - 4^{pag}$ j

Paso 2: La gráfica de y = 2 cos 14x + 3p2 se encuentra entre - 2 y 2 en el eje y. Uno el ciclo comienza en $x = \frac{F}{v} = - \frac{3p}{4}$ y termina en $x = + \frac{F}{v} \frac{2p}{v} = - \frac{3p}{4} + \frac{pag}{2} = - \frac{pag}{4}$.

Para encontrar los cinco puntos clave, divida el intervalo $c - \frac{3p}{4}, - \frac{pag}{4}\ d$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\frac{pag}{2}, 4 = \frac{pag}{8}$, encontrando los siguientes valores de x:

$- \frac{3p}{4}$	$- \frac{3p}{4} + \frac{pag}{8} = - \frac{5p}{8}$	$- \frac{5p}{8} + \frac{pag}{8} = - \frac{pag}{2}$	$- \frac{pag}{2} + \frac{pag}{8} = - \frac{3p}{8}$	$- \frac{3p}{8} + \frac{pag}{8} = - \frac{pag}{4}$
1er	2.ª	8		5ta
coordenada x	coordenada x	tercera coordenada x	cuarta coordenada x	coordenada x

Paso 3: Los cinco puntos clave de la gráfica de y = 2 cos14x + 3p2 son

$$a - \frac{3p}{4}, 2b\ un - \frac{5p}{8}, 0b\ un - \frac{pag}{2}, - 2b\ un - \frac{3p}{8}, 0b\ un - \frac{pag}{4}, 2b$$

Paso 4: Traza estos cinco puntos y completa la gráfica de la función coseno como se muestra en la Figura 73(a). Extienda la gráfica en cada dirección para obtener la Figura 73(b), la gráfica de y = 2 cos14x + 3p2.

Paso 5: Un desplazamiento vertical hacia arriba de 1 unidad da el gráfico final. Ver Figura 73(c).

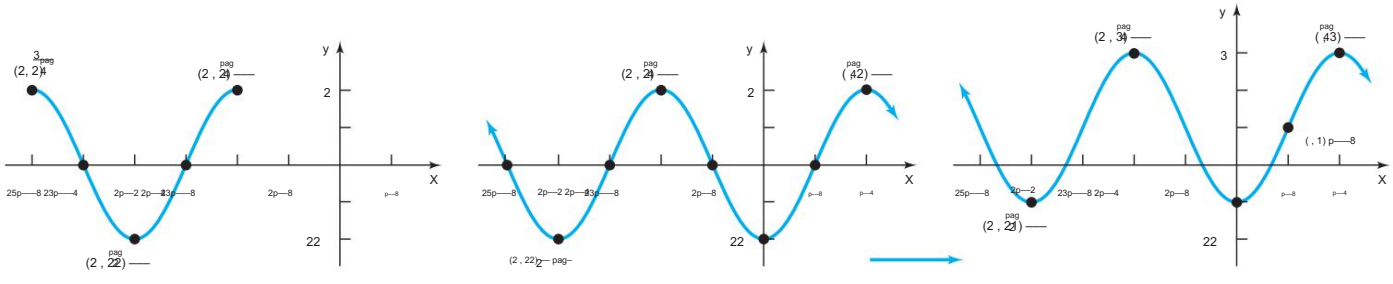


Figura 73 (a) ( ) y 5 2 porque (4x 1 3p) (c) y 5 2 porque (4x 1 3p) 1 1

Machine Translated by Google

La gráfica de y = 2 cos 14x + 3p2 + 1 = 2 cos c 4ax + $\frac{3p}{4}$ hab + 1 también pueden ser obtenido mediante transformaciones. Ver Figura 74.

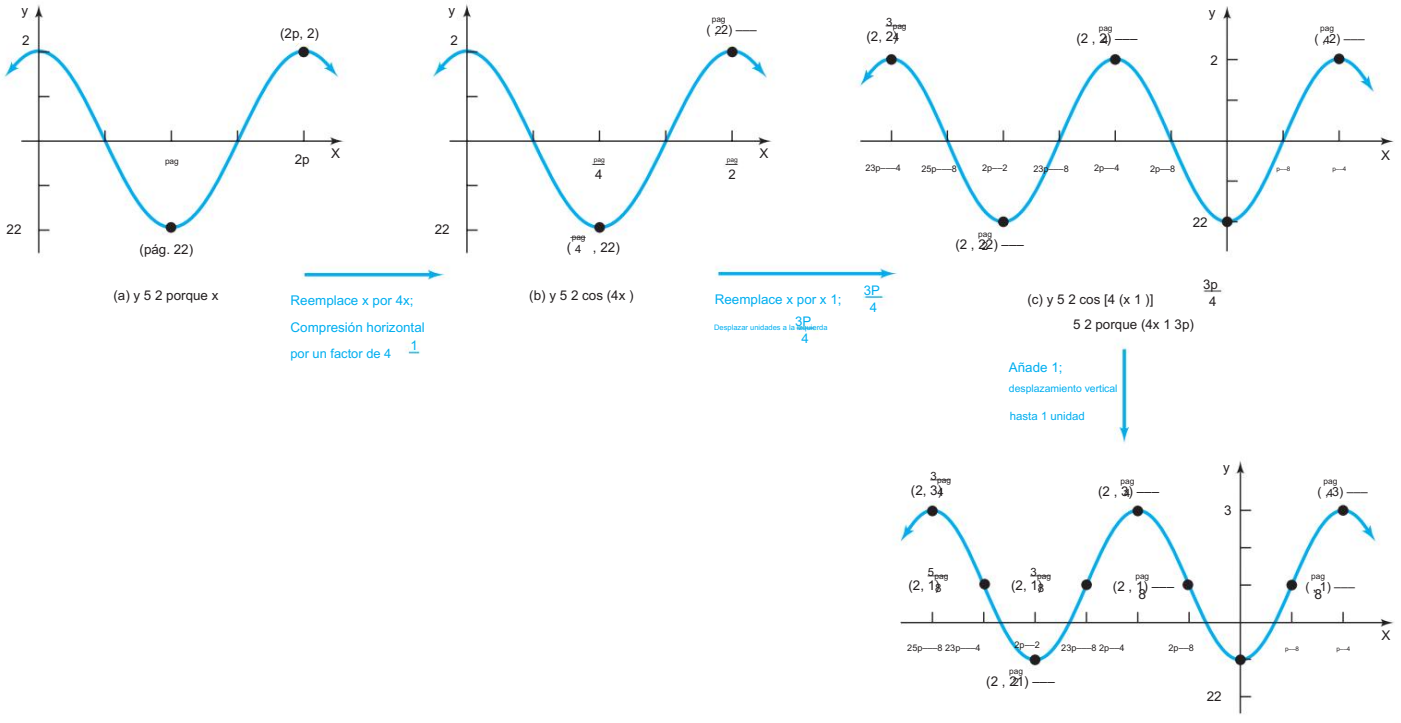


Figura 74

Ahora resuelve el problema 3

RESUMEN

Pasos para graficar funciones sinusoidales y · A sin1Vx · F2 · B o y · A cos1Vx · F2 · B

Paso 1: Encuentre la amplitud 0 A0 , período T = $\frac{2p}{v}$, y cambio de fase $\frac{F}{v}$.

Paso 2: Determine el punto inicial de un ciclo de la gráfica. Determine el punto final de un ciclo de la v.

grafico, $\frac{F}{v} + \frac{2p}{v}$. Dividir el intervalo cf $\frac{}{v}, \frac{F}{v} + \frac{2p}{v}$ vd en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\frac{2p}{v}$, 4.

Paso 3: utilice los puntos finales de los subintervalos para encontrar los cinco puntos clave en el gráfico.

Paso 4: Trace los cinco puntos clave y conéctelos con un gráfico sinusoidal para obtener un ciclo del gráfico. Extiende el gráfico en cada dirección para completarlo.

Paso 5: Si B · 0, aplique un desplazamiento vertical.

2 Construya modelos sinusoidales a partir de datos

Los diagramas de dispersión de datos a veces se parecen a la gráfica de una función sinusoidal. Por ejemplo, los datos proporcionados en la Tabla 11 en la página siguiente representan las temperaturas mensuales promedio en Denver, Colorado. Dado que los datos representan temperaturas mensuales promedio recopiladas durante muchos años, los datos no variarán mucho de un año a otro y, por lo tanto, esencialmente se repetirán cada año. En otras palabras, los datos son periódicos. La Figura 75 muestra un diagrama de dispersión de los datos, donde x = 1 representa enero, x = 2 representa febrero, y así sucesivamen

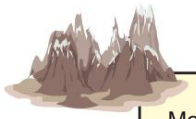
Observe que el diagrama de dispersión se parece a la gráfica de una función sinusoidal. Nosotros elegir ajustar los datos a una función seno de la forma

$$y = A \text{ sen } 1vx - f2 + B$$

donde A, B, v y f son constantes.

Machine Translated by Google

Tabla 11



Mes, x	Promedio mensual Temperatura, °F
Enero 1	30,7
Febrero 2	32,5
3 de marzo	40.4
4 de abril	47,4
5 de Mayo	57.1
6 de junio	67,4
07 de julio	74.2
agosto, 8	72,5
septiembre, 9	63.4
10 de Octubre	50,9
11 de noviembre	38.3
12 de diciembre	30.0

Fuente: National Oceanic and Administración Atmosférica

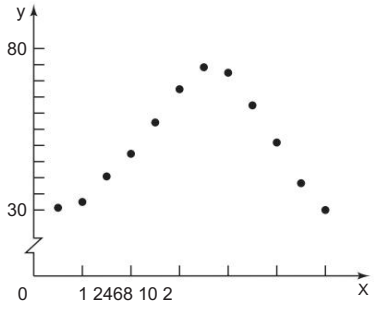


Figura 75 Temperatura mensual promedio de Denver

EJEMPLO 3 Encontrar una función sinusoidal a partir de datos de temperatura

Ajuste una función seno a los datos de la Tabla 11.

Solución

Comience con un diagrama de dispersión de los datos de un año. Consulte la Figura 76. Los datos se ajustarán a una función seno de la forma

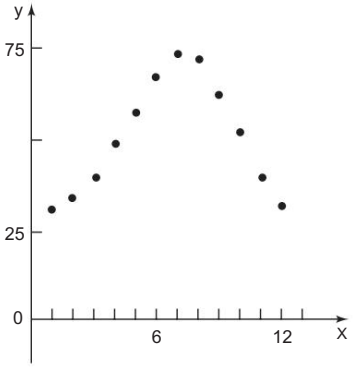


Figura 76

$$y = A \operatorname{sen}1vx - f2 + B$$

Paso 1: Para encontrar la amplitud A, calcule

$$\text{Amplitud} = \frac{\text{valor de datos más grande - valor de datos más pequeño}}{2}$$

$$= \frac{74,2 - 30,0}{2} = 22,1$$

Para ver los pasos restantes de este proceso, superponga la gráfica de la función y = 22,1 sen x, donde x representa meses, en el diagrama de dispersión.

La Figura 77 muestra los dos gráficos. Para ajustar los datos, la gráfica debe ser desplazado verticalmente, desplazado horizontalmente y estirado horizontalmente.

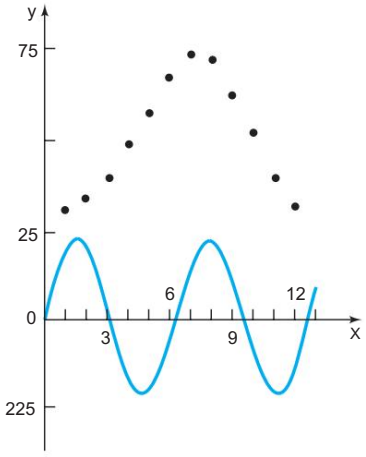


Figura 77

Paso 2: Determine el desplazamiento vertical encontrando el promedio de los valores más altos y valores de datos más bajos.

$$\text{Desplazamiento vertical} = = 52,1 \quad \frac{74,2 + 30,0}{2}$$

Ahora superponga la gráfica de y = 22,1 sen x + 52,1 en el diagrama de dispersión. Ver Figura 78.

Vemos que el gráfico debe desplazarse horizontalmente y estirarse horizontalmente.

Paso 3: primero es más fácil encontrar el factor de estiramiento horizontal. Como las temperaturas se repiten cada 12 meses, el periodo de la función es T = 12.

Porque $T = = 12$, $\frac{2p}{v}$ entonces

$$v = \frac{2p}{12} = \frac{pag}{6}$$

Machine Translated by Google

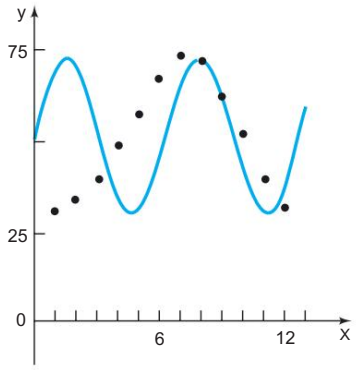


Figura 78

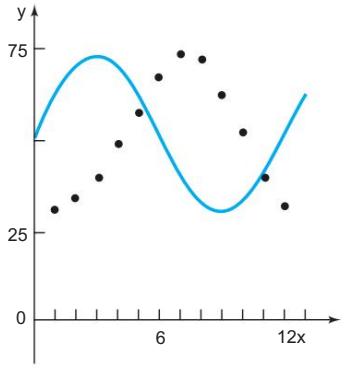


Figura 79

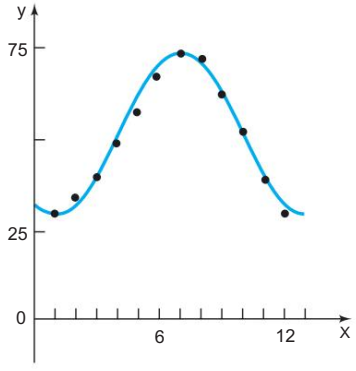


Figura 80

Ahora superponga la gráfica de y = 22,1 sina p 6 xb + 52,1 en el diagrama de dispersión. Consulte la Figura 79, donde el gráfico aún debe desplazarse horizontalmente.

Paso 4: Para determinar el desplazamiento horizontal, use el período T = 12 y divida el intervalo [0, 12] en cuatro subintervalos de longitud 12, 4 = 3:

30, 34, 33, 64, 36, 94, 39, 124

La curva seno aumenta en el intervalo [0, 3] y disminuye en el intervalo [3, 9], por lo que ocurre un máximo local en x = 3. Los datos indican que ocurre un máximo en x = 7 (correspondiente a la curva de julio). temperatura), por lo que la gráfica de la función debe desplazarse 4 unidades hacia la derecha reemplazando x por x - 4. Hacer esto produce

$$y = 22{,}1 \sin\left(\frac{\pi}{6}(x - 4)\right) + 52{,}1$$

La distribución revela que una función seno de la forma y = A sen1vx - f2 + B que se ajusta a los datos es

$$y = 22{,}1 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{3}\right) + 52{,}1$$

La gráfica de $y = 22{,}1 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{3}\right) + 52.1$ y el diagrama de dispersión de la Los datos se muestran en la Figura 80.

En resumen, estos son los pasos que se siguen para ajustar una función seno

$$y = A \operatorname{sen}(vx - f2) + B$$

a datos sinusoidales.

Pasos para ajustar una función seno y · A sin1Vx · F2 · B a datos

Paso 1: Determine A, la amplitud de la función.

$$\text{Amplitud} = \frac{\text{valor de datos más grande} - \text{valor de datos más pequeño}}{2}$$

Paso 2: Determine B, el desplazamiento vertical de la función.

$$\text{desplazamiento vertical} = \frac{\text{valor de datos más grande} + \text{valor de datos más pequeño}}{2}$$

Paso 3: Determinar v. Desde el período T, el tiempo que tardan los datos en repetir, es $T = \frac{2\pi}{v}$, tenemos

$$v = \frac{2\pi}{t}$$

Paso 4: Determine el desplazamiento horizontal de la función utilizando el período de los datos. Divida el período en cuatro subintervalos de igual duración. Determine la coordenada x para el máximo de la función seno y la coordenada x para el valor máximo de los datos. Utilizar esta información para determinar el valor del cambio de fase, v. F

Ahora resuelve el problema 2 5 (a) — (c)

Veamos otro ejemplo. Dado que el número de horas de luz solar en un día cambia anualmente, el número de horas de luz solar en un día para un lugar determinado se puede modelar mediante una función sinusoidal.

Machine Translated by Google

El día más largo del año (en términos de horas de luz solar) ocurre el día del solsticio de verano. Para lugares en el hemisferio norte, el solsticio de verano es el momento en que el Sol está más al norte. En 2018, el solsticio de verano ocurrió el 21 de junio (el día 172 del año) a las 6:07 am EDT. El día más corto del año ocurre el día del solsticio de invierno, el momento en que el Sol está más al sur (para lugares del hemisferio norte). En 2018, el solsticio de invierno ocurrió el 21 de diciembre (el día 355 del año) a las 5:23 p.m. (EST).

EJEMPLO 4 Encontrar una función sinusoidal para las horas de luz del día

Según el Old Farmer's Almanac, el número de horas de luz solar en Boston el día del solsticio de verano es 15,28 y el número de horas de luz solar el día del solsticio de invierno es 9,07.

(a) Encuentre una función sinusoidal de la forma y = A sen1vx - f2 + B que se ajuste a datos.

(b) Utilice la función encontrada en el inciso (a) para predecir el número de horas de luz solar en Boston el 1 de abril, día 91 del año.

(c) Grafique la función encontrada en el inciso (a).

(d) Busque el número de horas de luz solar del 1 de abril en el Old Farmer's Almanac. y compárelo con los resultados encontrados en la parte (b).

Fuente: Almanaque del viejo granjero, www.almanac.com/rise

Solución (a) Paso 1: Amplitud = 2 valor de datos más grande - valor de datos más pequeño

$$= \frac{15.28 - 9.07}{2} = 3.105$$

Paso 2: Desplazamiento vertical $\frac{\text{valor de datos más grande + valor de datos más pequeño}}{2}$

$$= \frac{15.28 + 9.07}{2} = 12.175$$

Paso 3: Los datos se repiten cada 365 días. Como $T = \frac{2p}{v} = 365$, encontramos

$$v = \frac{2p}{365}$$

Hasta ahora tenemos $y = 3.105 \sin\left(\frac{2p}{365}x - f\right) + 12.175$.

Paso 4: Para determinar el desplazamiento horizontal, use el período T = 365 y divida el intervalo 30, 3654 en cuatro subintervalos de longitud 365, 4 = 91,25:

30, 91.254, 391.25, 182.54, 3182.5, 273.754, 3273.75, 3654

La curva seno aumenta en el intervalo [0, 91,25] y decrece en el intervalo [91,25, 273,75], por lo que se produce un máximo local en x = 91,25.
Dado que el máximo ocurre en el solsticio de verano en x = 172, debemos desplazar la gráfica de la función 172 - 91,25 = 80,75 unidades hacia la derecha reemplazando x por x - 80,75. Hacer esto produce

$$y = 3.105 \text{ sen } 2p\left(\frac{1}{365}\right)1x - 80{,}752\ b + 12{,}175$$

Luego, multiplica para obtener la forma y = A sin1vx - f2 + B.

$$y = 3.105 \text{ sen } 2p\left(\frac{1}{365}\right)x - \frac{323p}{730}\ b + 12{,}175$$

Machine Translated by Google

(b) Para predecir el número de horas de luz del día el 1 de abril, sea x = 91 en la función encontrado en la parte (a) y obtener

$$y = 3.105 \text{ sen } 2p\left(\frac{}{365}\right) \# 91 - \frac{323p}{730\ b} + 12{,}175$$

$$\approx 12{,}72$$

La predicción es que habrá alrededor de 12,72 horas = 12 horas 43 minutos de luz solar el 1 de abril en Boston.

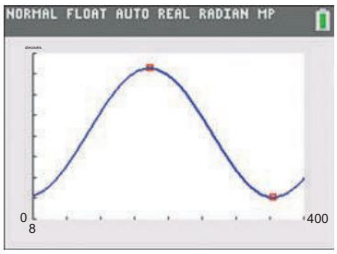


Figura 81

(c) La gráfica de la función encontrada en el inciso (a) se muestra en la Figura 81.

(d) Según el Almanaque del Viejo Granjero, habrá 12 horas 45 minutos de luz del sol el 1 de abril en Boston.

Ahora resuelve el problema 3 1

Ciertas utilidades de gráficos (como TI-83, TI-84 Plus C y TI-89) tienen la capacidad de encontrar la función seno que mejor se adapta a datos sinusoidales. Se requieren al menos cuatro puntos de datos para este proceso.

EJEMPLO 5 Encontrar la función seno de mejor ajuste

Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función seno que mejor se ajuste a los datos de la Tabla 11. Grafique esta función con el diagrama de dispersión de los datos.

Solución

Ingrese los datos de la Tabla 11 y ejecute el programa SINe REGression. El resultado se muestra en la Figura 82.

La salida que proporciona la utilidad muestra la ecuación

$$y = a \text{ sen}1bx + c2 + d$$

La función sinusoidal de mejor ajuste es

$$y = 21{,}54 \text{ sen}10{,}56x - 2{,}442 + 51{,}77$$

donde x representa el mes e y representa la temperatura promedio mensual.

La Figura 83 muestra la gráfica de la función sinusoidal de mejor ajuste en el diagrama de dispersión.

Figura 82

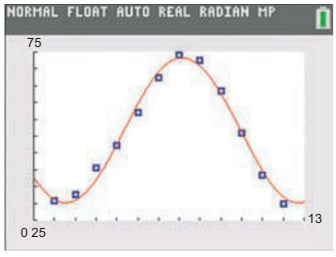


Figura 83

Ahora resuelva el problema 2 5 (d) y (e)

Machine Translated by Google

6.6 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Para la gráfica de y = A sen1vx - f2, el número llamó al _____ _____.

F/V es

2. Verdadero o Falso Una utilidad gráfica requiere solo dos datos puntos para encontrar la función seno de mejor ajuste.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 3 a 18, encuentre la amplitud (si existe), el período y el desplazamiento de fase de cada función. Grafica cada función. Asegúrese de etiquetar los puntos clave. Mostrar al menos dos períodos. 3. y = 4 sen12x - p2

4. y = 3 sen13x - p2

5. y = 3 cos12x + p2

6. y = 2 cosa3x + pag/2 segundo

7. y = - 2 cosa2x - pag/2 segundo

8. y = - 3 sina2x + pag/2 segundo

9. y = 2 cos12px + 42 + 4

10. y = 4 sen1px + 22 - 5

11. y = 2 cos12px - 42 - 1 12. y = 3 cos1px - 22 + 5

13. y = - 3 cosa - 2x + pag/2 segundo

14. y = - 3 sina - 2x + 18. y = 3 pag/2 segundo

y = 1/2 cuna12x - p2 15.

16. y = 2 tan14x - p2

17. y = 2 1/— seg13x - p2

csca2x - pag/4 segundo

En los problemas 19 a 22, escriba una ecuación de una función seno que tenga las características dadas.

19. Amplitud: 3
Periodo: pag/2
Cambio de fase: 2

20. Amplitud: 2
Periodo: p
Cambio de fase: 1/2

21. Amplitud: 2
Periodo: p
Cambio de fase: - 2

22. Amplitud: 3
Periodo: 3p
Cambio de fase: - 1/3

Aplicaciones y extensiones

23. Circuitos de corriente alterna (CA) La corriente I, en amperios, que fluye a través de un circuito de CA (corriente alterna) en el tiempo t, en segundos, es

I1t2 = 220 sena60pt - pag/6 segundo t Ú 0

¿Cuál es el período? ¿Cuál es la amplitud? ¿Qué es el cambio de fase? Grafique esta función en dos períodos.

24. Circuitos de corriente alterna (CA) La corriente I, en amperios, que fluye a través de un circuito de CA (corriente alterna) en el tiempo t, en segundos, es

I1t2 = 120 sen30pt - pag/3 segundo t Ú 0

¿Cuál es el período? ¿Cuál es la amplitud? ¿Qué es el cambio de fase? Grafique esta función en dos períodos.

25. Huracanes Los huracanes se clasifican utilizando la escala de huracanes de Saffir-Simpson, con vientos de 111 a 130 millas por hora (mph) que corresponden a un huracán de categoría 3, vientos de 131 a 155 mph que corresponden a un huracán de categoría 4 y vientos superiores a 155. mph correspondiente a un huracán de categoría 5. Los datos de la derecha representan el número de huracanes importantes en la cuenca del Atlántico (categoría 3, 4 o 5) cada década desde 1921 hasta 2010.

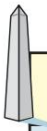
Década, x	Grandes huracanes, H
1921-1930, 1	17
1931-1940, 2	dieciséis
1941-1950, 3	29
1951-1960, 4	33
1961-1970, 5	27
1971–1980, 6	dieciséis
1981–1990, 7	dieciséis
1991-2000, 8	27
2001–2010, 9	33

Fuente: Administración Nacional Oceánica y Atmosférica de EE. UU.

(a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.
(b) Encuentre una función sinusoidal de la forma
y = A sin1vx - f2 + B que modela los datos.
(c) Dibuje la función sinusoidal encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.
(d) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función sinusoidal de mejor ajuste.
(e) Grafique la función sinusoidal de mejor ajuste en un diagrama de dispersión de los datos.

26. Temperatura mensual Los datos de la página siguiente representan las temperaturas mensuales promedio de Washington, DC
(a) Trace un diagrama de dispersión de los datos para un período.
(b) Encuentre una función sinusoidal de la forma
y = A sin1vx - f2 + B que modela los datos.
(c) Dibuje la función sinusoidal encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.
(d) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función sinusoidal de mejor ajuste.
(e) Grafique la función sinusoidal de mejor ajuste en un diagrama de dispersión de los datos.

Machine Translated by Google



Mes, x	Promedio mensual Temperatura, °F
Enero 1	36.0
Febrero 2	39.0
3 de marzo	46,8
4 de abril	56,8
5 de Mayo	66.0
6 de junio	75,2
07 de julio	79,8
agosto, 8	78.1
septiembre, 9	71.0
10 de Octubre	59,5
11 de noviembre	49,6
12 de diciembre	39,7

Fuente: Administración Nacional Oceánica y Atmosférica de EE. UU.

27. Temperatura mensual Los siguientes datos representan las temperaturas mensuales promedio de Baltimore, Maryland. (a) Trace un diagrama de dispersión de los datos para un período. (b) Encuentre una función sinusoidal de la forma

y = A sin1vx - f2 + B que modela los datos. (c) Dibuje la función sinusoidal encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función sinusoidal de mejor ajuste.

(e) Grafique la función sinusoidal de mejor ajuste en un diagrama de dispersión de los datos.

Mes, x	Promedio mensual Temperatura, °F
Enero 1	32,9
Febrero 2	35,8
3 de marzo	43,6
4 de abril	53,7
5 de Mayo	62,9
6 de junio	72,4
07 de julio	77.0
agosto, 8	75.1
septiembre, 9	67,8
10 de Octubre	56.1
11 de noviembre	46,5
12 de diciembre	36,7

Fuente: Administración Nacional Oceánica y Atmosférica de EE. UU.

28. Temperatura mensual Los siguientes datos representan las temperaturas mensuales promedio de Indianápolis, Indiana.

(a) Trace un diagrama de dispersión de los datos para un período. (b) Encuentre una función sinusoidal de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$$

que modela los datos.

(c) Dibuje la función sinusoidal encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

(d) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función sinusoidal de mejor ajuste.

(e) Grafique la función sinusoidal de mejor ajuste en un diagrama de dispersión de los datos.

Mes, x	Promedio mensual Temperatura, °F
Enero 1	28.1
Febrero 2	32.1
3 de marzo	42.2
4 de abril	53.0
5 de Mayo	62,7
6 de junio	72.0
07 de julio	75,4
agosto, 8	74.2
septiembre, 9	66,9
10 de Octubre	55.0
11 de noviembre	43,6
12 de diciembre	31,6

Fuente: Administración Nacional Oceánica y Atmosférica de EE. UU.

29 Mareas El tiempo entre mareas altas consecutivas es de 12 horas y 25 minutos. Según la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica, el sábado 21 de abril de 2018, en Sitka, Alaska, la marea alta se produjo a las 4:51 a. m. (4,85 horas) y la marea baja a las 11:50 a. m. (11,83 horas).

Las alturas del agua se miden como las cantidades por encima o por debajo de la bajamar media inferior. La altura del agua durante la marea alta era de 10,03 pies y la altura del agua durante la marea baja era de 0,46 pies. (a)

¿Aproximadamente cuándo ocurrió la siguiente marea alta? (b) Encuentre una función sinusoidal de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$$

que modela los datos. (c)

Utilice la función encontrada en el inciso (b) para predecir la altura del agua a las 3 pm.

30. Mareas Supongamos que el tiempo entre mareas altas consecutivas es de aproximadamente 12,5 horas. Según la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica, en un día concreto en una ciudad de Georgia, la marea alta se produjo a las 3:36 am (3.6000 horas) y la marea baja a las 10:06 am (10.1000 horas). Las alturas del agua se miden como las cantidades por encima o por debajo de la bajamar media inferior. La altura del agua durante la marea alta era de 8,2 pies y la altura del agua durante la marea baja era de 0,6 pies. Responda las partes (a) a (c) a continuación. (a) ¿Cuándo aproximadamente ocurrirá la próxima marea alta?

(b) Encuentre una función sinusoidal de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi) + B$$

que se ajuste a los datos.

(c) Utilice la función encontrada en el inciso (b) para predecir la altura del agua en la próxima marea alta.

Machine Translated by Google

31. Horas de luz del día Según el Old Farmer's Almanac, en Miami, Florida, la cantidad de horas de luz solar en el solsticio de verano de 2018 fue 13,75, y la cantidad de horas de luz solar en el solsticio de invierno fue 10,52.

(a) Encuentre una función sinusoidal de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(vx - f2 + B$$

que modela los datos.

(b) Utilice la función encontrada en el inciso (a) para predecir el número de horas de luz solar el 1 de abril, el día 91 del año.

(c) Dibuje una gráfica de la función encontrada en el inciso (a).

(d) Busque el número de horas de luz solar del 1 de abril en el Old Farmer's Almanac y compare las horas reales de luz solar con los resultados encontrados en el inciso (b).

32. Horas de luz natural Según el Old Farmer's Almanac, en Detroit, Michigan, la cantidad de horas de luz solar en el solsticio de verano de 2018 fue 15,27 y la cantidad de horas de luz solar en el solsticio de invierno fue 9,07.

(a) Encuentre una función sinusoidal de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(vx - f2 + B$$

que modela los datos.

(b) Utilice la función encontrada en el inciso (a) para predecir el número de horas de luz solar el 1 de abril, el día 91 del año.

(c) Dibuje una gráfica de la función encontrada en el inciso (a).

(d) Busque el número de horas de luz solar del 1 de abril en el Old Farmer's Almanac y compare las horas reales de luz solar con los resultados encontrados en el inciso (b).

33. Horas de luz natural Según el Old Farmer's Almanac, en Honolulu, Hawaii, la cantidad de horas de luz solar en el solsticio de verano de 2018 fue 13,42 y la cantidad de horas de luz solar en el solsticio de invierno fue 10,83.

(a) Encuentre una función sinusoidal de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(vx - f2 + B$$

que modela los datos.

(b) Utilice la función encontrada en el inciso (a) para predecir el número de horas de luz solar el 1 de abril, el día 91 del año.

(c) Dibuje una gráfica de la función encontrada en el inciso (a).

(d) Busque el número de horas de luz solar del 1 de abril en el Old Farmer's Almanac y compare las horas reales de luz solar con los resultados encontrados en el inciso (b).

34. Horas de luz natural Según el Old Farmer's Almanac, en Anchorage, Alaska, la cantidad de horas de luz solar en el solsticio de verano de 2018 fue 19,37 y la cantidad de horas de luz solar en el solsticio de invierno fue 5,45.

(a) Encuentre una función sinusoidal de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(vx - f2 + B$$

que modela los datos.

(b) Utilice la función encontrada en el inciso (a) para predecir el número de horas de luz solar el 1 de abril, el día 91 del año.

(c) Dibuje una gráfica de la función encontrada en el inciso (a).

(d) Busque el número de horas de luz solar del 1 de abril en el Old Farmer's Almanac y compare las horas reales de luz solar con los resultados encontrados en el inciso (b).

35. Desafío Problema Movimiento de la montaña rusa Una montaña rusa de madera en Six Flags contiene una pista en forma de curva sinusoidal, con una serie de colinas. La cima de cada colina está a 106 pies sobre el suelo. Si un automóvil tarda 1,8 segundos en ir desde la cima de una colina hasta la base (a 4 pies del suelo), encuentre una función sinusoidal de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(vt - f2 + B$$

que modela el movimiento del tren de montaña durante este recorrido que comienza en la cima de una colina.

Discusión y escritura

36. Explique cómo se utilizan la amplitud y el período de una gráfica sinusoidal para establecer la escala en cada eje de coordenadas.

37. Encuentre una aplicación en su campo principal que conduzca a una gráfica sinusoidal. Escribe un relato de tus hallazgos.

Conserve su conocimiento

Los problemas 38 a 47 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

38. Dado $f(x) = \frac{4x + 9}{2}$, encontrar $f^{-1}(x)$.

39. Resuelve: $0{,}25(10{,}4x + 0{,}8) = 3{,}7 - 1{,}4x$

40. Multiplicar: $(8x + 15y)^2$

41. Encuentra la distancia exacta entre los puntos $(4, - 12)$ y $(10, 3)$.

42. Resuelve: $|3x + 4| = |5x - 7|$

43. Dado $y = (2x + 4)$, sea $u = x + 4$ y exprese y en términos de u.

44. Si $x = a \operatorname{sen} t$, $a > 0$ y $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, encuentre el costo t.

45. Un jardín rectangular está rodeado por 54 pies de cerca. Si el largo del jardín es 3 pies más que el doble del ancho, ¿qué Cuáles son las dimensiones del jardín?

46. Encuentre las asíntotas verticales, si las hay, de la gráfica de $R(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 2x - 15}$.

47. Escribe $\log_2(8x^2 y^5)$ como suma de logaritmos. Expresar potencias como factores.

Machine Translated by Google

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Definiciones

Ángulo en posición estándar (p. 398)
Vertex está en el origen; El lado inicial está a lo largo del eje x positivo.

1 grado (1°) (pág. 399)
$1° = \frac{1}{360}$ revolución

1 radián (págs. 400 y 401)
La medida de un ángulo central de un círculo cuyos rayos subtienden un arco cuya longitud es igual al radio del círculo.

Funciones trigonométricas (p. 412)
P = (x, y) es el punto del círculo unitario correspondiente a u = t radianes.

sen t = sen u = y porque t = porque u = x tan t = tan u = $\frac{y}{x}$, x · 0

csc t = csc u = $\frac{1}{y}$, y · 0 seg t = seg u = $\frac{1}{x}$, x · 0 cuna t = cuna u = $\frac{x}{y}$, y · 0

Funciones trigonométricas usando un círculo de radio r (p. 422)
Para un ángulo u en posición estándar, P = 1x, y2 es el punto en el lado terminal de u eso también está en el círculo x2 + y2 = r^2.

pecado u = $\frac{y}{r}$ porque tu = $\frac{x}{r}$ tan u = $\frac{y}{x}$, x · 0

csc tu = $\frac{r}{y}$, y ¬ 0 y segundo u = $\frac{r}{x}$, x · 0 cuna u = $\frac{x}{y}$, y · 0

Función periódica (pág. 431)
Una función f es periódica si para algún número p 7 0 para el cual u + p está en el dominio de f siempre que u lo esté, entonces f1u + p2 = f1u2. El más pequeño de estos p es el período fundamental.

Fórmulas

1 en sentido antihorario
revolución · 360° (pág. 400)
· 2p radianes (pág. 402)

$1° = \frac{\text{pag}}{180}$ radianes 1p. 4022; 1 radian = grados $\frac{180}{\text{pag}}$ 1p. 4022

Longitud del arco: s · r u (p. 401)
u se mide en radianes; s es la longitud del arco subtendido por el ángulo central u del círculo de radio r.

Área de un sector: A · $\frac{1}{2}r^2$ u (pág. 404)
A es el área del sector de un círculo de radio r formado por un ángulo central de u radianes.

Velocidad lineal: v · $\frac{s}{t}$ (pág. 405)
v es velocidad lineal, distancia por unidad de tiempo.

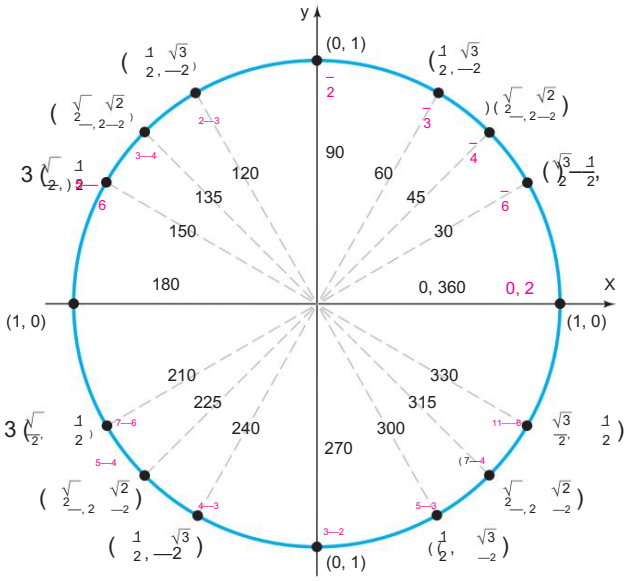
Velocidad angular: v · $\frac{tu}{t}$ (pág. 405)
v · rv (pág. 405)
v es la velocidad angular medida en radianes por unidad de tiempo.

Tabla de Valores (págs. 415 y 419)

U (radianes)	U (grados)	pecado U	porque U	bronceado U	csc- u	segundo U	cuna U
0	0°	0	1	0	No definida	1	No definida
$\frac{\text{pag}}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{23}{2}$	$\frac{23}{3}$	2	$\frac{223}{3}$	23
$\frac{\text{pag}}{4}$	45°	$\frac{22}{2}$	$\frac{22}{2}$	1	22	22	1
$\frac{\text{pag}}{3}$	60°	$\frac{23}{2}$	$\frac{1}{2}$	23	$\frac{223}{3}$	2	$\frac{23}{3}$
$\frac{\text{pag}}{2}$	90°	1	0	No definida	1	No definida	0
pag	180°	0	-1	0	No definida	-1	No definida
$\frac{3p}{2}$	270°	-1	0	No definida	-1	No definida	0

Machine Translated by Google

El círculo unitario (págs. 411 a 421)



Identidades fundamentales (págs. 433–435)

Identidades de cociente: tan u = $\frac{\text{pecado u}}{\cos u}$ cuna u = $\frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}$

Identidades recíprocas: csc u = sen $\frac{1}{u}$ segundo u = $\frac{1}{\text{porque tú}}$ cuna u = $\frac{1}{\text{broncearte}}$

Identidades pitagóricas: sin2 u + cos2 u = 1 tan2 u + 1 = seg2 u cot2 u + 1 = csc2 u

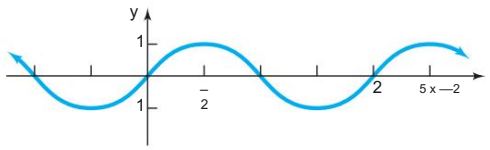
Propiedades de las funciones trigonométricas (págs. 429–431, 438)

y = sen x (pág. 444) Dominio: - q 6 x 6 q

Rango: - 1 … y … 1

Periódico: periodo = 2p1360°2

Función impar

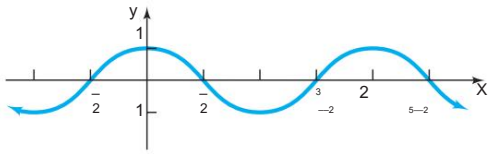


y = cos x (págs. 445 y 446) Dominio: - q 6 x 6 q

Rango: - 1 … y … 1

Periódico: periodo = 2p1360°2

incluso función



y = tan x (pág. 459) Dominio: - q 6 x 6 q, excepto entero impar

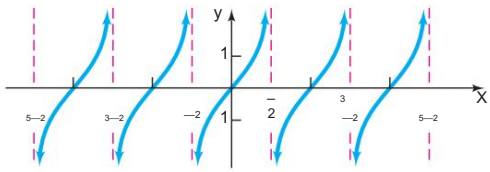
múltiplos de 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 190°2

Rango: - q 6 y 6 q

Periódico: periodo = p1180°2

Función impar

Asíntotas verticales en múltiplos enteros impares de 2 $\frac{\text{pag}}{}$



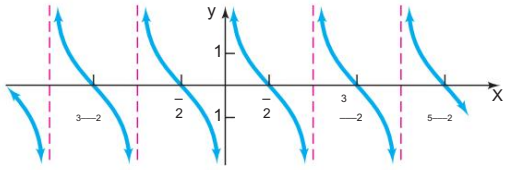
y = cuna x (pág. 460) Dominio: - q 6 x 6 q, excepto múltiplos enteros de p(180°)

Rango: - q 6 y 6 q

Periódico: periodo = p1180°2

Función impar

Asíntotas verticales en múltiplos enteros de p



Machine Translated by Google

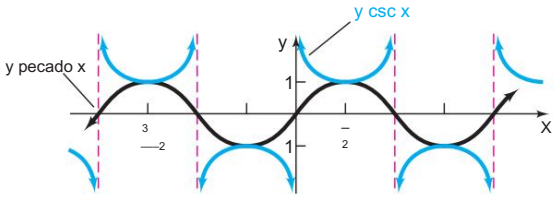
y = csc x (pág. 462) Dominio: - q 6 x 6 q, excepto múltiplos enteros de p1180°2

Rango: 0 y 0 Ú 1 1y … - 1 o y Ú 12

Periódico: periodo = 2p1360°2

Función impar

Asíntotas verticales en múltiplos enteros de p



y = seg x (pág. 462) Dominio: - q 6 x 6 q, excepto entero impar

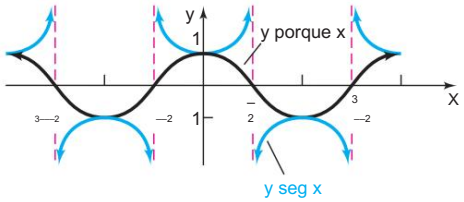
múltiplos de 2 pag — 190°2

Rango: 0 y 0 Ú 1 1y … - 1 o y Ú 12

Periódico: periodo = 2p1360°2

incluso función

Asíntotas verticales en múltiplos enteros impares de 2 pag —



Gráficos sinusoidales

y = A sen1vx2 + B, v 7 0 Periodo = 2p/v (págs. 448, 466)

y = A cos1vx2 + B, v 7 0 Amplitud = 0 A0 (págs. 448, 466)

y = A sin1vx - f2 + B = A sincvax - f vb d + B Desfase = F/v (pág. 466)

y = A cos1vx - f2 + B = A coscvax - f vb

d + B

Objetivos

Sección	Deberias ser capaz de…	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
6.1	1 Ángulos y medida en grados (p. 398)	1	
	2 Convertir entre medidas decimales y grados, minutos y segundos para ángulos (p. 400)	2	48
	3 Encuentra la longitud de un arco de círculo (p. 401)	3	49, 50
	4 Convertir de grados a radianes y de radianes a grados (p. 402) 4–6 5 Calcular el área de un sector de un círculo (p. 404)	7	1–4, 49
	6 Encuentra la velocidad lineal de un objeto que viaja en movimiento circular (p. 405) 8		51, 52
6.2	1 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas usando un punto en el círculo unitario (p. 413)	1	45, 55
	2 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales (p. 414)	2, 3	9, 55
	3 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas de 4 pag — = 45° (pág. 416)	4, 5	5, 6
	4 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas de 6. pag — = 30° y pag/3 = 60° (pág. 417)	6–8	5, 6
	5 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas para números enteros. múltiplos de 6 pag — = 30°, pag/4 = 45°, y 3 pag — = 60° (pág. 419)	9, 10	7, 8, 10, 55
	6 Usar una calculadora para aproximar el valor de una función trigonométrica (p. 421)	11	41, 42
	7 Usa un círculo de radio r para evaluar las funciones trigonométricas. (pág. 422)	12	46

(continuado)

Machine Translated by Google

Sección	Deberias ser capaz de…	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
6.3	1 Determinar el dominio y el rango de las funciones trigonométricas. (pág. 429)	págs. 429–430	47
	2 Determinar el período de las funciones trigonométricas (pág. 431)	1	47
	3 Determinar los signos de las funciones trigonométricas en un cuadrante determinado (pág. 432)	2	43, 44
	4 Encuentra los valores de las funciones trigonométricas usando identidades fundamentales (p. 433)	3, 4	11-15
	5 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas de un ángulo dada una de las funciones y el cuadrante del ángulo (p. 435)	5, 6	16-23
	6 Utilice propiedades pares-impares para encontrar los valores exactos de funciones trigonométricas (pág. 438)	7	13-15
6.4	1 Grafique la función seno y = senx y las funciones de la forma y = A sen1vx2 (p. 443)	1, 2	24
	2 Grafica la función coseno y = cos x y funciones de la forma y = A cos1vx2 (p. 445)	3	25
	3 Determinar la amplitud y el período de funciones sinusoidales (p. 446)	4	33–38
	4 Graficar funciones sinusoidales usando puntos clave (p. 448)	5–7	24, 25, 35
	5 Encuentra una ecuación para una gráfica sinusoidal (p. 452)	8, 9	39, 40
6.5	1 Grafica la función tangente y = tan x y la función cotangente y = cot x (p. 458)		26, 28
	2 Graficar funciones de la forma y = A tan 1vx2 + B e y = A cot 1vx2 + B (p. 460)	1, 2	27, 32
	3 Grafica la función cosecante y = csc x y la función secante y = sec x (p. 461)		30
	4 Graficar funciones de la forma y = A csc 1vx2 + B y y = A sec 1vx2 + B (p. 462)	3	29
6.6	1 Graficar funciones sinusoidales de la forma y = A sen1vx - f2 + B (pág. 465)	1, 2	31, 35–38, 53(d)
	2 Construya modelos sinusoidales a partir de datos (p. 469)	3–5	54

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 y 2, convierte cada ángulo en grados a radianes. Expresa tu respuesta como múltiplo de p.

1. 225°

2. 54°

En los problemas 3 y 4, convierte cada ángulo en radianes a grados.

3. $\frac{7p}{4}$

4. $-\frac{5p}{2}$

En los problemas 5 a 15, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

5. bronceado $\frac{pag}{4}$ - pecado $\frac{pag}{6}$

6. 3 sen 45° - 4 tan 6 $\frac{pag}{}$

7. 4 cos(5p>4) - 3 cos(- p>6)

8. seca - $\frac{pag}{}$ 3b-cota- $\frac{5p}{4}$ b

9. tan p + sen p

10. cos 540° - tan1 - 405°2

11. cos2 40° + a cosec2 40° b $\frac{1}{}$

12. seg 50° cos 50°

13. $\frac{\cos 1 - 50°2}{\cos 150°2}$

14. $\frac{\text{sen}1 - 40°2}{\text{pecado } 40°}$

15. cosec1290°2 cos1 - 20°2

Machine Translated by Google

En los problemas 16 a 23, encuentre el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas restantes.

16. pecado u = $\frac{4}{5}$, eres agudo

17. cuna u = - 4 $\frac{3}{}$, pecado u 7 0

18. cosec u = - 12 $\frac{13}{}$, porque tu 7 0

19. porque tu = - $\frac{7}{25}$, u en el cuadrante III

20. sen u = - 13 $\frac{5}{}$, $\frac{3p}{2}$ 6 y 6 2p

21. tan u = 5 $\frac{2}{}$, 0 6 y 6 90°

22. segundos u = 3, $\frac{3p}{2}$ 6 y 6 2p

23. cuna tu = - 2, $\frac{pag}{2}$ 6 u 6p

En los problemas 24 a 32, grafica cada función. Cada gráfico debe contener al menos dos períodos. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de cada función.

24. y = 2 sen14x2

25. y = - 3 cos12x2

26. y = tan1x + p2

27. y = - 2 tan13x2

28. y = coimpuesto + $\frac{pag}{4 \text{ segundo}}$

29. y = 4 seg 12x2

30. y = cscax + $\frac{pag}{4 \text{ segundo}}$

31. y = 4 sen12x + 42 - 2

32. y = 5 cotas x $\frac{}{3}$ - $\frac{pag}{4 \text{ segundo}}$

En los problemas 33 y 34, determine la amplitud y el período de cada función sin representar gráficamente.

33. y = 4 sen13x2

34. y = - 2 cos13px2

En los problemas 35 a 38, encuentre la amplitud, el período y el desplazamiento de fase de cada función. Grafica cada función. Mostrar al menos dos períodos.

35. y = 4 sen13x2

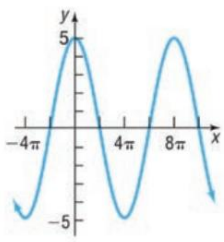
36. y = - cosa 1 $\frac{}{2}$x + $\frac{pag}{2 \text{ segundo}}$

37. y = $\frac{1}{}$ 2 sina 3$\frac{}{2}$ x - pb

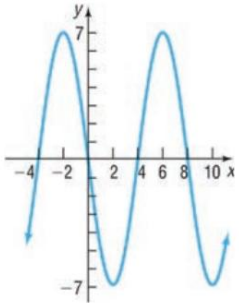
38. y = - 3 $\frac{2}{}$ cos1px - 62

En los problemas 39 y 40, encuentre una función cuya gráfica esté dada.

39.



40.



---

41. Usa una calculadora para aproximar el pecado $\frac{pag}{8}$. Redondea la respuesta a dos decimales.

42. Usa una calculadora para aproximar segundos 10°. Redondea la respuesta a dos decimales.

43. Determina los signos de las seis funciones trigonométricas de un ángulo u cuyo lado terminal está en el cuadrante II.

44. Nombra el cuadrante en el que se encuentra u si cos u 7 0 y tan u 6 0.

45. Encuentra los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de t 1 si P = a - $\frac{}{5}$, $\frac{216}{5}$ b es el punto del círculo unitario que corresponde a t.

46. Encuentre el valor exacto de sen t, cos t y tan t si P = 1 - 2, 52 es el punto de una circunferencia que corresponde a t.

47. ¿Cuáles son el dominio y el rango de la función cosecante? ¿Cuál es el período?

48. (a) Convierta el ángulo 32°20′35″ a decimal en grados. Redondea la respuesta a dos decimales.

(b) Convierta el ángulo 63,18° a la forma D°M′S″. expresar el respuesta al segundo más cercano.

49. Encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 60° en un círculo de radio 3 pies. ¿Cuál es el área del sector?

50. El minutero de un reloj mide 8 pulgadas de largo. ¿Qué distancia recorre la punta del minutero en 30 minutos? ¿Qué distancia recorre en 20 minutos?

51. Velocidad angular de un auto de carreras Un auto de carreras se conduce alrededor de una pista circular a una velocidad constante de 45 millas por hora. Si el diámetro de la pista circular es $\frac{1}{4}$ milla, ¿qué es? ¿La velocidad angular del auto? Expresa tu respuesta en revoluciones por hora (lo que equivale a vueltas por hora).

52. Balizas de faro El faro de Montauk Point en Long Island tiene haces dobles (dos fuentes de luz una frente a la otra). Los barcos en el mar observan una luz parpadeante cada 5 segundos. ¿Qué velocidad de rotación se requiere para lograr esto?

Machine Translated by Google

53. Corriente alterna La corriente I, en amperios, que fluye a través de un circuito de CA (corriente alterna) en el momento t es

$$I1t2 = 220 \operatorname{sen} 30pt + \frac{pag}{6 \text{ segundo}} \qquad t \text{ Ú } 0$$

(a) ¿Cuál es el período?

(b) ¿Cuál es la amplitud?

(c) ¿Cuál es el cambio de fase?

(d) Grafique esta función durante dos períodos.

54. Temperatura mensual Los datos siguientes representan las temperaturas mensuales promedio de Phoenix, Arizona.

(a) Trace un diagrama de dispersión de los datos para un período.

(b) Encuentre una función sinusoidal de la forma

y = A sin1vx - f2 + B que modela los datos.

(c) Dibuje la función sinusoidal encontrada en el inciso (b) en el diagrama de dispersión.

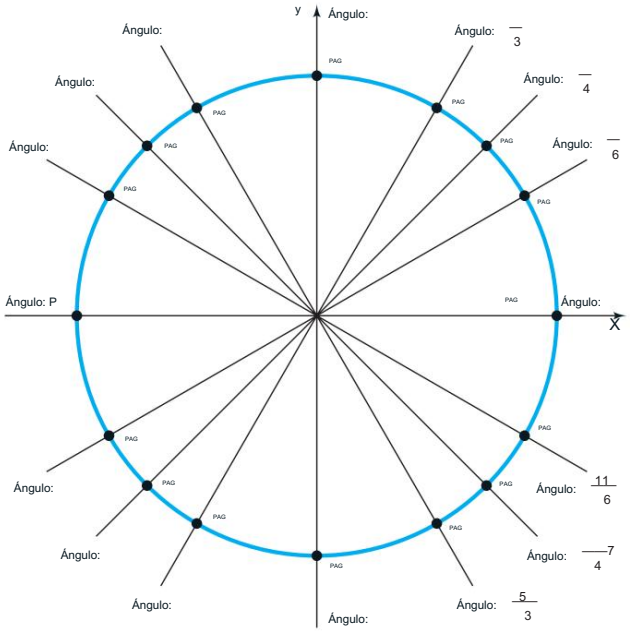
(d) Utilice una herramienta gráfica para encontrar la función sinusoidal de mejor ajuste.

(e) Grafique la función sinusoidal de mejor ajuste en la dispersión trama.

Mes, x	Promedio mensual Temperatura, 8F
Enero 1	56
Febrero 2	60
3 de marzo	
4 de abril	73
5 de Mayo	82
6 de junio	91
07 de julio	95
agosto, 8	94
septiembre, 9	88
10 de Octubre	77
11 de noviembre	64
12 de diciembre	55

Fuente: National Oceanic and Administración Atmosférica

55. Círculo unitario En el círculo unitario dado, completa los ángulos que faltan (0... u... 2p) y los puntos correspondientes P.



Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

En los problemas 1 a 3, convierta cada ángulo en grados a radianes. Expresa tu respuesta como múltiplo de p.

1. 260°
2. - 400°
3. 13°

En los problemas 4 a 6, convierta cada ángulo en radianes a grados.

4. $- 8 \frac{pag}{}$
5. $\frac{9p}{2}$
6. $\frac{3p}{4}$

En los problemas 7 a 12, encuentre el valor exacto de cada expresión.

7. $\text{pecado} \frac{pag}{6}$
8. cosa - $\frac{5p}{4}$ b - porque $\frac{3p}{4}$
9. cos1 - 120°2
10. bronceado 330°
11. $\text{pecado} \frac{pag}{2}$ - bronceado $\frac{19p}{4}$
12. 2 sen2 60° - 3 cos 45°

En los problemas 13 a 16, use una calculadora para evaluar cada expresión. Redondea tu respuesta a tres decimales.

13. pecado 17°
14. porque $\frac{2p}{5}$
15. seg 229°
16. cuna $\frac{28p}{9}$

17. Complete cada entrada de la tabla con el signo de cada función.

	sen U cos U tan U sec U csc U cot U					
tu en QI						
usted en QII						
Tú en QIII						
tu en QIV						

Machine Translated by Google

18. Si f1x2 = sen x y f1a2 = 5 3, encuentre f1 - a2.

En los problemas 19 a 21, encuentre el valor de las cinco funciones trigonométricas restantes de u.

19. pecado u = 5/7, u en el cuadrante II 20. cos u = 3 2, 3p/2 6 y 6 2p

21. tan u = - 12/5, pag/2 6 u 6p

En los problemas 22 a 24, el punto 1x, y2 está en el lado terminal del ángulo u en posición estándar. Encuentra el valor exacto de la función trigonométrica dada.

22. 12, 72, pecado u

23. 1 - 5, 112, porque tú

24. 16, - 32, tan u

En los problemas 25 y 26, grafica la función.

25. y = 2 sina x - pag/6 segundo 3

26. y = tana - x + pag/4 b + 2

27. Escribe una ecuación para una gráfica sinusoidal con las siguientes propiedades:

Una = - 3 período = 2p/3 cambio de fase = - 4 pag

28. Logan tiene un jardín en forma de sector de círculo; el borde exterior del jardín tiene 25 pies de largo y el ángulo central del sector es de 50°. Quiere agregar un camino de 3 pies de ancho

el borde exterior. ¿Cuántos pies cuadrados de adoquines necesitará para construir el camino?

29. El húngaro Adrian Annus ganó la medalla de oro en lanzamiento de martillo en los Juegos Olímpicos de Atenas 2004 con una distancia ganadora de 83,19 metros.* La prueba consiste en balancear en círculo una pesa de 16 libras atada a un cable de 190 centímetros de largo y luego liberándolo. Suponiendo que se suelte en un ángulo de 45° con respecto al suelo, el martillo recorrerá una distancia de

$\frac{v_0^2}{g}$ metros, donde g = 9,8 metros/segundo2 y v0 es la g lineal

Velocidad del martillo cuando se suelta. ¿A qué velocidad (rpm) estaba moviendo el martillo al soltarlo?

*Annus fue despojado de su medalla después de negarse a cooperar con las pruebas de drogas posteriores a la medalla.

Revisión acumulativa

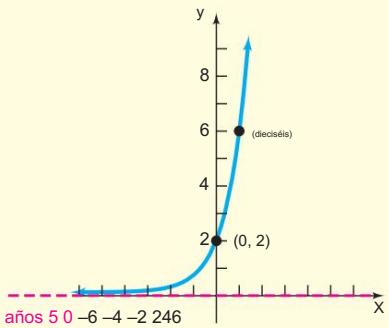
1. Encuentra las soluciones reales, si las hay, de la ecuación

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

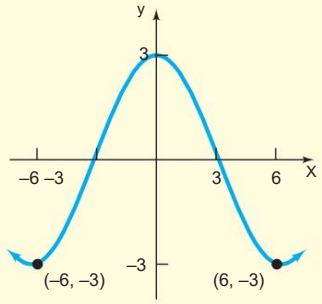
2. Encuentra una ecuación para la recta con pendiente - 3 que contiene el punto 1 - 2, 52.
3. Encuentre una ecuación para un círculo de radio 4 y centro en el punto 10, - 22.
4. Describe la ecuación 2x - 3y = 12. Gráficala.
5. Describe la ecuación x2 + y2 - 2x + 4y - 4 = 0. Gráficalo.
6. Usa transformaciones para graficar la función.

$$y = 1x - 32^{2} + 2$$

7. Dibuja una gráfica de cada una de las siguientes funciones. Etiqueta en al menos tres puntos en cada gráfico.
   (a) y = x2 (b) y = x3
   (c) y = ex (d) y = ln x
   (e) y = sen x (f) y = tan x
8. Encuentra la función inversa de f1x2 = 3x - 2.
9. Encuentra el valor exacto de 1sen 14°2 2 + 1cos 14°2 2 - 3.
10. Grafica y = 3 sen12x2.
11. Encuentra el valor exacto de tan pag/4 . - 3 por 6 pag + csc pag/6.
12. Encuentra una función exponencial para la siguiente gráfica. Exprese su respuesta en la forma y = Abx .



13. Encuentra una función sinusoidal para la siguiente gráfica.



14. (a) Encuentre una función lineal que contenga los puntos 1 - 2, 32 y 11, - 62. ¿Cuál es la pendiente? ¿Cuáles son las intersecciones de la función? Grafica la función. Asegúrese de etiquetar las intersecciones

    (b) Encuentre una función cuadrática con vértice 11, - 62 que contenga el punto 1 - 2, 32. ¿Cuáles son las intersecciones de la función? Grafica la función.

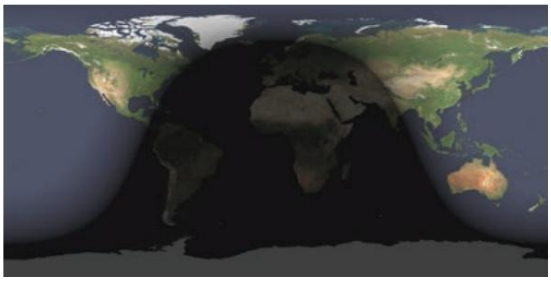
    (c) Demuestre que no existe una función exponencial de la forma f1x2 = aex que contenga los puntos 1 - 2, 32 y 11, - 62.

15. (a) Encuentre una función polinómica de grado 3 cuya intersección con el eje y es 5 y cuyas intersecciones con el eje x son - 2, 3 y 5. Grafica la función.

    (b) Encuentre una función racional cuya intersección con el eje y sea 5 y cuyas intersecciones con el eje x sean - 2, 3 y 5 que tenga la recta x = 2 como asíntota vertical. Grafica la función.

Machine Translated by Google

Proyectos del Capítulo



Proyecto basado en Internet

I. Duración del día revisada Vaya a http://en.wikipedia.org/wiki/latitude y lea sobre latitud. Luego vaya a http://www.orchidculture.com/COD/daylength.html.

1. Para una latitud particular, registre en una tabla la duración del día para los distintos días del año. Para el 1 de enero, utilice 1 como día, para el 16 de enero, utilice 16 como día, para el 1 de febrero, utilice 32 como día, y así sucesivamente. Ingrese los datos en una hoja de cálculo de Excel usando la columna B para el día del año y la columna C para la duración del día.

2. Dibuje un diagrama de dispersión de los datos con el día del año como variable independiente y la duración del día como variable dependiente usando Excel. (El proyecto del Capítulo 3 describe cómo dibujar un diagrama de dispersión en Excel).

3. Determine la función sinusoidal del mejor ajuste, y = A sin1Bx + C2 + D, como sigue:

   (a) Ingrese las estimaciones iniciales para los valores de A, B, C y D en la columna A con el valor de A en la celda A1, B en la celda A2, C en la celda A3 y D en la celda A4.

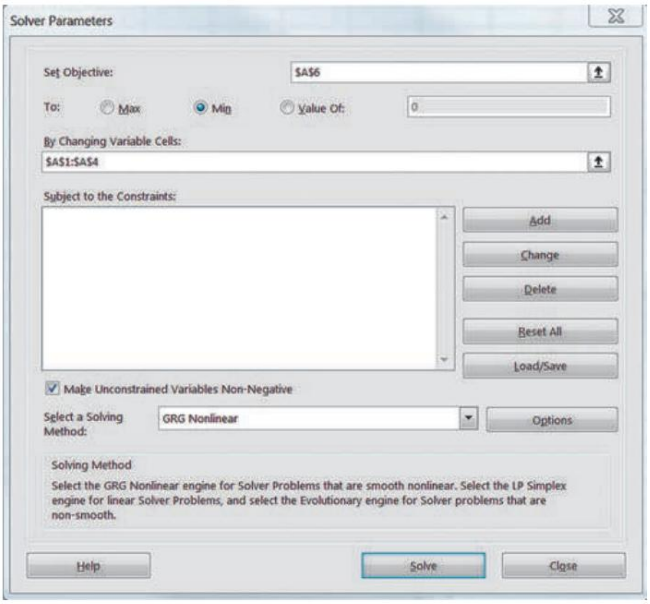
   (b) Ingrese ;=A$1*sin1A$2*B1+A$3)+A$4< en la celda D1. Copie esta entrada de celda en las celdas debajo de D1 para tantas filas como datos haya. Por ejemplo, si la columna C va a la fila 23, entonces la columna D también debería ir a la fila 23.

   (c) Ingrese ;= 1D1- C1)¿2< en la celda E1. Copie esta entrada debajo de la celda E1 como se describe en la parte 3(b).

   (d) La idea detrás del ajuste de curvas es hacer que la suma de las diferencias al cuadrado entre lo predicho y las observaciones reales sea lo más pequeña posible. Ingrese ;=sum1E1..E#2< en la celda A6, donde # representa el número de fila del último punto de datos. Por ejemplo, si tiene 23 filas de datos, ingrese "=sum(E1..E23)" en la celda A6.

   (e) Ahora, instale la función Solver de Excel. Para hacer esto, haga clic en la pestaña Archivo y luego seleccione Opciones. Seleccione Complementos. En el menú desplegable titulado "Administrar", elija Complementos de Excel y luego haga clic en Ir. . . Controlar el cuadro titulado "Complemento Solver" y haga clic en Aceptar. El complemento Solver ahora está disponible en la pestaña Datos. Elija Solucionador. Complete la pantalla como se muestra a continuación.

   Haga clic en Resolver. Los valores de A, B, C y D se encuentran en las celdas A1 a A4. ¿Cuál es la función sinusoidal de mejor ajuste?



Cita: Excel © 2018 Microsoft Corporation. Usado con permiso de Microsoft.

4. Determina el día más largo del año según tu modelo. ¿Cuál es la duración del día en el día más largo del año?
   Determina el día más corto del año según tu modelo. ¿Cuál es la duración del día en el día más corto del año?

5. ¿ En qué días la duración del día es exactamente de 12 horas según su modelo?

6. Busque el día en que ocurren el equinoccio de primavera y el equinoccio de otoño. ¿Cómo coinciden con los resultados obtenidos en la parte 5?

7. ¿ Crees que tu modelo describe con precisión la relación entre el día del año y la duración del día?

8. Utilice su modelo para predecir las horas de luz del día para la latitud que seleccionó para varios días del año. Vaya al Old Farmer's Almanac u otro sitio web (como http://astro.unl.edu/classaction/animations/coordsmotion/daylighthoursexplorer.html) para determinar las horas de luz del día para la latitud que seleccionó. ¿Cómo se comparan los dos?

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC):

II. Mareas Los datos de una tabla de mareas se utilizan para crear una función sinusoidal que modela las mareas.

III. Proyecto en Motorola Transmisión digital por aire Aprenda cómo Motorola Corporation transmite secuencias digitales modulando la fase de las ondas portadoras.

IV. Identificación de los picos de las montañas en Hawái La visibilidad de una montaña se ve afectada por su altitud, su distancia desde el espectador y la Curvatura de la superficie terrestre. La trigonometría se puede utilizar para determinar si se puede ver un objeto distante.

V. La tecnología experimental CBL se utiliza para modelar y estudiar los efectos de la amortiguación en las ondas sonoras.

Machine Translated by Google

Trigonometría analítica

7

Mapeando tu mente

La capacidad de organizar el material en la mente es clave para la comprensión. Ha estado expuesto a muchos conceptos en este punto del curso y es un ejercicio que vale la pena organizar el material. En el pasado, podíamos organizar el material mediante fichas o un esquema. Pero en el mundo digital actual, podemos utilizar un software interesante que nos permite organizar digitalmente el material que tenemos en la mente y compartirlo con cualquier persona en la Web.

—Ver el Proyecto del Capítulo I basado en Internet—

Una mirada atras

El capítulo 5 introdujo funciones inversas y desarrolló sus propiedades, particularmente la relación entre el dominio y rango de una función y los de su inversa. Aprendimos que sólo las funciones uno a uno tienen función inversa. Pero a veces una restricción apropiada en el dominio de una función que no es uno a uno produce una nueva función que es uno a uno. Entonces la función definida en el dominio restringido tiene una función inversa. Además, vimos que las gráficas de una función y su inversa son simétricas con respecto a la recta y = x.

El capítulo 5 continuó definiendo dos funciones trascendentales: la función exponencial y la inversa de la función exponencial, la función logarítmica. El capítulo 6 definió seis funciones trascendentales más, las funciones trigonométricas, y analizó sus propiedades.

Una mirada hacia el futuro

Las dos primeras secciones de este capítulo definen las seis funciones trigonométricas inversas e investigan sus propiedades. La sección 7.3 analiza ecuaciones que contienen funciones trigonométricas. Las secciones 7.4 a 7.7 continúan con la derivación de identidades. Estas identidades juegan un papel importante en el cálculo, las ciencias físicas y biológicas y la economía, donde se utilizan para simplificar expresiones complicadas.

Describir

7.1 El seno, el coseno y el inverso Funciones tangentes
7.2 La trigonométrica inversa Funciones (continuación)
7.3 Ecuaciones trigonométricas
7.4 Identidades trigonométricas
7.5 Fórmulas de suma y diferencia
7.6 Fórmulas de ángulo doble y medio ángulo
7.7 Producto a suma y suma a producto Fórmulas
Revisión del capítulo
Prueba de capítulo
Revisión acumulativa
Proyectos del Capítulo

Machine Translated by Google

7.1 Funciones inversas seno, coseno y tangente

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Funciones inversas (Sección 5.2, págs. 303–310)
- Valores de las funciones trigonométricas (Sección 6.2, págs. 413–422)
- Propiedades de las funciones seno, coseno y tangente (sección 6.3, págs. 428 y 439)
- Gráficas de las funciones seno, coseno y tangente (secciones 6.4, págs. 443–446 y 6.5, págs. 458–459)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 495.

OBJETIVOS 1 Definir la función seno inverso (p. 486)
2 Encuentre el valor de una función seno inversa (p. 487)
3 Defina la función coseno inverso (p. 489)
4 Encuentra el valor de una función coseno inversa (p. 490)
5 Defina la función tangente inversa (p. 490)
6 Encuentra el valor de una función tangente inversa (p. 492)
7 Utilice propiedades de funciones inversas para encontrar valores exactos de ciertas funciones compuestas (p. 492)
8 Encuentra la función inversa de una función trigonométrica (p. 494)
9 Resolver ecuaciones que involucran funciones trigonométricas inversas (p. 495)

En la sección 5.2 analizamos las funciones inversas y concluimos que si una función es uno a uno, tendrá una función inversa. También observamos que si una función no es uno a uno, es posible restringir su dominio de alguna manera adecuada para que la función restringida sea uno a uno. Por ejemplo, la función y = x2 no es uno a uno; sin embargo, si el dominio está restringido a x Ú 0, la nueva función es
cara a cara.

Otras propiedades de una función uno a uno f y su función inversa f $^{-1}$ que eran
Los aspectos discutidos en la Sección 5.2 se resumen a continuación.

- f $^{-1}$ 1f1x2 2 = x para cada x en el dominio de f.
- f1f $^{-1}$ 1x2 2 = x para cada x en el dominio de f $^{-1}$.
- El dominio de f = el rango de f • La gráfica $^{-1}$, y el rango de f = el dominio de f $^{-1}$.

de una función uno a uno f y la gráfica de su inversa f $^{-1}$ son
simétrico con respecto a la recta y = x.

- Si una función y = f1x2 tiene una función inversa, la ecuación implícita de la función inversa es x = f1y2. Si resolvemos esta ecuación para y, obtenemos la ecuación explícita y = f $^{-1}$ 1x2.

1 Definir la función seno inversa

La Figura 1 muestra la gráfica de y = sen x. Debido a que cada línea horizontal y = b, donde b está entre - 1 y 1, inclusive, corta la gráfica de y = sen x infinitas veces, se deduce de la prueba de la línea horizontal que la función y = sen x no es uni-
a uno.

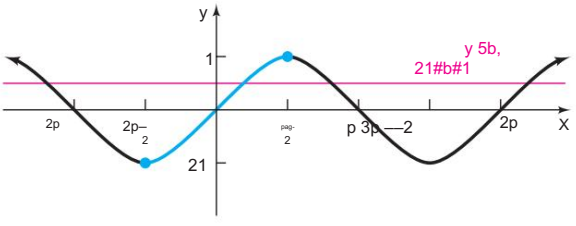


Figura 1 y = sen x, - q 6 x 6 q, -1 … y … 1

Machine Translated by Google

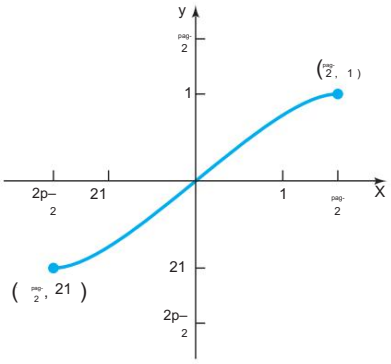


Figura 2

y = sen x, - 2 … X … 2, - 1… y … 1

NOTA Debido a que el dominio restringido de la función seno es c - 2 , 2 días, el rango de la función seno inversa es c - 2 , 2 días, y porque el rango de la función seno es [- 1, 1], el dominio de la función seno inversa es [- 1, 1].

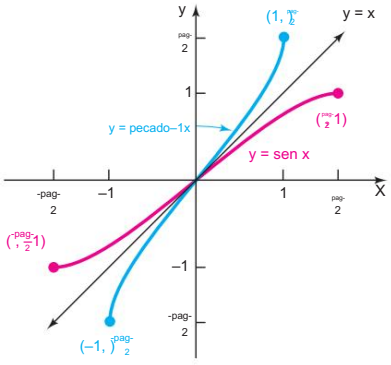


figura 3

y = sen-1 x, -1… x … 1, - 2 … y … 2

Sin embargo, si el dominio de y = sen x está restringido al intervalo c - 2 , 2 días, el función restringida

y = sen x - 2 … X … 2

es uno a uno y tiene una función inversa.* Consulte la Figura 2.

Se obtiene una ecuación para la inversa de y = f1x2 = sen x intercambiando x y y. La forma implícita de la función inversa es x = sen y, - 2 … y … 2. El 2 La forma explícita se llama seno inverso de x y está simbolizada por y = f. -1 1x2 = pecado-1 x.

DEFINICIÓN Función seno inverso

y = sen-1 x si y sólo si x = sen y

donde - 1 … x … 1 y - 2 … y … 2 (1)

El seno inverso de x, y = sen-1 x, se lee como “y es el ángulo o número real cuyo seno es igual a x” o, alternativamente, se lee “y es el seno inverso de x”. Tenga cuidado con la notación utilizada. El superíndice - 1 que aparece en y = sin-1 x no es un exponente sino el símbolo utilizado para indicar la función inversa f de f. (Para evitar confusiones, algunos textos utilizan la notación y = arcsin x en lugar de y = sin-1 x.) -1

La inversa de una función f recibe como entrada un elemento del rango de f y devuelve como salida un elemento en el dominio de f. La función seno restringida, y = f1x2 = sen x, recibe como entrada un ángulo o número real x en la intervalo c - 2 , 2 d y genera un número real en el intervalo 3 - 1, 14 . Por lo tanto, la función seno inversa, y = sen-1 x, recibe como entrada un número real en el intervalo 3 - 1, 14 o - 1 … x … 1, su dominio, y genera un ángulo o número real en el intervalo c - 2 , 2 días o - 2 … y … 2, su alcance.

La gráfica de la función seno inversa se puede obtener reflejando la porción restringida de la gráfica de y = f1x2 = sen x alrededor de la recta y = x, como se muestra en la Figura 3.

Ahora resuelve el problema 5

2 Encuentre el valor de una función seno inversa

Para algunos números x, es posible encontrar el valor exacto de y = sen-1 x.

EJEMPLO 1 Encontrar el valor exacto de una función seno inversa

Encuentra el valor exacto de: sin-1 1

Solución Sea u = sen-1 1. Entonces u es el ángulo, - 2 …tú… 2, cuyo seno es igual a 1.

u = pecado-1 1 - 2 …tú… 2

seno u = 1 - 2 …tú… 2 Por definición de y · sin·1 x

(continuado)

*Aunque hay muchas otras formas de restringir el dominio y obtener una función uno a uno, los matemáticos han acordado utilizar el intervalo c - 2 , 2 días, para definir la inversa de y = sen x.

Machine Translated by Google

Ahora mire la Tabla 1 y la Figura 4.

tabla 1

Ud.	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
pecado U	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

El único ángulo u en el intervalo c $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ d cuyo seno es 1 es 2 d , $\frac{\pi}{2}$. (Tenga en cuenta que el pecado $\frac{5\pi}{2}$ también es igual a 1, pero $\frac{5\pi}{2}$ se encuentra fuera del intervalo c $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ lo cual no está permitido.) Entonces

$$\text{pecado}^{-1}\, 1 = \frac{\pi}{2}$$

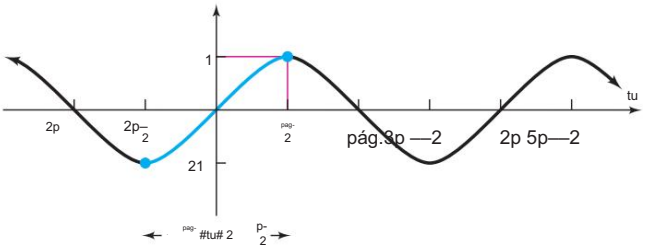


Figura 4

Ahora problema de trabajo 1 1

EJEMPLO 2 Encontrar el valor exacto de una función seno inversa

Encuentre el valor exacto de: $\text{sen}^{-1}\, a -\frac{1}{2} b$

Solución Sea u = $\text{sen}^{-1}\, a -\frac{1}{2} b$. Entonces u es el ángulo, $-\frac{\pi}{2} \ldots tú \ldots \frac{\pi}{2}$, cuyo seno es igual a $-\frac{1}{2}$.

$$-\frac{1}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} \ldots tú \ldots \frac{\pi}{2}$$

$$\text{pecado } u = -\frac{1}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} \ldots tú \ldots \frac{\pi}{2}$$

(Consulte la Tabla 1 y la Figura 4, si es necesario). El único ángulo en el intervalo c $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ cuyo seno es - es - $\frac{1}{2}$ $-\frac{\pi}{6}$, entonces

$$\text{pecado}^{-1}\, a -\frac{1}{2} b = -\frac{\pi}{6}$$

Ahora resuelve el problema 1 7

Para la mayoría de los números x, se debe aproximar el valor y = $\text{sen}^{-1}\, x$.

EJEMPLO 3 Encontrar un valor aproximado de una función seno inversa

Encuentre un valor aproximado de cada una de las siguientes funciones:

(a) $\text{pecado}^{-1}\, \frac{1}{3}$ (b) $\text{pecado}^{-1}\, a -\frac{1}{4}$ segundo

Expresa la respuesta en radianes redondeados a dos decimales.

Machine Translated by Google

Solución (a) Debido a que el ángulo se va a medir en radianes, primero configure el modo de la calculadora a radianes.* Redondeado a dos decimales, sen-1 $\frac{1}{3}$ = 0,34.

(b) La Figura 5(a) muestra la solución usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C en modo radianes. La Figura 5(b) muestra la solución usando Desmos. Redondeado a dos decimales lugares, pecado-1 a - $\frac{1}{4}$b = - 0,25.

Figura 5 (a) TI-84 Plus C (b) Desmos

Ahora resuelve el problema 2 7

3 Defina la función coseno inverso

La Figura 6 muestra la gráfica de y = cos x. Debido a que cada línea horizontal y = b, donde b está entre -1 y 1, inclusive, corta la gráfica de y = cos x infinitas veces, se deduce que la función coseno no es uno a uno.

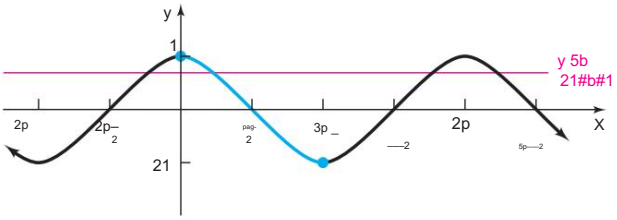


Figura 6 y = cos x, - q 6 x 6 q, -1 … y … 1

Sin embargo, si el dominio de y = cos x está restringido al intervalo 30, p4, la función restringida

y = porque x 0... x ...p

es uno a uno y tiene una función inversa.† Consulte la Figura 7.

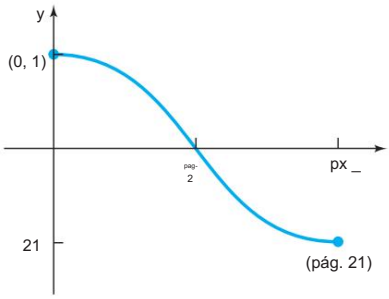


Figura 7
y = cos x, 0 … x … p, -1 … y … 1

Se obtiene una ecuación para la inversa de y = f1x2 = cos x intercambiando x y y. La forma implícita de la función inversa es x = cos y, 0… y … p. La forma explícita 1x2 = cos-1 coseno inverso de x y está simbolizada por y = f (o por y = arccos x). -1 x se llama

DEFINICIÓN Función Coseno Inverso

$$y = \cos^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \cos y \qquad (2)$$

donde - 1 … x … 1 y 0 … y … p

Aquí y es el ángulo cuyo coseno es x. Debido a que el rango de la función coseno, y = cos x, es - 1 … y … 1, el dominio de la función inversa y = cos-1 x es - 1 … x … 1. Debido a que el dominio restringido de la función coseno, y = porque x, es 0 … x … p, el rango de la función inversa y = cos-1 x es 0 … y … p.

La gráfica de y = cos-1 x se puede obtener reflejando la porción restringida de la gráfica de y = cos x con respecto a la recta y = x, como se muestra en la Figura 8.

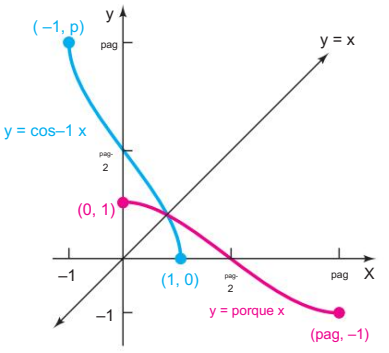


Figura 8
y = cos-1 x, -1 … x … 1, 0 … y … p

Ahora trabaja el problema 7

*En la mayoría de las calculadoras, el seno inverso se obtiene presionando ·SHIFT · o · 2nd ·, seguido de ·sen ·. En algunas calculadoras, primero se presiona ·sin-1 · , luego se ingresa 1>3; en otros, esta secuencia se invierte. Consulte el manual del propietario para conocer la secuencia correcta.

† Esta es la restricción generalmente aceptada para definir la función coseno inversa.

Machine Translated by Google

4 Encuentre el valor de una función coseno inversa

EJEMPLO 4 Encuentre el valor exacto de una función coseno inversa

Encuentra el valor exacto de: cos-1 0

Solución

Sea u = cos-1 0. Entonces u es el ángulo, 0... u... p, cuyo coseno es igual a 0.

tu = cos-1 0 0 … u … p

porque tu = 0 0 … u … p

Tabla 2

Ud.	porque U
0	1
pag/6	23/2
pag/4	22/2
pag/3	1/2
pag/2	0
2p/3	-1/2
3p/4	-22/2
5p/6	-23/2
pag	-1

Mire la Tabla 2 y la Figura 9.

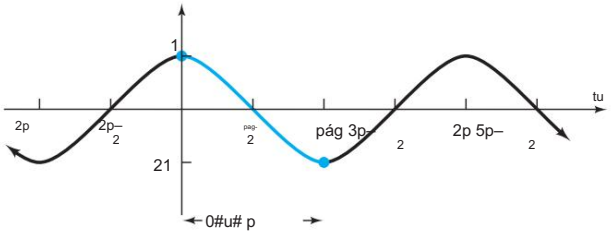


Figura 9

El único ángulo u dentro del intervalo 30, p4 cuyo coseno es 0 es pag/2. [Tenga en cuenta que cos 3p/2 entonces estos valores y porque a - pag/2 b también son iguales a 0, pero se encuentran fuera del intervalo 30, p4, no están permitidos.] Por lo tanto,

cos-1 0 = pag/2

EJEMPLO 5 Encontrar el valor exacto de una función coseno inversa

Encuentra el valor exacto de: cos-1 a - 12/2 segundo

Solución

Sea u = cos-1 a - 12/2b. Entonces u es el ángulo, 0 … u … p, cuyo coseno es igual a - u = 12/2.

cos-1 a - 12/2 segundo 0 … u … p

porque tu = - 12/2 0 … u … p

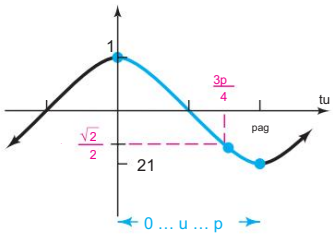


Figura 10

Mire la Tabla 2 y la Figura 10.

El único ángulo u dentro del intervalo 30, p4 cuyo coseno es - es 12/2 3p/4, entonces

cos-1 a - 12/2 segundo = 3p/4

Ahora resuelve el problema 2 1

5 Defina la función tangente inversa

La figura 11 en la página siguiente muestra la gráfica de y = tan x. Debido a que cada línea horizontal corta la gráfica infinitas veces, se deduce que la función tangente no es uno a uno.

Machine Translated by Google

Sin embargo, si el dominio de y = tan x está restringido al intervalo a - $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$b, el función restringida

y = bronceado x - $\frac{\pi}{2}$ 6x6 _ _ $\frac{\pi}{2}$

es uno a uno y por lo tanto tiene una función inversa.* Consulte la Figura 12.

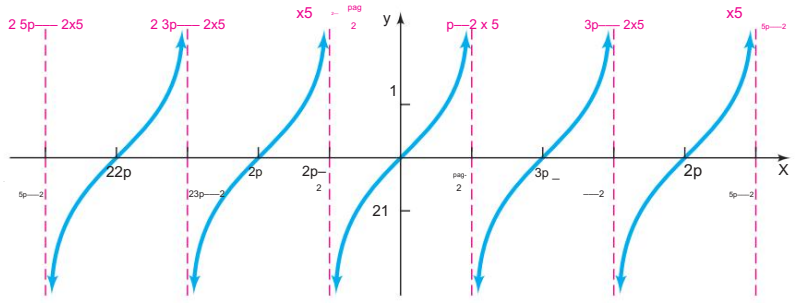


Figura 11

y = tan x, - q 6 x 6 q, x no es igual a múltiplos impares de - q 6 y 6 q $\frac{\pi}{2}$,

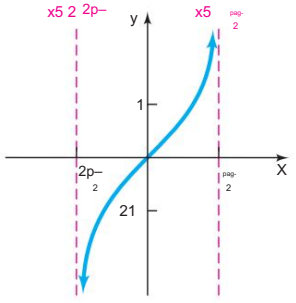


Figura 12

y = tan x, - 2 $\frac{\pi}{2}$ 6x6 _ _ $\frac{\pi}{2}$, - q 6 y 6 q

Se obtiene una ecuación para la inversa de y = f1x2 = tanx intercambiando x y y. La forma implícita de la función inversa es x = tany, - 2 $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$.

La forma explícita se llama tangente inversa de x y se simboliza 1x2 = tan-1 x 1 o por y = arctanx2. por y = f $^{-1}$

DEFINICIÓN Función tangente inversa

y = tan-1 x si y sólo si x = tany

donde - q 6 x 6 q y - 2 $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$ (3)

Aquí y es el ángulo cuya tangente es x. El dominio de la función y = tan-1 x es - q 6 x 6 q, y su rango es - 2 $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$. La gráfica de y = tan-1 x puede ser obtenido reflejando la porción restringida de la gráfica de y = tanx sobre el línea y = x, como se muestra en la Figura 13.

Ahora trabaja el problema 9

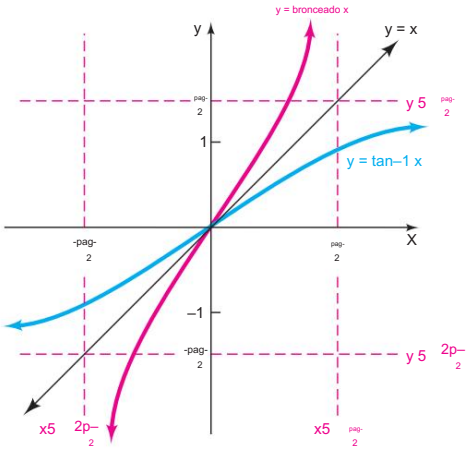


Figura 13 y = tan-1x, - q 6 x 6 q, - 2 $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$

*Ésta es la restricción generalmente aceptada.

Machine Translated by Google

6 Encuentre el valor de una función tangente inversa

EJEMPLO 6 Encontrar el valor exacto de una función tangente inversa

Encuentre el valor exacto de:

(a) tan-1 1 (b) tan-1 1 - 232

Solución

(a) Sea u = tan-1 1. Entonces u es el ángulo, - $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$, cuya tangente es igual a 1.

u = tan-1 1 - 2 $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$

tanu = 1 - $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$

Tabla 3

Ud.	bronceado U
- $\frac{\pi}{2}$	Indefinido
- $\frac{\pi}{3}$	- 23
- $\frac{\pi}{4}$	-1
- $\frac{\pi}{6}$	- $\frac{23}{3}$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{23}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	23
$\frac{\pi}{2}$	Indefinido

Mire la Tabla 3. El único ángulo u dentro del intervalo a - $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$b cuyo la tangente es 1 es $\frac{\pi}{4}$, entonces

tan-1 1 = $\frac{\pi}{4}$

(b) Sea u = tan-1 1 - 232. Entonces u es el ángulo, - es igual a - $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$, cuya tangente 23.

tu = tan-1 1 - 232 - $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$

tan u = - 23 - $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$

Mire la Tabla 3. El único ángulo u dentro del intervalo a - $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$b cuyo tangente es - 23 es - $\frac{\pi}{3}$, entonces

tan-1 1 - 232 = - $\frac{\pi}{3}$

Ahora resuelve el problema 1 5

7 Utilice propiedades de funciones inversas para encontrar valores exactos de ciertas funciones compuestas

Recuerde del análisis de funciones y sus inversas en la sección 5.2 que 1x2 2 = x para todo x en En $^{-1}$ 1f1x2 2 = x para todo x en el dominio de f y que f1f $^{-1}$ términos de la función seno y dominio f de f $^{-1}$ · su inversa, estas propiedades son de la forma

F $^{-1}$ 1f1x2 2 = sen-1 1sen x2 = x donde - 2 $\frac{\pi}{2}$ … X … $\frac{\pi}{2}$ (4a)

f1f $^{-1}$ 1x2 2 = sen1sen-1 x2 = x donde - 1 … x … 1 (4b)

EJEMPLO 7 Encontrar el valor exacto de ciertas funciones compuestas

Encuentre el valor exacto, si lo hay, de cada función compuesta.

(a) sen-1 asín p 8 segundo (b) sen-1 como sen 5p segundo

Machine Translated by Google

Solución (a) La función compuesta sen-1 asín p 8 b sigue la forma de propiedad (4a).

porque 8 pag está en el intervalo c - pag 2, pag 2 días, use la propiedad (4a) para concluir

sen-1 asín p 8 b = pag 8

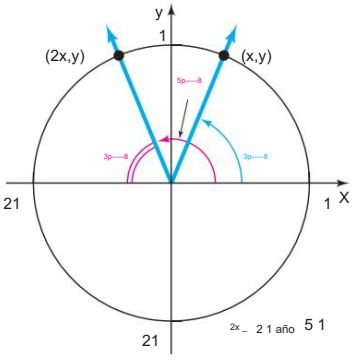


Figura 14 pecado = pecado 5p 8 3p 8

(b) La función compuesta sen-1 asín 5p 8 b sigue la forma de propiedad (4a). Pero no está porque 5p 8 en el intervalo c - 2 d , sen-1 asín 5p 8b · 5p 8.

Para encontrar sen-1 asín 8pb, primero encuentre un ángulo u en el intervalo c - pag 2, pag 2 días para cual pecado u = pecado 5p 8.

La figura 14 ilustra que el pecado 5p 8 = y = pecado 3p ya que es en el 3p 8 intervalo c - pag 2, pag 2 d, podemos usar 4(a).

pecado-1 como 8pb = sen-1 asín 3p 8 b = 3p 8 C

Utilice la propiedad (4a).

Ahora resuelve el problema 4 3

EJEMPLO 8

Encontrar el valor exacto de ciertas funciones compuestas

Encuentre el valor exacto, si lo hay, de cada función compuesta.

(a) sen1sen-1 0,52 (b) sen1sen-1 1,82

Solución

(a) La función compuesta sen 1sen-1 0,52 sigue la forma de la propiedad (4b).
Como 0,5 está en el intervalo 3 - 1, 14, podemos usar 4(b).

sen1sen-1 0,52 = 0,5

(b) La función compuesta sen1sen-1 1.82 sigue la forma de la propiedad (4b). Pero sen-1 ya que 1,8 no está en el dominio de la función seno inversa, 3 - 1, 14, 1,8 no lo es, definida. Por lo tanto, sin1sin-1 1.82 tampoco está definido.

Ahora resuelve el problema 5 1

Para la función coseno y su inversa, se cumplen las siguientes propiedades.

F^{-1} 1f1x2 2 = cos-1 1cos x2 = x	donde 0... x ...p	(5a)
f1f $^{-1}$ 1x2 2 = cos1cos-1 x2 = x	donde - 1 … x … 1	(5b)

EJEMPLO 9

Uso de propiedades de funciones inversas para encontrar el valor exacto de ciertas funciones compuestas

Encuentre el valor exacto, si lo hay, de cada función compuesta.

(a) cos-1 acos p 12

(b) cos 3cos-1 1 - 0,42 4

b (c) cos-1 c cosa - 2p 3 dormitorios

(d) cos1cos-1 p2

Machine Translated by Google

Solución (a) cos-1 acos p 12 b = pag 12 PAG 12 está en el intervalo 30, P4 ; utilizar la propiedad (5a).

(b) cos 3cos-1 1 - 0,42 4 = - 0,4 ·0,4 está en el intervalo 3 ·1, 14; utilizar la propiedad (5b).

(c) El ángulo - no está 2p 3 en el intervalo 30, p4, por lo que la propiedad (5a) no puede ser usado. Sin embargo, como la función coseno es par, cos a - 2p 3 b = porque 2p 3 . Como está 2p 3 en el intervalo 30, p4, se puede utilizar la propiedad (5a), y

cos-1 ccos a- 2p 3 bd = cos-1 acos 2p 3 b = 2p 3

(d) Debido a que p no está en el intervalo [- 1, 1], el dominio de la función coseno inversa, cos-1 p no está definido. Esto significa la función compuesta cos 1cos-1 p2 tampoco está definido.

Ahora resuelve los problemas 3 9 y 5 5

Para la función tangente y su inversa, se cumplen las siguientes propiedades.

F -1 1f1x2 2 = tan-1 1tan x2 = x donde - pag 2 6x6 _ _ pag 2

f1f -1 1x2 2 = tan1tan-1 x2 = x donde - q 6 x 6 q

Ahora resuelve el problema 4 5

8 Encuentre la función inversa de una función trigonométrica

EJEMPLO 10 Encontrar la función inversa de una función trigonométrica

(a) Encuentre la función inversa f (b) -1 de f1x2 = 2 sen x - 1, - 2 pag … X … pag 2 .

Encuentre el rango de f y el dominio y rango de f -1 .

Solución

(a) La función f es uno a uno y, por tanto, tiene una función inversa. Siga los pasos en página 309 para encontrar la función inversa.

y = 2 sen x - 1

x = 2 sen y - 1 Intercambia x e y.

x + 1 = 2 sen y Resuelve para y.

pecado y = x + 1 2

y = pecado-1 x + 1 2 Definición de función seno inversa

La función inversa es f -1 1x2 = pecado-1 x + 1 .

2 (b) Para encontrar el rango de f, utilice el hecho de que el dominio de f -1 es igual al rango de f. Dado que el dominio de la función seno inversa es el intervalo 3 - 1, 14 , la argumento x + 1 2 debe estar en el intervalo 3 - 1, 14 .

- 1… x + 1 2 … 1

- 2… x + 1… 2 Multiplicar por 2.

- 3... x ... 1 Resta 1 de cada parte.

Machine Translated by Google

NOTA El rango de f también se puede encontrar mediante transformaciones. El rango de y = sen x es [- 1, 1]. el rango de y = 2 sen x es [- 2, 2] debido al estiramiento vertical por un factor de 2. El rango de f 1x2 = 2 sen x - 1 es [- 3, 1] debido al desplazamiento hacia abajo de 1 unidad. j

El dominio de f^{-1} es $5x \cdot -3 \ldots x \ldots 16$, o el intervalo $3 - 3, 14$. Entonces el rango de f es el intervalo $3 - 3, 14$. El rango de f^{-1} es igual al dominio de f. Entonces el rango apagado $_{-1}$ es $c - \frac{\text{pag}}{2}, \frac{\text{pag}}{2}d$.

Ahora resuelve el problema 6 1

9 Resolver ecuaciones que involucran funciones trigonométricas inversas

Las ecuaciones que contienen funciones trigonométricas inversas se denominan ecuaciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 11 Resolver una ecuación trigonométrica inversa

Resuelve la ecuación: $3 \text{ sen}^{-1} x = p$

Solución Para resolver una ecuación que involucra una única función trigonométrica inversa, primero aísla la función trigonométrica inversa.

$$3 \text{ pecado}^{-1} x = p$$

$$\text{pecado}^{-1} x = \frac{\text{pag}}{3}$$ Divide ambos lados por 3.

$$x = \text{pecado} \frac{\text{pag}}{3}$$ y · sen·1 x si y sólo si x · sen y.

$$x = \frac{13}{2}$$

El conjunto solución es e 2f3

Ahora resuelve el problema 6 7

7.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. ¿Cuáles son el dominio y el rango de y = sen x? (págs. 429 y 430)

2. Si el dominio de una función uno a uno es 33, q 2, el rango de su inversa es _____. (págs. 303–310)

3. Verdadero o Falso La gráfica de y = cos x es decreciente en el intervalo 30, p4. (págs. 445–446)

4. bronceado $\frac{\text{pag}}{4}$ = _____; pecado $\frac{\text{pag}}{3}$ = _____; sina- $\frac{\text{pag}}{6}$ b = _____; porque p = _____. (págs. 413–422)

Conceptos y vocabulario

5. y = sen-1 x si y sólo si _____, donde - 1 … x … 1 y 2 $\frac{\text{pag}}{}$ … y … $\frac{\text{pag}}{2}$.

6. cos-1 1cos x2 = x para todos los números x para los _____.

7. Verdadero o Falso El dominio de y = cos-1 x es - 1 … x … 1. cuales

8. Verdadero o Falso sin1sin-1 02 = 0 y cos1cos-1 02 = 0.

9. Verdadero o Falso y = tan-1 x si y sólo si x = tan y, donde - q 6 x 6 q y - 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 6 y 6 $\frac{\text{pag}}{2}$.

10. Opción múltiple sin-1 1sen x2 = x para todos los números x para cual

(a) - q 6 x 6 q (b) 0... x ...p

(c) - 1... x ... 1 (d) - 2 $\frac{\text{pag}}{}$ … X … $\frac{\text{pag}}{2}$

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 26, encuentre el valor exacto de cada expresión.

11. pecado-1 0

12. cos-1 1

13. cos-1 1 - 12

14. pecado-1 1 - 12

15. bronceado-1 0

16. tan-1 1 - 12

17. pecado-1 $\frac{12}{2}$

18. bronceado-1 $\frac{13}{3}$

19. pecado-1 a $\frac{13}{2 \text{ segundo}}$

20. tan-1 23

21. cos-1a - $\frac{13}{2 \text{ segundo}}$

22. pecado-1 a - $\frac{12}{2 \text{ segundo}}$

- 23. cos-1 a - 2 b $\frac{1}{}$

24. cos-1 $\frac{22}{2}$

25. pecado-1 $\frac{1}{2}$

26. tan-1 a- $\frac{23}{3 \text{ segundo}}$

En los problemas 27 a 38, use una calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión redondeado a dos decimales.

27. pecado-1 0.1 30. tan-1 5

28. cos-1 0,6

29. tan-1 0.2

31. pecado-1 $\frac{1}{8}$

32. cos-1 $\frac{7}{8}$

33. tan-1 1 - 32

34. tan-1 1 - 0,42

35. cos-1 1 - 0.442

36. pecado-1 1 - 0,122

37. pecado-1 $\frac{13}{5}$

38. cos-1 $\frac{12}{3}$

En los problemas 39 a 58, encuentre el valor exacto, si lo hay, de cada función compuesta. Si no hay ningún valor, indique que "no está definido". No use una calculadora.

39. cos-1 acos 4p 5 b

40. sin-1 csin a - 10 bd $\frac{\text{pag}}{}$ 44.

41. sin-1 csina - 45. $\frac{3p}{7 \text{ dormitorios}}$

42. tan-1 ctana - 46. $\frac{3p}{8}$ hab

43. pecado-1 asín 9pb

cos-1 c cosa - 48. $\frac{5p}{3 \text{ dormitorios}}$

tan-1 atan 4p 5 b

tan-1 ctana - 50. tan-1 $\frac{2p}{3 \text{ dormitorios}}$

47. sin-1 csina - 51. $\frac{3p}{4 \text{ dormitorios}}$

cos-1 c cosa - 52. $\frac{\text{pag}}{4 \text{ dormitorios}}$

49. tan-1 ctana - $\frac{3p}{2 \text{ dormitorios}}$

ctana p $\frac{}{2 \text{ dormitorios}}$

sinasin-1 1 $\frac{}{4 \text{ segundo}}$

cosc cos-1 a - $\frac{2}{3 \text{ dormitorios}}$

53. tan3tan-1 1 - 22 4

54. tan1tan-1 42

55. cos1cos-1 1.22

56. pecado3sin-1 1 - 22 4

57. pecado3sen-1 1 - 1,52 4

58. tan1tan-1 p2

En los problemas 59 a 66, encuentre la función inversa f^{-1} de cada función f. Encuentre el rango de f y el dominio y rango de f^{-1}.

59. f1x2 = 2 tan x - 3; - 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 6x6 $\frac{\text{pag}}{2}$

60. f1x2 = 5 sen x + 2; - 2 $\frac{\text{pag}}{}$ … X … $\frac{\text{pag}}{2}$

61. f1x2 = - 2 cos13x2; 0... x ... $\frac{\text{pag}}{3}$

62. f1x2 = 3 sen12x2; - 4 $\frac{\text{pag}}{}$ … X … $\frac{\text{pag}}{4}$

63. f1x2 = cos1x + 22 + 1; - 2 … x … p - 2

64. f1x2 = - tan1x + 12 - 3; - 1 - $\frac{\text{pag}}{2}$ 6x6 $\frac{\text{pag}}{2}$ - 1

65. f1x2 = 2 cos13x + 22; - 3 $\frac{2}{}$ … X … - $\frac{2}{3}$ + $\frac{\text{pag}}{3}$

66. f1x2 = 3 sen12x + 12; - 2 $\frac{1}{}$ - $\frac{\text{pag}}{4}$ … X … - $\frac{1}{2}$ + $\frac{\text{pag}}{4}$

En los problemas 67 a 74, encuentre la solución exacta de cada ecuación.

67. 4 pecado-1 x = p

68. 2 cos-1x = p

69. - 6 pecado-1 13x2 = p

70. 3 cos-1 12x2 = 2p

71. - 4 tan-1x = p

72. 3 tan-1x = p

73. 5 pecado-1x - 2p = 2 pecado-1x - 3p

74. 4 cos-1x - 2p = 2 cos-1x

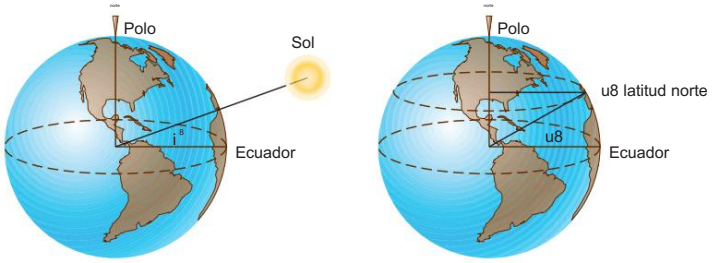
Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

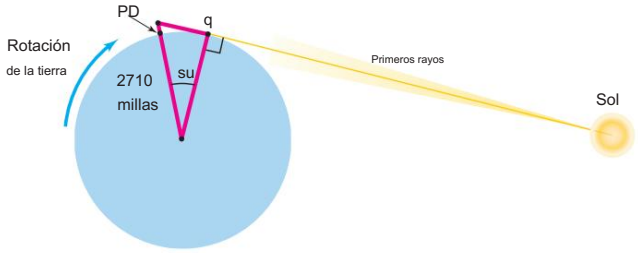
En los problemas 75 a 80, utilice la siguiente discusión. La formula

$$D = 24J1 - \frac{\cos\text{-}1\ 1\tan i \tan u2}{\text{pag}} R$$

se puede utilizar para aproximar el número de horas de luz diurna D cuando la declinación del Sol es i° en una ubicación u° de latitud norte para cualquier fecha entre el equinoccio de primavera y el equinoccio de otoño. La declinación del Sol se define como el ángulo i entre el plano ecuatorial y cualquier rayo de luz procedente del Sol. La latitud de un lugar es el ángulo u entre el ecuador y el lugar en la superficie de la Tierra, con el vértice del ángulo ubicado en el centro de la Tierra. Ver la figura. Para utilizar la fórmula, cos-1 1tan i tan u2 debe expresarse en radianes.



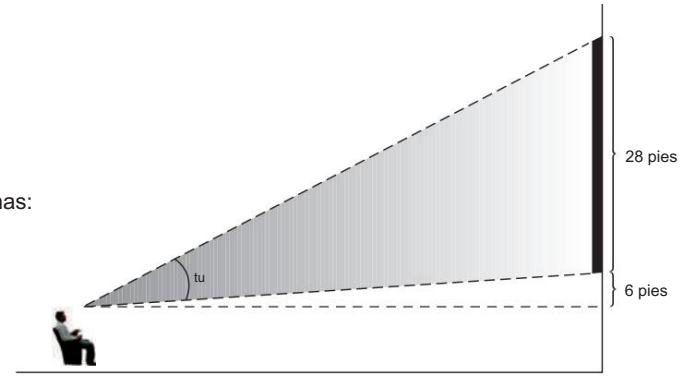
75. Calcule el número de horas de luz del día en Nueva York, Nueva York (40°45′ latitud norte), para las siguientes fechas:
    (a) Solsticio de verano 1i = 23,5°2
    (b) Equinoccio de primavera 1i = 0°2
    (c) 4 de julio 1i = 22°48′2
76. Calcule el número de horas de luz diurna en Houston, Texas (29°45′ latitud norte), para las siguientes fechas:
    (a) Solsticio de verano 1i = 23,5°2
    (b) Equinoccio de primavera 1i = 0°2
    (c) 4 de julio 1i = 22°48′2
77. Calcule el número de horas de luz diurna en Anchorage, Alaska (61°10′ de latitud norte), para las siguientes fechas:
    (a) Solsticio de verano 1i = 23,5°2
    (b) Equinoccio de primavera 1i = 0°2
    (c) 4 de julio 1i = 22°48′2
78. Calcule el número de horas de luz diurna en la ciudad A, estado B (23°48′ latitud norte), para las siguientes fechas en las partes (a) a (c).
    (a) Solsticio de verano 1i = 23,5°2
    (b) Equinoccio de primavera 1i = 0°2
    (c) 4 de julio 1i = 22°48′2
79. Calcule el número de horas de luz diurna para cualquier ubicación situada a 66°30′ de latitud norte para las siguientes fechas:
    (a) Solsticio de verano 1i = 23,5°2
    (b) Equinoccio de primavera 1i = 0°2
    (c) 4 de julio 1i = 22°48′2
    (d) Gracias a la simetría de la trayectoria orbital de la Tierra alrededor del Sol, el número de horas de luz diurna en el solsticio de invierno se puede encontrar calculando el número de horas de luz diurna en el solsticio de verano y restando este resultado de 24 horas. Calcule el número de horas de luz diurna para este lugar en el solsticio de invierno. ¿A qué conclusión llega acerca de la luz del día en una ubicación a 66°30′ de latitud norte?
80. Calcule el número de horas de luz diurna en el ecuador (0° de latitud norte) para las siguientes fechas:
    (a) Solsticio de verano 1i = 23,5°2
    (b) Equinoccio de primavera 1i = 0°2
    (c) 4 de julio 1i = 22°48′2
    (d) ¿A qué conclusión llega sobre el número de horas de luz diurna durante el año en un lugar en el ecuador?
81. Ser el primero en ver el sol naciente La montaña Cadillac, con una elevación de 1530 pies, está ubicada en el Parque Nacional Acadia, Maine, y es el pico más alto de la costa este de los Estados Unidos. Se dice que una persona que esté en la cima será la primera persona en los Estados Unidos en ver los rayos del sol naciente. ¿Cuánto antes vería una persona en la cima de la montaña Cadillac los primeros rayos que una persona parada debajo, al nivel del mar?



[Sugerencia: consulte la figura. Cuando la persona en D ve los primeros rayos del Sol, la persona en P no los ve. La persona en P ve los primeros rayos del Sol sólo después de que la Tierra ha girado de modo que P esté en la ubicación Q. Calcule la longitud del arco subtendido por el ángulo central u. Luego use el hecho de que en la latitud de la montaña Cadillac, en 24 horas se subtiende una longitud de 2p # 2710 ≈ 17027,4 millas.]

82. Pantallas de cine Supongamos que una sala de cine tiene una pantalla de 28 pies de alto. Cuando te sientas, la parte inferior de la pantalla está a 6 pies por encima del nivel de tus ojos. El ángulo formado al dibujar una línea desde el ojo hasta la parte inferior de la pantalla y otra línea desde el ojo hasta la parte superior de la pantalla se llama ángulo de visión. En la figura, u es el ángulo de visión. Suponga que se sienta a x pies de la pantalla. El ángulo de visión u está dado por la función

$$u1x2 = \tan\text{-}1\ a\ 34\ \overline{\ }\ x\ b - \tan\text{-}1\ a\ 6\ \overline{\ }\ x\ b$$



(a) ¿Cuál es su ángulo de visión si se sienta a 10 pies de la pantalla? ¿15 pies? ¿20 pies?

(b) Si hay 5 pies entre la pantalla y la primera fila de asientos y hay 3 pies entre cada fila y la fila detrás de ella, ¿qué fila da como resultado el ángulo de visión más grande?

(continuado)

Machine Translated by Google

(c) Utilizando una utilidad gráfica, grafique

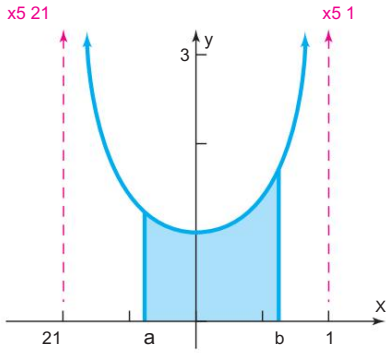
$$u1x2 = \tan^{-1}\left(\frac{34}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{6}{x}\right)$$

¿Qué valor de x da como resultado el ángulo de visión más grande?

83. Área bajo una curva El área bajo la gráfica de $y = \frac{1}{21 - x2}$ y por encima del eje x entre x = a y x = b está dado por

pecado-1 b - pecado-1 a

Ver la figura.



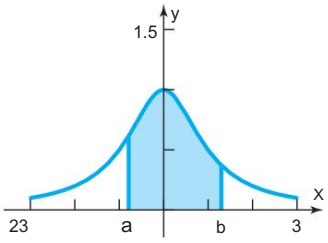
(a) Encuentre el área exacta bajo la gráfica de $y = \frac{1}{21 - x2}$ y por encima del eje x entre x = 0 y x = $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

(b) Encuentre el área exacta bajo la gráfica de $y = \frac{1}{21 - x2}$ y por encima del eje x entre x = - y x = 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$.

84. Área bajo una curva El área bajo la gráfica de $y = \frac{1}{1 + x2}$ y por encima del eje x entre x = a y x = b está dado por

tan-1 b - tan-1 a

Ver la figura.



(a) Encuentre el área exacta debajo de la gráfica de $y = \frac{1}{y 1 + x2}$ sobre el eje x entre x = 0 y x = 23.

(b) Encuentre el área exacta bajo la gráfica de $y = \frac{1}{y 1 + x2}$ encima del eje x entre x = - y x = 1. $\frac{\sqrt{13}}{3}$

Los problemas 85 y 86 requieren la siguiente discusión:

La distancia más corta entre dos puntos de la superficie de la Tierra se puede determinar a partir de la latitud y longitud de los dos lugares. Por ejemplo, si la ubicación 1 tiene 1lat, lon2 = 1a1, b12 y la ubicación 2 tiene 1lat, lon2 = 1a2, b22, la distancia más corta entre las dos ubicaciones es aproximadamente

d = r cos-1 3 1cos a1 cos b1 cos a2 cos b22 + 1cos a1 sen b1 cos a2 sen b22 + 1sen a1 sen a22 4,

donde r = radio de la Tierra ≈ 3960 millas y la función coseno inversa se expresa en radianes. Además, la latitud N y la longitud E son ángulos positivos, y la latitud S y la longitud W son ángulos negativos.

Ciudad	Latitud longitud
Chicago, Illinois	41°50'N 87°37'W
Honolulu, Hawai	21°18'N 157°50'W
Melbourne, Australia	37°47'S 144°58'E

Fuente: www.infoplease.com

85. Distancia más corta desde Honolulu a Melbourne, Australia
Encuentre la distancia más corta desde Honolulu a Melbourne, Australia, latitud 37°47′S, longitud 144°58′E. Redondea tu respuesta a la milla más cercana.

86. Distancia más corta de Chicago a Honolulu Encuentre la distancia más corta desde Chicago, latitud 41°50′N, longitud 87°37′W, a Honolulu, latitud 21°18′N, longitud 157°50′W. Redondea tu respuesta a la milla más cercana.

87. Problema de desafío Encuentre u en términos de x y r:

$$\text{tanacos-1}\left(\frac{x}{r}\right) b = \text{sin1tan-1 u2}$$

88. Resolver problemas de desafío :

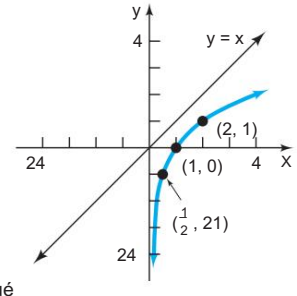
$$\text{cos1sin-1 x2} = \text{tanacos-1}\left(\frac{4}{\text{5 segundo}}\right)$$

Conserve su conocimiento

Los problemas 89 a 98 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

89. Resuelve: · 3x - 2 · + 5 … 9

90. Indica por qué la gráfica de la función f que se muestra a la derecha es uno a uno.
Luego dibuja la gráfica de la función inversa f Pista: $^{-1}$.
Se da la gráfica de y = x .



91. La función exponencial f 1x2 = 1 + 2x es uno a uno. encontrar f $^{-1}$.

Factorizar: 12x + 12 - 2 x $\frac{1}{2}$ 12x2 + 232 - 2 - $\frac{1}{1}$x2 + 32 - 92. $\frac{3}{2}$

93. Resuelve: e4x + 7 = 10

94. El diámetro de cada rueda de una bicicleta es de 20 pulgadas. Si las ruedas giran a 336 revoluciones por minuto, ¿a qué velocidad se mueve la bicicleta? Exprese la respuesta en millas por hora, redondeada al número entero más cercano.

Machine Translated by Google

95. Encuentra el valor exacto del pecado $\frac{\pi}{3}$. porque $\frac{\pi}{3}$.

96. Si cos u = $\frac{24}{25}$, encuentra el valor exacto de cada una de las cinco funciones trigonométricas restantes del ángulo agudo u.

97. Si sen u 7 0 y cot u 6 0, nombra el cuadrante en el que se encuentra el ángulo u.

98. Encuentre la tasa de cambio promedio de f 1x2 = tan x de 6 $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{3}$.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. Dominio: el conjunto de todos los números reales; Rango: - 1 … y … 1 2. 33, q 2 3. Verdadero 4. 1; ; - $\frac{\sqrt{13}}{2}$; - 2 $\frac{1}{2}$

7.2 Funciones trigonométricas inversas (continuación)

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Encontrar valores exactos de las funciones trigonométricas, dado el valor de una función trigonométrica y el cuadrante del ángulo (Sección 6.3, págs. 435–438)
- Gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente (sección 6.5, págs. 460 a 463)
- Dominio y rango de las funciones secante, cosecante y cotangente (sección 6.3, págs. 429 y 430)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 502.

OBJETIVOS 1 Definir las funciones secante, cosecante y cotangente inversa (p. 499)

2 Encuentre el valor de las funciones secante, cosecante y cotangente inversa (p. 500)

3 Encuentre el valor exacto de funciones compuestas que involucran funciones trigonométricas inversas (p. 501)

4 Escribe una expresión trigonométrica como expresión algebraica (p. 502)

1 Definir las funciones secante, cosecante y cotangente inversa

Las funciones secante inversa, cosecante inversa y cotangente inversa se definen de la siguiente manera:

DEFINICIÓN Funciones secante, cosecante y cotangente inversa

- y = seg-1 x si y sólo si x = sec y

  donde 0 x 0 Ú 1 y 0 … y … p, y · y = csc-1 x si y solo $\frac{\pi}{2}$* (1)

- si x = csc y

  donde 0 x 0 Ú 1 y - $\frac{\pi}{2}$ … y … $\frac{\pi}{2}$, y · 0† (2)

- y = cot-1 x si y sólo si x = cot y

  donde - q 6 x 6 q y 0 6 y 6 p (3)

Tómate el tiempo para revisar las gráficas de las funciones cotangente, cosecante y secante. en las Figuras 63, 66 y 67 de la Sección 6.5 para ver la base de estas definiciones.

Ahora trabaja el problema 4

*La mayoría de los textos utilizan esta definición. Algunos usan la restricción 0… y 6 $\frac{\pi}{2}$, p… y 6 $\frac{3\pi}{2}$.

† La mayoría de los textos utilizan esta definición. Unos pocos usan la restricción - p 6 y … - $\frac{\pi}{2}$, 0 6 años … $\frac{\pi}{2}$.

Machine Translated by Google

2 Encuentre el valor de la secante, cosecante y cotangente inversa Funciones

EJEMPLO 1 Encontrar el valor exacto de la secante, cosecante y cotangente inversa Funciones

Encuentra el valor exacto de cada expresión.

(a) seg-1 1 (b) csc-1 2 (c) cuna-1 1 - 232

Solución

(a) Sea u = sec-1 1. Entonces u es el ángulo, 0 … u … p, u · (o, de manera equivalente, cuyo coseno es igual a 1), cuya secante es igual a 1

$$u = \text{seg}^{-1}\,1 \qquad 0 \ldots u \ldots p,\ u \cdot \frac{pag}{2}$$

$$\text{segundo } u = 1 \qquad 0 \ldots u \ldots p,\ u \cdot \frac{pag}{2}$$

El único ángulo u para el cual 0... u... p, u · entonces sec-1 $\frac{pag}{2}$, cuya secante es 1 es 0, 1 = 0.

(b) Sea u = csc-1 2. Entonces u es el ángulo, - $\frac{pag}{2}$ …tú… $\frac{pag}{2}$, u · 0, cuya cosecante es igual a 2 ao, equivalentemente, cuyo seno es igual $\frac{1}{2b}$.

$$\text{tu} = \csc^{-1}\,2 - 2 \qquad \frac{pag}{} \ldots \text{tú} \ldots \frac{pag}{2}, \quad \text{tu} \cdot 0$$

$$\csc \text{tu} = 2 \qquad - \frac{pag}{2} \ldots \text{tú} \ldots \frac{pag}{2}, \quad \text{tu} \cdot 0$$

El único ángulo u para el cual - 2 $\frac{pag}{}$ …tú… $\frac{pag}{2}$, u · 0, cuya cosecante es 2 es $\frac{pag}{6}$, entonces csc-1 2 = $\frac{pag}{6}$.

(c) Sea u = cot-1 1 - 232. Entonces u es el ángulo, 0 6 u 6 p, cuya cotangente es igual a - 23.

$$u = \text{cuna}^{-1}\,1 - 232 \quad 0 < u < p$$

$$\text{cuna } u = -23 \qquad 0 < u < p$$

El único ángulo u para el cual 0 6 u 6 p cuya cotangente es - 23 es entonces cot-1 1 - $\frac{5p}{6}$, 232 = $\frac{5p}{6}$.

Ahora problema de trabajo 1 1

NOTA Recuerde que el rango de y = sen-1 x es c - $\frac{pag}{2}, \frac{pag}{2}$ d y que el rango de y = cos-1 x es 30, p4.

La mayoría de las calculadoras no tienen teclas que evalúen las funciones cotangente, cosecante o secante inversa. La forma más sencilla de evaluarlos es convertir cada uno a una función trigonométrica inversa cuyo rango sea el mismo que el que se va a evaluar. A este respecto, observe que y = cot-1 x e y = sec-1 x, excepto donde no está definido, tienen el mismo rango que y = cos-1 x y que y = csc-1 x, excepto donde no está definido, tiene el mismo rango mismo rango que y = sin-1 x.

EJEMPLO 2 Aproximación del valor de funciones trigonométricas inversas

Usa una calculadora para aproximar cada expresión en radianes redondeados a dos decimales.

(a) seg-1 3 (b) csc-1 1 - 42 (c) cuna-1 $\frac{1}{2}$ (d) cuna-1 1 - 22

Machine Translated by Google

Solución Primero, configure la calculadora en modo radianes.

(a) Sea u = sec-1 3. Entonces sec u = 3 y 0 … u … p, u · $\frac{\pi}{2}$. Ahora encuentra cos u porque y = cos-1 x tiene el mismo rango que y = sec-1 x, excepto donde no está definido. Porque sec u = cos u $\frac{1}{3}$ = 3, esto significa cos u = $\frac{1}{3}$. Entonces u = cos-1 $\frac{1}{3}$, y

$$\text{seg-1 } 3 = u = \cos\text{-1 } 3 \quad \frac{1}{3} \approx 1{,}23$$

c

Usa una calculadora.

(b) Sea u = csc-1 1 - 42. Entonces csc u = - 4, - $\frac{\pi}{2}$ …tú… $\frac{\pi}{2}$, u · 0. Ahora encuentra el sen u porque y = sin-1 x tiene el mismo rango que y = csc-1 x, excepto donde no está definido. Porque csc u = $\frac{1}{-4}$ = - 4, esto significa sen u = - sen u $\frac{1}{4}$. Entonces u = sen-1 a - $\frac{1}{4}$ b, y

$$\text{csc-1 } 1 - 42 = u = \text{sen-1 } a - 4\ b \approx - 0{,}25$$

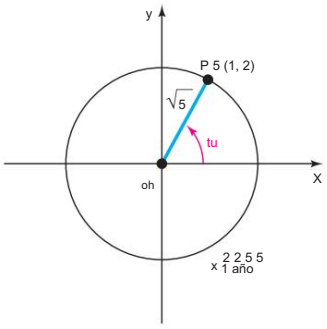


Figura 15 cuna u = 2 $\frac{1}{}$, 0 6 u 6p

(c) Sea u = cot-1 que $\frac{1}{2}$. Entonces cot u = $\frac{1}{2}$, 0 6 u 6 p. Dado que cot u 7 0, se deduce u se encuentre en el cuadrante I. Ahora encuentre cos u porque y = cos-1 x tiene el mismo rango que y = cot-1 x, excepto cuando no esté definido. Utilice la Figura 15 para encontrar eso porque tu = $\frac{1}{\sqrt{25}}$, 0 6 u 6 $\frac{\pi}{2}$. Entonces, u = cos-1 $\frac{\sqrt{25}}{25}$ banda

$$\text{cuna-1 } \frac{1}{2} = u = \cos\text{-1 } a\ 1\ \frac{\sqrt{25}}{25} \text{ segundo} \approx 1{,}11$$

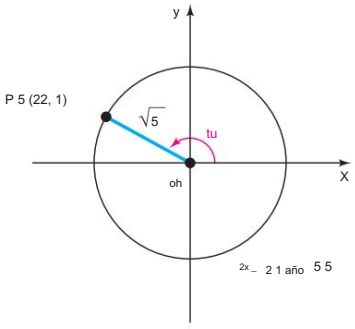


Figura 16 cuna u = -2, 0 6 u 6 p

(d) Sea u = cot-1 1 - 22. Entonces cot u = - 2, 0 6 u 6 p. Desde que tienes 6 0, mientes en el cuadrante II. Utilice la Figura 16 para encontrar que cos u = $\frac{2}{-\sqrt{25}}$, $\frac{\pi}{2}$ 6 u 6p. Este significa u = cos-1 a - $\frac{2}{\sqrt{25}}$ banda

$$\text{cuna-1 } 1 - 22 = u = \cos\text{-1 } a - \frac{2}{\sqrt{25}} \text{ segundo} \approx 2{,}68$$

Ahora resuelve el problema 2 1

3 Encuentre el valor exacto de funciones compuestas que involucran Funciones trigonométricas inversas

EJEMPLO 3

Encontrar el valor exacto de una expresión que involucra inversa Funciones trigonométricas

Encuentra el valor exacto de: sinatan-1 1$_{\text{2 segundo}}$

Solución Sea u = tan-1 . Entonces tanu = 2 $\frac{1}{2}$, donde - $\frac{\pi}{2}$ 6 y 6 $\frac{\pi}{2}$. Porque tan u 7 0, se deduce que 0 6 u 6 $\frac{\pi}{2}$, entonces u se encuentra en el cuadrante I. Porque tan u $_{= 2}$ $\frac{1}{}$ = $\frac{y}{x}$, sea x = 2 y y = 1. Como r = d1O, P2 = 222 + 1 ^{2} = 25, el punto P = 1x, y2 = 12, 12 está en el círculo x2 + y2 = 5. Vea la Figura 17. Entonces

$$\text{sinatan-1 } 1\ 2\ b = \text{sen } u = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5}$$

æsen U · $\frac{y}{r}$

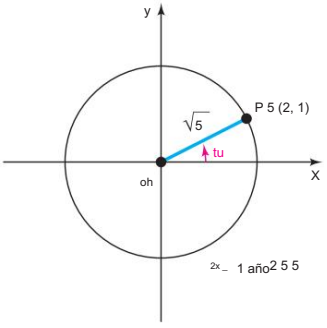


Figura 17 tan u = $\frac{1}{2}$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 4 Encontrar el valor exacto de una expresión que involucra inversa Funciones trigonométricas

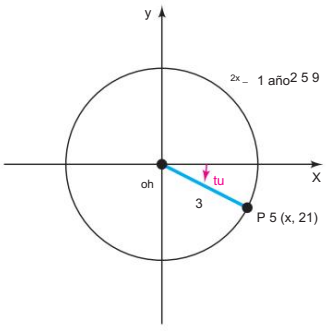


Figura 18 sen u = - 3 1 —

Encuentre el valor exacto de: coscsin-1 a - 3 1 — bd

Solución Sea u = sen-1 a - 3 1 — b. Entonces sen u = - 3 1 — y 2 pag — …tú… pag —. porque 2 sen u 6 0, se deduce que - 2 pag — … u 6 0, por lo que u se encuentra en el cuadrante IV. Dado que sen u = - 1 3 = y r ,

Sea y = - 1 y r = 3. El punto P = 1x, y2 = 1x, - 12, x 7 0, está en un círculo de radio 3, x2 + y2 = 9.

Vea la Figura 18. Entonces x2 = 8 y x = 222 entonces

coscsen-1 a - 3 1 — bd = cos u = 222 — 3

æcos U · x r

EJEMPLO 5 Encontrar el valor exacto de una expresión que involucra inversa Funciones trigonométricas

Encuentra el valor exacto de: tanc cos-1 a - 3 1 — bd

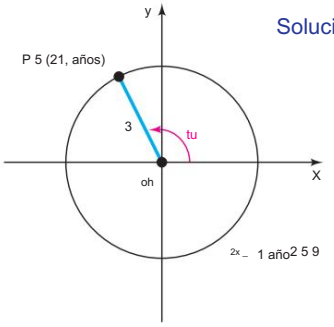


Figura 19 porque u = - 3 1 —

Solución Sea u = cos-1 a - 3 1 — b. Entonces porque tu = - 3 1 — y 0…u…p. Porque cos u 6 0, se sigue que 2 pag — 6 u … p, por lo que u se encuentra en el cuadrante II. Dado que porque u = - 1 3 = x r , sean x = - 1 y r = 3.

El punto P = 1x, y2 = 1 - 1, y2, y 7 0, está en una circunferencia de radio r = 3, x2 + y2 = 9.

Vea la Figura 19. Entonces y2 = 8 e y = 222. Como x = - 1, tenemos

tanc cos-1 a - 3 1 — bd = tan u = ætan U · 222 — - 1 =-222 y x

Ahora resuelve los problemas 3 3 y 5 1

4 Escribe una expresión trigonométrica como expresión algebraica

EJEMPLO 6 Escribir una expresión trigonométrica como expresión algebraica

Escribe sin1tan-1 u2 como una expresión algebraica que contenga u.

Solución Sea u = tan-1 u de modo que tan u = u, - 2 pag — 6 y 6 pag 2 , - q 6 u 6 q. Esto significa seg u 7 0. Entonces

sin1tan-1 u2 = sen u = sen u # y porque tú porque tú = tan u porque u = broncearte te veo = broncearte 21 + tan2 u y = tu 21 + u2

Multiplicar por 1 · porque U porque U pecado U porque U y · tan U seg2 U · 1 · tan2 U segundo U + 0

Ahora resuelve el problema 6 1

7.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. ¿Cuáles son el dominio y el rango de y = sec x? (págs. 429 y 430)
2. Verdadero o Falso La gráfica de y = sec x es uno a uno en la establecer c 0, pag — 2 b ap 2 — , PD . (págs. 460–463)
3. Si tan u = 2 1 — , - pag 2 6 tu 6 2 pag —, entonces sen u = _____. (págs. 435–438)

Machine Translated by Google

Conceptos y vocabulario

4. y = sec-1 x si y solo si _____, donde 0 x 0 _____ y _____ … y … _____, y · pag/2.

5. Para encontrar la secante inversa de un número real x, · x · Ú 1, convertir la secante inversa a inversa _____.

6. Verdadero o Falso Es imposible obtener valores exactos para los función secante inversa.

7. Verdadero o Falso csc-1 0.5 no está definido.

8. Verdadero o Falso El dominio de la función cotangente inversa es el conjunto de los números reales.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 20, encuentre el valor exacto de cada expresión.

9. cuna-1 1

10. cuna-1 23

11. csc-1 1 - 12

12. csc-1 22

13. seg-1 1 - 22

14. segundo-1 223/3

15. csc-1a - 223/3 segundo

16. cuna-1 a - 13/3 segundo

17. cuna-1 1 - 12

18. segundo-1 1 - 222

19. seg-1 1

20. csc-1 1 - 222

En los problemas 21 a 32, use una calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión redondeado a dos decimales.

21. seg-1 4

22. csc-1 5

23. seg-1 1 - 32

24. cuna-1 2

25. cuna-1 a - 2 1/b

26. csc-1 1 - 32

27. cuna-1 1 - 8.12

28. cuna-1 1 - 252

29. seg-1 a - 3 4/b

30. csc-1a - 2b 3/

31. cuna-1 1 - 2102

32. cuna-1 a - 2 3/b

En los problemas 33 a 60, encuentre el valor exacto de cada expresión.

33. cosas en-1 12/2 b

34. sinacos-1 1 2 b

35. tancsina-1 a - 2 1/bd

36. tanc cos-1 a - 13/2 dormitorios

37. cotcsin-1 a - 2 1/bd 41.

38. secacos-1 1 2 segundo

39. sec1tan-1 232

40. csc1tan-1 12

coscsin-1 a - 45. 13/2 dormitorios

42. sin3tan-1 1 - 12 4

43. cscc cos-1 a - 13/2 hab

44. seccsin-1 a - 2 1/bd

tan-1 acot 2p 3 b

46. cos-1 como en 5p/4b

47. cos-1 ctana - 51. pag/4 hab

48. sin-1 c cosa - 52. 7p/6 dormitorios

49. tanacos-1 1 3 segundo

50. tanasina-1 1 3 b

secatan-1 1 2 b

cosasin-1 12/3 segundo

53. csc3tan-1 1 - 22 4

54. cotcsin-1 a - 12/3 dormitorios

55. cotc cos-1 a - 59. 13/3 dormitorios

56. sin3tan-1 1 - 32 4

57. cscatan-1 1 2 segundo

58. secasina-1 225/5 segundo

cos-1 asín 7p 6 segundo

60. pecado-1 acos 3p/ndo

En los problemas 61 a 70, escribe cada expresión trigonométrica como una expresión algebraica en u.

61. cos1tan-1 u2 63. tan1cos-1 u2 64. tan1sen-1 u2 66. sin1sec-1 u2 68. cos1csc-1 u2 69. tan1sec-1 u2

65. sin1cot-1 u2

67. cos1sec-1 u2

70. tan1cot-1 u2

Práctica mixta en los problemas 71 a 82, f1x2 = sen x, - 2 pag/2 … X … pag/2; g1x2 = porque x, 0 … x … p; y h1x2 = tan x, - 2 pag/2 6x6 _ _ pag/2. Encuentra los 2 valor exacto de cada función compuesta.

71. f ag-1 a 5 13 bb

72. gaf -1 a 12 13 bb

73. f -1 vez 5p6 bb

74. g-1 af a - pag/4 bb

75. hag-1 a - 79. 4/5 libras

76. haf -1 a - 80. 3/5 libras

77. f ah-1 a 5 12 bb

78. gah-1 a 12 5 libras

g-1 af a - pag/6 bb

g-1 af a - pag/3 bb

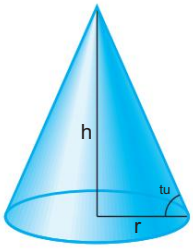
81. media -1 a - 5 2/bb

82. bruja-1 a - 4 1/bb

Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

Los problemas 83 y 84 requieren la siguiente discusión: Cuando se permite que los materiales granulares caigan libremente, forman montones cónicos (en forma de cono). El ángulo natural, medido desde la horizontal, en el que el material suelto queda en reposo.



se llama ángulo de reposo y varía según los diferentes materiales. El ángulo de reposo u está relacionado con la altura h y el radio de la base r del pilote cónico por la ecuación u = cuna-1 $\frac{r}{h}$. Ver la figura.

83. Ángulo de reposo: sal para deshielo Debido a posibles problemas de transporte (por ejemplo, vías fluviales congeladas), la sal para deshielo utilizada por los departamentos de carreteras del Medio Oeste debe solicitarse con anticipación y almacenarse para uso futuro. Cuando se almacena sal descongelante en una pila de 14 pies de altura, el diámetro de la base de la pila es de 45 pies.

(a) Encuentre el ángulo de reposo de la sal de deshielo.
(b) ¿Cuál es el diámetro de la base de un pilote de 17 pies de altura?
(c) ¿Cuál es la altura de un pilote que tiene un diámetro de base de aproximadamente 122 pies?

Fuente: Instituto de la Sal, Manual de almacenamiento de sal, 2015

84. Ángulo de reposo: arena de bunker La pendiente de los bunkers de arena en un campo de golf se ve afectada por el ángulo de reposo de la arena (un ángulo de reposo mayor permite bunkers más pronunciados). Una pila independiente de arena suelta de un búnker de la Asociación de Golf de los Estados Unidos (USGA) tenía una altura de 4 pies y un diámetro de base de aproximadamente 6,68 pies.

(a) Encuentre el ángulo de reposo de la arena del bunker de la USGA.
(b) ¿Cuál es la altura de dicho pilote si el diámetro de la base es de 8 pies?
(c) Una pila de arena suelta Tour Grade 50/50 de 6 pies de altura tiene un diámetro de base de aproximadamente 8,44 pies. ¿Qué tipo de arena (USGA o Tour Grade 50/50) sería más adecuada para bunkers empinados?

Fuente: Programa de Ciencias del Césped de la Universidad Purdue

85. Artillería Un proyectil disparado al primer cuadrante desde el origen de un sistema de coordenadas rectangular pasará por el punto 1x, y2 en el tiempo t según la relación cot u = $\frac{2x}{}$ donde u = el ángulo de 2y + gt2, elevación del lanzador y g = la aceleración debida a la gravedad = 32,2 pies/segundo2 .

Un artillero está disparando contra un búnker enemigo ubicado a 2450 pies sobre la ladera de una colina que está a 6175 pies de distancia. Dispara una bala y exactamente 2,27 segundos después consigue un impacto directo.

(a) ¿Qué ángulo de elevación utilizó?
(b) Si el ángulo de elevación también viene dado por sec u = $\frac{v0t}{X}$, donde v0 es la velocidad inicial del arma, encuentre la velocidad inicial de la pieza de artillería que usó.

Fuente: www.egwald.com/geometry/projectile3d.php

86. Problema de desafío Encuentra el valor exacto:

cotcsec-1 asín p $\frac{}{3}$ + bronceado $\frac{pag}{6 \text{ dormitorios}}$

87. Problema de desafío Escribe como expresión algebraica en x:

sec5tan-1 3sin1cos-1 · x · 2 4 6

Explicar conceptos: discusión y escritura

88. Explica con tus propias palabras cómo usarías tu calculadora para encontrar el valor de cot-1 10.

89. Consulta tres libros sobre cálculo y luego escribe la definición en cada uno de y = sec-1 x e y = csc-1 x. Compárelos con las definiciones dadas en este texto.

Conserve su conocimiento

Los problemas 90 a 99 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

90. Encuentra los ceros complejos de f1x2 = x4 + 21x2 - 100.

91. Determine algebraicamente si f1x2 = x3 + x2 - x es par, impar o ninguno de los dos.

92. Convertir 315° a radianes.

93. Encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 75° en un círculo de radio de 6 pulgadas. Proporcione tanto la longitud exacta como una aproximación redondeada a dos decimales.

94. Considere f1x2 = - 2x2 - 10x + 3.
(a) Encuentre el vértice.
(b) ¿La parábola es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
(c) Encuentre dónde f aumenta y dónde f disminuye.

95. Resuelve: log5 1x2 + 162 = 2

96. Si f1x2 = 2x - 3 y g1x2 = $\frac{x - 7}{x - 4}$, encontrar el dominio de una, fb 1x2.

97. Encuentra la ecuación de una función seno con amplitud 4, periodo $\frac{pag}{3}$, y cambio de fase 1.

98. Racionaliza el numerador: $\frac{\sqrt{31 - x2 - 21 - c2}}{x - c}$

99. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = sen x de a 2$\frac{pag}{}$ $\frac{4p}{3}$.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. Dominio: e x ` x · entero impar múltiplos de $\frac{pag}{2}$f; Rango: 5y · y … - 1 o y Ú 16

2. Verdadero

3. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

Machine Translated by Google

7.3 Ecuaciones trigonométricas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Resolver ecuaciones (Sección A.6, págs. A44–A51)
- Valores de las funciones trigonométricas (Sección 6.2, págs. 413–422)
- Uso de una utilidad gráfica para resolver ecuaciones (Sección B.4, págs. B6–B8)
- Identidades fundamentales (Sección 6.3, págs. 433–435)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 510.

OBJETIVOS 1 Resolver ecuaciones que involucran una sola función trigonométrica (p. 505)
2 Resuelva ecuaciones trigonométricas usando una calculadora (p. 508)
3 Resolver ecuaciones trigonométricas en forma cuadrática (p. 509)
4 Resuelva ecuaciones trigonométricas utilizando identidades fundamentales (p. 509)
5 Resuelva ecuaciones trigonométricas usando una utilidad gráfica (p. 510)

En esta sección, analizamos las ecuaciones trigonométricas, es decir, ecuaciones que involucran funciones trigonométricas que se satisfacen sólo con algunos valores de la variable (o, posiblemente, no se satisfacen con ningún valor de la variable). Los valores que satisfacen la ecuación se llaman soluciones de la ecuación.

1 Resolver ecuaciones que involucran una sola función trigonométrica

EJEMPLO 1 Comprobar si un número dado es una solución de una ecuación trigonométrica

Determinar si u = una solución? $\frac{\pi}{4}$ es una solución de la ecuación 2 sen u - 1 = 0. ¿Es u = $\frac{\pi}{6}$

Solución Reemplace u por $\frac{\pi}{4}$ en la ecuación 2 sen u - 1 = 0. El resultado es

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - 1 = 2 \# \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 \neq 0$$

Por lo tanto, 4 $\frac{\pi}{4}$ no es una solución.

Luego reemplace u por $\frac{\pi}{6}$ en la ecuación. El resultado es

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 1 = 2 \# - 1 = 0$$

Por lo tanto 6 $\frac{\pi}{6}$ es una solución de la ecuación, 2 sen u - 1 = 0.

La ecuación 2 sen u - 1 = 0 en el Ejemplo 1 tiene otras soluciones además de u = $\frac{\pi}{6}$. Por ejemplo, tu = $\frac{5\pi}{6}$ también es una solución, al igual que u = $\frac{13\pi}{6}$. (Compruebe esto usted mismo.) En De hecho, la ecuación tiene un número infinito de soluciones debido a la periodicidad de la función seno, como se puede ver en la Figura 20 en la página siguiente, que muestra la gráfica de y = 2 sen x - 1. Cada intersección con el eje x de la gráfica representa una solución a la ecuación 2 sen x - 1 = 0.

Machine Translated by Google

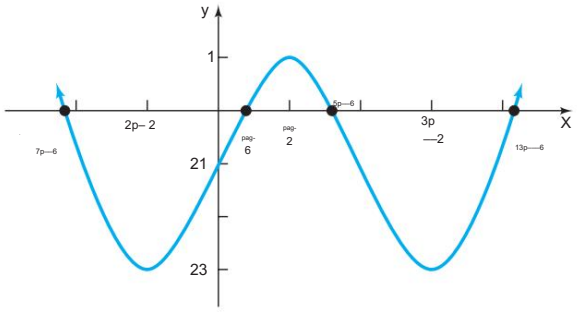


Figura 20 y = 2 senx - 1

A menos que el dominio de la variable esté restringido, necesitamos encontrar todas las soluciones de una ecuación trigonométrica. Como ilustra el siguiente ejemplo, se pueden encontrar todas las soluciones encontrando primero soluciones en un intervalo cuya longitud sea igual al período de la función y luego sumando múltiplos de ese período a las soluciones encontradas.

EJEMPLO 2 Encontrar todas las soluciones de una ecuación trigonométrica

Resuelve la ecuación: $\cos u = \frac{1}{2}$

Dé una fórmula general para todas las soluciones. Enumere ocho de las soluciones.

Solución

El período de la función coseno es 2p. En el intervalo 30, 2p2, hay dos ángulos u para los cuales $\cos u = \frac{1}{2}$: $u = \frac{pag}{3}$ y $u = \frac{5p}{3}$. Vea la Figura 21. Porque el coseno 3 función tiene período 2p, todas las soluciones de $\cos u = \frac{1}{2}$ pueden estar dadas por el general fórmula

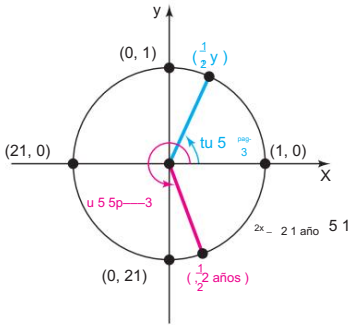


Figura 21

$$tu = \frac{pag}{3} + 2kp \text{ o } u = + 2kp \text{ k cualquier número entero}$$

Ocho de las soluciones son

$$-\frac{5p}{3}, -\frac{pag}{3}, \frac{pag}{3}, \frac{5p}{3}, \frac{7p}{3}, \frac{11p}{3}, \frac{13p}{3}, \frac{17p}{3}$$

k · ·1 k · 0 k · 1 k · 2

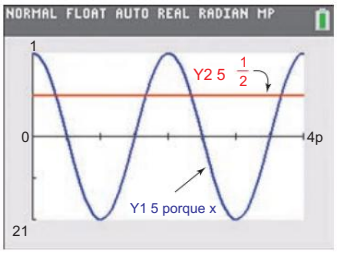


Figura 22

Verifique: Para verificar las soluciones, grafique Y1 = cos x e Y2 = y determine $\frac{1}{2}$ donde se cruzan las gráficas. (Asegúrese de graficar en modo radianes). Consulte Figura 22. La gráfica de Y1 intersecta a la gráfica de Y2 en x = 1.05 a ≈ $\frac{pag}{3}$b, 5.24 a ≈ $\frac{5p}{3}$b, 7.33a ≈ $\frac{7p}{3}$ b, y 11.52 a ≈ $\frac{11p}{3}$ b, redondeado a dos lugares decimales.

Ahora resuelve el problema 3 7

En la mayor parte del trabajo que hacemos, sólo nos interesará encontrar soluciones de ecuaciones trigonométricas para 0 … u 6 2p.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Resolver una ecuación trigonométrica lineal

Resuelve la ecuación: $2 \operatorname{sen} u + 23 = 0,\ 0 \ldots u 6 2p$

Solución

Primero resuelve la ecuación para sen u.

$$2 \operatorname{sen} u + 23 = 0$$

$$2 \operatorname{sen} u = -23 \qquad \text{Resta } !3 \text{ de ambos lados.}$$

$$\text{pecado } u = -\frac{13}{2} \qquad \text{Divide ambos lados por 2.}$$

En el intervalo 30, 2p2, existen dos ángulos u para los cuales sen $u = - : u = \frac{13}{2}$ y $tu = \frac{4p}{3}$ y $tu = \frac{5p}{3}$. El conjunto solución es $e\frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}f$.

Ahora resuelve el problema 1 3

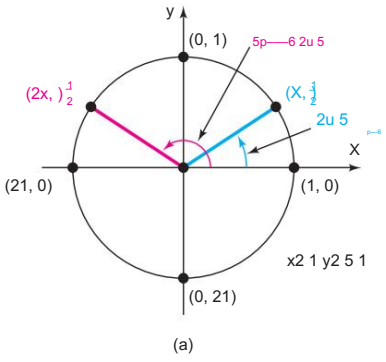
Cuando el argumento de la función trigonométrica en una ecuación es múltiplo de u, se requiere la fórmula general para resolver la ecuación.

EJEMPLO 4 Resolver una ecuación trigonométrica que involucra un ángulo doble

Resuelve la ecuación: $\operatorname{sen} 12u2 = \frac{1}{2},\quad 0 \ldots u 6 2p$

Solución

En el intervalo 30, 2p2, la función seno es igual en 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{pag}{6}$ y $\frac{5p}{6}$. Ver Figura 23(a).



(a)

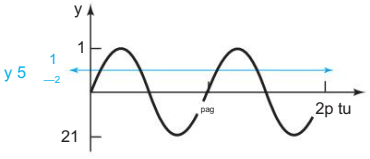


Figura 23

En el intervalo 30, 2p2, la gráfica de $y = \operatorname{sen} 12u2$ completa dos ciclos y la gráfica de $y = \operatorname{sin} 12u2$ corta la gráfica de y = cuatro veces. Véase la Figura 23(b). Entonces, hay 2 $\frac{1}{2}$ son cuatro soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 12u2 = \frac{1}{2}$ en el intervalo 30, 2p2. para encontrar los 2 soluciones, utilice 2u en la fórmula general que da todas las soluciones.

$$2u = \frac{pag}{6} + 2kp \text{ o } 2u = \frac{5p}{6} + 2kp \text{ k un número entero} \qquad \text{El argumento es 2U.}$$

$$u = + kp \text{ o } u = 12 \frac{pag}{12} + kp \qquad \text{Dividir por 2.}$$

Entonces

$tu = \frac{pag}{} + 1 - 12p = 12$	$\frac{- 11 \text{ p.m.}}{12}$	k · ·1	$tu = \frac{5p}{12} + 1 - 12p =$	$\frac{- 7 \text{ p.m.}}{12}$	
$tu = \frac{pag}{} + 0 \# p = 12$	$\frac{pag}{12}$	k · 0	$tu = \frac{5p}{12} + 0 \# p =$	$\frac{5p}{12}$	
$tu = \frac{pag}{} + 1 \# p = 12$	$\frac{13p}{12}$	k · 1	$tu = \frac{5p}{12} + 1 \# p =$	$\frac{17p}{12}$	
$tu = \frac{pag}{} + 2 \# p = 12$	$\frac{25p}{12}$	k · 2	$tu = \frac{5p}{12} + 2 \# p=$	$\frac{29p}{12}$	

En el intervalo 30, 2p2, las soluciones de $\operatorname{sen} 12u2 = \text{son } u = 2 \frac{1}{2}$ $\frac{pag}{12}, tu = \frac{5p}{12}, tu = \frac{13p}{12}$, y $tu = \frac{17p}{12}$. El conjunto solución es $ep\frac{pag}{12}, \frac{5p}{12}, \frac{13p}{12}, \frac{17p}{12}$ 12 f. La gráfica de $y = \operatorname{sin} 12u2$ interseca la gráfica de $y = \frac{1}{2}$ en los puntos $ap\frac{pag}{12}, \frac{1}{2}b$, un $\frac{5p}{12}, \frac{1}{2}b$, un $\frac{13p}{12}, \frac{1}{2}b$ y $17p\frac{17p}{12}, \frac{1}{2}$ en el intervalo 30, 2p2.

Ahora trabaja el problema 2 9

ADVERTENCIA Al resolver una ecuación trigonométrica para u, 0 … u 6 2p, en la que el argumento no es u (como en el ejemplo 4), primero debes escribir todas las soluciones y luego enumerar aquellas que están en el intervalo 30, 2p2. De lo contrario, se pueden perder soluciones.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Resolver una ecuación trigonométrica

Resuelve la ecuación: tanau - pag/2 b = 1, 0 … u 6 2p

Solución El periodo de la función tangente es p. En el intervalo 30, p2, la función tangente tiene el valor 1 cuando el argumento es pag/4. Porque el argumento es u - pag/4 en el 2 dado ecuación, úsela en la fórmula general que da todas las soluciones.

$$tu - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + kp \quad k \text{ cualquier número entero}$$

$$u = + kp \frac{3p}{4}$$

En el intervalo 30, 2p2, u = $\frac{3p}{4}$ y tu = $\frac{3p}{4} + p = \frac{7p}{4}$ son las únicas soluciones.

El conjunto solución es e $\frac{3p}{4}, \frac{7p}{4}$f.

Ahora resuelve el problema 2 7

2 Resolver ecuaciones trigonométricas usando una calculadora

El siguiente ejemplo ilustra cómo resolver ecuaciones trigonométricas usando una calculadora. Recuerde que las teclas de función de una calculadora sólo dan valores consistentes con la definición de la función.

EJEMPLO 6 Resolver una ecuación trigonométrica usando una calculadora

Usa una calculadora para resolver la ecuación tan u = - 2, 0… u 6 2p. Exprese cualquier solución en radianes, redondeada a dos decimales.

Solución Para resolver tan u = - 2 en una calculadora, primero configure la moda en radianes. Entonces usa la clave ·tan-1 · para obtener

$$u = \tan^{-1} 1 - 22 \approx - 1.1071487$$

Redondeado a dos decimales, u = tan-1 1 - 22 = - 1,11 radianes. debido a la definición de y = tan-1 x, el ángulo u que se obtiene es el ángulo - pag/2 6 y 6 pag/2 para cual tan u = - 2. Pero queremos soluciones para las cuales 0 … u 6 2p. Dado que el período de la función tangente es p, los ángulos p - 1,11 y 2p - 1,11 son soluciones que se encuentran en el intervalo 30, 2p2. Tenga en cuenta que el ángulo 3p - 1,11 se encuentra fuera del intervalo y, por tanto, no es una solución.

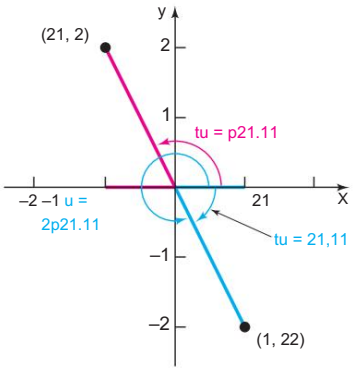


Figura 24 tan u = -2

Las soluciones de la ecuación tan u = - 2, 0 … u 6 2p, son

u = p - 1,11 ≈ 2,03 radianes y u = 2p - 1,11 ≈ 5,17 radianes

El conjunto solución es 52,03, 5,176.

La Figura 24 ilustra otra forma de obtener las soluciones. Comience con el ángulo u = - 1,11. Entonces p - 1,11 es el ángulo en el cuadrante II, donde tan u = - 2, y 2p - 1,11 es el ángulo en el cuadrante IV donde tan u = - 2.

ADVERTENCIA El ejemplo 6 ilustra que se debe tener precaución al resolver ecuaciones trigonométricas en una calculadora. Recuerde que la calculadora proporciona un ángulo sólo dentro de las restricciones de la definición de la función trigonométrica inversa. Para encontrar las soluciones restantes, debe identificar otros cuadrantes, si los hay, en los que se pueda ubicar una solución.

Ahora problema de trabajo 4 9

Machine Translated by Google

3 Resolver ecuaciones trigonométricas en forma cuadrática

Muchas ecuaciones trigonométricas se pueden resolver usando técnicas que ya conocemos, como usar la fórmula cuadrática (si la ecuación es un polinomio de segundo grado) o factorizar.

EJEMPLO 7 Resolver una ecuación trigonométrica en forma cuadrática

Resuelve la ecuación: $2 \operatorname{sen}^2 u - 3 \operatorname{sen} u + 1 = 0, \ 0 \ldots u 6 2p$

Solución

Esta ecuación es una ecuación cuadrática en sen u que se puede factorizar.

$$2 \operatorname{sen}^2 u - 3 \operatorname{sen} u + 1 = 0 \qquad 2x^2 \cdot 3x \cdot 1 \cdot 0, \ x \cdot \operatorname{sen} U$$

$$12 \operatorname{sen} u - 12 \, 1 \operatorname{sen} u - 12 = 0 \qquad 12x \cdot 12 \, 1x \cdot 12 \cdot 0$$

$$2 \operatorname{sen} u - 1 = 0 \text{ o } \operatorname{sen} u - 1 = 0 \qquad \text{Utilice la propiedad de producto cero.}$$

$$\text{seno } u = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \text{seno } u = 1$$

Resolver cada ecuación en el intervalo 30, 2p2 produce

$$tu = \frac{pag}{6} \qquad tu = \frac{5p}{6} \qquad tu = \frac{pag}{2}$$

El conjunto solución es $ep. \frac{}{6}, \frac{pag}{2}, \frac{5p}{6} f.$

Ahora resuelve el problema 6 3

4 Resuelva ecuaciones trigonométricas utilizando identidades fundamentales

A menudo, cuando una ecuación trigonométrica contiene más de una función trigonométrica, se pueden usar identidades para obtener una ecuación equivalente que contenga solo una función trigonométrica.

EJEMPLO 8 Resolver una ecuación trigonométrica usando identidades

Resuelve la ecuación: $3 \cos u + 3 = 2 \operatorname{sin}^2 u, \ 0 \ldots u 6 2p$

Solución

La ecuación contiene un seno y un coseno. Sin embargo, usando la identidad pitagórica, $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$, la ecuación se transforma en una equivalente que contiene solo cosenos.

$$3 \text{ porque } u + 3 = 2 \operatorname{sen}^2 u$$

$$3 \text{ porque } u + 3 = 211 - \cos^2 u2 \qquad \operatorname{sen}^2 U \cdot 1 \cdot \cos^2 U$$

$$3 \text{ porque } u + 3 = 2 - 2 \cos^2 u \qquad \text{Cuadrática en cos U}$$

$$2 \cos^2 u + 3 \cos u + 1 = 0$$

$$12 \text{ porque } u + 12 \, 1 \cos u + 12 = 0 \qquad \text{Factor}$$

$$2 \text{ porque } tu + 1 = 0 \quad \text{o} \quad \text{porque } tu + 1 = 0 \qquad \text{Utilice la propiedad de producto cero.}$$

$$\text{porque } tu = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \text{porque } tu = -1$$

Resolver cada ecuación en el intervalo 30, 2p2 produce

$$tu = \frac{2p}{3} \qquad tu = \frac{4p}{3} \qquad tu = \text{pag}$$

El conjunto solución es $e \frac{}{3}2p, \text{ pag}, \frac{4p}{3} f.$

Ahora problema de trabajo 7 9

Machine Translated by Google

EJEMPLO 9 Resolver una ecuación trigonométrica usando identidades

Resuelve la ecuación: cos2 u + sen u = 2, 0… u 6 2p

Solución

Esta ecuación involucra dos funciones trigonométricas: seno y coseno. Al usar una identidad pitagórica, podemos expresar la ecuación en términos de funciones seno.

$$\cos^2 u + \operatorname{sen} u = 2$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 u + \operatorname{sen} u = 2 \qquad \cos^2 U \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}^2 U$$

$$\operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen} u + 1 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en sen u. El discriminante es b2 - 4ac = 1 - 4 = - 3 6 0.
Por tanto, la ecuación no tiene solución real. El conjunto solución es el conjunto vacío, ·.

5 Resuelva ecuaciones trigonométricas usando una utilidad gráfica

Las técnicas introducidas en esta sección se aplican sólo a ciertos tipos de ecuaciones trigonométricas. Las soluciones para otros tipos suelen estudiarse en cálculo, utilizando métodos numéricos.

EJEMPLO 10 Resolver una ecuación trigonométrica usando una utilidad gráfica

Resuelva: 5 sen x + x = 3

Exprese la(s) solución(es) redondeada(s) a dos decimales.

Solución

Esta ecuación trigonométrica no se puede resolver con los métodos anteriores. Sin embargo, se puede utilizar una utilidad gráfica. Cada solución de la ecuación es la coordenada x de un punto de intersección de las gráficas de Y1 = 5 sen x + x e Y2 = 3. Consulte la Figura 25.

Hay tres puntos de intersección; las coordenadas x son las soluciones de la ecuación. Utilice INTERSECT para encontrar

$$x = 0{,}52 \quad x = 3{,}18 \quad x = 5{,}71$$

El conjunto solución es 50,52, 3,18, 5,716.

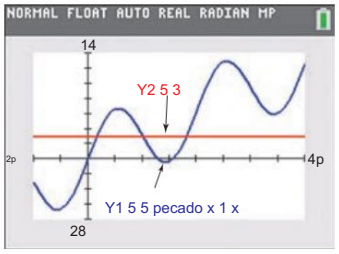


Figura 25

Ahora problema de trabajo 8 5

7.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Encuentra el valor exacto de $\sec^2 \frac{\pi}{15} - \tan^2 \frac{\pi}{15}$ (págs. 433–435) 15.

2. sina p $\frac{\pi}{4}$ b = _____ ; cosa 8p $\frac{\pi}{3}$ b = _____ (págs. 413–422)

3. Encuentra las soluciones reales de 4x2 - x - 5 = 0. (págs. A44–A51)

4. Encuentre las soluciones reales de x2 - x - 1 = 0. (págs. A44–A51)

5. Encuentra las soluciones reales de 12x - ^{2} - 312x - 12 - 4 = 0. 12 (págs. A44–A51)

6. Usa una herramienta gráfica para resolver 5x3 - 2 = x - x2 . Redondea las respuestas a dos decimales. (págs. B6–B8)

Conceptos y vocabulario

7. Verdadero o Falso La mayoría de las ecuaciones trigonométricas tienen características únicas. soluciones.

8. Verdadero o Falso Dos soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} u = \frac{1}{2}$ son $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$.

9. Verdadero o Falso El conjunto solución de la ecuación tan u = 1 está dado por eu ` u = $\frac{\pi}{4}$ + kp, k un número entero f.

10. Verdadero o Falso La ecuación sen u = 2 tiene una solución real que se puede encontrar usando una calculadora.

Machine Translated by Google

11. Opción múltiple Si todas las soluciones de una ecuación trigonométrica ecuación están dadas por la fórmula general u = 11p $\frac{\text{pag}}{6}$ + 2kp o tu = $\frac{}{6}$ + 2kp, donde k es un número entero, entonces ¿cuál de los ¿La siguiente no es una solución de la ecuación?

(a) $\frac{35p}{6}$ (b) $\frac{23p}{6}$ (C) $\frac{13p}{6}$ (d) $\frac{7p}{6}$

12. Opción múltiple Supongamos que u = de $\frac{\text{pag}}{2}$ es la unica solucion una ecuación trigonométrica en el intervalo 0 … u 6 2p. Suponiendo un período de 2p, ¿cuál de las siguientes fórmulas da todas las soluciones de la ecuación, donde k es un número entero?

(a) tu = $\frac{\text{pag}}{2}$ + 2kp (b) tu = $\frac{\text{pag}}{2}$ + kp

(c) tu = $\frac{kp}{2}$ (d) tu = $\frac{p + kp}{2}$

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 36, resuelva cada ecuación en el intervalo 0… u 6 2p.

13. 2 sen u + 3 = 2

14. 1 - porque tu = $\frac{1}{2}$

15. porque tu + 1 = 0

16. 2 sen u + 1 = 0

17. 23 cuna u + 1 = 0

18. tan u + 1 = 0

19. 5 csc u - 3 = 2

20. 4 segundos u + 6 = - 2

21. 4 sen u + 323 = 23

22. 322 porque u + 2 = - 1

23. tan2 u = 3 $\frac{1}{}$

24. 4 cos2 u = 1

25. 4 cos2 u - 3 = 0

26. 2 sen2 u - 1 = 0

27. pecado13u2 = - 1

28. bronceado $\frac{tu}{2}$ = 23

29. cos12u2 = - 2 $\frac{1}{}$

30. tan12u2 = - 1

31. cuna $\frac{2u}{3}$ =-23

32. segundos $\frac{3u}{2}$ = - 2

33. sina3u + 18 b = 1 $\frac{\text{pag}}{}$

34. cosa2u - $\frac{\text{pag}}{}$ 2 segundo = - 1

35. cosa tu $\frac{}{3}$ - $\frac{\text{pag}}{}$ 4 b = $\frac{1}{2}$

36. tana u $\frac{}{2}$ + $\frac{\text{pag}}{}$ 3 b = 1

En los problemas 37 a 48, resuelve cada ecuación. Dé una fórmula general para todas las soluciones. Enumere seis soluciones.

37. pecado u = $\frac{1}{2}$

38. tan u = 1

39. porque tu = - $\frac{13}{2}$

40. tan u = - $\frac{13}{3}$

41. pecado u = $\frac{12}{2}$

42. porque tu = 0

43. 2 - 23 csc u = 0

44. 23 - cuna u = 0

45. pecado12u2 = - 1

46. cos12u2 = - 2 $\frac{1}{}$

47. bronceado $\frac{tu}{2}$ = - 1

48. pecado $\frac{tu}{2}$ = - $\frac{13}{2}$

En los problemas 49 a 60, usa una calculadora para resolver cada ecuación en el intervalo 0… u 6 2p. Redondea las respuestas a dos decimales.

49. sen u = 0,4

50. porque tu = 0,6

51. cuna u = 2

52. tan u = 5

53. sen u = - 0,2

54. porque tu = - 0,9

55. csc tu = - 3

56. seg u = - 4

57. 4 cuna u = - 5

58. 5 tan u + 9 = 0

59. 4 porque u + 3 = 0

60. 3 sen u - 2 = 0

En los problemas 61 a 84, resuelva cada ecuación en el intervalo 0… u 6 2p.

61. sen2 u - 1 = 0

62. 2 cos2 u + cos u = 0

63. 2 sen2 u - sen u - 1 = 0

64. 2 cos2 u + cos u - 1 = 0

65. 1cot u + 12 acsc u - 2 b = 0 $\frac{1}{}$

66. 1tan u - 12 1seg u - 12 = 0

67. cos2 u - sen2 u + sen u = 0

68. sen2 u - cos2 u = 1 + cos u

69. 2 sen2 u = 311 - cos1 - u2 2

Machine Translated by Google

70. sen2 u = 61cos1 - u2 + 12

71. porque u - sen1 - u2 = 0

72. porque u = - sen1 - u2

73. tan u = cuna u

74. tan u = 2 sen u

75. sen2 u = 2 porque u + 2

76. 1 + sen u = 2 cos2 u

77. 2 cos2 u - 7 cos u - 4 = 0

78. 2 sen2 u - 5 sen u + 3 = 0

79. 311 - porque u2 = sen2 u

80. 411 + sen u2 = cos2 u

81. csc2 u = cuna u + 1

82. tan2 u = seg $\frac{3}{u}$ 2

83. sec u = tan u + cot u

84. seg2 u + tan u = 0

En los problemas 85 a 96, utilice una herramienta gráfica para resolver cada ecuación. Exprese la(s) solución(es) redondeada(s) a dos decimales.

85. x + 5 porque x = 0

86. x - 4 sen x = 0

87. 19x + 8 porque x = 2

88. 22x - 17 sen x = 3

89. pecado x - porque x = x

90. pecado x + porque x = x

91. x2 + 3 sen x = 0

92. x2 - 2 porque x = 0

93. x2 = x + 3 cos12x2

94. x2 - 2 sen12x2 = 3x

95. 4 cos13x2 - ex = 1, x 7 0

96. 6 sen x - ex = 2, x 7 0

97. Práctica mixta ¿Cuáles son los ceros de f1x2 = 2 cos 13x2 + 1? en el intervalo 30, p4?

98. Práctica mixta ¿Cuáles son los ceros de f1x2 = 4 sen2 x - 3 en el intervalo 30, 2p4?

99. Práctica mixta f1x2 = 2 cos x

(a) Encuentre los ceros de f en el intervalo 3 - 2p, 4p4.

(b) Grafique f1x2 = 2 cos x en el intervalo 3 - 2p, 4p4.

(c) Resuelva f1x2 = - 23 en el intervalo 3 - 2p, 4p4. ¿Qué puntos están en la gráfica de f? Etiquete estos puntos en la gráfica dibujada en la parte (b).

(d) Utilice la gráfica dibujada en el inciso (b) junto con los resultados del inciso (c) para determinar los valores de x tales que f1x2 6 - 23 en el intervalo 3 - 2p, 4p4.

100. Práctica mixta f1x2 = 3 sen x

(a) Encuentre los ceros de f en el intervalo 3 - 2p, 4p4.

(b) Grafique f1x2 = 3 sen x en el intervalo 3 - 2p, 4p4.

(c) Resuelva f1x2 = 2 $\frac{3}{}$ en el intervalo 3 - 2p, 4p4. que puntos están en la gráfica de f ? Etiquete estos puntos en la gráfica dibujada en la parte (b).

(d) Utilice la gráfica dibujada en el inciso (b) junto con los resultados de 3 parte (c) para determinar los valores de x tales que f1x2 7 2 en el intervalo 3 - 2p, 4p4.

101. Práctica Mixta f1x2 = cuna x

(a) Resuelva f1x2 = - 23.

(b) ¿Para qué valores de x es f1x2 7 - 23 en el intervalo 10, p2?

102. Práctica Mixta f1x2 = 4 tan x

(a) Resuelva f1x2 = - 4.

(b) ¿Para qué valores de x es f1x2 6 - 4 en el intervalo a - $\frac{pag}{2}$, $\frac{pag}{2b}$?

103. Práctica mixta

(a) Grafica f1x2 = 2 cos 2 $\frac{x}{}$ + 3 y g1x2 = 4 en el mismo Plano cartesiano para el intervalo 30, 4p4.

(b) Resuelva f1x2 = g1x2 en el intervalo 30, 4p4 y etiquete los puntos de intersección en la gráfica dibujada en el inciso (a).

(c) Resuelva f1x2 6 g1x2 en el intervalo 30, 4p4.

(d) Sombree la región delimitada por f1x2 = 2 cos 2 $\frac{x}{}$ + 3 y g1x2 = 4 entre los dos puntos encontrados en el inciso (b) en la gráfica dibujada en el inciso (a).

104. Práctica mixta

(a) Grafique f1x2 = 3 sen12x2 + 2 y g1x2 = en el mismo 2 $\frac{7}{}$ Plano cartesiano para el intervalo 30, p4.

(b) Resuelva f1x2 = g1x2 en el intervalo 30, p4 y etiquete los puntos de intersección en la gráfica dibujada en el inciso (a).

(c) Resuelva f1x2 7 g1x2 en el intervalo 30, p4.

(d) Sombree la región delimitada por f1x2 = 3 sen12x2 + 2 y g1x2 = entre los $\frac{7}{2}$ dos puntos encontrados en el inciso (b) en la gráfica dibujada en el inciso (a).

105. Práctica mixta

(a) Grafique f1x2 = 2 sen x y g1x2 = - 2 sen x + 2 en el mismo plano cartesiano para el intervalo 30, 2p4.

(b) Resuelva f1x2 = g1x2 en el intervalo 30, 2p4 y etiquete los puntos de intersección en la gráfica dibujada en el inciso (a).

(c) Resuelva f1x2 7 g1x2 en el intervalo 30, 2p4.

(d) Sombree la región delimitada por f1x2 = 2 sen x y g1x2 = - 2 sen x + 2 entre los dos puntos encontrados en el inciso (b) en la gráfica dibujada en el inciso (a).

106. Práctica mixta

(a) Grafique f1x2 = - 4 cos x y g1x2 = 2 cos x + 3 en el mismo plano cartesiano para el intervalo 30, 2p4.

(b) Resuelva f1x2 = g1x2 en el intervalo 30, 2p4 y etiquete los puntos de intersección en la gráfica dibujada en el inciso (a).

(c) Resuelva f1x2 7 g1x2 en el intervalo 30, 2p4.

(d) Sombree la región delimitada por f1x2 = - 4 cos x y g1x2 = 2 cos x + 3 entre los dos puntos encontrados en el inciso (b) en la gráfica dibujada en el inciso (a).

Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

107. Presión arterial La presión de un fluido que fluye a través de un sistema cerrado, P, después de t segundos se puede modelar mediante la función

$$P(t) = 100 + 50 \sin 7p \quad \text{3 cucharadas}$$

(a) En el intervalo [0, 1], determine los momentos en los que la presión del fluido es 100 mmHg.
(b) En el intervalo [0, 1], determine los momentos en los que la presión del fluido es 150 mmHg.
(c) En el intervalo [0, 1], determine los momentos en que la presión del fluido está entre 100 y 105 mmHg.

108. La noria En 1893, George Ferris diseñó la noria. Tenía 250 pies de diámetro. Si una noria hace 1 revolución cada 40 segundos, entonces la función

$$h1t2 = 125 \sin a0.157t - \frac{\text{pag}}{2} b + 125$$

representa la altura h, en pies, de un asiento sobre la rueda en función del tiempo t, donde t se mide en segundos. El viaje comienza cuando t = 0.

(a) Durante los primeros 40 segundos del viaje, ¿en qué momento t hay un individuo en la noria exactamente a 125 pies sobre el suelo?

(b) Durante los primeros 80 segundos del viaje, ¿en qué momento t hay un individuo en la noria exactamente a 250 pies sobre el suelo?

(c) Durante los primeros 40 segundos del viaje, ¿durante qué intervalo de tiempo t hay un individuo en la noria a más de 125 pies del suelo?

109. Patrón de espera A un avión se le pide que permanezca dentro de un patrón de espera cerca del Aeropuerto Internacional O'Hare de Chicago. La función d1x2 = 70 sen10.65x2 + 150 representa la distancia d, en millas, del avión desde el aeropuerto en el tiempo x, en minutos.

(a) Cuando el avión entra en el patrón de espera, x = 0, ¿a qué distancia está de O'Hare?
(b) Durante los primeros 20 minutos después de que el avión entra en el patrón de espera, ¿en qué momento x está el avión exactamente a 100 millas del aeropuerto?
(c) Durante los primeros 20 minutos después de que el avión entra en el patrón de espera, ¿en qué momento x está el avión a más de 100 millas del aeropuerto?
(d) Mientras el avión esté en el patrón de espera, ¿alguna vez estará dentro de 70 millas del aeropuerto? ¿Por qué?

110. Movimiento de proyectil Un golfista golpea una pelota de golf con una velocidad inicial de 100 millas por hora. El alcance R de la pelota en función del ángulo u con la horizontal está dado por R1u2 = 672 sen12u2, donde R se mide en pies.
(a) ¿ Con qué ángulo u se debe golpear la pelota si el golfista quiere que recorra 450 pies (150 yardas)?
(b) ¿ Con qué ángulo u se debe golpear la pelota si el golfista quiere que recorra 540 pies (180 yardas)?
(c) ¿ Con qué ángulo u se debe golpear la pelota si el golfista quiere que recorra al menos 480 pies (160 yardas)?
(d) ¿Puede el golfista golpear la pelota a 720 pies (240 yardas)?

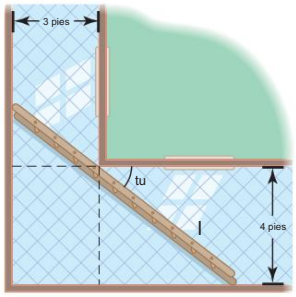
111. Transferencia de calor En el estudio de la transferencia de calor, se presenta la ecuación x + tan x = 0. Grafique Y1 = - x e Y2 = tan x para x Ú 0. Concluya que hay un número infinito de puntos de intersección de estas dos gráficas. Ahora encuentre las dos primeras soluciones positivas de x + tan x = 0 redondeadas a dos decimales.

112. Llevar una escalera alrededor de una esquina Dos pasillos, uno de 3 pies de ancho y el otro de 4 pies de ancho, se encuentran en ángulo recto. Vea la ilustración. Se puede demostrar que la longitud L de la escalera en función de u es L1u2 = 4 csc u + 3 sec u.

(a) En cálculo, se le pedirá que encuentre la longitud de la escalera más larga que puede doblar la esquina resolviendo la ecuación

$$3 \sec u \tan u - 4 \csc u \cot u = 0 \quad 0° 6 u 6 90°$$

Resuelve esta ecuación para u.



(b) ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que se puede llevar alrededor de la esquina?
(c) Grafique L = L1u2, 0° … u … 90° y encuentre el ángulo u que minimiza la longitud L.
(d) Compare el resultado con el obtenido en el inciso (a). Explica por qué las dos respuestas son iguales.

113. Movimiento del proyectil La distancia horizontal que recorrerá un proyectil en el aire (ignorando la resistencia del aire) está dada por la ecuación

$$R1u2 = \frac{v_0^2 \text{ pecado12u2}}{\text{grano}}$$

donde v0 es la velocidad inicial del proyectil, u es el ángulo de elevación y g es la aceleración de la gravedad (9,8 metros por segundo al cuadrado).

(a) Si puedes lanzar una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 34,8 metros por segundo, ¿a qué ángulo de elevación u ¿Deberías dirigir el lanzamiento de modo que la pelota recorra una distancia de 107 metros antes de tocar el suelo?
(b) Determine la distancia máxima a la que puede lanzar el pelota.
(c) Grafique R = R1u2, con v0 = 34,8 metros por segundo.
(d) Verifique los resultados obtenidos en los incisos (a) y (b) utilizando una utilidad gráfica.

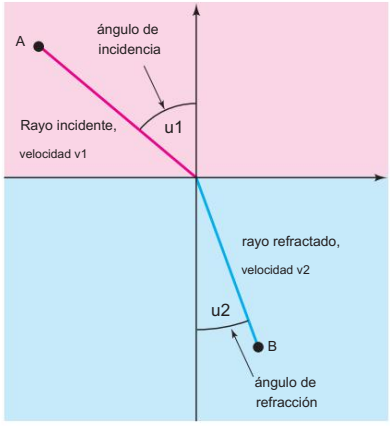
114. Movimiento del proyectil Consulte el problema 113.
(a) Si puedes lanzar una pelota de béisbol con una rapidez inicial de 40 metros por segundo, ¿a qué ángulo de elevación debes dirigir el lanzamiento para que la pelota recorra una distancia de 110 metros antes de tocar el suelo?
(b) Determine la distancia máxima a la que puede lanzar el pelota.
(c) Grafique R = R1u2, con v0 = 40 metros por segundo.
(d) Verifique los resultados obtenidos en los incisos (a) y (b) utilizando una utilidad gráfica.

Machine Translated by Google

Para los problemas 115-122 se necesita el siguiente análisis de la ley de refracción de Snell* (llamada así en honor a Willebrord Snell, 1580-1626).
La luz, el sonido y otras ondas viajan a diferentes velocidades, dependiendo del medio (aire, agua, madera, etc.) por el que pasan. Supongamos que la luz viaja desde un punto A en un medio, donde su velocidad es v1 , hasta un punto B en otro medio, donde su velocidad es v2 . Consulte la figura, donde el ángulo u1 se llama ángulo de incidencia y el ángulo u2 es el ángulo de refracción. La ley de Snell, que se puede demostrar mediante cálculo, establece que

$$\frac{\text{pecado } u1}{\text{pecado } u2} = \frac{v1}{v2}$$

La relación $\frac{v1}{v2}$ se llama índice de refracción. Algunos valores se dan en la tabla que se muestra a continuación.



115. El índice de refracción de la luz al pasar del vacío al vidrio denso de pedernal es 1,66. Si el ángulo de incidencia es de 50°, determine el ángulo de refracción.

116. El índice de refracción de la luz al pasar del vacío al agua es 1,33. Si el ángulo de incidencia es de 20°, determine el ángulo de refracción.

Algunos índices de refracción	
Medio	Índice de refracción†
Agua	1.33
Alcohol etílico (20°C)	1.36
Disulfuro de carbono	1,63
Aire (1 atm y 0°C)	1.00029
Diamante	2.42
Cuarzo fundido	1.46
vidrio, corona	1,52
Vidrio, pedernal denso	1,66
Cloruro de sodio	1,54

117. Supongamos que la luz viaja de un medio, donde su velocidad es v1, a otro medio, donde su velocidad es v2. El ángulo u1 se llama ángulo de incidencia y el ángulo u2 es el ángulo de refracción. La ley de Snell establece que $\frac{\text{sen } u1}{\text{sen } u2} = \frac{v1}{v2}$. La relación $\frac{v1}{v2}$ se llama índice de refracción. Un científico midió la valores en la tabla dada para u1 y u2 para un haz de luz que pasa del aire al agua. ¿Estos valores concuerdan con la Ley de Snell?
Si es así, ¿qué índice de refracción resulta? (Supongamos que el índice de refracción de la luz que pasa del aire al agua es aproximadamente 1,33)

U1	U2	U1	U2
10°	8°	50°	35°0′
20°	15°30′	60°	42°15′
30°	23°15′	70°	44°45′
40°	29°0′	80°	50°0′

118. Curvar la luz La velocidad de la luz amarilla de sodio (longitud de onda, 589 nanómetros) en un determinado líquido se mide en 1,92 * 108 metros por segundo. ¿Cuál es el índice de refracción de este líquido, con respecto al aire, para la luz de sodio? ‡

[Pista: La velocidad de la luz en el aire es aproximadamente 2,998 * 108 metros por segundo.]

119. Flexión de la luz Un rayo de luz con una longitud de onda de 589 nanómetros (producido por una lámpara de sodio) que viaja a través del aire forma un ángulo de incidencia de 30° sobre una losa lisa y plana de vidrio corona. Encuentra el ángulo de refracción.‡

120. Flexión de la luz Un haz de luz que viaja en el aire forma un ángulo de incidencia de 38° sobre una losa de material transparente, y el haz refractado forma un ángulo de refracción de 28°.
Encuentre el índice de refracción del material.

121. Ley de Brewster Si el ángulo de incidencia y el ángulo de refracción son ángulos complementarios, el ángulo de incidencia se denomina ángulo de Brewster uB. El ángulo de Brewster está relacionado con los índices de refracción de los dos medios, n1 y n2, por la ecuación n1 sen uB = n2 cos uB, donde n1 es el índice de refracción del medio incidente y n2 es el índice de refracción del medio refractivo. Determine el ángulo de Brewster para un haz de luz que viaja a través del agua (a 30°C) y forma un ángulo de incidencia con una losa lisa y plana de vidrio corona. El índice de refracción del agua es 1,26 y el índice de refracción del vidrio corona es 1,49.

122. Problema de desafío Un haz de luz pasa a través de una losa gruesa de material cuyo índice de refracción es n2 . Demuestre que el haz emergente es paralelo al haz incidente.‡

123. Problema de desafío Si x2 + 1tan u + cot u2x + 1 = 0 tiene dos soluciones reales, 52 - 23, 2 + 236, encuentre $\overline{\text{sen } u \cos u}$.

124. Problema de desafío Da la fórmula general para las soluciones de la ecuación.

$$3 \text{ sen } u + 23 \overline{\text{porque } u} = 0$$

*Debido a que esta ley también fue deducida por René Descartes en Francia, también se la conoce como Ley de Descartes.

† Para luz de longitud de onda de 589 nanómetros, medida con respecto al vacío. El índice con respecto al aire es insignificante en la mayoría de los casos.

‡Adaptado de Halliday, Resnick y Walker, Fundamentals of Physics, 10.ª ed., 2014, John Wiley & Sons.

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

125. Explica con tus propias palabras cómo usarías tu calculadora para resolver la ecuación cos x = - 0,6, 0… x 6 2p.
¿Cómo modificarías tu método para resolver la ecuación cot x = 5, 0 6 x 6 2p?

126. Explique por qué no existen más puntos de intersección (y por lo tanto no existen más soluciones) en la Figura 25 para x 6 - p o x 7 4p.

Conserve su conocimiento

Los problemas 127 a 136 se basan en el material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

127. Convierta 6x = y en un enunciado equivalente que incluya un logaritmo.

128. Encuentra los ceros reales de f1x2 = 2x2 - 9x + 8.

129. Si sen u = - $\frac{\sqrt{110}}{10}$ y cos u = $\frac{3\sqrt{210}}{10}$, Encuentra el valor exacto de cada una de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

130. Encuentre la amplitud, el período y el desplazamiento de fase de la función y = 2 sen 12x - p2. Grafica la función. Mostrar al menos dos períodos.

131. Si f1x2 = $\frac{1}{2}$ex-1 + 3, encuentre el dominio de $^{-1}$ 1x2.

132. Encuentra la longitud del arco de un círculo de radio 15 centímetros subtendido por un ángulo central de 36°.

133. Encuentra el valor de a para que la recta ax - 3y = 10 tenga pendiente 2.

134. ¿La función f1x2 = $\frac{3x}{5 - x^2}$ par, impar o ninguna de las dos?

135. Si f1x2 = $\frac{8}{x^2}$, encuentre una ecuación de la recta secante que contenga los puntos 11, f112 2 y 14, f142 2.

136. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = cos-1 x de $\frac{1}{2}$ a 1.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 1 2. $\frac{\sqrt{12}}{2}$; - $\frac{1}{2}$ 3. mi - 1, 4 f 4. mi 1 - $\sqrt{2}$5, $\frac{1 + \sqrt{25}}{2}$ f 5. mi 0, 2 f 6. {0,76}

7.4 Identidades trigonométricas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Identidades fundamentales (Sección 6.3, págs. 433–435)
- Propiedades pares e impares (Sección 6.3, págs. 438 y 439)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 520.

OBJETIVOS 1 Usar álgebra para simplificar expresiones trigonométricas (p. 516)
2 Establecer identidades (p. 517)

Esta sección establece identidades adicionales que involucran funciones trigonométricas. Primero, definamos una identidad.

DEFINICIÓN Idénticamente igual, identidad y ecuación condicional

Dos funciones f y g son idénticamente iguales si

$$f(x) = g(x)$$

para cada valor de x para el cual ambas funciones están definidas. A esta ecuación se le llama identidad. Una ecuación que no es una identidad se llama ecuación condicional.

Por ejemplo, las siguientes son identidades:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Machine Translated by Google

Las siguientes son ecuaciones condicionales:

$2x + 5 = 0$ Verdadero sólo si $x \cdot \cdot \frac{5}{2}$

$\text{pecado } x = 0$ Verdadero sólo si $x \cdot kP$, k es un número entero

$\text{pecado } x = \text{porque } x$ Verdadero sólo si $x \cdot \frac{\text{PAG}}{4} \cdot 2kP$ o $x \cdot \frac{5P}{4} \cdot 2kP$, k un número entero

A continuación se muestran las identidades trigonométricas que se han establecido hasta el momento.

Identidades de cociente

$$\tan u = \frac{\text{pecado } u}{\text{porque tú}} \qquad \text{cuna } u = \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado } u}$$

Identidades recíprocas

$$\csc tu = \frac{1}{\text{sinú}} \qquad \text{seg } u = \frac{1}{\text{porque } u} \qquad \text{cuna } u = \frac{1}{\tan u}$$

Identidades pitagóricas

$$\text{sen2 } u + \cos 2 u = 1 \qquad \tan 2 u + 1 = \text{seg2 } u$$

$$\cot 2 u + 1 = \csc 2 u$$

Identidades pares e impares

$$\text{sen1 - u2} = - \text{ sen } u \qquad \cos 1 - u2 = \cos u \qquad \tan 1 - u2 = - \tan u$$

$$\csc 1 - u2 = - \csc u \qquad \text{seg1 - u2} = \text{seg } u \qquad \text{cuna1 - u2} = - \text{ cuna } u$$

Esta lista comprende lo que se denominará identidades trigonométricas básicas. Estas identidades no sólo deben memorizarse, sino que deben conocerse (del mismo modo que usted sabe su nombre en lugar de memorizarlo). De hecho, a menudo se utilizan variaciones menores de una identidad básica. Por ejemplo,

$$\text{sen2 } u = 1 - \cos 2 u \text{ o } \cos 2 u = 1 - \text{sen2 } u$$

podría usarse en lugar de $\sin 2 u + \cos 2 u = 1$. Por esta razón, entre otras, es muy importante conocer estas relaciones y sentirse cómodo con sus variaciones.

1 Utilice álgebra para simplificar expresiones trigonométricas

La capacidad de utilizar el álgebra para manipular expresiones trigonométricas es una habilidad clave que se debe tener para establecer identidades. Se utilizan cuatro técnicas algebraicas básicas para establecer identidades:

- Reescribir una expresión trigonométrica únicamente en términos de seno y coseno
- Multiplicar el numerador y el denominador de una razón por un “1 bien elegido”
- Escribir sumas de razones trigonométricas como una sola razón.
- Factoraje

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1 Uso de técnicas algebraicas para simplificar expresiones trigonométricas

(a) Simplifique reescribiendo cada función trigonométrica en términos de seno y csc u funciones coseno.

(b) Demuestre que $\frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado u}} = \frac{1 - \text{pecado u}}{\text{porque tú}}$ multiplicando el numerador y denominador por 1 - sen u.

(c) Simplifique reescribiendo la expresión $\frac{1 + \text{pecado u}}{\text{pecado u}} + \frac{\text{cuna u - porque u}}{\text{porque tú}}$ como una razón única.

(d) Simplifique factorizando $\frac{\text{pecado2 v - 1}}{\text{tan v pecado v - tan v}}$.

Solución

(a) $\frac{\text{cuna}}{\text{csc u}} = \frac{\frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}}{\frac{1}{\text{pecado u}}} = \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}} \cdot \frac{\text{pecado u}}{1} = \text{porque tú}$

(b) $\frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado u}} = \frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado u}} \cdot \frac{1 - \text{pecado u}}{1 - \text{pecado u}} = \frac{\text{porque u11 - sen u2}}{1 - \text{pecado2 u}}$

æMultiplicar por 1 bien elegido: $\frac{1 \cdot \text{sen U}}{1 \cdot \text{sen U}}$.

$= \frac{\text{porque u11 - sen u2}}{\text{cos2 tu}} = \frac{1 - \text{pecado u}}{\text{porque tú}}$

(C) $\frac{1 + \text{pecado u}}{\text{pecado u}} + \frac{\text{cuna u - porque u}}{\text{porque tú}} = \frac{1 + \text{pecado u}}{\text{pecado u}} \cdot \frac{\text{porque tú}}{\text{porque tú}} + \frac{\text{cuna u - porque u}}{\text{porque tú}} \cdot \frac{\text{pecado u}}{\text{pecado u}}$

$= \frac{\text{cos u + sen u cos u + cot u sen u - cos u sen u}}{\text{pecado u porque u}} = \frac{\text{porque u + cuna u sin u}}{\text{pecado u porque u}}$

$= \frac{\text{porque tú} + \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}}{\text{pecado u porque u}} \quad \text{\#pecado}__ = \frac{\text{porque u + porque u}}{\text{pecado u porque u}} = \frac{2 \text{ porque tú}}{\text{pecado u porque u}} = \frac{2}{\text{pecado u}}$

æcot u · $\frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}$

(d) $\frac{\text{pecado2 v - 1}}{\text{tan v pecado v - tan v}} = \frac{\text{1pecado v + 12 1pecado v - 12}}{\text{bronceado v1sin v - 12}} = \frac{\text{pecado v + 1}}{\text{bronceado verbo}}$

Ahora problemas de trabajo 1 1 , 1 3, y 1 5

2 Establecer identidades

NOTA No se puede utilizar una utilidad gráfica para establecer una identidad; las identidades deben establecerse algebraicamente. Se puede utilizar una utilidad gráfica para proporcionar evidencia de una identidad. Por ejemplo, si graficamos Y1 = csc u # tan u e Y2 = sec u, los gráficos parecen ser los mismos y proporcionan evidencia de que Y1 = Y2. j

En los ejemplos que siguen, las instrucciones dicen “Establecer la identidad”. . . .” Esto se logra comenzando con un lado de la ecuación dada (generalmente el lado que contiene la expresión más complicada) y, usando identidades básicas apropiadas y manipulaciones algebraicas, llegando al otro lado. La selección de identidades básicas apropiadas para obtener el resultado deseado se aprende sólo a través de la experiencia y mucha práctica.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Estableciendo una identidad

Establecer la identidad: csc u # tan u = sec u

Solución Comience con el lado izquierdo, porque contiene la expresión más complicada. Luego use una identidad recíproca y una identidad de cociente.

$$\csc u \# \tan u = \frac{1}{\text{pecado u}} \cdot \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} = \frac{1}{\text{porque tú}} = \text{segundo u}$$

Se ha llegado al lado derecho, por lo que se establece la identidad.

Ahora resuelve el problema 2 1

EJEMPLO 3 Estableciendo una identidad

Establecer la identidad: sen2 1 - u2 + cos2 1 - u2 = 1

Solución Comience con el lado izquierdo y, como los argumentos son -u, use identidades pares-impares.

$$\text{sen2 1 - u2 + cos2 1 - u2} = 3\,\text{sen1 - u2 4}^2 + 3\text{cos1 - u2 4}^2$$

$$= 1 - \text{sen u2}^2 + 1\text{cos u2}^2 \quad \text{Identidades pares-impares}$$

$$= 1\text{sen u2}^2 + 1\text{cos u2}^2$$

$$= 1 \quad \text{Identidad pitagórica}$$

EJEMPLO 4 Estableciendo una identidad

Establecer la identidad: $\dfrac{\text{sen2 1 - u2 - cos2 1 - u2}}{\text{sen1 - u2 - cos1 - u2}} = \text{porque u - sen u}$

Solución El lado izquierdo contiene la expresión más complicada. Además, el lado izquierdo contiene expresiones con el argumento - u, mientras que el lado derecho contiene expresiones con el argumento u. Entonces comience con el lado izquierdo y use identidades pares-impares.

$$\frac{\text{sen2 1 - u2 - cos2 1 - u2}}{\text{sen1 - u2 - cos1 - u2}} = \frac{3\,\text{sen1 - u2}^2 - 3\text{cos1 - u2 4}^2}{4\,\text{sen1 - u2 - cos1 - u2}}$$

$$= \frac{1 - \text{pecado u2}^2 - 1\text{cos u2 -}^2}{\text{sen u - cos u}} \quad \text{Identidades pares-impares}$$

$$= \frac{1\text{pecado u2}^2 - 1\text{cos u2 -}^2}{\text{sen u - cos u}} \quad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{1\text{sen u - cos u2 1 sen u + cos u 2}}{-\,1\,\text{sen u + porque u 2}} \quad \text{Factor.}$$

$$= \text{porque u - sen u} \quad \text{Cancelar y simplificar.}$$

EJEMPLO 5 Estableciendo una identidad

Establecer la identidad: $\dfrac{1 + \tan tu}{1 + \text{cuna}} = \text{bronceado u}$

Solución

$$\frac{1 + \tan tu}{1 + \text{cuna}} = \frac{1 + \tan tu}{1 + \dfrac{1}{\text{broncearte _}}} = \frac{1 + \tan tu}{\dfrac{\text{bronceado u + 1}}{\text{broncearte _}}} = \frac{\tan u1 + \tan u\,2}{\text{bronceado u + 1}} = \text{bronceado u}$$

Ahora resuelva los problemas 2 5 y 2 9

Machine Translated by Google

Cuando aparecen sumas o diferencias de cocientes, normalmente es mejor reescribirlas como un único cociente, especialmente si el otro lado de la identidad consta de un solo término.

EJEMPLO 6 Estableciendo una identidad

Establecer la identidad: $\frac{\text{pecado u}}{1 + \text{porque tú}} + \frac{1 + \text{porque tú}}{\text{pecado u}} = 2 \csc u$

Solución

El lado izquierdo es más complicado. Comience con él y agregue.

$$\frac{\text{pecado u}}{1 + \text{porque tú}} + \frac{1 + \text{porque tú}}{\text{pecado u}} = \frac{\text{sen2 u + 11 + cos u2 11 +}^{2}}{\text{cos u2 \# sen u}}$$ Suma los cocientes.

$$= \frac{\text{sen2 u + 1 + 2 porque u + cos2 u}}{\text{11 + porque u2 \# sen u}}$$ Multiplicar en el numerador.

$$= \frac{\text{1sen2 u + cos2 u2 + 1 + 2 porque u}}{\text{11 + porque u2 \# sen u}}$$ Reagruparse.

$$= \frac{\text{2 + 2 porque tú}}{\text{11 + porque u2 \# sen u}}$$ sen2 U · cos2 U · 1

$$= \frac{\text{21 1 + porque tu 2}}{\text{1 1 + porque u 2 \# sen u}}$$ Factoriza y cancela.

$$= \frac{2}{\text{pecado u}}$$

$$= 2 \csc u$$ Identidad recíproca

Ahora resuelve el problema 5 1

A veces ayuda escribir un lado en términos de funciones seno y coseno únicamente.

EJEMPLO 7 Estableciendo una identidad

Establecer la identidad: $\frac{\text{bronceado v + cuna v}}{\text{segundo v csc v}} = 1$

Solución

$$\frac{\text{bronceado v + cuna v}}{\text{segundo v csc v}} = \frac{\frac{\text{pecado v}}{\text{porque v}} + \frac{\text{porque v}}{\text{pecado v}}}{\frac{1}{\text{porque v}} \cdot \frac{1}{\text{pecado v}}} = \frac{\text{sen2 v + cos2 v}}{\text{porque v sen v}}$$

Cambiar a senos y cosenos.

Suma los cocientes en el numerador.

$$= \frac{1}{\text{porque v sen v}} \cdot \frac{\text{porque v sen v}}{1} = 1$$

Divide los cocientes; sen2 v · cos2 v · 1.

Ahora problema de trabajo 7 1

A veces, multiplicar el numerador y el denominador por un factor apropiado simplifica una expresión.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 8 **Estableciendo una identidad**

Establecer la identidad: $\frac{1 - \text{pecado } u}{\text{porque tú}} = \frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado } u}$

Solución

Comienza por el lado izquierdo y multiplica el numerador y el denominador por 1 + sen u.
(Como alternativa, podríamos multiplicar el numerador y el denominador del lado derecho por 1 - sen u.)

$$\frac{1 - \text{pecado } u}{\text{porque tú}} = \frac{1 - \text{pecado } u}{\text{porque tú}} \cdot \frac{1 + \text{pecado } u}{1 + \text{pecado } u}$$ Multiplica el numerador y el denominador por 1 · sen U.

$$= \frac{1 - \text{pecado2 } u}{\text{porque u11 + sen u2}}$$

$$= \frac{\cos 2 \text{ tu}}{\text{porque u11 + sen u2}}$$ 1 · sen2 U · cos2 U

$$= \frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado } u}$$ Cancelar.

Ahora resuelve el problema 5 5

Aunque la práctica es la única manera real de aprender a establecer identidades, la Las siguientes pautas deberían resultar útiles.

ADVERTENCIA No intente establecer una identidad tratándola como una ecuación. No podemos sumar ni multiplicar ambos lados por la misma expresión porque no sabemos si los lados son iguales. Eso es lo que estamos tratando de demostrar. ¡

Directrices para establecer identidades

- Casi siempre es preferible comenzar con el lado que contiene la expresión más complicada.
- Reescribir sumas o diferencias de cocientes como un solo cociente.
- A veces ayuda reescribir un lado en términos de funciones seno y coseno solo.
- Tenga siempre presente el objetivo. Mientras manipulas un lado de la expresión, tenga en cuenta la forma de la expresión del otro lado.

7.4 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Verdadero o Falso sen2 u = 1 - cos2 u. (pág. 435)
2. Verdadero o Falso pecado 1 - u2 + cos 1 - u2 = cos u - sen u. (pág. 438)

Conceptos y vocabulario

3. Supongamos que f y g son dos funciones con el mismo dominio. Si f1x2 = g1x2 para cada x en el dominio, la ecuación se llama a(n) _____. De lo contrario, se llama ecuación (n). _____
4. tan2 u - seg2 u = _____.
5. cos1 - u2 - cos u = _____.
6. Verdadero o Falso sen1 - u2 + sen u = 0 para cualquier valor de u.
7. Verdadero o Falso Al establecer una identidad, a menudo es más fácil simplemente multiplicar ambos lados por una expresión bien elegida distinta de cero que incluya la variable.
8. Verdadero o Falso tan u # cos u = sen u para cualquier u · 12k + 12 $\frac{\text{pag}}{2}$.
9. Opción múltiple ¿ Cuál de las siguientes ecuaciones no es una ¿identidad?
   (a) cot2 u + 1 = csc2 u (b) tan(- u) = - tan u
   (c) tan u = sen $\frac{\text{porque tú}}{\text{u}}$ (d) csc u = $\frac{1}{\text{sen u}}$
10. Opción múltiple La expresión 1 - sen u $\frac{1}{_____} + \frac{1}{1 + \text{pecado } u}$
    ¿Se simplifica a cuál de los siguientes?
    (a) 2 cos2 u (b) 2 sec2 u (c) 2 sen2 u (d) 2 csc2 u

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 20, simplifique cada expresión trigonométrica siguiendo la dirección indicada.

11. Reescribe en términos de funciones seno y coseno:

tan u # csc u.

12. Reescribe en términos de funciones seno y coseno:

cuna u # seg u.

13. Multiplicar por $\frac{\text{porque tú}}{1 - \text{sen u}}$ $\frac{1 + \text{pecado u}}{1 + \text{pecado u}}$.

14. Multiplica por $\frac{\text{pecado u}}{1 + \cos u}$ $\frac{1 - \text{porque tú}}{1 - \text{porque tú}}$.

15. Reescribe como un cociente único:

$$\frac{\text{pecado u + porque u}}{\text{porque tú}} + \frac{\text{porque u - pecado u}}{\text{pecado u}}$$

16. Reescribe como un cociente único:

$$\frac{1}{1 - \text{porque v}} + \frac{1}{1 + \text{porque v}}$$

17. Multiplica y simplifica: $\frac{1\tan u + 12\ 1\tan u + 12 - \text{seg2 u}}{\text{broncearte}}$

18. Multiplica y simplifica: sen u $\frac{1\text{sen u} + \cos u2\ 1\text{sen u} + \cos u2 - 1}{\cos u}$

19. Factoriza y simplifica: cos2 $\frac{\cos2\ u - 1}{u - \cos u}$

20. Factoriza y simplifica: sen2 $\frac{3\ \text{sen2 u} + 4\ \text{sen u} + 1}{u + 2\ \text{sen u} + 1}$

En los problemas 21 a 100, establezca cada identidad.

21. csc u # porque u = cuna u

22. seg u # sen u = tan u

23. 1 + cot2 1 - u2 = csc2 u

24. 1 + tan2 1 - u2 = seg2 u

25. cos u1tan u + cot u2 = csc u

26. sen u1cot u + tan u2 = sec u

27. sen u csc u - cos2 u = sen2 u

28. tan u cot u - cos2 u = sen2 u

29. 1seg u - 12 1seg u + 12 = tan2 u

30. 1csc u - 12 1csc u + 12 = cot2 u

31. 1csc u + cot u2 1csc u - cot u2 = 1 32. 1sec u + tan u2 1sec u - tan u2 = 1

33. 11 - cos2 u2 11 + cot2 u2 = 1

34. cos2 u11 + tan2 u2 = 1

35. tan2 u cos2 u + cot2 u sen2 u = 1

36. 1sen u + cos u2 ^{2} + 1sin u - porque u2 ^{2} = 2 37. csc4 u - csc2 u = cot4 u + cot2 u

38. seg4 u - seg2 u = tan4 u + tan2 u

39. csc u - cuna u = 1 + $\frac{\text{pecado u}}{\cos u}$

40. sec u - tan u = 1 + sen u $\frac{\text{porque tú}}{}$

41. 9 seg2 u - 5 tan2 u = 5 + 4 seg2 u

42. 3 sen2 u + 4 cos2 u = 3 + cos2 u

43. 1 - = - $\frac{\text{pecado2 tu}}{\text{porque u 1 - porque u}}$

44. 1 - = sen u $\frac{\cos2\ tu}{1 + \text{pecado u}}$

45. $\frac{\text{cscv - 1}}{\text{csc v + 1}} = \frac{1 - \text{pecado v}}{1 + \text{pecado v}}$

46. $\frac{1 + \text{bronceado v}}{1 - \text{bronceado v}} = \frac{\text{cuna v + 1}}{\text{cuna v - 1}}$

47. $\frac{\text{csc u - 1}}{\text{cuna}} = \frac{\text{cuna}}{\text{csc u + 1}}$

48. $\frac{\text{te veo}}{\text{csc u}} + \frac{\text{pecado u}}{\cos u} = 2 \tan u$

49. $\frac{\text{porque tu + 1}}{\text{porque tu - 1}} = \frac{1 + \text{segundo}}{1 - \text{segundo}}$

50. $\frac{1 + \text{pecado u}}{1 - \text{pecado u}} = \frac{\text{csc u + 1}}{\text{csc u - 1}}$

51. $\frac{1 - \text{pecado v}}{\text{porque v}} + \frac{\text{porque v}}{\text{- sen v}} = 2 \text{ seg v } 1$

52. $\frac{\text{porque v}}{1 + \text{pecado v}} + \frac{1 + \text{pecado v}}{\text{porque v}} = 2 \text{ segundos v}$

53. 1 - = $\frac{\text{pecado2 tu}}{\text{porque u}}$ $\frac{}{1 + \text{porque tú}}$

54. $\frac{\text{pecado u}}{\text{pecado u - porque u}} = \frac{1}{1 - \text{cuna}}$

55. $\frac{1 - \text{pecado u}}{\text{sen u}} = 1\text{seg u - tan u2 } 1 + $ ^{2}

56. $\frac{1 - \text{porque tú}}{\cos u} = 1\text{csc u - cot u2 } 1 + $ ^{2}

57. $\frac{\text{cuna}}{1 - \text{tan tú}} + \frac{\text{broncearte}}{\text{cuna u}} = 1 + \tan u + \text{cuna u } 1 -$

58. $\frac{\text{porque tú}}{1 - \text{tan tú}} + \frac{\text{pecado u}}{1 - \text{cuna}} = \text{sen u + porque u}$

59. $\frac{\text{pecado u porque u}}{\text{cos2 u - sen2 u}} = \frac{\text{broncearte}}{1 - \tan2 u}$

60. tan tu + $\frac{\text{porque tú}}{\text{+ sen u}} = \text{seg u } 1$

61. $\frac{\text{pecado u - porque u + 1}}{\text{sen u + porque u - 1}} = \frac{\text{pecado u + 1}}{\text{porque tú}}$

62. $\frac{\tan u + \text{seg u - 1}}{\tan u - \text{seg u + 1}} = \tan u + \text{seg u}$

63. $\frac{\text{segundo u - porque u}}{\text{seg u + porque u}} = \frac{\text{pecado2 tu}}{1 + \cos2 u}$

64. $\frac{\text{bronceado u - cuna u}}{\text{bronceado u + cuna u}} = \text{sen2 u - cos2 u}$

$\frac{\text{bronceado u - cuna u}}{\text{bronceado u + cuna u}} + 2 \cos2 u = 1$

66. $\frac{\text{bronceado u - cuna u}}{\text{bronceado u + cuna u}} + 1 = 2 \text{ sen2 u}$

67. $\frac{\text{te veo}}{1 + \text{segundo}} = \frac{1 - \text{porque tú}}{\text{pecado2 tu}}$

68. $\frac{\text{segundo u + tan u}}{\text{u + cos u}} = \tan u \sec u \cot$

69. $\frac{1 - \text{cuna2 u}}{\cot2 u} + 2 \cos2 u = 1\ 1 +$

70. $\frac{1 - \tan2 u}{1 + \tan2 u} + 1 = 2 \cos2 tu$

71. $\frac{\sec u - \csc u}{\sec u \csc u} = \text{sen u - porque u}$

72. $\frac{\sin2 u - \tan}{\cos2 u - \cot u} = \tan2 u$

73. tan u + cot u = sec u csc u

74. sec u - cos u = sen u tan u

75. $\frac{1 + \text{pecado u}}{1 - \text{pecado u}} - \frac{1 - \text{pecado u}}{\text{sen u}} = 4 \tan u \text{ seg u } 76. 1 + \frac{1}{1 - \text{pecado u}} + \frac{1}{1 + \text{pecado u}} = 2 \text{ seg2 u}$

Machine Translated by Google

77. $\frac{1 + \text{pecado } u}{1 - \text{pecado } u} = 1\text{seg } u + \tan u2^{2}$

78. $\frac{\text{te veo}}{1 - \text{pecado } u} = \frac{1 + \text{pecado } u}{\cos 3\ tu}$

79. $\frac{\text{seg2 v - tan2 v + tan v}}{\text{segundo v}} = \text{sen v + cos v}$

80. $\frac{1 \text{ segundo v - tan}^{2} + 1}{\text{v2 csc v1 segundo v - tan v2}} = 2 \tan v$

81. $\frac{\text{pecado u + porque u}}{\text{pecado u}} - \frac{\text{porque u - pecado u}}{\text{porque tú}} = \text{seg u csc u}$

82. $\frac{\text{pecado u + porque u}}{\text{porque tú}} - \frac{\text{pecado u - porque u}}{\text{pecado u}} = \text{seg u csc u}$

83. $\frac{\text{sen3 u + cos3 u}}{1 - 2\cos 2 u} = \frac{\text{segundo u - pecado u}}{\text{bronceado u - 1}}$

84. $= \frac{\text{sen3 u + cos3 u}}{1 - \text{sen u cos u}}$
$\text{pecado u + porque u}$

85. $\frac{\text{porque u + sen u - sen3 u}}{\text{pecado u}} = \text{cuna u + cos2 u}$

86. $\frac{\cos 2 u - \text{sen2 u}}{1 - \tan 2 u} = \cos 2 u$

87. $\frac{1 - 2\cos 2 u}{\text{pecado u porque u}} = \tan u - \text{cuna u}$

88. $\frac{12\cos 2 u - 12}{\cos 4 u - \text{sen4 u}}^{2} = 1 - 2\,\text{sen2 u}$

89. $\frac{1 + \text{porque u + sen u}}{1 + \text{porque u - pecado u}} = \text{seg u + tan u}$

90. $\frac{1 + \text{sen u + porque u}}{1 + \text{pecado u - porque u}} = \frac{1 + \text{porque tú}}{\text{pecado u}}$

91. $12a \text{ sen u cos u2}^{2} + a2\ 1\cos 2 u - \text{sen2 u2}^{2} = a2$

92. $1a \text{ sen u + b cos u2}$ 93. $^{2} + 1a \text{ porque u - b sen u2}^{2} = a2 + b2$

$1\tan a + \tan b2\ 11 - \cot a \cot b2 + 1\cot a + \cot b2\ 11 - \tan a \tan b2 = 0$

94. $\frac{\text{bronceado a + bronceado b}}{\text{cuna a + cuna b}} = \tan a \tan b$

95. $1\text{sin a - cos b2}^{2} + 1\cos b + \text{sen a2}\ 1\cos b - \text{sen a2} = -2\cos b1\text{sen a - cos b2}$

96. $1\text{sin a + cos b2}^{2} + 1\cos b + \text{sen a2}\ 1\cos b - \text{sen a2} = 2\cos b1\text{sen a + cos b2}$

97. $\ln 0 \tan u 0 = \ln 0\text{sen u 0} - \ln 0 \cos u 0$

98. $\ln 0\text{seg u 0} = -\ln 0 \text{ porque u 0}$

99. $\ln 0\text{sec u + tan u 0} + \ln 0\text{sec u - tan u 0} = 0$

100. $\ln 0\ 1 + \cos u 0 + \ln 0\ 1 - \cos u 0 = 2\ln 0\text{sen u 0}$

En los problemas 101 a 104, demuestre que las funciones f y g son idénticamente iguales.

101. $f1x2 = \cos x \# \text{cuna x} \qquad g1x2 = \csc x - \text{sen x}$

102. $f1x2 = \text{sen x} \# \tan x \qquad g1x2 = \text{seg x} - \cos x$

103. $f1u2 = \tan u + \sec u \quad g1u2 = 1 - \text{sen u}$ $\frac{}{\text{porque tú}}$

104. $f1u2 = \frac{1 - \text{pecado u}}{\text{porque tú}} - \frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado u}} \qquad g1u2 = 0$

105. Demuestre que $\frac{}{29\ \text{seg2 u - 9} = 3\tan u \text{ si p} \ldots u 6} \frac{3p}{2}$.

106. Demuestre que $\frac{}{216 + 6\tan 2 u = 4\sec u \text{ si -}} \frac{\text{pag}}{2} 6 \text{ y } 6 \frac{\text{pag}}{2}$.

Aplicaciones y extensiones

107. Reflectores Un reflector proyecta un punto de luz sobre una pared ubicada a 65 metros del reflector. La aceleración $\ddot{r}$ del punto de luz se encuentra que es $\ddot{r} = 1050\ \text{seg u12 seg2 u - 12}$. Demuestre que esto es equivalente a

$$\ddot{r} = 1050\ a\ 1 + \frac{}{\text{sen2 u b.}}$$

108. Medición óptica Los métodos ópticos de medición a menudo se basan en la interferencia de dos ondas de luz. Si dos ondas de luz, idénticas excepto por un desfase, se mezclan, la intensidad o irradiancia resultante viene dada por

$$\text{es} = 4A2\ \frac{1\csc u - 12\ 1\text{seg u + tan u2}}{\text{csc u sec u}}.$$

Demuestre que esto es equivalente a $\text{It} = 12A\cos u2^{2}$.

Fuente: Técnicas Experimentales, julio/agosto de 2002.

109. Problema de desafío Demuestre: $\cot\text{-}1\ x = \tan\text{-}1\ a\ 1 \frac{}{x\ b}$

110. Problema de desafío Demuestre: $\text{sen-}1\ 1 - x2 = -\text{sen-}1\ x$

Explicar conceptos: discusión y escritura

111. Escribe algunos párrafos que describan tu estrategia para establecer identidades.

112. Escribe las tres Identidades pitagóricas.

113. ¿Por qué crees que normalmente es preferible comenzar con el lado que contiene la expresión más complicada al establecer una identidad?

114. Inventa una identidad que no sea una identidad básica.

Conserve su conocimiento

Los problemas 115 a 124 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

115. Determina si $f1x2 = -3x2 + 120x + 50$ tiene un valor máximo o mínimo y luego encuentra el valor.

116. Si $f1x2 = x - 2 \frac{x + 1}{}$ y $g1x2 = 3x - 4$, encuentre f g.

Machine Translated by Google

117. Encuentra los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de un ángulo u en posición estándar si 1 - 12, 52 es un punto en su lado terminal.

118. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = cos x de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

119. Encuentra la longitud de un segmento de línea con puntos finales 1 - 3, - 42 y 15, 82.

120. Encuentra el área del sector de un círculo de 8 metros de radio formado por un ángulo de 54°.

121. Kayak Ben remó en su kayak 8 millas río arriba contra una corriente de 1 milla por hora y regresó en 6 horas. ¿Hasta dónde podría haber remado Ben en ese tiempo si no hubiera habido corriente?

122. Si un ángulo u se encuentra en el cuadrante III y cot u = $\frac{8}{5}$, encontrar segundo u.

123. Escribe la ecuación del círculo en forma estándar: x2 + y2 - 12x + 4y + 31 = 0

124. Si f1x2 = 2x - 4 y g1x2 = $\frac{x+3}{x-6}$, encuentre el dominio de 1f g2 1x2.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. Verdadero 2. Verdadero

7.5 Fórmulas de suma y diferencia

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Fórmula de distancia (Sección 1.1, págs. 39 y 40)
- Valores de las funciones trigonométricas (Sección 6.2, págs. 413–422)
- Triángulos congruentes (Sección A.2, págs. A16–A17)
- Encontrar valores exactos dado el valor de un Función trigonométrica y cuadrante del ángulo (sección 6.3, págs. 435–438)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 532.

OBJETIVOS 1 Usar fórmulas de suma y diferencia para encontrar valores exactos (p. 524)

2 Usar fórmulas de suma y diferencia para establecer identidades (p. 528)

3 Usar fórmulas de suma y diferencia que involucran funciones trigonométricas inversas (p. 529)

4 Resolver ecuaciones trigonométricas lineales en seno y coseno (p. 530)

Esta sección continúa la derivación de identidades trigonométricas obteniendo fórmulas que involucran la suma o la diferencia de dos ángulos, como cos1a + b2, cos1a - b2, y sen1a + b2. Estas fórmulas se conocen como fórmulas de suma y diferencia. Comenzamos con las fórmulas para cos1a + b2 y cos1a - b2.

TEOREMA Fórmulas de suma y diferencia para la función coseno

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad \cos 1a - \qquad (1)$$

$$b2 = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (2)$$

En palabras

La fórmula (1) establece que el coseno de la suma de dos ángulos es igual al coseno del primer ángulo multiplicado por el coseno del segundo ángulo menos el seno del primer ángulo multiplicado por el seno del segundo ángulo.

Prueba Probamos primero la fórmula (2). Aunque la fórmula es válida para todos los números a y b, en nuestra prueba asumimos que 0 6 b 6 a 6 2p. Comience con el círculo unitario y coloque los ángulos a y b en la posición estándar, como se muestra en la Figura 26(a) en la página siguiente. El punto P1 se encuentra en el lado terminal de b, por lo que sus coordenadas son 1cos b, sen b2; y el punto P2 se encuentra en el lado terminal de a, por lo que sus coordenadas son 1cos a, sen a2.

Machine Translated by Google

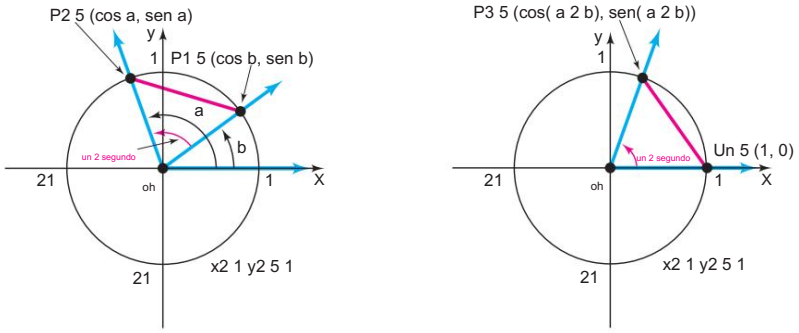


Figura 26

Ahora coloque el ángulo a - b en la posición estándar, como se muestra en la Figura 26(b). El punto A tiene coordenadas 11, 02 y el punto P3 está en el lado terminal del ángulo a - b, por lo que sus coordenadas son 1cos1a - b2, sen1a - b2 2.

Si observa el triángulo OP1P2 en la Figura 26(a) y el triángulo OAP3 en la Figura 26(b), observe que estos triángulos son congruentes. (¿Ves por qué? SAS: dos lados y el ángulo incluido, a - b, son iguales.) Como resultado, el lado desconocido del triángulo OP1 P2 y el lado desconocido del triángulo OAP3 debe ser igual; eso es,

$$d1A, P32 = d1P1 , P22$$

Ahora usa la fórmula de la distancia para obtener

$$\sqrt{23\cos 1a - b2 - 14\ ^2 + 3\ \text{sen}1a - b2 - 04 +\ ^2} = \sqrt{21\cos a - \cos b2\ ^2 + 1\text{sin a - pecado b2}^2}$$ d1A, P32 · d1P1, P22

$$3\cos 1a - b2 - 14\ ^2\ \text{sen2}\ 1a - b2 = 1\cos a - \cos b2\ ^2 + 1\text{sen a - sen b2}\ ^2$$ Cuadre ambos lados.

$$\cos 2\ 1a - b2 - 2\cos 1a - b2 + 1 + \text{sen2}\ 1a - b2 = \cos 2\ a - 2\cos a \cos b + \cos 2\ b$$ Multiplica los términos al cuadrado.

$$+ \text{sen2 a - 2 sen a sen b + sen2 b}$$

$$2 - 2\cos 1a - b2 = 2 - 2\cos a \cos b - 2\ \text{sen a sen b}$$ Utilice una identidad pitagórica (3 veces).

$$- 2\cos 1a - b2 = - 2\cos a \cos b - 2\ \text{sin a sin b}$$ Resta 2 de ambos lados.

$$\cos 1a - b2 = \cos a \cos b + \text{sen a sen b}$$ Divide ambos lados por·2.

Esta es la fórmula (2).

La demostración de la fórmula de la suma del coseno se deriva de la fórmula de la diferencia del coseno y de las identidades pares-impares. Como a + b = a - 1 -b2, se sigue que

$$\cos 1a + b2 = \cos 3a - 1 - b2\ 4$$

$$= \cos a \cos 1 - b2 + \text{sen a sin1 -b2}$$ Usa la fórmula de diferencia para el coseno.

$$= \text{porque a cos b - pecado a pecado b}$$ Utilice las identidades pares-impares.

■

1 Utilice fórmulas de suma y diferencia para encontrar valores exactos

Un uso de las Fórmulas de Suma y Diferencia es obtener el valor exacto del coseno de un ángulo que se puede expresar como la suma o diferencia de ángulos cuyo seno y coseno se conocen con exactitud.

EJEMPLO 1 Usar la fórmula de la suma para encontrar un valor exacto

Encuentre el valor exacto de cos 75°.

Solución Debido a que 75° = 45° + 30°, use la fórmula (1) para obtener

$$\cos 75° = \cos 145° + 30°2 = \underset{C}{\cos 45°} \cos 30° - \text{sen } 45° \text{ sen } 30°$$

Fórmula de suma para el coseno

$$= \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ 1\ 26 - 222$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Usar la fórmula de diferencia para encontrar un valor exacto

Encuentra el valor exacto de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Solución

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

Usa la fórmula de diferencia para el coseno.

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

Ahora resuelva los problemas 1 3 y 1 9

Otro uso de las fórmulas de suma y diferencia es establecer otras identidades. A continuación se presentan dos identidades importantes, conjeturadas en la sección 6.4.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u \qquad (3a)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad (3b)$$

Ver el concepto

Gráfica $Y1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $Y2 = \sin x$ en la misma pantalla. ¿Hacer esto proporciona evidencia del resultado (3a)? ¿Cómo proporcionaría evidencia del resultado (3b)?

Prueba Para establecer la identidad (3a), use la fórmula de diferencia para $\cos(a - b)$ con $a = \frac{\pi}{2}$ y $b = u$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \sin\frac{\pi}{2}\sin u$$

$$= 0 \cdot \cos u + 1 \cdot \sin u$$

$$= \sin u$$

Para establecer la identidad (3b), utilice la identidad (3a) que acaba de establecer.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right] = \cos u$$

Usar identidad (3a) ■

Además, como la función coseno es par

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(-u) = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right)$$

Propiedad par del coseno

y porque

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$$

Identidad (3a)

se deduce que $\cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \sin u$. Esto significa que las gráficas de $y = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right)$ y $y = \sin u$ son idénticos.

Habiendo establecido las identidades (3a) y (3b), ahora podemos derivar la suma y Fórmulas de diferencia para $\sin(a + b)$ y $\sin(a - b)$.

Machine Translated by Google

Prueba sen1a + b2 = cosc p $\frac{}{2}$ - 1a + b2d — Identidad (3a)

= cosc ap $\frac{}{2}$ - ab - bd

= cosa p $\frac{}{2}$ - abcos b + sina p $\frac{}{2}$ - absenta b — Fórmula de diferencia para el coseno

= sen a cos b + cos a sen b — Identidades (3a) y (3b)

sen1a - b2 = sen3a + 1 -b2 4

= sen a cos1 -b2 + cos a sen1 -b2 — Utilice la fórmula de suma para el seno recién obtenido.

= sen a cos b + cos a1 - sen b2 — Identidades pares e impares

= sen a cos b - cos a sen b ■

En palabras

La fórmula (4) establece que el seno de la suma de dos ángulos es igual al seno del primer ángulo multiplicado por el coseno del segundo ángulo más el coseno del primer ángulo multiplicado por el seno del segundo ángulo.

TEOREMA Fórmulas de suma y diferencia para la función seno

sen1a + b2 = sen a cos b + cos a sen b sen1a - (4)

b2 = sen a cos b - cos a sen b (5)

EJEMPLO 3 Usar la fórmula de la suma para encontrar un valor exacto

Encuentra el valor exacto del pecado $\frac{7p}{12.}$.

Solución

$$\underset{\text{pecado } 12}{\frac{7p}{}} = \text{siná } 3p\frac{}{12} + \frac{4p}{12\ b} = \text{sina } p\ \frac{}{4} + \underset{3\ \text{segundo}}{\frac{\text{pag}}{}}$$

$$= \text{pecado } \frac{\text{pag}}{4}\ \underset{3}{\text{porque } \frac{\text{pag}}{}} + \text{porque } \frac{\text{pag}}{4}\ \underset{3}{\text{pecado } \frac{\text{pag}}{}}$$ Fórmula de suma para el seno

$$= \frac{12}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{12}{2}\cdot\frac{13}{2} = \frac{1}{4}\ 1\ 22 + 262$$

Ahora resuelve el problema 2 1

EJEMPLO 4 Usar la fórmula de diferencia para encontrar un valor exacto

Encuentre el valor exacto de sen 80° cos 20° - cos 80° sen 20°.

Solución

La forma de la expresión sen 80° cos 20° - cos 80° sen 20° es la del lado derecho de la fórmula (5) para sen1a - b2 con a = 80° y b = 20°. Eso es,

$$\text{sen } 80°\ \cos 20° - \cos 80°\ \text{sen } 20° = \text{sen}180° - 20°2 = \text{sen } 60° = \frac{13}{2}$$

Ahora resuelve los problemas 2 7 y 3 1

EJEMPLO 5 Encontrar valores exactos

Si sen a = 5 $\frac{4}{}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 a 6 p, y sen b = - 25 $\frac{2}{}$ = - $\frac{225}{5}$, página 6 b 6 $\frac{3p}{2}$, encuentra el valor exacto de cada uno de los siguientes.

(a) porque a (b) porque b (c) cos1a + b2 (d) sen1a + b2

Machine Translated by Google

Solución (a) Porque sen a = 5 cuadrante II. $\frac{4}{El} = \frac{y}{r}$ y 2 $\frac{pag}{}$ 6 a 6 p, sean y = 4 y r = 5, y coloque a en

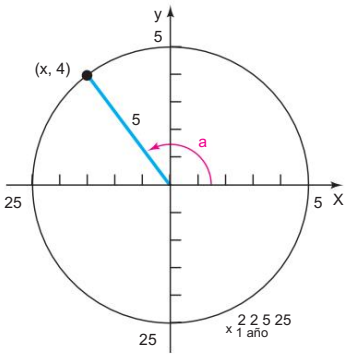


Figura 27 sen a = 5 $\frac{4}{—}$, $\frac{pag}{2}$ 6 a 6p

punto P = 1x, y2 = 1x, 42, x 6 0, está en un círculo de radio 5, x2 + y2 = 25. Vea la Figura 27. Entonces

$$x2 + y2 = 25$$
$$x2 + 16 = 25 \qquad y \cdot 4$$
$$x2 = 25 - 16 = 9$$
$$x = -3 \qquad x * 0$$

Entonces

$$\text{porque a} = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

Alternativamente, podemos usar sen a = 5 $\frac{4}{—}$ y la identidad pitagórica sin2 a + cos2 a = 1 para encontrar cos a.

$$\cos a = -\sqrt{1 - \text{sen}2\ a} = -\sqrt{1 - \text{æA}\ \frac{\text{dieciséis}}{25}} = -\text{Un } 9\ \frac{—}{25} = -\frac{3}{5}$$

en el cuadrante II, porque A * 0

(b) Debido a que sen b $\frac{-2}{= 25,}$ = $\frac{y}{r}$ y p 6 b 6 $\frac{3p}{2}$, sea y = - 2 y r = 25, y coloque b en el cuadrante III. El punto P = 1x, y2 = 1x, - 22, x 6 0, está en un círculo de radio 25, x2 + y2 = 5. Vea la Figura 28. Entonces

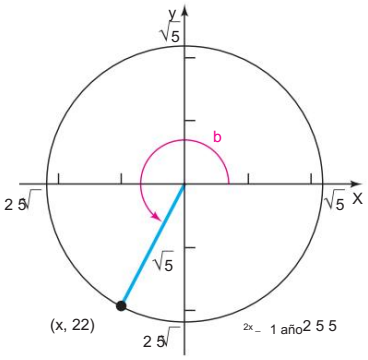


Figura 28 sen b = 25 $\frac{-2}{—}$, página 6 b 6 $\frac{3p}{2}$

$$x2 + y2 = 5$$
$$x2 + 4 = 5 \qquad y \cdot \cdot 2$$
$$x2 = 1$$
$$x = -1 \quad x * 0$$

Entonces

$$\text{porque b} = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Alternativamente, use sin b = - 5 $\frac{225}{—}$ y la identidad pitagórica sin2 b + cos2 b = 1 para encontrar cos b.

$$\text{porque b} = -\sqrt{1 - \text{sen}2\ b} = -\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = -\text{Un } \sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(c) Utilice los resultados encontrados en los incisos (a) y (b) y la fórmula de suma para el coseno.

$$\cos 1a + b2 = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$
$$= -\frac{3}{5}a - \frac{\sqrt{5}}{5}b - \frac{4}{5}a - \frac{225}{5}\ b = \frac{1125}{25}$$

(d) Utilice la fórmula de la suma para el seno.

$$\text{sen}1a + b2 = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$
$$= \frac{4}{5}a - \frac{\sqrt{5}}{5}\ b + a - 5\ ba - \frac{3}{5}\ b = \frac{215}{25}$$

Ahora resuelva el problema 3 5 (a), (b), y C)

Machine Translated by Google

2 Utilice fórmulas de suma y diferencia para establecer identidades

EJEMPLO 6 Estableciendo una identidad

Establecer la identidad: $\frac{\cos(a-b)}{\sin a \sin b} = \cot a \cot b + 1$

Solución

$$\frac{\cos(a-b)}{\sin a \sin b} = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\sin a \sin b}$$ Fórmula de diferencia para el coseno

$$= \frac{\cos a \cos b}{\sin a \sin b} + \frac{\sin a \sin b}{\sin a \sin b}$$

$$= \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \frac{\cos b}{\sin b} + 1$$

$$= \cot a \cot b + 1$$

Ahora resuelve los problemas 4 9 y 6 1

Utilice la identidad $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$ y las fórmulas de suma para $\sin(a+b)$ y $\cos(a+b)$ para derivar una fórmula para $\tan(a+b)$.

Prueba $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$

Ahora divide el numerador y el denominador entre $\cos a \cos b$.

$$\tan(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$$

$$= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

■

Prueba Utilice la fórmula de suma para $\tan(a+b)$ y las propiedades par-impar para obtener la fórmula de diferencia para la función tangente.

$$\tan(a-b) = \tan[a + (-b)] = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \tan(-b)} = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$\tan(u \cdot v) = \tan u \cdot \tan v$

■

Hemos demostrado los siguientes resultados:

TEOREMA Fórmulas de suma y diferencia para la función tangente

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad (6)$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad (7)$$

En palabras
La fórmula (6) establece que la tangente de la suma de dos ángulos es igual a la tangente del primer ángulo más la tangente del segundo ángulo, todo dividido por 1 menos su producto.

Ahora resuelve el problema 3 5 (d)

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Estableciendo una identidad

Establecer la identidad: tan1u + p2 = tan u

Solución $\tan(1u + p2) = \dfrac{\tan u + \tan p}{1 - \tan u \tan p} = \dfrac{\tan tu + 0}{1 - \tan tu \# 0}$ = bronceado u

El ejemplo 7 verifica que la función tangente es periódica con período p.

EJEMPLO 8 Estableciendo una identidad

Establecer la identidad: $\tan(u + \frac{\pi}{2}) = -\cot u$

La fórmula de solución (6) no se puede utilizar porque el bronceado $\frac{\pi}{2}$ no está definido. En su lugar, proceda de la siguiente manera:

$$\tan\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\text{pecado u porque } \frac{\pi}{2} + \text{porque pecaste } \frac{\pi}{2}}{\text{porque tú porque } \frac{\pi}{2} - \text{pecado u pecado } \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1\text{sen u2} \# 0 + 1\cos u2 \# 1}{1\cos u2 \# 0 - 1\sin u2 \# 1} = \frac{\text{porque tú}}{\text{-pecado}} = -\text{cuna u}$$

ADVERTENCIA Tenga cuidado al utilizar las fórmulas (6) y (7). Estas fórmulas sólo se pueden utilizar para los ángulos a y b para los cuales se definen tan a y tan b. Es decir, se pueden utilizar para todos los ángulos excepto para los múltiplos enteros impares de 2. $\frac{\pi}{2}$.

3 Utilice fórmulas de suma y diferencia que involucren la inversa Funciones trigonométricas

EJEMPLO 9 Encontrar el valor exacto de una expresión que involucra inversa Funciones trigonométricas

Encuentra el valor exacto de: $\text{sinacos-1}\frac{1}{2} + \text{pecado-1}\frac{3}{5}$

Solución Queremos el seno de la suma de dos ángulos, $a = \cos^{-1}\frac{1}{2}$ y $b = \text{pecado-1}\frac{3}{5}$. Entonces

$$\text{porque a} = \frac{1}{2} \quad 0 \ldots a \ldots p \text{ y sen b} = \frac{3}{5} \quad -\frac{\pi}{2} \ldots b \ldots \frac{\pi}{2}$$

Utilice identidades pitagóricas para obtener sen a y cos b. Porque sin a Ú 0 y cos b Ú 0 (¿sabes por qué?), esto significa que

$$\text{sen a} = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \text{Un } \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{porque b} = \sqrt{1 - \text{sen2 b}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \text{Un } \frac{16}{25} = \frac{4}{5}$$

NOTA En el ejemplo 9 sen a también puede ser 1 encontrado usando $\cos a = \frac{1}{2} = \frac{x}{r}$, entonces x = 1 y r = 2. Entonces y = 13 y pecado $a = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Además, cos b puede ser encontrado de manera similar.

Como resultado,

$$\text{sinacos-1}\frac{1}{2} + \text{pecado-1}\frac{3}{5} = \text{sen1a + b2} = \text{sen a cos b} + \cos a \text{ sen b}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{13} + 3}{10}$$

Ahora problema de trabajo 7 7

EJEMPLO 10 Escribir una expresión trigonométrica como expresión algebraica

Escribe sin1sin-1 u + cos-1 v2 como una expresión algebraica que contenga u y v (es decir, sin funciones trigonométricas). Indique las restricciones sobre u y v.

Machine Translated by Google

Solución Primero, para sen-1 u, la restricción sobre u es - 1 … u … 1, y para cos-1 v, la restricción en v es - 1 … v … 1. Ahora sea a = sin-1 u y b = cos-1 v. Entonces

$$\text{pecado } a = u - 2 \quad \frac{\text{pag}}{} \ldots a \ldots \quad \frac{\text{pag}}{2} \quad - 1 \ldots tu \ldots 1$$

$$\text{porque } b = v \qquad 0 \ldots b \ldots p - 1 \ldots v \ldots 1$$

Porque - 2 $\frac{\text{pag}}{}$ … a … $\frac{\text{pag}}{2}$, cos a Ú 0. Entonces,

$$\text{porque } a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a} = \sqrt{1 - u^2}$$

Además, porque 0… b… p, sen b Ú 0. Entonces

$$\text{sen } b = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{1 - v^2}$$

Como resultado,

$$\text{sen}1\text{sen}^{-1} u + \cos^{-1} v2 = \text{sen}1a + b2 = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$

$$= uv + \sqrt{1 - u^2}\,\sqrt{1 - v^2}$$

Ahora problema de trabajo 8 7

4 Resolver ecuaciones trigonométricas lineales en seno y coseno

En ocasiones es necesario elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación para obtener expresiones que permitan el uso de identidades. Recuerde, elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación puede introducir soluciones extrañas. Como resultado, se deben verificar las soluciones aparentes.

EJEMPLO 11 Resolver una ecuación trigonométrica lineal en seno y coseno

Resuelve la ecuación: sen u + cos u = 1, 0… u 6 2p

Opción 1 Los intentos de utilizar identidades disponibles no conducen a ecuaciones que sean fáciles de resolver. (Pruébalo tú mismo.) Entonces, dada la forma de esta ecuación, eleva al cuadrado ambos lados.

$$\text{seno } u + \text{porque } u = 1$$

$$1\text{sin } u + \cos u2^{\,2} = 1 \quad \text{Cuadrar ambos lados.}$$

$$\text{sin}^2 u + 2 \text{ sin } u \cos u + \cos^2 u = 1 \quad \text{Quitar paréntesis.}$$

$$2 \text{ sen } u \cos u = 0 \quad \text{sen}^2 U \cdot \cos^2 U \cdot 1$$

$$\text{sen } u \text{ porque } u = 0$$

Igualar cada factor a cero conduce a

$$\text{sen } u = 0 \text{ o } \cos u = 0$$

Las soluciones aparentes son

$$tu = 0 \qquad u = pu = \frac{\text{pag}}{2} \qquad tu = \frac{3p}{2}$$

Debido a que ambos lados de la ecuación original estaban al cuadrado, estos aparentes Se deben comprobar las soluciones para ver si alguna es extraña.

tu = 0 : pecado 0 + porque 0 = 0 + 1 = 1 Una solución

tu = p: sen p + cos p = 0 + 1 - 12 = - 1 No es una solución

tu = $\frac{\text{pag}}{2}$: $\text{pecado}\frac{\text{pag}}{2} + \text{porque}\frac{\text{pag}}{2} = 1 + 0 = 1$ Una solución

= 2 $\frac{3p}{}$: sen u $\frac{3p}{2}$ + porque $\frac{3p}{2}$ = - 1 + 0 = - 1 No es una solución

Los valores u = p y u = $\frac{3p}{2}$ son extraños. El conjunto solución es e 0, $\frac{\text{pag}}{2}$f.

Machine Translated by Google

Opción 2 Comienza con la ecuación.

$$\text{seno } u + \text{porque } u = 1$$

y divide ambos lados por 22. Luego

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{pecado } tu + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{porque } tu = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El lado izquierdo ahora se parece a la fórmula del seno de la suma de dos ángulos, uno de los cuales es u. El otro ángulo es desconocido (llámelo f.) Entonces

$$\text{sen}1u + f2 = \text{sen } u \cos f + \cos u \text{ sen } f = 22 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (8)$$

Comparando (8) con $\text{sen } u + \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{porque } tu = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vemos eso

$$\text{porque } f \frac{1}{= 22\sqrt{}} = \frac{12\sqrt{}}{2} \qquad \text{pecado } f \frac{1}{= 22\sqrt{}} = \frac{12\sqrt{}}{2} \qquad 0\ldots f\ 6\ 2p$$

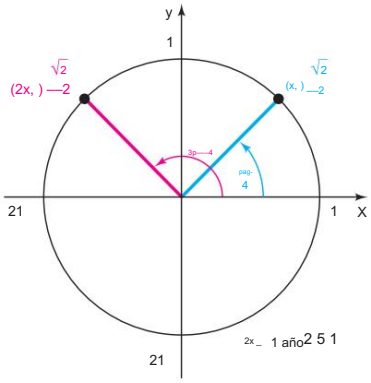


Figura 29

Por lo tanto, el ángulo f es $\frac{\text{pag}}{4}$. Como resultado, la ecuación (8) se convierte en

$$\text{sinaú} + \frac{\text{pag}}{4}\ b = \frac{12\sqrt{}}{2}$$

En el intervalo 30, 2p2, existen dos ángulos cuyo seno es la Figura 29. $\frac{12\sqrt{}}{2} : \frac{\text{pag}}{4}$ y . Ver $\frac{3p}{4}$ Como resultado,

$$tu + \frac{\text{pag}}{4} = \frac{\text{pag}}{4} \quad \text{o } tu + \frac{\text{pag}}{4} = \frac{3p}{4}$$

$$tu = 0 \text{ o } \qquad tu = \frac{\text{pag}}{2}$$

El conjunto solución es e $0, \frac{\text{pag}}{2}$f.

La segunda opción se puede utilizar para resolver cualquier ecuación lineal de la forma a sin u + b cos u = c, donde a, b y c son constantes distintas de cero, dividiendo ambos lados de la ecuación por $2a2 + b2$.

EJEMPLO 12 Resolver una ecuación trigonométrica lineal en sen U y cos U

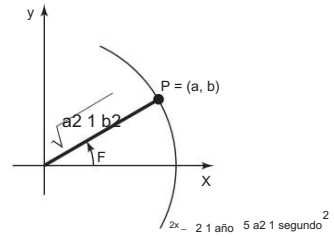
Resolver:

$$a \text{ sen } u + b \text{ porque } u = c \qquad (9)$$

donde a, b y c son constantes y a · 0 o b · 0.

Solución Divide ambos lados de la ecuación (9) por $2a2 + b2$. Entonces

$$\frac{a}{2a2 + b2}\ \text{pecado } tu + \frac{b}{2a2 + b2}\ \text{porque } tu = \frac{c}{2a2 + b2} \qquad (10)$$



$$\text{pecado } f = \frac{b}{\sqrt{a2\ 1b2}} \qquad \text{porque } f = \frac{a}{\sqrt{a2\ 1b2}}$$

Figura 30

Existe un ángulo único f, 0 … f 6 2p, para el cual

$$\text{porque } f \frac{a}{= 2a2 + b2} \quad \text{y sen } f = 2a2 + \frac{b}{b2} \qquad (11)$$

La Figura 30 muestra el ángulo f para a 7 0 y b 7 0.

(continuado)

Machine Translated by Google

La ecuación (10) se puede escribir como

$$\text{sen } u \cos f + \cos u \text{ sen } f = 2a2 + \frac{C}{b2}$$

o equivalente,

$$\text{sen1}u + f2 = 2a2 \frac{C}{+ b2} \qquad (12)$$

donde f satisface la ecuación (11).

- Si 0 c 0 7 2a2 + b2 entonces sen1u + f2 7 1 o sen1u + f2 6 - 1, y la ecuación (12) no tiene solución.
- Si 0 c 0 … 2a2 + b2 , entonces las soluciones de la ecuación (12) son

$$u + f = \text{sen-1 } 2a2 \frac{C}{+ b2} \quad \text{o } u + f = p - \text{sen-1 } 2a2 + b2 \frac{C}{}$$

Una vez que el ángulo f está determinado por las ecuaciones (11), las anteriores son las soluciones a la ecuación (9).

Ahora problema de trabajo 9 5

RESUMEN

Fórmulas de suma y diferencia

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$ $\quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b$

$= \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$ $\quad \text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b$

$$\tan(a + b) = \frac{\text{bronceado } a + \text{bronceado } b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a - b) = \frac{\text{bronceado } a - \text{bronceado } b}{1 + \tan a \tan b}$$

7.5 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La distancia d desde el punto 12, - 32 hasta el punto 15, 12 es _____. (págs. 39 y 40)

2. Si $\text{sen } u = \frac{4}{5}$ y u está en el cuadrante II, entonces cos u = _____. (págs. 435–438)

3. (a) $\text{pecado } \frac{\text{pag}}{4} \text{ porque } \frac{\text{pag}}{3} =$ _____ (págs. 416–419)

(b) $\text{bronceado } \frac{\text{pag}}{4} - \text{pecado } \frac{\text{pag}}{6} =$ _____ (págs. 416–419)

4. Si $\text{sen } a = -\frac{4}{5}$, página 6 a 6 $\frac{3p}{2}$, entonces cos a = _____. (págs. 435–438)

5. Dos triángulos son si las longitudes de dos lados correspondientes son iguales y los ángulos entre los dos lados tienen la misma medida. (págs. A16-A17)

6. Si $P = a -\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}b$ es un punto en el círculo unitario que corresponde a un número real t, entonces sen t = _____, porque t = _____, y tan t = _____. (pág. 413)

Conceptos y vocabulario

7. (a) cos1a + b2 = cos a cos b (b) sen1a - b2 = sen a cos b _____ pecado a pecado b _____ porque un pecado b

8. Verdadero o Falso sin1a + b2 = sin a + sin b + 2 sin a sin b

9. Verdadero o Falso $\cos\left(p - \frac{p}{2}\right) = \text{porque } u$

10. Verdadero o Falso Si f1x2 = sen x y g1x2 = cos x, entonces g1a + b2 = g1a2g1b2 - f1a2f1b2

11. Opción múltiple Elige la expresión que completa la fórmula de suma para funciones tangentes: tan(a + b) = tan a + tan b _____.

(a) $\frac{}{1 - \text{bronceado } a \text{ bronceado } b}$ (b) $\frac{\text{bronceado } a - \text{bronceado } b}{1 + \text{bronceado } a \text{ bronceado } b}$

(C) $\frac{\text{bronceado } a + \text{bronceado } b}{1 + \text{bronceado } a \text{ bronceado } b}$ (d) $\frac{\text{bronceado } a - \text{bronceado } b}{1 - \text{bronceado } a \text{ bronceado } b}$

12. Opción múltiple Elige la expresión que sea equivalente a

sen 60° cos 20° + cos 60° sen 20°

(a) cos 40° (b) sen 40° (c) cos 80° (d) sen 80°

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 24, encuentre el valor exacto de cada expresión.

13. cos 165°

14. pecado 105°

15. bronceado 195°

16. bronceado 15°

17. pecado $\frac{\text{pag}}{12}$

18. pecado $\frac{5p}{12}$

19. porque $\frac{7p}{12}$

20. bronceado $\frac{7p}{12}$

21. pecado $\frac{17p}{12}$

22. bronceado $\frac{19p}{12}$

23. cota - $\frac{5p}{\text{12 segundo}}$

24. seca - $\frac{\text{pag}}{12b}$

En los problemas 25 a 34, encuentre el valor exacto de cada expresión.

25. sen 20° cos 80° - cos 20° sen 80°

26. sen 20° cos 10° + cos 20° sen 10°

27. cos 70° cos 20° - sen 70° sen 20°

28. cos 40° cos 10° + sen 40° sen 10°

29. $\frac{\text{bronceado 40° - bronceado 10°}}{\text{1 + bronceado 40° bronceado 10°}}$

30. $\frac{\text{bronceado 20° + bronceado 25°}}{\text{1 - bronceado 20° bronceado 25°}}$

31. pecado porque 12 $\frac{7p}{12}$ - porque $\frac{\text{pag}}{\text{pecado 12 12}}$ $\frac{7p}{}$

32. porque $\frac{5p}{12}$ porque $\frac{7p}{12}$ - pecado pecado 12 12 $\frac{5p}{}$ $\frac{7p}{}$

33. pecado porque 18 $\frac{5p}{18}$ + porque pecado 18 $\frac{5p}{18}$

34. porque $\frac{\text{pag}}{12}$ porque $\frac{5p}{12}$ + pecado pecado 12 12 $\frac{5p}{}$ $\frac{\text{pag}}{}$

En los problemas 35 a 40, encuentre el valor exacto de cada uno de los siguientes bajo las condiciones dadas:

(a) sen1a + b2 (b) cos1a + b2 225 (c) sen1a - b2 (d) tan1a - b2

35. pecado a = $\frac{3}{5}$, 0 6 un 6 $\frac{\text{pag}}{2}$; porque b = $\frac{}{5}$, - $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 b 6 0

36. porque a = $\frac{\overline{15}}{5}$, 0 6 un 6 $\frac{\text{pag}}{}$; pecado b = - 2 $\frac{4}{5}$, - $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 b 6 0

37. tan a = $\frac{5}{12}$, página 6 a 6 $\frac{3p}{2}$; pecado b = - 2 $\frac{1}{}$, página 6 b 6 $\frac{3p}{2}$

38. tan a = - 3 $\frac{4}{}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 a 6p; porque b = $\frac{1}{2}$, 0 6 b 6 $\frac{\text{pag}}{2}$

39. porque a = $\frac{1}{2}$, - $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 un 6 0; pecado b = $\frac{1}{3}$, 0 6 b 6 $\frac{\text{pag}}{2}$

40. pecado a = $\frac{5}{13}$, - $\frac{3p}{2}$ 6 a 6 - p; bronceado b = - 23, $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 b 6 p

41. Si porque u = $\frac{1}{4}$, u en el cuadrante IV, encuentre el valor exacto de:

(a) pecado u

(b) sinau - (c) $\frac{\text{pag}}{\text{6 segundo}}$

cosau + (d) $\frac{\text{pag}}{\text{3 segundo}}$

tanau - $\frac{\text{pag}}{\text{4 segundo}}$

42. Si sen u = $\frac{1}{3}$, u en el cuadrante II, encuentre el valor exacto de:

(a) porque tú

(b) sinau + (c) $\frac{\text{pag}}{\text{6 segundo}}$

cosau - (d) $\frac{\text{pag}}{\text{3 segundo}}$

tanau + $\frac{\text{pag}}{\text{4 segundo}}$

En los problemas 43 a 48, utilice las figuras para evaluar cada función si f 1x2 = sen x, g1x2 = cos x y h1x2 = tan x.

43. g1a + b2

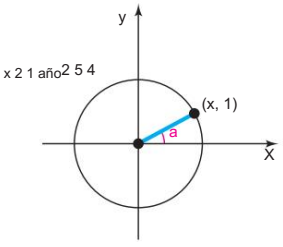
44. f1a + b2

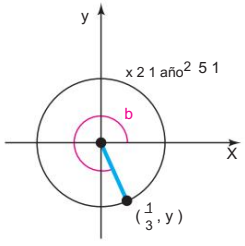
45. f1a-b2

46. g1a-b2

47. h1a-b2

48. h1a + b2





En los problemas 49 a 74, establezca cada identidad.

49. sina p $\overline{2}$ + ub = porque u

50. cosa p $\overline{2}$ + ub = - sen u

51. cos1p - u2 = - cos u

52. sen1p - u2 = sen u

53. cos1p + u2 = - cos u

54. sen1p + u2 = - sen u

55. tan12p - u2 = - tan u

56. tan1p - u2 = - tan u

57. cosa 3p $\overline{2}$ + ub = sen u

58. siná 3p $\overline{2}$ + ub = - porque u

59. cos1a + b2 + cos1a - b2 = 2 cos a cos b

Machine Translated by Google

60. sen1a + b2 + sen1a - b2 = 2 sen a cos b

61. $\frac{\text{sen1a + b2}}{\text{pecado a porque b}}$ = 1 + cuna a tan b

62. $\frac{\text{sen1a + b2}}{\text{a cos b}}$ = tan a + tan b cos

63. $\frac{\text{cos1a-b2}}{\text{pecado a porque b}}$ = cuna a + tan b

64. = 1 - tan a tan b cos a cos b

$\frac{\text{cos1a + b2}}{\text{cos1a-b2}} = \frac{\text{1 - bronceado a bronceado b}}{\text{1 + bronceado a bronceado b}}$

66. $\frac{\text{sen1a + b2}}{\text{pecado1a - b2}} = \frac{\text{bronceado a + bronceado b}}{\text{bronceado a - bronceado b}}$

67. cuna1a - b2 = $\frac{\text{cuna a cuna b + 1}}{\text{cuna b - cuna a}}$

68. cuna1a + b2 = $\frac{\text{cuna a cuna b - 1}}{\text{cuna b + cuna a}}$

69. seg1a - b2 = 1 $\frac{\text{segundo a segundo b}}{\text{+ tan a tan b}}$

70. sec1a + b2 = $\frac{\text{csc a csc b}}{\text{cuna a cuna b - 1}}$

71. cos1a - b2 cos1a + b2 = cos2 a - sen2 b

72. sen1a - b2 sen1a + b2 = sen2 a - sen2 b

73. cos1u + kp2 = 1 - 12 ^{k} porque u, k cualquier número entero

74. sen1u + kp2 = 1 - 12 ^{k} sen u, k cualquier número entero

En los problemas 75 a 86, encuentre el valor exacto de cada expresión.

75. sinasin-1 $\frac{13}{2}$ + cos-1 1b

76. sinasin-1 1 $\frac{2}{}$ + cos-1 0b

77. sincsin-1 3 $\frac{5}{}$ - cos-1 a - $\frac{4}{\text{5 dormitorios}}$

78. sincsin-1 a - $\frac{4}{5}$ b - tan-1 $\frac{3}{\text{4 días}}$

79. cosctan-1 5 $\frac{12}{}$ - pecado-1 a - $\frac{3}{\text{5 dormitorios}}$

80. cosatan-1 4 $\frac{}{3}$ + cos-1 $\frac{5}{\text{13 segundo}}$

81. cosatan-1 4 $\frac{}{3}$ + cos-1 $\frac{12}{\text{13 segundo}}$

82. cosasin-1 5 $\frac{13}{}$ - bronceado-1 $\frac{3}{\text{4 segundo}}$

83. tana p.$\frac{}{4}$ - cos-1 $\frac{3}{\text{5 segundo}}$

84. tanasina-1 3$\frac{5}{}$ + $\frac{\text{pag}}{\text{6 segundo}}$

85. tanacos-1 4 $\frac{5}{}$ + pecado-1 1b

86. tanasina-1 4$\frac{5}{}$ + cos-1 1b

En los problemas 87 a 92, escriba cada expresión trigonométrica como una expresión algebraica que contenga u y v. Indique las restricciones requeridas en u y v.

87. cos1cos-1 u + sen-1 v2

88. pecado1sen-1 u - cos-1 v2

89. cos1tan-1 u + tan-1 v2

90. sin1tan-1 u - pecado-1 v2

91. sec1tan-1 u + cos-1 v2

92. tan1sin-1 u - cos-1 v2

En los problemas 93 a 98, resuelva cada ecuación en el intervalo 0 … u 6 2p.

93. 23 sen u + cos u = 1

94. sen u - 23 cos u = 1

95. sen u + porque u = 22

96. sen u - porque u = - 22

97. cuna u + csc u = - 23

98. tan u + 23 = seg u

Aplicaciones y extensiones

99. Demuestre que sen1sen-1 v + cos-1 v2 = 1.

100. Demuestre que cos1sen-1 v + cos-1 v2 = 0.

101. Cálculo Demuestre que el cociente de diferencias para f1x2 = cos x es dado por

$$\frac{\text{f1x + h2 - f1x2}}{\text{h}} = \frac{\text{cos1x + h2 - cosx}}{\text{h}}$$

$$= \text{- pecado x \#} \frac{\text{pecado h}}{\text{h}} \text{ - porque x \#} \frac{\text{1 - porque h}}{\text{h}}$$

102. Cálculo Demuestre que el cociente de diferencias para f1x2 = sen x es dado por

$$\frac{\text{f1x + h2 - f1x2}}{\text{h}} = \frac{\text{sen1x + h2 - sen x}}{\text{h}}$$

$$\text{porque x \#} \frac{\text{pecado h}}{\text{h}} \text{ - pecado x \# } = \frac{\text{1 - porque h}}{\text{h}}$$

103. Uno, dos, tres

(a) Demuestre que tan1tan-1 1 + tan-1 2 + tan-1 32 = 0.

(b) Concluir del inciso (a) que

tan-1 1 + tan-1 2 + tan-1 3 = p

Fuente: Revista universitaria de matemáticas, vol. 37, núm. 3, mayo de 2006

104. Energía eléctrica En un circuito de corriente alterna (CA), la potencia instantánea p en el tiempo t está dada por

p1t2 = VmIm cos f sen2 1vt2 - VmIm sen f sen1vt2 cos1vt2

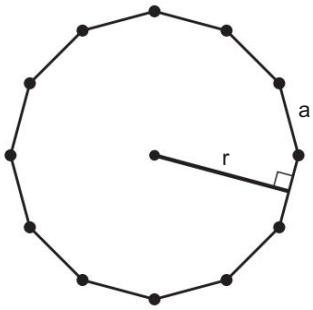
Demuestre que esto es equivalente a

p1t2 = VmIm sen1vt2 sen1vt - f2

Fuente: HyperPhysics, organizado por la Universidad Estatal de Georgia

Machine Translated by Google

105. Área de un dodecágono Parte I Un dodecágono regular es un polígono con 12 lados de igual longitud. Ver la figura.

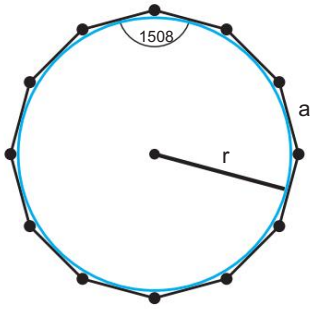


(a) El área A de un dodecágono regular está dada por la fórmula $A = 12r^2 \text{ un } \frac{\text{pag}}{}$ donde r es la apotema, tan 12, que es segmento de recta desde el centro del polígono que es perpendicular a un lado.

Encuentra el área exacta de un dodecágono regular cuya apotema mide 10 pulgadas.

(b) El área A de un dodecágono regular también está dada por la fórmula $A = 3a2 \cot \frac{\text{pag}}{}$ donde a es la longitud de un lado de 12, el polígono. Encuentra el área exacta de un dodecágono regular si la longitud de un lado es de 15 centímetros.

106. Área de un dodecágono Parte II Consulte el problema 105. La figura muestra que el ángulo interior de un dodecágono regular mide 150° y la apotema es igual al radio del círculo inscrito.



(a) Encuentre el área exacta de un dodecágono regular con lado a = 5 cm.

(b) Encuentre el radio del círculo inscrito para el dodecágono regular del inciso (a).

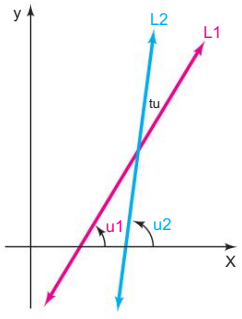
(c) Encuentre el área exacta del círculo inscrito en una línea regular. dodecágono con lado a = 5 cm.

(d) Encuentre el área exacta de la región entre el círculo y el dodecágono regular.

107. Geometría: ángulo entre dos líneas. Sean L1 y L2 dos líneas que se cruzan no verticales, y u el ángulo agudo entre L1 y L2 (ver la figura). Muestra esa

$$\tan u = \frac{m2 - m1}{1 + m1m2}$$

donde m1 y m2 son las pendientes de L1 y L2 , respectivamente.
[Sugerencia: utilice los hechos de que tan u1 = m1 y tan u2 = m2.]



108. Problema de desafío Demuestre que cot-1 ev = tan-1 ev .

109. Problema de desafío Demuestre que tan-1 v + cot-1 v = $\frac{\text{pag}}{2}$.

110. Problema de desafío Demuestre que sen-1 v + cos-1 v = $\frac{\text{pag}}{2}$.

111. Problema de desafío Si a + b + g = 180° y

cuna u = cuna a + cuna b + cuna g 0 6 u 6 90°

muestra esa

sen3 u = sen1a - u2 sen1b - u2 sen1g - u2

112. Problema de desafío Demuestre que tan-1 a 1 $\frac{}{\text{v segundo} =}$ $\frac{\text{pag}}{2}$ - tan-1 v, si v 7 0.

113. Problema de desafío Si tan a = x + 1 y tan b = x - 1, muestra esa

2 cot1a - b2 = x2

Explicar conceptos: discusión y escritura

114. Analice la siguiente derivación:

$$\text{tanau} + \frac{\text{pag}}{\text{2 segundo} =} = \frac{\text{bronceado u} + \frac{\text{bronceado pag}}{2}}{1 - \tan u \tan \frac{\text{pag}}{2}} = \frac{\frac{\text{broncearte}}{\text{bronceado pag}} + 1}{\frac{1}{\text{bronceado pag}} - \text{bronceado}} = \frac{0 + 1}{0 - \tan tu} = \frac{1}{\text{- bronceado}} = \text{- cuna u}$$

¿Puedes justificar cada paso?

115. Explique por qué no se puede utilizar la fórmula (7) para demostrar que

$$\text{tana pag} - \text{ub} = \text{cuna u}$$

Establezca esta identidad utilizando las fórmulas (3a) y (3b).

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 116 a 125 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

116. Determina los puntos de intersección de las gráficas de f1x2 = x2 + 5x + 1 y g1x2 = - 2x2 - 11x - 4 resolviendo f1x2 = g1x2.

117. Convertir $\frac{17p}{6}$ a grados.

118. Encuentra el área del sector de un círculo de 6 metros de radio formado por un ángulo de 45°. Da tanto el área exacta como una aproximación redondeada a dos decimales.

119. Dado tan u = - 2, 270° 6 u 6 360°, encuentre el valor exacto de las cinco funciones trigonométricas restantes.

120. Escribe f1x2 = $\frac{1}{4}$x2 + x - 2 en forma de vértice.

121. Resuelve: 8x-4 = 42x-9

122. Escribe como un logaritmo simple:

3 log7 x + 2 log7 y - 5 log7 z

123. Simplifica: $\sqrt{12x2\ y3\ 2\ 4\ 13x5\ y2}^{\ 2}$

124. Resuelve: $\sqrt{23x - 2} - \sqrt{22x - 3} = 1$

125. escribir $\frac{6x}{\sqrt{1x + 32\ 1>4}} + 81x + 32\ 3>4$, x 7 - 3, como un solo cociente con sólo exponentes positivos.

'¿Estas preparado?' Respuestas

15 _ 2. - 5 $\frac{3}{}$ 3. (una) $\frac{\sqrt{12}}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ 4. - 5 $\frac{3}{}$ 5. congruente 6. $\frac{\sqrt{222}}{3}$; - $\frac{1}{3}$; - 222

7.6 Fórmulas de ángulo doble y medio ángulo

OBJETIVOS

1 Utilice fórmulas de doble ángulo para encontrar valores exactos (p. 537)

2 Utilice fórmulas de doble ángulo para establecer identidades (p. 537)

3 Utilice fórmulas de medio ángulo para encontrar valores exactos (p. 540)

En esta sección, fórmulas para sin12u2, cos12u2, sina$\frac{}{2}$ ub, y cosa 1$\frac{}{2}$ ub están establecidos en términos de sen u y cos u. Se derivan utilizando las fórmulas de suma.

En las fórmulas de suma para sen1a + b2 y cos1a + b2, sea a = b = u. Entonces

$$\text{sen1a + b2} = \text{sen a cos b + cos a sen b}$$

$$\text{sen1u + u2} = \text{sen u cos u + cos u sen u}$$

$$\text{sen12u2} = 2\ \text{sen u cos u}$$

y

$$\text{cos1a + b2} = \text{cos a cos b - sen a sen b}$$

$$\text{cos1u + u2} = \text{cos u cos u - sen u sen u}$$

$$\text{cos12u2} = \text{cos2 u - sen2 u}$$

Una aplicación de la identidad pitagórica sin2 u + cos2 u = 1 da como resultado otras dos formas de expresar cos12u2.

$$\text{cos12u2} = \text{cos2 u - sen2 u} = 11 - \text{sen2 u2 - sen2 u} = 1 - 2\ \text{sen2 u}$$

y

$$\text{cos12u2} = \text{cos2 u - sen2 u} = \text{cos2 u - 11 - cos2 u2} = 2\ \text{cos2 u - 1}$$

Machine Translated by Google

El siguiente teorema resume las fórmulas de doble ángulo.

TEOREMA Fórmulas de doble ángulo

$$\text{sen}12u2 = 2 \text{ sen } u \cos u \quad (1)$$

$$\cos 12u2 = \cos 2 u - \text{sen}2 u \quad (2)$$

$$\cos 12u2 = 1 - 2 \text{ sen}2 u \quad (3)$$

$$\cos 12u2 = 2 \cos 2 u - 1 \quad (4)$$

1 Utilice fórmulas de doble ángulo para encontrar valores exactos

EJEMPLO 1 Encontrar valores exactos usando fórmulas de doble ángulo

Si sen u = $\frac{3}{5}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 u 6 p, encuentra el valor exacto de:

(a) pecado12u2 (b) cos12u2

Solución (a) Porque sen12u2 = 2 sen u cos u y porque sen u = $\frac{3}{5}$ se sabe, comience por encontrando porque u. Dado que sen u = $\frac{3}{5} = \frac{y}{r}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 u 6 p, sean y = 3 y r = 5, y coloque u en el cuadrante II. El punto P = 1x, y2 = 1x, 32 está en un círculo de radio 5, x2 + y2 = 25. Vea la Figura 31. Entonces

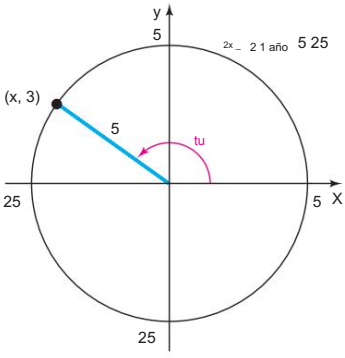


Figura 31 sen u = $\frac{3}{5}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 u 6p

$$x2 + y2 = 25$$

$$x2 = 25 - 9 = 16 \text{ y} \cdot 3$$

$$x = -4 \qquad x * 0$$

Esto significa que cos u = $\frac{x}{r} = \frac{-4}{5}$. Ahora use la fórmula de doble ángulo (1) para obtener

$$\text{sen}12u2 = 2 \text{ sen } u \text{ porque } u = 2 \# 5 \frac{3}{\# a - 5 \text{ segundo} = -} \frac{4}{} \frac{24}{25}$$

(b) Dado que sen u =, es más fácil utilizar la fórmula de ángulo doble (3) a 5 $\frac{3}{}$ encuentre cos12u2.

$$\cos 12u2 = 1 - 2 \text{ sen}2 u = 1 - 2 \# = 1 - 25 \frac{9}{25} \qquad \frac{18}{} = \frac{7}{25}$$

ADVERTENCIA Para encontrar cos12u2 en el ejemplo 1(b), se utilizó una versión de la fórmula del ángulo doble, fórmula (3). Tenga en cuenta que no es posible utilizar la identidad pitagórica $\cos 12u2 = \{ 21 - \text{sin}2 \, 12u2$, con sin12u2 = - $\frac{24}{}$ porque no hay forma de saber qué signo elegir. 25, j

Ahora resuelva el problema 9 (a) y (b)

2 Utilice fórmulas de doble ángulo para establecer identidades

EJEMPLO 2 Estableciendo identidades

(a) Desarrolle una fórmula para tan12u2 en términos de tan u.

(b) Desarrolle una fórmula para sen13u2 en términos de sen u y cos u.

Machine Translated by Google

Solución (a) En la fórmula de suma para tan1a + b2, sea a = b = u. Entonces

$$\text{tan1a + b2} = \frac{\text{bronceado a + bronceado b}}{1 - \text{tan a tan b}}$$

$$\text{tan1u + u2} = \frac{\text{tan u + tan u}}{1 - \text{tan u tan u}}$$

$$\text{tan12u2} = \frac{2 \text{ bronceado}}{1 - \text{tan2 u}} \qquad (5)$$

(b) Para encontrar una fórmula para sen13u2, escriba 3u como 2u + u y use la fórmula de suma.

sen13u2 = sen12u + u2 = sen12u2 porque u + cos12u2 sen u

Ahora usa las fórmulas de doble ángulo para obtener

sen13u2 = 12 sen u cos u2 1cos u2 + 1cos2 u - sen2 u2 1sen u2

= 2 sen u cos2 u + sen u cos2 u - sen3 u

= 3 sen u cos2 u - sen3 u

La fórmula obtenida en el ejemplo 2(b) también se puede escribir como

sen13u2 = 3 sen u cos2 u - sen3 u = 3 sen u11 - sen2 u2 - sen3 u

= 3 sen u - 4 sen3 u

Es decir, sen13u2 es un polinomio de tercer grado en la variable sen u. De hecho, sen1nu2, n un entero impar positivo, siempre se puede escribir como un polinomio de grado n en la variable sen u.*

Ahora problema de trabajo 6 9

Reorganizar las fórmulas de doble ángulo (3) y (4) conduce a otras fórmulas que se usan más adelante y son importantes en cálculo.

Comience con la fórmula de doble ángulo (3) y resuelva para sen2 u.

cos12u2 = 1 - 2 sen2 u

2 sen2 u = 1 - cos12u2

$$\text{pecado2 u} = \frac{1\text{-cos12u2}}{2} \qquad (6)$$

De manera similar, usando la fórmula de doble ángulo (4), resuelva para cos2 u.

cos12u2 = 2 cos2 u - 1

2 cos2 u = 1 + cos12u2

$$\text{cos2 u} = \frac{1\text{+cos12u2}}{2} \qquad (7)$$

Las fórmulas (6) y (7) se pueden utilizar para desarrollar una fórmula para tan2 u.

$$\text{tan2 u} = \frac{\text{pecado2 tu}}{\text{cos2 u}} = \frac{\dfrac{1\text{-cos12u2}}{2}}{\dfrac{1\text{+cos12u2}}{2}}$$

*Debido al trabajo realizado por PL Chebyshëv, estos polinomios a veces se denominan polinomios de Chebyshëv.

Machine Translated by Google

$$\tan^2 u = \frac{1-\cos 12u2}{1+\cos 12u2} \qquad (8)$$

No es necesario memorizar las fórmulas (6) a (8) ya que sus derivaciones son sencillas.

Las fórmulas (6) y (7) son importantes en cálculo. El siguiente ejemplo ilustra un problema que surge en cálculo que requiere el uso de la fórmula (7).

EJEMPLO 3 Estableciendo una identidad

Escribe una expresión equivalente para cos4 u que no incluya potencias de seno o coseno mayores que 1.

Solución La idea aquí es usar la fórmula (7) dos veces.

$$\cos^4 u = 1\cos^2 u2^2 = a\frac{1+\cos 2u2}{2}b^2 \quad \text{Fórmula (7)}$$

$$= \frac{1}{4}31 + 2\cos 12u2 + \cos^2 12u2\,4$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 12u2 + \frac{1}{4}\cos^2 12u2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 12u2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 12\#2u2}{2} \quad \text{Fórmula (7)}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 12u2 + \frac{1}{8}31 + \cos 14u2\,4$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 12u2 + \frac{1}{8}\cos 14u2$$

Ahora resuelve el problema 4 3

EJEMPLO 4 Resolver una ecuación trigonométrica usando identidades

Resuelve la ecuación: $\text{sen } u \cos u = -\frac{1}{2}$, $0 \ldots u < 2p$

Solución El lado izquierdo de la ecuación, excepto por un factor de 2, tiene la forma de la fórmula del ángulo doble, 2 sen u cos u = sin12u2. Multiplica ambos lados por 2.

$$\text{sen } u \text{ porque } u = -\frac{1}{2}$$

$$2 \text{ sen } u \cos u = -1 \quad \text{Multiplica ambos lados por 2.}$$

$$\sin 12u2 = -1 \quad \text{Fórmula de doble ángulo}$$

El argumento es 2u. Escribe la fórmula general que da todas las soluciones de esta ecuación y luego enumera aquellas que están en el intervalo 30, 2p2.

Porque peco un $\frac{3p}{2} + 2pkb = -1$, para cualquier número entero k, esto significa que

$$2u = \frac{3p}{2} + 2kp \quad k \text{ un número entero}$$

$$u = +kp\frac{3p}{4}$$

$$tu = \frac{3p}{4} + 1 - 12p = -4 \quad {}^{pag}, \quad tu = \frac{3p}{4} + 0\#p = \frac{3p}{4}, \quad tu = +1\#p = \frac{7p}{4}, \quad tu = +2\#p = \frac{11p}{4}$$

$k \cdot \cdot 1$ $k \cdot 0$ $k \cdot 1$ $k \cdot 2$

(continuado)

Machine Translated by Google

Las soluciones en el intervalo 30, 2p2 son

$$tu = \frac{3p}{4} \qquad tu = \frac{7p}{4}$$

El conjunto solución es e $\frac{3p}{4}, \frac{7p}{4}$f.

Ahora problema de trabajo 7 3

EJEMPLO 5

Movimiento de proyectiles

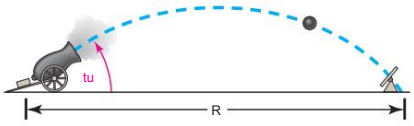


Figura 32

Un objeto es impulsado hacia arriba formando un ángulo u con la horizontal con una velocidad inicial de v0 pies por segundo. Consulte la Figura 32. Si se ignora la resistencia del aire, el rango R (la distancia horizontal que recorre el objeto) está dado por la función

$$R1u2 = \text{sen } u \cos u \quad \text{dieciséis} \quad 2 \quad 3$$

(a) Demuestre que $R1u2 = 0 \frac{1}{32} v2 \text{sen} 12u2$.

(b) Encuentre el ángulo u para el cual R es máximo.

Solución

(a) Reescriba la expresión para el rango usando la fórmula del doble ángulo sen12u2 = 2 sen u cos u. Entonces

$$R1u2 = v0 \quad \text{dieciséis} \quad 2 \quad 2 \text{ sen u porque u} = v0 \quad \text{dieciséis} \quad \frac{2 \text{ pecado u porque u}}{2} = \frac{1}{32} v0 \quad \text{pecado12u2}$$

(b) De esta forma, se puede encontrar el valor más grande para el rango R. Para una velocidad inicial fija v0 , el ángulo u de inclinación con la horizontal determina el valor de R.
El valor más grande de una función seno es 1, que ocurre cuando el argumento 2u es 90°. Para R máximo, se deduce que

$$2u = 90°$$

$$tu = 45°$$

Una inclinación respecto a la horizontal de 45° da como resultado el alcance máximo.

3 Utilice fórmulas de medio ángulo para encontrar valores exactos

Otro uso importante de las fórmulas (6) a (8) es demostrar las fórmulas del medio ángulo. En las fórmulas (6) a (8), sea $u = \frac{a}{2}$. Entonces

$$\text{pecado2} \frac{a}{2} = \frac{1 - \text{porque un}}{2} \qquad \text{porque2} \frac{a}{2} = \frac{1 + \text{porque un}}{2} \qquad \tan 2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \text{porque un}}{1 + \text{porque un}} \quad (9)$$

Al resolver las funciones trigonométricas en los lados izquierdos de las ecuaciones (9), se obtienen las fórmulas del medio ángulo.

TEOREMA Fórmulas de medio ángulo

$$\text{pecado} \frac{a}{2} = \{ \text{A } 1 - \text{porque a} \quad 2 \quad (10)$$

$$\text{porque} \frac{a}{2} = \{ \text{A } 1 + \text{porque a} \quad 2 \quad (11)$$

$$\text{bronceado} \frac{a}{2} = \{ \text{A } 1 - \text{porque un} \quad 1 + \text{porque un} \quad (12)$$

donde el signo + o - está determinado por el cuadrante del ángulo $\frac{a}{2}$.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 Encontrar valores exactos usando fórmulas de medio ángulo

Utilice una fórmula de medio ángulo para encontrar el valor exacto de:

(a) cos 15° (b) sen1 - 15°2

Solución

(a) Porque 15° = $\frac{30°}{2}$, Usa la fórmula del medio ángulo para cos 2. $\frac{a}{}$ con a = 30°. También,

Debido a que 15° está en el cuadrante I, cos 15° 7 0, elija el signo + usando la fórmula (11).

$$\cos 15° = \cos\frac{30°}{2} = A\ 1 + \cos 30°$$

$$= C\ 1 + 13>2 \qquad = C\ 2 + 13 \qquad = \frac{22 + 13}{2}$$

(b) Utilice el hecho de que sen1 - 15°2 = - sen 15° y luego utilice la fórmula (10).

$$\text{sen1 - 15°2} = -\text{ sen}\ \frac{30°}{2} = -\ A\ 1 - \cos 30°$$

$$= -\ C\ 1 - 13>2 \qquad = -\ C\ 2 - 13 \qquad = -\ \frac{32 - 23}{2}$$

Es interesante comparar la respuesta encontrada en el ejemplo 6(a) con la respuesta al Ejemplo 2 de la Sección 7.5. Allí se calculó que

$$12\ 4\ \frac{\text{pag}}{} = \cos 15° = \cos\ \frac{1}{1\ 26 + 222}$$

Con base en esto y en el resultado del Ejemplo 6(a),

$$\frac{1}{4}\ 1\ 26 + 222 \text{ y} \qquad \frac{32 + 23}{2}$$

son iguales. (Dado que cada expresión es positiva, puedes verificar esta igualdad elevando cada expresión al cuadrado). Se pueden obtener dos respuestas de apariencia muy diferente, pero correctas, dependiendo del enfoque adoptado para resolver un problema.

Ahora resuelve el problema 2 1

EJEMPLO 7 Encontrar valores exactos usando fórmulas de medio ángulo

Si cos a = - 5$\frac{3}{}$, página 6 a 6 $\frac{3p}{2}$, encontrar el valor exacto de:

(a) pecado $\frac{a}{2}$ (b) cos 2 $\frac{a}{}$ (c) bronceado $\frac{a}{2}$

Solución

Primero, observe que si p 6 a 6 $\frac{3p}{2}$, entonces $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 $\frac{a}{2}$ 6 $\frac{3p}{4\ 2}$. Como resultado, $\frac{a}{}$ se encuentra en el cuadrante II.

(a) Porque $\frac{a}{2}$ se encuentra en el cuadrante II, pecado $\frac{a}{2}$ 7 0, así que use la fórmula del signo + (10) para obtener

$$\text{pecado}\ \frac{a}{2} = A\ 1 - \text{porque a} = R\ 1 - \text{un} - \frac{3}{2} = R8\ \frac{5}{2} = \text{Un}\ 4 = \frac{2}{25} = \frac{225}{5}$$

(b) Porque $\frac{a}{2}$ se encuentra en el cuadrante II, cos $\frac{a}{2}$ 6 0, así que use la fórmula - iniciar sesión (11) para obtener

$$\text{porque}\ \frac{a}{2} = -\ A\ 1 + \text{porque a} = -\ R\ 1 + \text{un} - \frac{3}{2} = -\ R\ 2\ \frac{5}{2} = -\ \frac{1}{25} = -\ \frac{15}{5}$$

(continuado)

Machine Translated by Google

(c) Porque $\frac{a}{2}$ se encuentra en el cuadrante II, tan $\frac{a}{2}$ 6 0, así que use la fórmula - iniciar sesión (12) para obtener

$$\text{bronceado}\frac{a}{2} = -\text{A}\,1 - \text{porque un} \qquad \frac{\frac{3}{5\ \text{segundo}}}{\frac{3}{5\ \text{segundo}}} \qquad \frac{\frac{5}{2}}{5} = -2$$

$$= -\text{segundo}\,1 + \text{un} - \qquad = -\text{segundo}\,\frac{8}{5}$$

Otra forma de resolver el ejemplo 7(c) es utilizar los resultados de los incisos (a) y (b).

$$\text{bronceado}\frac{a}{2} = \frac{\text{pecado}\frac{a}{2}}{\text{porque}\frac{a}{2}} = \frac{\frac{225}{5}}{-\frac{15}{5}} = -2$$

Ahora resuelva los problemas 9 (c) y (d)

Hay una fórmula para broncearse $\frac{a}{2}$ que no contiene los signos + y -, por lo que es más útil que la fórmula (12). Para derivarlo, use las fórmulas

$$1 - \text{porque a} = 2\,\text{sen2}\,2\,\frac{a}{2} \qquad \text{Fórmula (9)}$$

y

$$\text{pecado a} = \text{sina2 \# 2 b} = 2\,\text{pecado}\,\frac{a}{2}\,\text{porque}\,\frac{a}{2} \qquad \text{Fórmula de doble ángulo}$$

Entonces

$$\frac{1 - \text{porque un}}{\text{pecado un}} = \frac{2\,\text{pecado2}\,\frac{a}{2}}{2\,\text{pecado porque}\,\frac{a}{2}} = \frac{\text{pecado}\frac{a}{2}}{\text{porque}\frac{a}{2}} = \text{bronceado}\frac{a}{2}$$

Porque también se puede demostrar que

$$\frac{1 - \text{porque un}}{\text{pecado un}} = \frac{\text{pecado un}}{1 + \text{porque un}}$$

esto da como resultado las siguientes dos fórmulas de medio ángulo:

Fórmulas de medio ángulo para tan $\frac{A}{2}$

$$\text{bronceado}\frac{a}{2} = \frac{1 - \text{porque un}}{\text{pecado un}} = \frac{\text{pecado un}}{1 + \text{porque un}} \qquad (13)$$

Con esta fórmula, la solución del Ejemplo 7(c) se puede obtener de la siguiente manera:

$$\text{porque a} = -\frac{3}{5} \quad \text{página 6 a 6} \quad \frac{3p}{2}$$

$$\text{sen a} = -\,21 - \cos 2\,\text{a} = -\,\text{A}1 - \qquad \frac{9}{25} = -\text{Un}\,16\,\frac{}{25} = -\frac{4}{5}$$

Entonces, por la ecuación (13),

$$\text{bronceado}\frac{a}{2} = \frac{1 - \text{porque un}}{\text{pecado un}} = \frac{1\text{-a-5b}}{-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}} = -2$$

Machine Translated by Google

7.6 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. cos12u2 = cos2 u - _____ = _____ - 1
   = 1 - _____

2. pecado2 _____ = $\frac{1 - \text{porque tú}}{2}$

3. bronceado $\frac{tu}{2}$ = $\frac{1 - \text{porque tú}}{\text{_____}}$

4. Verdadero o Falso tan12u2 = 1 $\frac{\text{2 bronceado}}{\text{- tan2 u}}$

5. Verdadero o Falso sin12u2 tiene dos formas equivalentes:
   2 sen u cos u y sen2 u - cos2 u

6. Verdadero o Falso tan12u2 + tan12u2 = tan14u2

7. Opción múltiple Elige la expresión que complete la Fórmula de medio ángulo para funciones coseno: cos 2 $\frac{a}{\text{—}}$ = _____.

   (a) { A 1 - porque a $\frac{\text{_____}}{\text{_____}}$ (b) { A 1 + porque a $\frac{\text{_____}}{\text{_____}}$

   (c) { A cos a - sen a (d) { A 1 - porque a $\frac{\text{_____}}{\text{_____}}$

8. Opción múltiple Si sen a = { A 1 - cos u $\frac{a}{2}$, entonces cual La declaración describe cómo se relaciona u con a.

   (a) tu = a (b) tu = $\frac{a}{2}$ (c) u = 2a (d) u = a2

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 20, utilice la información dada sobre el ángulo u, 0 … u 6 2p, para encontrar el valor exacto de:

(a) pecado12u2 (b) cos12u2 (c) pecado $\frac{tu}{2}$ (d) cos 2 $\frac{tu}{\text{—}}$

9. pecado u = $\frac{3}{5}$, 0 6 u 6 $\frac{\text{pag}}{2}$

10. porque tu = $\frac{3}{5}$, 0 6 u 6 $\frac{\text{pag}}{2}$

11. tan u = 2 $\frac{1}{\text{—}}$, p 6 u 6 $\frac{3p}{2}$

12. tan u = 3 $\frac{4}{\text{—}}$, p 6 u 6 $\frac{3p}{2}$

13. pecado u = - $\frac{13}{3}$, $\frac{3p}{2}$ 6 y 6 2p

14. porque tu = - $\frac{\text{dieciséis}}{3}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 u 6p

15. csc tu = - 25 $\frac{\text{—}}{\text{—}}$, porque eres 6 0

16. seg u = 3, sen u 7 0

17. seg u = 2, csc u 6 0

18. cuna u = - 2, seg u 6 0

19. cot u = 3, porque u 6 0

20. tan u = - 3, sen u 6 0

En los problemas 21 a 30, use fórmulas de medio ángulo para encontrar el valor exacto de cada expresión.

21. pecado 22,5°

22. cos 22,5°

23. bronceado $\frac{9p}{8}$

24. bronceado $\frac{7p}{8}$

25. pecado 195°

26. cos 165°

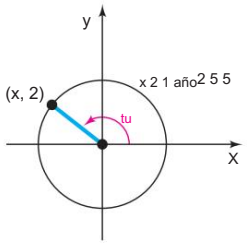
27. csc $\frac{7p}{8}$

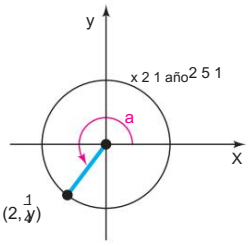
28. seg $\frac{15p}{8}$

29. cosa - $\frac{3p}{\text{8 segundo}}$

30. sina - $\frac{\text{pag}}{\text{8 segundo}}$

En los problemas 31 a 42, f1x2 = sen x, g1x2 = cos x y h1x2 = tan x. Utilice las siguientes figuras para evaluar cada función.





31. g12u2

32. f12u2

33. f au $\frac{\text{—}}{2}$

34. ga u $\frac{\text{—}}{\text{2 segundo}}$

b 35. ha.u $\frac{\text{—}}{\text{2 segundo}}$

36. h12u2

37. f12a2

38. g12a2

39. ga a $\frac{\text{—}}{\text{2 segundo}}$

40. f aa $\frac{\text{—}}{\text{2 segundo}}$

41. h12a2

42. ja a $\frac{\text{—}}{\text{2 segundo}}$

43. Demuestre que sen4 u = $\frac{3}{8}$ - $\frac{1}{2}$ cos12u2 + $\frac{1}{8}$ cos14u2.

44. Demuestre que sen14u2 = 1cos u2 14 sen u - 8 sen3 u2.

45. Demuestre que sen4 u cos4 u = $\frac{3}{128}$ - $\frac{1}{32}$ cos14u2 + $\frac{1}{128}$ cos18u2.

46. Demuestre que sen2 u cos2 u = $\frac{1}{8}$ - $\frac{1}{8}$ cos14u2.

47. Encuentra una expresión para cos14u2 como polinomio de cuarto grado. en la variable cos u.

48. Encuentra una expresión para cos13u2 como polinomio de tercer grado. en la variable cos u.

49. Encuentra una expresión para cos15u2 como polinomio de quinto grado. en la variable cos u.

50. Encuentra una expresión para sen15u2 como polinomio de quinto grado. en la variable sen u.

Machine Translated by Google

En los problemas 51 a 72, establezca cada identidad.

51. $\frac{\text{cuna u - tan u}}{\text{cuna u + tan u}} = \text{cos12u2}$

52. cos4 u - sen4 u = cos12u2

53. cuna12u2 = 1cuna u - tan u2

54. cuna12u2 = $\frac{\text{cuna2 u - 1}}{\text{2 cunas}}$

55. csc12u2 = sec u csc u 2

56. seg12u2 = 2 - $\frac{\text{segundo2 tu}}{\text{seg2 u}}$

57. 14 sen u cos u2 11 - 2 sen2 u2 = sen14u2

58. cos2 12u2 - sen2 12u2 = cos14u2

59. sen2 u cos2 u = sen2 12u2

60. $\frac{\text{cos12u2}}{\text{1 + pecado12u2}} = \frac{\text{cuna u - 1}}{\text{cuna u + 1}}$

61. csc2 2 $\frac{tu}{}$ = $\frac{2}{\text{1 - porque tú}}$

62. seg2 2 $\frac{tu}{}$ = $\frac{2}{\text{1 + porque tú}}$

63. bronceado $\frac{v}{2}$ = csc v - cuna v

64. cuna2 $\frac{v}{2} = \frac{\text{segundos v + 1}}{\text{segundo v - 1}}$

65. 1 - $\frac{1}{2}$ pecado12u2 = $\frac{\text{sen3 u + cos3 u}}{\text{pecado u + porque u}}$

66. porque tu = $\frac{\text{1 - tan2 2 } \frac{tu}{}}{\text{1 + tan2 2 } \frac{tu}{}}$

67. $\frac{\text{porque u + sen u}}{\text{porque u - pecado u}} - \frac{\text{porque u - pecado u}}{\text{porque u + sen u}} = \text{2 tan12u2}$

68. $\frac{\text{pecado13u2}}{\text{pecado u}} - \frac{\text{cos13u2}}{\text{porque tú}} = 2$

69. tan13u2 = 1 - 3 $\frac{\text{3 tan u - tan3 u}}{\text{tan2 u}}$

70. tanu + tan1u + 120°2 + tan1u + 240°2 = 3 tan13u2

71. ln 0 porque u 0 = $\frac{1}{2}$ 1ln 0 1 + cos12u2 0 - ln 22

72. ln 0sin u 0 = $\frac{1}{2}$ 1ln 0 1 - cos12u2 0 - ln 22

En los problemas 73 a 82, resuelva cada ecuación en el intervalo 0 … u 6 2p.

73. cos12u2 + 6 sen2 u = 4

74. cos12u2 = 2 - 2 sen2 u

75. sin12u2 = porque u

76. cos12u2 = cos u

77. cos12u2 + cos14u2 = 0

78. pecado12u2 + pecado14u2 = 0

79. cos12u2 + 5 cos u + 3 = 0

80. 3 - sen u = cos12u2

81. tan12u2 + 2 porque u = 0

82. tan12u2 + 2 sen u = 0

En los problemas 83 a 94, encuentre el valor exacto de cada expresión.

83. sinc 2 sin-1 $\frac{\sqrt{13}}{\text{2 d}}$

84. sina2 sin-1 2 b $\frac{1}{\sqrt{88}}$.

85. cosa2 cos-1 5 b $\frac{4}{\sqrt{89}}$.

86. cosa2 pecado-1 5 b $\frac{3}{\sqrt{91}}$.

87. tana2 tan-1 4 b $\frac{3}{\sqrt{91}}$.

tanc 2 cos-1 a - 5 bd $\frac{3}{\sqrt{92}}$. sin2

cosc 2 tan-1 a - 3 bd $\frac{4}{\sqrt{93}}$. cscc

90. sina2 cos-1 5 b $\frac{4}{\sqrt{}}$

cos2 a 1 $\frac{3}{2}$ pecado-1 $\frac{3}{\sqrt{}}$ 5 segundo

a 1 $\frac{3}{2}$ cos-1 $\frac{3}{\sqrt{}}$ 5 segundo

2 sin-1 a - 5 bd $\frac{3}{\sqrt{}}$

94. seca2 tan-1 4 b $\frac{3}{\sqrt{}}$

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 95 a 100, encuentre los ceros reales de cada función trigonométrica en el intervalo 0… u 6 2p.

95. f1x2 = cos12x2 + cos x

96. f1x2 = sen12x2 - sen x

97. f1x2 = 2 sen2 x - sen 12x2

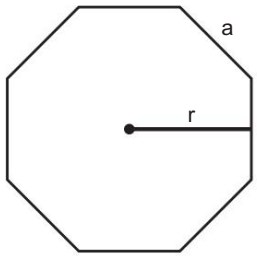
98. f1x2 = cos12x2 + sen2 x

99. f1x2 = cos12x2 - 5 cos x - 2

100. f1x2 = sen12x2 + cos x

101. Área de un octágono

(a) El área A de un octágono regular está dada por la fórmula A = 8r tan 8 $\frac{\text{pag}}{}$, donde r es la apotema, que es un segmento de recta desde el centro del octágono perpendicular a un lado. Ver la figura. Encuentra el área exacta de un octágono regular cuya apotema mide 12 pulgadas.

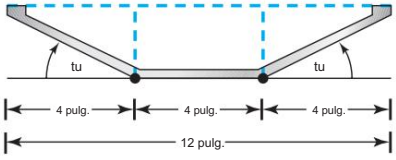


(b) El área A de un octágono regular también viene dada por la fórmula A = 2a2 cuna 8 $\frac{\text{pag}}{}$, donde a es la longitud de un lado. Encuentra el Área exacta de un octágono regular cuyo lado mide 9 centímetros.

Machine Translated by Google

102. Construcción de un canal para la lluvia Se va a construir un canal para la lluvia con láminas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una longitud de 4 pulgadas desde cada borde, el constructor dobla esta longitud hacia arriba en un ángulo u. Ver la figura. El área A de la abertura en función de u está dada por

A1u2 = 16 sen u1cos u + 12 0° 6 u 6 90°



(a) En cálculo, se le pedirá que encuentre el ángulo u que maximiza A resolviendo la ecuación

cos12u2 + cos u = 0 0° 6 u 6 90°

Resuelve esta ecuación para u.

(b) ¿Cuál es el área máxima A de la abertura?

(c) Grafique A = A1u2, 0° … u … 90° y encuentre el ángulo u que maximiza el área A. Encuentre también el máximo área.

103. Proyección láser En un sistema de proyección láser, la óptica o el ángulo de escaneo u está relacionado con la distancia de proyección D desde el escáner a la pantalla y el ancho de la imagen proyectada W mediante la ecuación

$$re = \frac{\frac{1}{2}W.}{\csc u - \text{cuna } u}$$

Utilice la información dada para responder las partes (a) y (b).

(a) Demuestre que el ancho de la imagen proyectada está dado por

$$W = \text{bronceado } 2D\frac{tu}{2}$$

(b) Encuentre el ángulo óptico si la distancia de proyección es de 14 pies y el ancho de la imagen proyectada es de 6,5 pies.

Fuente: Pangolin Laser Systems, Inc.

104. Producto de inercia El producto de inercia para un área alrededor de ejes inclinados viene dado por la fórmula

Iuv = Ix sen u cos u - Iy sen u cos u + Ixy 1cos2 u - sen2 u2

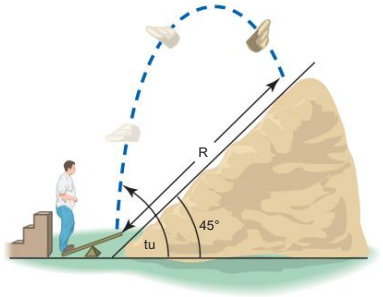
Demuestre que esto es equivalente a

$$Iuv = \frac{Ix - Iy}{2}\sin 12u2 + Ixy\cos 12u2$$

Fuente: Adaptado de Hibbeler, Engineering Mechanics: Statics, 13.ª ed., Pearson © 2013.

105. Movimiento de proyectil Un objeto es impulsado hacia arriba en un ángulo u, 45° 6 u 6 90°, con la horizontal con una velocidad inicial de v0 pies por segundo desde la base de un plano que forma un ángulo de 45° con la horizontal. . Vea la figura encima de la columna derecha. Si se ignora la resistencia del aire, la distancia R que recorre por el plano inclinado está dada por la función

$$R1u2 = \frac{v2\,022}{16}\cos u1\sin u - \cos u2$$



(a) Demuestre que

$$R1u2 = \frac{v2\,022}{32}\sin 12u2 - \cos 12u2 - 14$$

(b) En cálculo, se le pedirá que encuentre el ángulo u que maximiza R resolviendo la ecuación

sen12u2 + cos12u2 = 0

Resuelve esta ecuación para u.

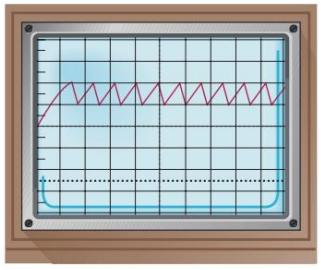
(c) ¿Cuál es la distancia máxima R si v0 = 32 pies por ¿segundo?

(d) Grafique R = R1u2, 45° … u … 90° y encuentre el ángulo u que maximiza la distancia R. Encuentre también el máximo distancia. Utilice v0 = 32 pies por segundo. Compare los resultados con las respuestas encontradas en las partes (b) y (c).

106. Curva en diente de sierra Un osciloscopio suele mostrar una curva en diente de sierra. Esta curva puede aproximarse mediante curvas sinusoidales de períodos y amplitudes variables. Una primera aproximación a la curva en diente de sierra viene dada por

$$y = 2\frac{1}{\pi}\text{ pecado12px2} + \frac{1}{4}\text{ pecado14px2}$$

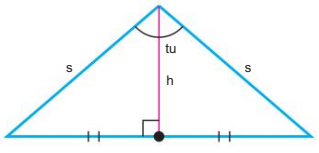
Demuestre que y = sin12px2 cos2 1px2.



107. Área de un triángulo isósceles Demuestre que el área A de un triángulo isósceles cuyos lados iguales tienen longitud s, y donde u es el ángulo entre ellos, es

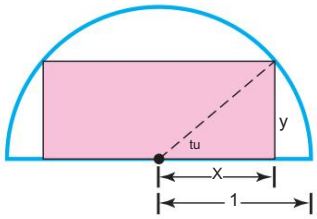
$$\text{Una} = 2\frac{1}{2}s2\text{ pecado } u$$

[Pista: vea la figura. La altura h biseca el ángulo u y es la bisectriz perpendicular de la base.]



Machine Translated by Google

108. Geometría Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 1. Ver la figura.



(a) Exprese el área A del rectángulo como función de la ángulo u mostrado en la figura.
(b) Demuestre que A1u2 = sen12u2.
(c) Encuentre el ángulo u que da como resultado el área más grande A.
(d) Encuentre las dimensiones de este rectángulo más grande.

109. Si x = 2 tan u, exprese sen12u2 como función de x.

110. Si x = 2 tan u, exprese cos12u2 en función de x.

111. Encuentra el valor del número C:

$$\frac{1}{}\cos 2\,x + C = 2\quad\frac{1}{4}\cos 12x2$$

112. Encuentra el valor del número C:

$$\frac{1}{}\cos 2\,x + C = 2\quad\frac{1}{4}\cos 12x2$$

113. Si $z = \tan 2\ \frac{a}{}$, demuestre que la cuna a = $\frac{1- z2}{2z}$.

114. Si $z = \tan 2\ \frac{a}{}$, demuestre que cos a $\frac{1- z2}{}$ = 1 + z2.

115. Grafica f1x2 = sen2 x = para 0 … x … 2p usando transformaciones. $\frac{1 - \cos 12x2}{2}$

116. Repita el problema 115 para g1x2 = cos2 x.

117. Utilice el hecho de que

$$\frac{\text{pag}}{\text{porque } 12} = \frac{1}{4}\ 1\,26 + 222$$

encontrar pecado $\frac{\text{pag}}{24}$ y cos 24. $\frac{\text{pag}}{}$

118. Demuestre que

$$\frac{\text{pag}}{\text{porque } 8} = \frac{32 + 22}{2}$$

y úsalo para encontrar pecado $\frac{\text{pag}}{\text{discutir}}$ y cos 16. $\frac{\text{pag}}{}$

119. Problema de desafío Si tan u = a tan in $\frac{\text{tu}}{}$, expresa tan 3 $\frac{\text{tu}}{3}$ términos de a.

120. Problema de desafío Demuestre que

$$\text{sen3 u + sen3 1u + 120°2 + sen3 1u + 240°2} = -\frac{3}{4}\text{ pecado13u2}$$

121. Problema de desafío

Si cos 12x2 + 12m - 12sen x + m - 1 = 0, encuentre m de modo que hay exactamente una solución real para x, $-2\ \frac{\text{pag}}{}$ … X … $\frac{\text{pag}}{2}$.†

†Cortesía del Departamento de Matemáticas de Joliet Junior College

Explicar conceptos: discusión y escritura

122. Investiga los polinomios de Chebyshëv. Escribe un informe sobre tus hallazgos.

Conserve su conocimiento

Los problemas 123 a 132 se basan en el material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

123. Encuentra una ecuación de la recta que contiene el punto 12, - 32 y es perpendicular a la recta y = - 2x + 9.

124. Grafica f1x2 = - x2 + 6x + 7. Rotula el vértice y las intersecciones.

125. Encuentra el valor exacto del pecado. $\frac{2p}{3}$ - porque $\frac{4p}{3}$.

126. Gráfica y = - 2 cos ¢ p $\frac{}{}$ 2x≤ . Mostrar al menos dos períodos.

127. Encuentre una función polinómica de grado 3 cuyos ceros reales sean - 5, - 2 y 2. Utilice 1 para el coeficiente principal.

128. La función f1x2 = $\frac{3- x}{2x - 5}$ es uno a uno. encontrar f^{-1}.

129. Resuelve: 2x+7 = 3x+2

130. Calcula la distancia entre los vértices de las parábolas f1x2 = x2 - 4x - 1 y g1x2 = - x2 - 6x - 2.

131. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = log2 x de 4 a 16.

132. Resuelva para D: 6x - 5xD - 5y + 4yD + 3 - 4D = 0

Machine Translated by Google

7.7 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

OBJETIVOS 1 Expresar productos como sumas (p. 547)
2 Expresar sumas como productos (p. 548)

1 Expresar productos como sumas

Las fórmulas de suma y diferencia se pueden utilizar para derivar fórmulas para escribir los productos de senos y/o cosenos como sumas o diferencias. Estas identidades suelen denominarse fórmulas de producto a suma.

TEOREMA Fórmulas de producto a suma

$$\text{sen } a \text{ sen } b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)] \quad (1)$$

$$\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)] \text{ porque } a \quad (2)$$

$$\text{sen } a \cos b = \frac{1}{2}[\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b)] \quad (3)$$

No es necesario memorizar estas fórmulas. En lugar de ello, recuerde cómo se derivan. Luego, cuando desee utilizarlos, búsquelos o derivelos, según sea necesario.

Para derivar las fórmulas de producto a suma (1) y (2), escriba la suma y Fórmulas de diferencia para el coseno:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \cos(a + \quad (4)$$

$$b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b \quad (5)$$

Para derivar la fórmula (1), reste la ecuación (5) de la ecuación (4)

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \text{ sen } a \text{ sen } b$$

a partir del cual

$$\text{pecado a pecado b} = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

Para derivar la fórmula (2), sume las ecuaciones (4) y (5)

$$\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos a \cos b$$

a partir del cual

$$\text{porque a porque b} = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

Para derivar la fórmula producto-suma (3), utilice las fórmulas de suma y diferencia para el seno de manera similar. (Se le pide que haga esto en el problema 55.)

EJEMPLO 1 **Expresar productos como sumas**

Exprese cada uno de los siguientes productos como una suma que contenga solo senos o solo cosenos.

(a) pecado16u2 pecado14u2 (b) cos13u2 cos u (c) sen13u2 cos15u2

Machine Translated by Google

Solución (a) Utilice la fórmula (1) para obtener

$$\text{sen16u2 sen14u2} = \frac{1}{2}\text{3cos16u - 4u2 - cos16u + 4u2 4}$$

$$= \frac{1}{2}\text{3cos12u2 - cos110u2 4}$$

(b) Utilice la fórmula (2) para obtener

$$\text{cos13u2 porque u} \frac{1}{2}\text{3cos13u - u2 + cos13u + u2 4}$$

$$= \frac{1}{2}\text{3cos12u2 + cos14u2 4}$$

(c) Utilice la fórmula (3) para obtener

$$\text{sen13u2 cos15u2} = 3\frac{1}{2}\text{sen13u + 5u2 + sen13u - 5u2 4}$$

$$= \frac{1}{2\,2}\text{3 sen18u2 + sen1 - 2u2 4} = 3\frac{1}{2}\text{sen18u2 - sen12u2 4}$$

Ahora trabaja el problema 7

2 Expresar sumas como productos

TEOREMA Fórmulas de suma a producto

$$\text{pecado a + pecado b} = 2\,\text{pecado}\,\frac{a+b}{2}\,\text{porque}\,\frac{a-b}{2} \tag{6}$$

$$\text{pecado a - pecado b} = 2\,\text{pecado}\,\frac{a-b}{2}\,\text{porque}\,\frac{a+b}{2} \tag{7}$$

$$\text{porque a + porque b} = 2\,\text{porque}\,\frac{a+b}{2}\,\text{porque}\,\frac{a-b}{2} \tag{8}$$

$$\text{porque a - cos b} = -\,2\,\text{pecado}\,\frac{a+b}{2}\,\text{pecado}\,\frac{a-b}{2} \tag{9}$$

Aquí se deriva la fórmula (6). Las derivaciones de las fórmulas (7) a (9) se dejan como ejercicios (véanse los problemas del 56 al 58).

Prueba

$$2\,\text{pecado}\,\frac{a+b}{2}\,\text{porque}\,\frac{a-b}{2} = 2\,\#\,\frac{1}{2}\,\underset{C}{\text{cinas a + b}} + \frac{a-b}{2}\,\text{b + sina + b}\,\frac{}{2} - \frac{a-b}{2}\ \text{dormitorios}$$

Fórmula producto-suma (3)

$$= \text{pecado}\,\frac{2a}{2} + \text{pecado}\,\frac{2b}{2} = \text{pecado a + pecado b}$$ ■

EJEMPLO 2 Expresar sumas (o diferencias) como productos

Expresa cada suma o diferencia como producto de senos y/o cosenos.

(a) pecado15u2 - pecado13u2 (b) cos13u2 + cos12u2

Machine Translated by Google

Solución (a) Utilice la fórmula (7) para obtener

$$\text{pecado15u2} - \text{pecado13u2} = 2 \text{ pecado } \frac{5u - 3u}{2} \text{ porque } \frac{5u + 3u}{2}$$

$$= 2 \text{ sen u cos14u2}$$

(b) $\cos 13u2 + \cos 12u2 = 2 \cos \cos \quad \frac{3u + 2u}{2} \quad \frac{3u - 2u}{2}$ Fórmula (8)

$$= 2 \text{ porque } \frac{5u}{2} \text{ porque } \frac{tu}{2}$$

Ahora resuelve el problema 1 7

7.7 Evalúe su comprensión

Desarrollo de habilidades

En los problemas 1 a 6, encuentre el valor exacto de cada expresión.

1. cos 285° # cos 195°
2. sen 195° # cos 75°
3. pecado 75° + pecado 15°
4. pecado 285° # pecado 75°
5. pecado 255° - pecado 15°
6. cos 255° - cos 195°

En los problemas 7 a 16, exprese cada producto como una suma que contenga solo senos o solo cosenos.

7. pecado14u2 pecado12u2
8. cos14u2 cos12u2
9. pecado13u2 pecado15u2
10. pecado14u2 cos12u2
11. pecado14u2 cos16u2
12. cos13u2 cos15u2
13. cos13u2 cos14u2
14. pecado u pecado12u2
15. pecado $\frac{tu}{2}$ porque $\frac{5u}{2}$
16. pecado $\frac{3u}{2}$ porque $\frac{tu}{2}$

En los problemas 17 a 24, exprese cada suma o diferencia como producto de senos y/o cosenos.

17. pecado14u2 - pecado12u2
18. pecado14u2 + pecado12u2
19. cos15u2 - cos13u2
20. cos12u2 + cos14u2
21. porque u + cos13u2
22. pecado u + pecado13u2
23. pecado $\frac{tu}{2}$ - pecado $\frac{3u}{2}$
24. porque $\frac{tu}{2}$ - porque $\frac{3u}{2}$

En los problemas 25 a 42, establezca cada identidad.

25. $\frac{\text{porque u + cos13u2}}{\text{2 cos12u2}} = \text{porque tú}$
26. $\frac{\text{pecado u + pecado13u2}}{\text{2 sin12u2}} = \text{porque tú}$
27. $\frac{\text{porque u - cos13u2}}{\text{sin13u2 - sin u}} = \tan 12u2$
28. $\frac{\text{pecado14u2 + pecado12u2}}{\text{cos14u2 + cos12u2}} = \tan 13u2$
29. $\frac{\text{porque u - cos15u2}}{\text{sen u + sen15u2}} = \tan 12u2$
30. $\frac{\text{porque u - cos13u2}}{\text{pecado u + pecado13u2}} = \text{bronceado u}$
31. sen u3sin13u2 + sen15u2 4 = cos u3cos13u2 - cos15u2 4
32. sen u3sen u + sen13u2 4 = cos u3cos u - cos13u2 4
33. $\frac{\text{pecado14u2 - pecado18u2}}{\text{cos14u2 - cos18u2}} = -\cot 16u2$
34. $\frac{\text{pecado14u2 + pecado18u2}}{\text{cos14u2 + cos18u2}} = \tan 16u2$
35. $\frac{\text{cos14u2 - cos18u2}}{\text{cos14u2 + cos18u2}} = \tan 12u2 \tan 16u2$
36. $\frac{\text{sin14u2 + sin18u2}}{\text{pecado14u2 - pecado18u2}} = -\frac{\text{tan16u2}}{\text{tan12u2}}$
37. porque a + porque b = - cuna cuna cos a - cos b $\frac{a+b}{2}$ $\frac{a-b}{2}$
38. $\frac{\text{pecado a + pecado b}}{\text{a - sin b}} = \text{cuna color canela sin } \frac{a+b}{2} \frac{a-b}{2}$
39. $\frac{\text{pecado a - pecado b}}{\text{porque a - porque b}} = -\text{cuna } \frac{a+b}{2}$
40. $\frac{\text{pecado a + pecado b}}{\text{porque a + porque b}} = \text{bronceado } \frac{a+b}{2}$
41. 1 - cos12u2 + cos14u2 - cos16u2 = 4 sen u cos12u2 sen13u2 1
42. 1 + cos12u2 + cos14u2 + cos16u2 = 4 cos u cos12u2 cos13u2
43. Demuestre que $\text{sen2 u cos4 u} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \cos 12u2 - \frac{1}{16} \cos 14u2 - \frac{1}{32} \cos 16u2.$
44. Demuestre que $\text{sen4 u cos2 u} = \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \cos 12u2 - \frac{1}{\text{decisiete}} \cos 14u2 + \frac{1}{32} \cos 16u2.$
45. Demuestre que $\cos 6 \text{ u} = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 12u2 + \frac{3}{16} \cos 14u2 + \frac{1}{32} \cos 16u2.$
46. Demuestre que $\text{sen6 u} = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 12u2 + \frac{3}{32} \cos 14u2 - \frac{1}{16} \cos 16u2.$

Machine Translated by Google

En los problemas 47 a 50, resuelva cada ecuación en el intervalo 0 … u 6 2p.

47. cos12u2 + cos14u2 = 0

48. sen12u2 + sen 14u2 = 0

49. pecado14u2 - pecado16u2 = 0

50. cos14u2 - cos16u2 = 0

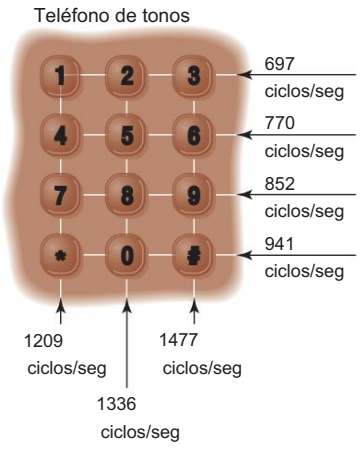
Aplicaciones y extensiones

51. Teléfonos de tonos En un teléfono de tonos, cada botón produce un sonido único. El sonido producido es la suma de dos tonos, dado por

y = sen12plt2 y y = sen12pht2

donde l y h son las frecuencias baja y alta (ciclos por segundo) que se muestran en la ilustración. Por ejemplo, si tocas 7, la frecuencia baja es l = 852 ciclos por segundo y la frecuencia alta es h = 1209 ciclos por segundo. El sonido emitido al tocar 7 es

y = pecado32p18522t4 + pecado32p112092t4



(a) Escriba este sonido como producto de senos y/o cosenos.
(b) Determine el valor máximo de y.
(c) Grafique el sonido emitido cuando se toca 7.

52. Teléfonos de tonos
(a) Escriba, como producto de senos y/o cosenos, el sonido que se emite al tocar la tecla #.
(b) Determine el valor máximo de y.
(c) Grafique el sonido emitido cuando se toca la tecla #.

53. Momento de inercia El momento de inercia I de un objeto es una medida de qué tan fácil es girar el objeto alrededor de algún punto fijo. En ingeniería mecánica, a veces es necesario calcular momentos de inercia con respecto a un conjunto de ejes rotados. Estos momentos están dados por las ecuaciones.

Iu = Ix cos2 u + Iy sen2 u - 2Ixy sen u cos u

Iv = Ix sen2 u + Iy cos2 u + 2Ixy sen u cos u

Utilice fórmulas de producto a suma para demostrar que

$$Iu = \frac{Ix + Iy}{2} + \frac{Ix - Iy}{2}\cos 12u2 - Ixy \sin 12u2$$

y

$$IV = \frac{Ix + Iy}{2} - \frac{Ix - Iy}{2}\cos 12u2 + Ixy \sin 12u2$$

Fuente: Adaptado de Hibbeler, Engineering Mechanics: Statics, 13.ª ed., Pearson © 2013.

54. Movimiento del proyectil El alcance R de un proyectil impulsado hacia abajo desde la parte superior de un plano inclinado en un ángulo u con respecto al plano inclinado está dado por

$$R1u2 = g\,\frac{2v0^2 \text{ pecado u cos1u - f2}}{\cos 2 f}$$

donde v0 es la velocidad inicial del proyectil, f es el ángulo que forma el avión con respecto a la horizontal y g es la aceleración de la gravedad.

(a) Demuestre que para v0 y f fijos , el rango máximo hacia abajo la inclinación viene dada por Rmax $\frac{v0^2}{= g11 - \text{sen f2}}$.

(b) Determine el alcance máximo si el proyectil tiene una velocidad inicial de 50 metros/segundo, el ángulo del avión es f = 35° y g = 9,8 metros/segundo2 .

55. Derive la fórmula (3).

56. Derive la fórmula (7).

57. Derive la fórmula (8).

58. Derive la fórmula (9).

59. Problema de desafío si a + b + g = p, muestra que

tan a + tan b + tan g = tan a tan b tan g

60. Problema de desafío si a + b + g = p, muestra que

sen12a2 + sen12b2 + sen12g2 = 4 sen a sen b sen g

Conserve su conocimiento

Los problemas 61 a 70 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

61. Resuelve: 27x-1 = 9x+5

62. Para y = 5 cos (4x - p), encuentre la amplitud, el período y el desplazamiento de fase.

63. Encuentra el valor exacto de cos ¢csc -1 $\frac{7}{5}$≤.

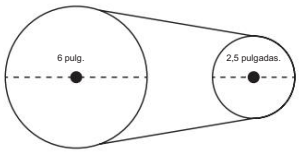
64. Encuentra la función inversa f $^{-1}$ de f(x) = 3 sen x - 5, - 2 $\frac{pag}{}$ … X … $\frac{pag}{}$. Encuentre el rango de f y el dominio y rango de f $^{-1}$ 2 .

65. Encuentra el valor exacto de tan a - $\frac{pag}{6}$b.

Machine Translated by Google

66. Completa el cuadrado para escribir la función cuadrática f1x2 = $\frac{1}{3}$x2 - 2x - 2 en forma de vértice.

67. La figura muestra dos volantes conectados por una correa. Si el volante de 6 pulgadas de diámetro gira a 2000 revoluciones por minuto, ¿a qué velocidad gira el volante de 2,5 pulgadas de diámetro?



68. Resuelve la fórmula A = bh para $\frac{1}{2}$h.

69. Dados f1x2 = 2x2 - 3x y g1x2 = 4x - 3, determine dónde f1x2 … g1x2.

70. Encuentra el cociente de diferencias de f1x2 = $\frac{2}{3}$x + 9.

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Definiciones de las seis funciones trigonométricas inversas

y = sen-1 x si y sólo si x = sen y donde - 1 … x … 1, - 2 $\frac{pag}{}$ … y … $\frac{pag}{2}$ (pág. 487)

y = cos-1 x si y sólo si x = cos y donde - 1 … x … 1, 0 … y … p (pág. 489)

y = tan-1 x si y sólo si x = tan y donde - q 6 x 6 q, - 2 $\frac{pag}{}$ 6 y 6 2 $\frac{pag}{}$ (pág. 491)

y = sec-1 x si y sólo si x = sec y donde 0 x 0 Ú 1, 0 … y … p, y · $\frac{pag}{2}$ (pág. 499)

y = csc-1 x si y sólo si x = csc y donde 0 x 0 Ú 1, - $\frac{pag}{2}$ … y … $\frac{pag}{2}$, y · 0 (pág. 499)

y = cot-1 x si y sólo si x = cot y donde - q 6 x 6 q, 0 6 y 6 p (pág. 499)

Fórmulas de suma y diferencia (págs. 523, 526 y 528)

cos1a + b2 = cos a cos b - sen a sen b

cos1a - b2 = cos a cos b + sen a sen b

sen1a + b2 = sen a cos b + cos a sen b

sen1a - b2 = sen a cos b - cos a sen b

$$\tan(a+b) = \frac{\text{bronceado a + bronceado b}}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\text{bronceado a - bronceado b}}{1 + \tan a \tan b}$$

Fórmulas de doble ángulo (págs. 537 y 538)

sen12u2 = 2 sen u cos u

cos12u2 = cos2 u - sen2 u

$$\tan 2u = \frac{2 \text{ bronceado}}{1 - \tan^2 u}$$

cos12u2 = 2 cos2 u - 1

cos12u2 = 1 - 2 sen2 u

Fórmulas de medio ángulo (págs. 540 y 542)

$$\text{pecado}^2\frac{a}{2} = \frac{1 - \text{porque un}}{2}$$

$$\text{porque}^2\frac{a}{2} = \frac{1 + \text{porque un}}{2}$$

$$\tan^2\frac{a}{2} = \frac{1 - \text{porque un}}{1 + \text{porque un}}$$

$$\text{pecado}\frac{a}{2} = \{ A\ 1 - \text{porque}\ a$$

$$\text{porque}\frac{a}{2} = \{ A\ 1 + \text{porque}\ a$$

$$\text{bronceado}\frac{a}{2} = \{ A\ 1 - \text{porque un} = \frac{1 - \text{porque un}}{\text{pecado un}} = \frac{\text{pecado un}}{1 + \text{porque un}}$$

donde el signo + o - está determinado por el cuadrante de $\frac{a}{2}$.

Fórmulas de producto a suma (p. 547)

$$\text{pecado a pecado b} = \frac{1}{2}\,3\cos(a-b) - \cos(a+b)\,4$$

$$\text{porque a porque b} = \frac{1}{2}\,3\cos(a-b) + \cos(a+b)\,4$$

$$\text{sen a cos b} = \frac{1}{2}\,3\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)\,4$$

Machine Translated by Google

Fórmulas de suma a producto (p. 548)

$$\text{pecado } a + \text{pecado } b = 2 \text{ pecado } \frac{a+b}{2} \text{ porque } \frac{a-b}{2} \qquad \text{pecado } a - \text{pecado } b = 2 \text{ pecado } \frac{a-b}{2} \text{ porque } \frac{a+b}{2}$$

$$\text{porque } a + \text{porque } b = 2 \text{ porque } \frac{a+b}{2} \text{ porque } \frac{a-b}{2} \qquad \text{porque } a - \cos b = -2 \text{ pecado pecado } \frac{a+b}{2} \quad \frac{a-b}{2}$$

Objetivos

Sección	Deberías poder hacerlo. . .	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
7.1	1 Defina la función seno inversa (p. 486)	pag.	1
	2 Encuentra el valor de una función seno inversa (p. 487)	487 1-3	7, 10
	3 Defina la función coseno inversa (p. 489)	pag.	2
	4 Encuentra el valor de una función coseno inversa (p. 490)	489	8, 11
	5 Defina la función tangente inversa (p. 490)	4, 5 p. 491	3
	6 Encuentra el valor de una función tangente inversa (p. 492)	6	9, 12
	7 Usar propiedades de funciones inversas para encontrar valores exactos de ciertas funciones compuestas (p. 492)	7–9	15-23
	8 Encuentra la función inversa de una función trigonométrica (p. 494)	10	30, 31
	9 Resolver ecuaciones que involucran funciones trigonométricas inversas (p. 495)	11	90, 91
7.2	1 Defina las funciones secante, cosecante y cotangente inversa (p. 499)	pag. 499	4–6
	2 Encuentra el valor de las funciones secante, cosecante y cotangente inversa (p. 500)	1, 2	13, 14
	3 Encuentra el valor exacto de funciones compuestas que involucran funciones trigonométricas inversas (p. 501)	3–5	24–29
	4 Escribe una expresión trigonométrica como expresión algebraica (p. 502)	6	32, 33
7.3	1 Resolver ecuaciones que involucran una sola función trigonométrica (p. 505)	1–5	70–74
	2 Resolver ecuaciones trigonométricas usando una calculadora (p. 508)	6	75
	3 Resolver ecuaciones trigonométricas en forma cuadrática (p. 509)	7	78
	4 Resolver ecuaciones trigonométricas usando identidades fundamentales (p. 509)	8, 9	76, 77, 79
	5 Resolver ecuaciones trigonométricas usando una utilidad gráfica (p. 510)	10	87–89
7.4	1 Usar álgebra para simplificar expresiones trigonométricas (p. 516)	1	34–50
	2 Establecer identidades (p. 517)	2–8	34–42
7.5	1 Utilice fórmulas de suma y diferencia para encontrar valores exactos (p. 524)	1–5	51–56, 59–63(a)–(d), 92
	2 Usar fórmulas de suma y diferencia para establecer identidades (p. 528)	6–8	43, 44
	3 Utilice fórmulas de suma y diferencia que involucren cálculos trigonométricos inversos. funciones (pág. 529)	9, 10	64–67
	4 Resolver ecuaciones trigonométricas lineales en seno y coseno (pág. 530)	11, 12	81
7.6	1 Utilice fórmulas de doble ángulo para encontrar valores exactos (p. 537)	1	59 a 63(e), (f), 68, 69, 93
	2 Utilice fórmulas de doble ángulo para establecer identidades (p. 537)	2–5	46, 47, 80
	3 Utilice fórmulas de medio ángulo para encontrar valores exactos (p. 540)	6, 7	57, 58, 59–63(g), (h), 92
7.7	1 Expresar productos como sumas (p. 547)	1	48
	2 Expresar sumas como productos (p. 548)	2	49, 50

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 a 6, indique el dominio y rango de cada función.

1. y = sen-1 x 2. y = cos-1 x 3. y = tan-1 x

4. y = seg-1 x 5. y = csc-1 x 6. y = cuna-1 x

En los problemas 7 a 14, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

7. pecado-1 1 8. cos-1 0 9. bronceado-1 1 10. pecado-1 a - $\frac{1}{2}$ b

11. cos-1a - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ segundo 12. tan-1 1 - $\sqrt{3}$ 2 13. seg-1$\sqrt{2}$ 14. cuna-1 1 - 12

Machine Translated by Google

En los problemas 15 a 29, encuentre el valor exacto, si lo hay, de cada función compuesta. Si no hay ningún valor, diga que "no está definido". No use una calculadora.

15. pecado-1 como 8p

16. cos-1 acos 3p $\frac{}{4 \text{ segundo}}$

17. tan-1 atan 2p $\frac{}{3 \text{ segundo}}$

18. cos-1 acos 15p $\frac{}{7 \text{ segundo}}$

19. pecado-1 csina - $\frac{8p}{9 \text{ dormitorios}}$

20. pecado1sen-1 0,92

21. porque(cos-1 0,6)

22. bronceado 3tan-1 54

23. porque 3cos-1 1 - 1,62 4

24. pecado-1 acos 2p b

25. cos-1 atan 3p $\frac{}{4}$ b

26. tancsina-1 a - $\frac{13}{2 \text{ dormitorios}}$

27. secatan-1 $\frac{13}{3 \text{ segundo}}$

28. sinacot-1 3 $\frac{}{4 \text{ segundo}}$

29. tancsin-1 a - 5 bd $\frac{4}{}$

En los problemas 30 y 31, encuentre la función inversa f $^{-1}$ de cada función f. Encuentre el rango de f y el dominio y rango de f $^{-1}$.

30. f1x2 = 2 sen13x2 - 6 $\frac{\text{pag}}{}$ … X … $\frac{\text{pag}}{6}$

31. f1x2 = - porque x + 3 0 … x … p

En los problemas 32 y 33, escribe cada expresión trigonométrica como una expresión algebraica en u.

32. cos1sin-1 u2

33. tan1csc-1 u2

En los problemas 34 a 50, establezca cada identidad.

34. tan u cot u - sen2 u = cos2 u

35. cos2 u11 + tan2 u2 = 1

36. 5 cos2 u + 3 sen2 u = 3 + 2 cos2 u

37. + $\frac{1 - \text{porque tú}}{\text{pecado u}}$ $\frac{\text{pecado u}}{1 - \text{porque tú}}$ = 2 csc u

38. $\frac{\text{porque tú}}{\text{porque u - pecado u}} = \frac{1}{1 - \tan \text{tú}}$

39. $\frac{\csc u}{1 + \csc u} = \frac{1 - \text{pecado u}}{\cos 2 \text{ tu}}$

40. sec u - cos u = sen u tan u

41. $\frac{1 + \text{porque tú}}{\text{cosec u}} = \frac{\text{pecado3 tu}}{1 - \text{porque tú}}$

42. $\frac{1 - 2 \text{ pecado2 u}}{\text{pecado u porque u}}$ = cuna u - tan u

43. $\frac{\text{pecado1a - b2}}{\text{porque a porque b}}$ = tan a - tan b

44. $\frac{\cos 1a\text{-}b2}{\text{porque a porque b}}$ = 1 + tan a tan b

45. 11 + cos u2 tan = sen u $\frac{\text{tu}}{2}$

46. 2 cuna u cuna12u2 = cuna2 u - 1

47. 1 - 8 sen2 u cos2 u = cos14u2

48. $\frac{\text{sin13u2 porque u - pecado u cos13u2}}{\text{pecado12u2}}$ = 1

49. $\frac{\text{pecado12u2 + pecado14u2}}{\cos 12u2 + \cos 14u2}$ = tan13u2

50. $\frac{\cos 12u2 - \cos 14u2}{\cos 12u2 + \cos 14u2}$ - tan u tan13u2 = 0

En los problemas 51 a 58, encuentre el valor exacto de cada expresión.

51. cos 75°

52. pecado 135°

53. pecado $\frac{7p}{12}$

54. bronceado $\frac{5p}{4}$

55. sen 50° cos 40° + sen 40° cos 50°

56. cos 100° cos 10° + sen 100° sen 10°

57. cuna $\frac{\text{pag}}{12}$

58. porque $\frac{3p}{8}$

En los problemas 59 a 63, utilice la información dada sobre los ángulos a y b para encontrar el valor exacto de:

(a) sen1a + b2 (b) cos1a + b2 (c) sen1a - b2 (d) tan1a + b2

(e) pecado12a2 (f) cos12b2 (g) pecado $\frac{b}{2}$ (h) cos 2 $\frac{a}{}$

59. porque a = $\frac{3}{4}$, 0 6 un 6 $\frac{\text{pag}}{} = 2$; porque b $\frac{3}{5}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 b 6 p

60. cosec a = 3, 0 6 a 6 $\frac{\text{pag}}{}$; cosec b = - 2, - 2 $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 b 6 0

61. tan a = $\frac{3}{4}$, página 6 a 6 $\frac{3p}{}$; tan b = 2 $\frac{12}{5}$, 0 6 b 6 2 $\frac{\text{pag}}{}$

62. seg a = 2, - 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 6 un 6 0; segundo b = 3, $\frac{3p}{2}$ 6 b 6 2p

63. pecado a = - $\frac{2}{3}$, página 6 a 6 $\frac{3p}{2}$; porque b = - $\frac{2}{3}$, página 6 b 6 $\frac{3p}{2}$

En los problemas 64 a 69, encuentre el valor exacto de cada expresión.

64. cosasin-1 3 $\frac{}{5}$ - cos-1 $\frac{1}{2 \text{ segundo}}$

65. tanc cos-1 a - 12 b - cos-1 a 3 $\frac{5}{}$ $\frac{}{4 \text{ dormitorios}}$

Machine Translated by Google

66. tancsin-1 a - 2 b - tan-1 4 d 68. $\frac{1}{3}$

67. cosctan-1 1 - 12 + cos-1 a - 5 bd $\frac{4}{3}$

sinc 2 cos-1 a - 5 bd $\frac{3}{4}$

69. cosa2 tan-1 3 b

En los problemas 70 a 81, resuelva cada ecuación en el intervalo 0... u 6 2p.

70. porque tu = $\frac{1}{2}$

71. tan u + 23 = 0

72. pecado12u2 + 1 = 0

73. tan12u2 = 0

74. seg2 u = 4

75. 0,2 sen u = 0,05

76. seno u + sen12u2 = 0

77. sen12u2 - porque u - 2 sen u + 1 = 0

78. 2 sen2 u - 3 sen u + 1 = 0

79. 4 sen2 u = 1 + 4 porque u

80. sen12u2 = 22 porque u

81. sen u - porque u = 1

En los problemas 82 a 86, use una calculadora para encontrar un valor aproximado para cada expresión, redondeado a dos decimales.

82. pecado-1 0,7

83. tan-1 1 - 22

84. cos-1 1 - 0,22

85. seg-1 3

86. cuna-1 1 - 42

En los problemas 87 a 89, utilice una herramienta gráfica para resolver cada ecuación en el intervalo 0… x … 2p. Aproxima cualquier solución redondeada a dos decimales.

87. 2x = 5 porque x

88. 2 sen x + 3 porque x = 4x

89. pecado x = ln x

En los problemas 90 y 91, encuentre la solución exacta de cada ecuación.

90. - 3 pecado-1 x = p

91. 2 cos-1 x + p = 4 cos-1 x

92. Usa una fórmula de medio ángulo para encontrar el valor exacto de sen 15°. Luego usa una fórmula de diferencia para encontrar el valor exacto de sen 15°. Demuestra que las respuestas que encontraste son las mismas.

93. Si te dan el valor de cos u y quieres el valor exacto de cos12u2, ¿qué forma de la fórmula del doble ángulo para cos12u2 es más adecuada? eficiente de usar?

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

En los problemas 1 a 10, encuentre el valor exacto de cada expresión. Expresar ángulos en radianes.

1. seg-1 a 223 b

2. pecado-1 a - $\frac{12}{2}$ b

3. tan-1 1 - 232

4. cos-1 0

5. cuna-1 1

6. csc-1 1 - 22

7. pecado-1 así como 14p

8. tanatan-1 7

9. cuna1csc-1 2102

10. secacos-1a - $\frac{3}{4}$ bb

En los problemas 11 a 14, use una calculadora para evaluar cada expresión. Expresar ángulos en radianes redondeados a dos decimales.

11. pecado-1 0.382

12. seg-1 1.4

13. bronceado-1 3

14. cuna-1 5

En los problemas 15 a 20, establezca cada identidad.

15. $\frac{\text{csc } u + \text{cuna } u}{\text{segundo } u + \tan u} = \frac{\text{segundo } u - \tan u}{\text{csc } u - \text{cuna } u}$

16. sen u tan u + cos u = sec u

17. tan u + cuna u = 2 csc12u2

18. $\frac{\text{sen1a + b2}}{\tan a + \tan b} = \cos a \cos b$

19. sen13u2 = 3 sen u - 4 sen3 u

20. $\frac{\text{bronceado } u - \text{cuna } u}{\text{bronceado } u + \text{cuna } u} = 1 - 2\cos 2 u$

Machine Translated by Google

En los problemas 21 a 28, utilice fórmulas de suma, diferencia, producto o medio ángulo para encontrar el valor exacto de cada expresión.

21. cos 15°

22. bronceado 75°

23. siná 1 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos-1 $\frac{3}{5 \text{ segundo}}$

24. tana2 pecado-1 $\frac{6}{11}$ b

25. cosasin-1 2 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ + bronceado-1 $\frac{3}{2 \text{ segundo}}$

26. sen 75° cos 15°

27. pecado 75° + pecado 15°

28. cos 65° cos 20° + sen 65° sen 20°

En los problemas 29 a 33, resuelve cada ecuación en 0 … u 6 2p.

29. 4 sen2 u - 3 = 0

30. - 3 cosas p $\frac{\sqrt{2}}{2}$ - ub = tan u

31. cos2 u + 2 sen u cos u - sen2 u = 0

32. sen1u + 12 = porque u

33. 4 sen2 u + 7 sen u = 2

Revisión acumulativa

1. Encuentra las soluciones reales, si las hay, de la ecuación 3x2 + x - 1 = 0.
2. Encuentra una ecuación para la recta que contiene los puntos 1 - 2, 52. y 14, - 12. ¿Cuál es la distancia entre estos puntos? ¿Cuál es su punto medio?
3. Pruebe la simetría de la ecuación 3x + y2 = 9 con respecto al eje x, el eje y y el origen. Enumera las intersecciones.
4. Usa transformaciones para representar gráficamente la ecuación y = 0 x - 3 0 + 2.
5. Usa transformaciones para representar gráficamente la ecuación y = 3ex - 2.
6. Usa transformaciones para graficar la ecuación.

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

7. Grafica cada una de las siguientes funciones. Etiqueta al menos tres puntos en cada gráfico. Nombra la función inversa de cada uno y muestra su gráfica.

(a) y = x3 (b) y = ex

(c) y = sen x, - $\frac{\pi}{2}$ … X … $\frac{\pi}{2}$

(d) y = cos x, 0 … x … p

8. Si sen u = - y p 6 u 6 $\frac{1}{3}$ $\frac{3\pi}{2}$, encontrar el valor exacto de:

(a) porque tú (b) tan tú (c) pecado12u2

(d) cos12u2 (e) siná 1 $\frac{}{2 \text{ unidades}}$ (f) cosa 1 $\frac{}{2 \text{ unidades}}$

9. Encuentra el valor exacto de cos1tan-1 22.
10. Si pecado a = $\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ 6 a 6 p, y cos b = - 3 $\frac{1}{}$, página 6 b 6 $\frac{3\pi}{2}$, encontrar el valor exacto de:

(a) porque a (b) pecado b (c) cos12a2

(d) cos1a + b2 (e) pecado $\frac{b}{2}$

11. Considere la función.

f1x2 = 2x5 - x4 - 4x3 + 2x2 + 2x - 1

(a) Encuentre los ceros reales y su multiplicidad.

(b) Encuentre las intersecciones.

(c) Encuentre la función de potencia a la que se asemeja la gráfica de f para 0 x 0 grande .

(d) Grafique f usando una utilidad gráfica.

(e) Aproximar los puntos de inflexión, si existen.

(f) Utilice la información obtenida en los incisos (a) a (e) para representar gráficamente f manualmente.

(g) Identifique los intervalos en los que f es creciente, decreciente o constante.

12. Si f1x2 = 2x2 + 3x + 1 y g1x2 = x2 + 3x + 2, resuelve:

(a) f1x2 = 0 (b) f1x2 = g1x2

(c) f1x2 7 0 (d) f1x2 Ú g1x2

Machine Translated by Google

Proyectos del Capítulo

Proyecto basado en Internet

I. Mapeando tu mente El objetivo de este proyecto es organizar en nuestra mente el material aprendido en los capítulos 6 y 7. Para ello, utilizaremos un software de mapas mentales llamado Mindomo.
Mindomo es un software gratuito que le permite organizar sus pensamientos digitalmente y compartirlos con cualquier persona en la Web. Al organizar sus pensamientos, podrá ver el panorama general y luego comunicarlo a los demás. También puede ver cómo se relacionan varios conceptos entre sí.

1. Vaya a http://www.mindomo.com y regístrate. Aprenda a utilizar Mindomo. Puede encontrar un vídeo sobre el uso de Mindomo en http://www.screencast.com/t/ZPwJQDs4
2. Utilice un motor de búsqueda de Internet para investigar mapas mentales. Escribe algunos párrafos que expliquen la historia y los beneficios de los mapas mentales.
3. Cree un MindMap que explique lo siguiente:
   (a) Las seis funciones trigonométricas y sus propiedades (incluidas las inversas de estas funciones)
   (b) Las identidades trigonométricas fundamentales
   ¡Al crear tu mapa, sé creativo! Quizás pueda compartir ideas sobre cuándo se podría usar una identidad en particular o cuándo no se puede usar una identidad en particular.
4. Comparta el MindMap para que los estudiantes de su clase puedan verlo.

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC):

II. Ondas El movimiento ondulatorio se describe mediante una ecuación sinusoidal. Se discute el Principio de Superposición de dos ondas.

III. Proyecto de Motorola Envío de imágenes de forma inalámbrica La transmisión electrónica de imágenes se hace práctica mediante la compresión de imágenes, métodos matemáticos que reducen en gran medida el número de bits de datos utilizados para componer la imagen.

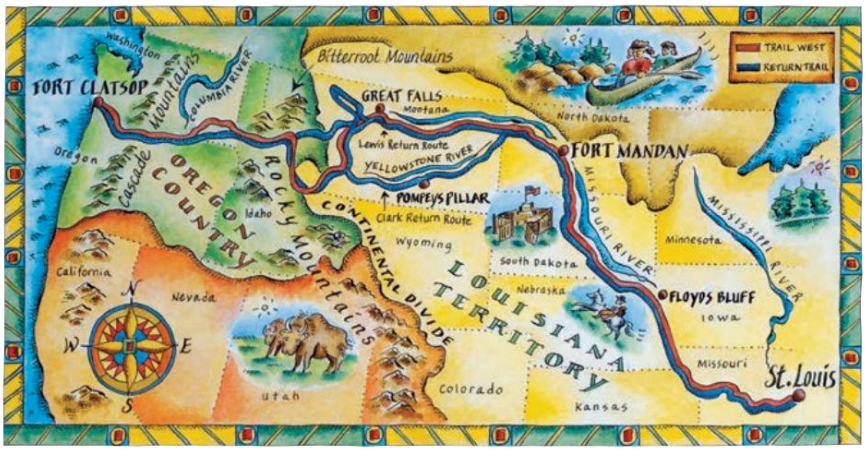
IV. Cálculo de diferencias Encontrar cocientes de diferencias consecutivos se llama encontrar diferencias finitas y se utiliza para analizar la gráfica. de una función desconocida.

Machine Translated by Google

Aplicaciones de Funciones trigonométricas

8

La expedición de Lewis y Clark



En el mundo actual de GPS y aplicaciones de teléfonos inteligentes que pueden rastrear con precisión la ubicación de uno, es difícil comprender la magnitud del desafío que enfrentaron Meriwether Lewis y William Clark en 1804.

Pero Lewis y Clark lo lograron. Encargados por el presidente Thomas Jefferson para explorar el recién adquirido territorio de Luisiana, los co-capitanes dirigieron su expedición (el Cuerpo de Descubrimiento) en un viaje que duró casi dos años y medio y los llevó más de 7000 millas. Comenzando en St. Louis, Missouri, viajaron río arriba por el río Missouri, a través de las Grandes Llanuras, sobre las Montañas Rocosas, bajando por el río Columbia hasta el Océano Pacífico y luego de regreso. A lo largo del camino, utilizando herramientas limitadas como una brújula y un octante, crearon más de 130 mapas del área con notable detalle y precisión.

—Ver Capítulo Proyecto II—

Una mirada atras

En el capítulo 6, definimos las seis funciones trigonométricas usando el círculo unitario. En particular, aprendimos a evaluar las funciones trigonométricas. También aprendimos a graficar funciones sinusoidales. En el Capítulo 7, definimos las funciones trigonométricas inversas y resolvimos ecuaciones que involucran funciones trigonométricas.

Una mirada hacia el futuro

En este capítulo, definimos las funciones trigonométricas usando triángulos rectángulos y luego usamos las funciones trigonométricas para resolver problemas aplicados. Las primeras cuatro secciones tratan de aplicaciones que involucran triángulos rectángulos y triángulos oblicuos, triángulos que no tienen un ángulo recto. Para resolver problemas que involucran triángulos oblicuos, desarrollaremos la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos.
También desarrollaremos fórmulas para encontrar el área de un triángulo.

La última sección trata de aplicaciones de funciones sinusoidales que involucran movimiento armónico simple y movimiento amortiguado.

Describir

8.1 Trigonometría de triángulo rectángulo; Aplicaciones
8.2 La ley de los senos
8.3 La ley de los cosenos
8.4 Área de un triángulo
8.5 Movimiento Armónico Simple; movimiento amortiguado; Combinando ondas
Revisión del capítulo
Prueba de capítulo
Revisión acumulativa
Proyectos del Capítulo

Machine Translated by Google

8.1 Trigonometría de triángulo rectángulo; Aplicaciones

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Teorema de Pitágoras (Sección A.2, págs. A14–A15)

• Ecuaciones trigonométricas (Sección 7.3, págs. 505–510)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 565.

OBJETIVOS 1 Hallar el valor de funciones trigonométricas de ángulos agudos usando triángulos rectángulos (p. 558)

2 Utilice el teorema del ángulo complementario (p. 560)

3 Resolver triángulos rectángulos (p. 560)

4 Resolver problemas aplicados (p. 561)

1 Encuentre el valor de funciones trigonométricas de ángulos agudos usando triángulos rectángulos

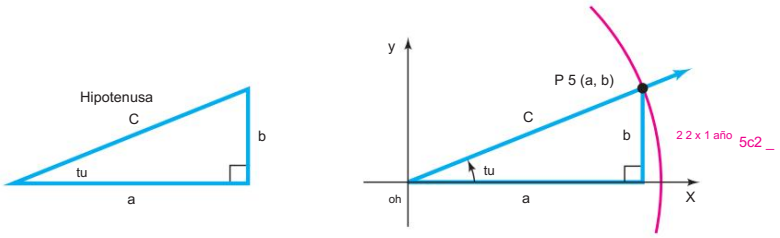
Un triángulo en el que uno de sus ángulos es recto 190°2 se llama triángulo rectángulo. Recuerde que el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los dos lados restantes se llaman catetos del triángulo. En la Figura 1(a), la hipotenusa está etiquetada como c para indicar que su longitud es c unidades y, de manera similar, los catetos están etiquetados como
y B. Como el triángulo es rectángulo, el teorema de Pitágoras nos dice que

$$a2 + b2 = c2$$

La figura 1(a) también muestra el ángulo u. El ángulo u es un ángulo agudo: es decir, 0° 6 u 6 90°

para u medido en grados y 0 6 u 6 $\frac{\text{pag}}{2}$ para u medido en radianes. Colocarte

en posición estándar, como se muestra en la Figura 1(b). Entonces las coordenadas del punto P son 1a, b2. Además, P es un punto en el lado terminal de u que está en el círculo x2 + y2 = c2 . (¿Ves por qué?)



(a) (b)

Figura 1 Triángulo rectángulo con ángulo agudo u

Ahora aplique el teorema de la página 422 para evaluar funciones trigonométricas usando un círculo de radio c, x2 + y2 = c2 . Al referirse a las longitudes de los lados del triángulo con los nombres hipotenusa 1c2, opuesta 1b2 y adyacente 1a2, como se indica en la Figura 2, las funciones trigonométricas de u se pueden expresar como razones de los lados de un triángulo rectángulo.

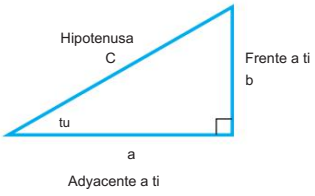


Figura 2 Triángulo rectángulo

$$\text{pecado u} = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{C} \qquad \text{csc tu} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}} = \frac{C}{b}$$

$$\text{porque tu} = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{C} \qquad \text{segundo u} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}} = \frac{C}{a} \qquad (1)$$

$$\tan u = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}} = \frac{b}{a} \qquad \text{cuna u} = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Observa que cada función trigonométrica del ángulo agudo u es positiva.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1 Encontrar el valor de funciones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo

Encuentra el valor exacto de las seis funciones trigonométricas del ángulo u en la Figura 3.

Solución

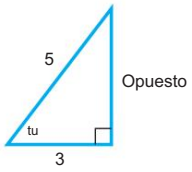


figura 3

En la Figura 3, los dos lados dados del triángulo son

$$c = \text{hipotenusa} = 5 \qquad a = \text{Adyacente} = 3$$

Para encontrar la longitud del lado opuesto, usa el teorema de Pitágoras.

$$1\text{Adyacente}2^{2} + 1\text{Enfrente}2^{2} = 1\text{Hipotenusa}2^{2}$$

$$32 + 1\text{Opuesto}2^{2} = 52$$

$$1\text{Opuesto}2^{2} = 25 - 9 = 16$$

$$\text{Opuesto} = 4$$

Ahora que se conocen las longitudes de los tres lados, use las razones en (1) para encontrar el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas.

$$\text{pecado u} = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \text{porque tu} = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \tan u = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{csc tu} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}} = \frac{5}{4} \qquad \text{segundo u} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}} = \frac{5}{3} \qquad \text{cuna u} = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}} = \frac{3}{4}$$

Ahora trabaja el problema 9

Los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo son razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Esta forma de ver las funciones trigonométricas tiene muchas aplicaciones y, de hecho, fue el punto de vista utilizado por los primeros matemáticos (antes del cálculo) al estudiar el tema de la trigonometría.

EJEMPLO 2 Construyendo un canal de lluvia

Se construirá un canal para lluvia con láminas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Véase la Figura 4(a). Después de marcar una longitud de 4 pulgadas desde cada borde, los lados se doblan hacia arriba en un ángulo u. Véase la Figura 4(b).

(a) Exprese el área A de la abertura en función de u.

(b) Gráfica A = A1u2. Encuentra el ángulo u que hace que A sea más grande. (Esta curva permitirá la mayor cantidad de agua para fluir a través del canal.)

Solución

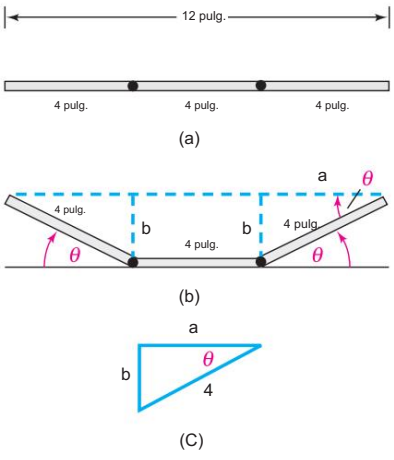


Figura 4

(a) Mire nuevamente la Figura 4(b). El área A de la abertura es la suma de las áreas de dos triángulos rectángulos congruentes y un rectángulo. Mire la Figura 4(c), que muestra el triángulo de la derecha en la Figura 4(b) redibujado. Tenga en cuenta que

$$\text{porque tu} \underset{=4}{\frac{a}{}}, \quad \text{entonces a} = 4 \text{ porque u} \qquad \text{sen u} = \frac{b}{4}, \quad \text{entonces b} = 4 \text{ sen u}$$

El área del triángulo es

$$\text{área} = \frac{1}{2} \# \text{ base} \# \text{ altura} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \# 4 \cos u \# 4 \text{ sen u} = 8 \text{ sen u cos u}$$

Entonces el área de los dos triángulos congruentes juntos es 2 # 8 sen u cos u = 16 sen u cos u.

El rectángulo tiene longitud 4 y altura b, por lo que su área es

$$\text{área del rectángulo} = 4b = 4 \# 4 \text{ sen u} = 16 \text{ sen u}$$

(continuado)

Machine Translated by Google

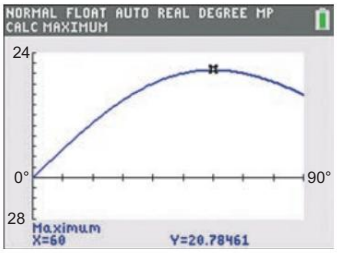


Figura 5

El área A de la abertura es

A = área de los dos triángulos congruentes + área del rectángulo

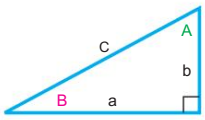
A1u2 = 16 sen u cos u + 16 sen u = 16 sen u1cos u + 12

(b) La Figura 5 muestra la gráfica de A = A1u2 en una TI-84 Plus C. Usando MAXIMUM, el ángulo u que hace que A sea más grande es 60°.

2 Utilice el teorema del ángulo complementario

Dos ángulos agudos se llaman complementarios si su suma es un ángulo recto o 90°.
Como la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180°, se deduce que, para un triángulo rectángulo, la suma de los ángulos agudos es 90°, por lo que los dos ángulos agudos en todo triángulo rectángulo son complementarios.

Consulte ahora la Figura 6, que etiqueta el ángulo opuesto al lado b como B y el ángulo opuesto al lado a como A. Observe que el lado b es adyacente al ángulo A y el lado a es adyacente al ángulo B. Como resultado,



Adyacente a A
enfrente de B

Adyacente a B
enfrente de A

Figura 6

$$\text{pecado B} = \frac{b}{c} = \text{porque A porque B} = \frac{a}{c} = \text{pecado A tan B} = \frac{b}{a} = \text{cuna A}$$
$$\text{csc B} = b\ \frac{c}{} = \text{segundo A segundo B} = \frac{c}{a} = \text{csc A cuna B} = \frac{a}{b} = \text{bronceado A} \qquad (2)$$

Debido a estas relaciones, las funciones seno y coseno, tangente y cotangente, y secante y cosecante se denominan cofunciones entre sí.

Las identidades (2) pueden expresarse en palabras de la siguiente manera:

TEOREMA Teorema del ángulo complementario

Las cofunciones de los ángulos complementarios son iguales.

A continuación se dan ejemplos de este teorema:

Ángulos complementarios Ángulos complementarios Ángulos complementarios
t t t t t t
sen 30° = cos 60° sec 80° = tan 10° = cuna 50°
cc C C C C C
Cofunciones Cofunciones Cofunciones

EJEMPLO 3 Usando el teorema del ángulo complementario

(a) sen 62° = cos190° - 62°2 = cos 28°

(b) tan 12 pag = cota p 2 - p 12b = cuna 5p 12

(c) sen2 40° + sen2 50° = sen2 40° + cos2 40° = 1
C
sen 50· · cos 40·

Ahora problema de trabajo 1 9

3 Resolver triángulos rectángulos

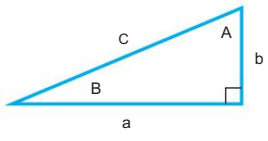


Figura 7 Triángulo rectángulo

En la discusión que sigue, un triángulo rectángulo siempre se etiqueta de modo que el lado a es el ángulo opuesto A, el lado b es el ángulo opuesto B y el lado c es la hipotenusa, como se muestra en la Figura 7. Resolver un triángulo rectángulo significa encontrar el longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos. Expresamos las longitudes de los lados redondeadas a dos decimales y las medidas de los ángulos en grados redondeadas a un decimal. (Asegúrese de que su calculadora esté en modo grados).

Machine Translated by Google

Para resolver un triángulo rectángulo, necesitamos conocer uno de los ángulos agudos A o B y un lado, o bien dos lados (en cuyo caso se puede utilizar el Teorema de Pitágoras). Además, como la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°, la suma de las medidas de los ángulos A y B en un triángulo rectángulo debe ser 90°.

TEOREMA Propiedades de un triángulo rectángulo

Para el triángulo rectángulo que se muestra en la Figura 7, tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad A + B = 90°$$

EJEMPLO 4 Resolver un triángulo rectángulo

Utilice la Figura 8. Si $b = 2$ y $A = 40°$, encuentre a, c y B.

Solución

Como $A = 40°$ y $A + B = 90°$, se deduce que $B = 50°$. Para encontrar los lados a y c, usa los hechos que

$$\text{bronceado } 40° = \frac{a}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos 40° = \frac{2}{c}$$

Ahora resuelve para a y c.

$$a = 2 \tan 40° \approx 1{,}68 \quad \text{y} \quad c = \frac{2}{\cos 40°} \approx 2{,}61$$

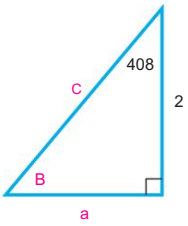


Figura 8

Ahora trabaja el problema 29

EJEMPLO 5 Resolver un triángulo rectángulo

Utilice la Figura 9. Si $a = 3$ y $b = 2$, encuentre c, A y B.

Solución

Debido a que $a = 3$ y $b = 2$, entonces, según el teorema de Pitágoras,

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

$$c = \sqrt{13} \approx 3{,}61$$

Para encontrar el ángulo A, usa el hecho de que

$$\text{bronceado } A = \frac{3}{2} \qquad \text{entonces } A = \tan^{-1}\frac{3}{2}$$

Utilice una calculadora con la moda configurada en grados para encontrar que $A = 56{,}3°$ redondeado a un decimal. Dado que $A + B = 90°$, esto significa que $B = 33{,}7°$.

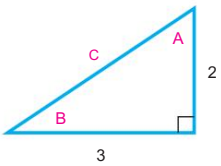


Figura 9

NOTA Para evitar errores de redondeo al usar una calculadora, almacenaremos los valores no redondeados en la memoria para usarlos en cálculos posteriores.

Ahora resuelve el problema 39

4 Resolver problemas aplicados*

Además de desarrollar modelos usando triángulos rectángulos, podemos usar la trigonometría de triángulos rectángulos para medir alturas y distancias que son difíciles o imposibles de medir por medios ordinarios. Cuando uses triángulos rectángulos para resolver estos problemas, presta atención a las medidas conocidas. Esto indicará qué función trigonométrica usar. Por ejemplo, si conoces la medida de un ángulo y la longitud del lado adyacente al ángulo, y deseas encontrar la longitud del lado opuesto, usarías la función tangente. ¿Sabes por qué?

*En problemas aplicados, es importante que las respuestas se informen con una precisión justificable y con cifras significativas apropiadas. En este capítulo asumiremos que los datos del problema son exactos al número de dígitos significativos, lo que da como resultado que los lados se redondeen a dos decimales y los ángulos se redondeen a un decimal.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6

Encontrar el ancho de un río

Un topógrafo puede medir el ancho de un río estableciendo un tránsito* en un punto C en un lado del río y observando un punto A en el otro lado. Consulte la Figura 10.

Después de girar un ángulo de 90° en C, el topógrafo camina una distancia de 200 metros hasta el punto B. Usando el tránsito en B, el ángulo u se mide y se encuentra que es 20°. ¿Cuál es el ancho del río redondeado al metro más cercano?

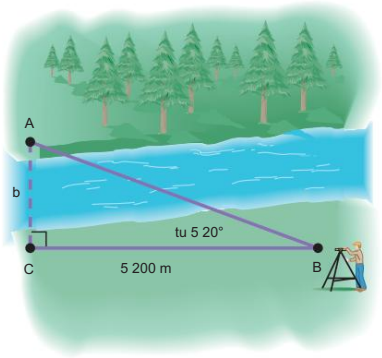


Figura 10

Solución Como se ve en la Figura 10, el ancho del río es la longitud del lado b, y a y u son conocidos. Usa los hechos de que b es opuesto a u y a es adyacente a u y escribe

$$\tan u = \frac{b}{a}$$

lo que lleva a

$$\text{bronceado } 20° \frac{b}{= 200}$$

$$b = 200 \tan 20° \approx 72{,}79 \text{ metros}$$

El ancho del río es de 73 metros, redondeado al metro más cercano.

Ahora problema de trabajo 4 9

EJEMPLO 7

Encontrar la inclinación de un sendero de montaña

Un sendero recto conduce desde el Hotel Alpine, a una altura de 8000 pies, hasta un mirador panorámico, a una altura de 11,100 pies. La longitud del sendero es de 14,100 pies. ¿Cuál es la inclinación (grado) del sendero? Es decir, ¿cuál es la medida del ángulo B en la Figura 11?

Solución

Según la Figura 11, la longitud del lado opuesto al ángulo B es 11,100 - 8000 = 3100 pies, y la longitud de la hipotenusa es 14,100 pies. El ángulo B satisface la ecuación.

$$\text{pecado B} \frac{3100}{= 14{,}100}$$

Usando una calculadora,

$$B = \text{sen-1} \frac{3100}{14{,}100} \approx 12{,}7°$$

La inclinación (pendiente) del sendero es de aproximadamente 12,7°.

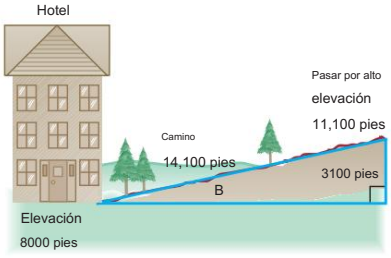


Figura 11

Ahora resuelve el problema 5 5

A veces, las alturas verticales se pueden medir utilizando el ángulo de elevación o el ángulo de depresión. Si una persona mira hacia un objeto, el ángulo agudo medido desde la horizontal hasta la línea de visión del objeto se llama ángulo de elevación. Consulte la Figura 12(a).

*Instrumento utilizado en topografía para medir ángulos.

Machine Translated by Google

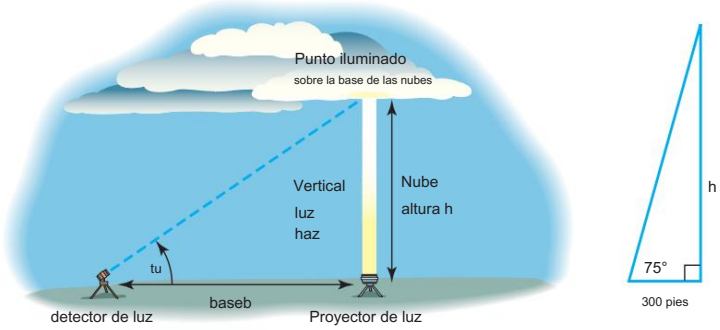
(a) Ángulo de elevación (b) Ángulo de depresión

Figura 12

Si una persona mira un objeto hacia abajo, el ángulo agudo formado por la línea de visión del objeto y la horizontal se llama ángulo de depresión. Véase la Figura 12(b).

EJEMPLO 8 Encontrar la altura de una nube

Los meteorólogos calculan la altura de una nube utilizando un instrumento llamado ceilómetro. Un ceilómetro consta de un proyector de luz que dirige un haz de luz vertical hacia la base de la nube y un detector de luz que escanea la nube para detectar el haz de luz. Ver Figura 13(a). En el aeropuerto Midway de Chicago, se utilizó un ceilómetro para determinar la altura de la capa de nubes. Se instaló con su detector de luz a 300 pies de su proyector de luz. Si el ángulo de elevación desde el detector de luz hasta la base de la nube era de 75°, ¿cuál era la altura de la capa de nubes?



(a) (b)

Figura 13

Solución La Figura 13(b) ilustra la situación. Para encontrar la altura h, usa el hecho de que

bronceado 75° = $\frac{h}{300,}$ entonces

$$h = 300 \tan 75° \approx 1120 \text{ pies}$$

El techo (altura hasta la base de la capa de nubes) era de aproximadamente 1120 pies.

Ahora resuelve el problema 5 1

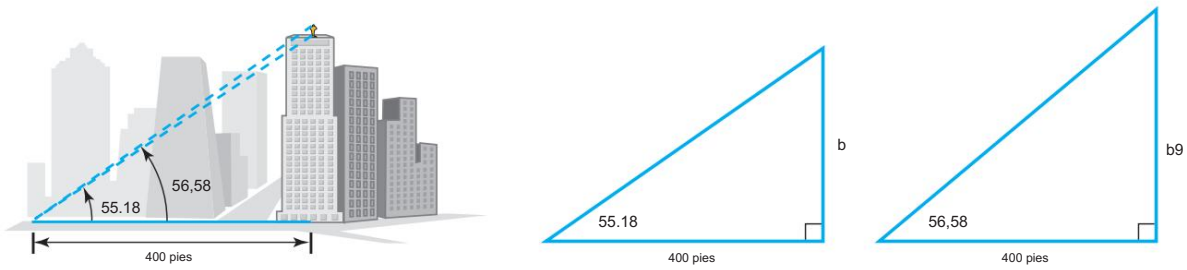
La idea detrás del Ejemplo 8 también se puede utilizar para encontrar la altura de un objeto que está colocado sobre el nivel del suelo.

EJEMPLO 9 Encontrar la altura de una estatua en un edificio

Adornando la parte superior del edificio de la Junta de Comercio de Chicago hay una estatua de Ceres, la diosa romana del trigo. Desde el nivel de la calle, se toman dos observaciones a 400 pies del centro del edificio. Se encuentra que el ángulo de elevación hasta la base de la estatua es de 55,1° y el ángulo de elevación hasta la parte superior de la estatua es de 56,5°. Consulte la Figura 14(a) en la página siguiente. ¿Cuál es la altura de la estatua?

Machine Translated by Google

Solución La Figura 14(b) muestra dos triángulos que replican la Figura 14(a). La altura de la estatua de Ceres será b′ - b. Para encontrar b y b′ , consulte la Figura 14(b).



(a) (b)

Figura 14

$$\text{bronceado } 55{,}1^\circ = \frac{b}{400} \qquad \text{bronceado } 56{,}5^\circ = \frac{b'}{400}$$

$$b = 400 \tan 55{,}1^\circ \approx 573{,}39 \qquad b' = 400 \tan 56{,}5^\circ \approx 604{,}33$$

La altura de la estatua es aproximadamente 604,33 - 573,39 = 30,94 pies ≈ 31 pies.

Ahora problema de trabajo 7 1

EJEMPLO 10 El faro de Gibb's Hill, Southampton, Bermudas

En funcionamiento desde 1846, el faro de Gibb's Hill se encuentra a 117 pies de altura sobre una colina de 245 pies de altura, por lo que su haz de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz se puede ver en el horizonte a unas 42 millas de distancia. Verifique la exactitud de esta declaración.

Solución La figura 15 ilustra la situación. El ángulo central u, ubicado en el centro de la Tierra, con un radio de 3960 millas, obedece a la ecuación

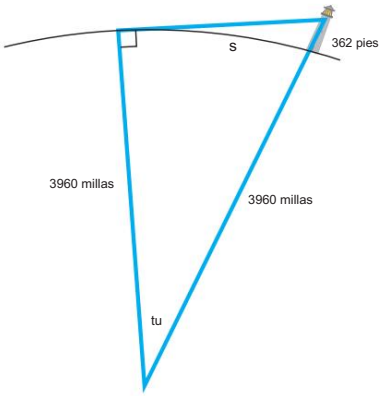


Figura 15

$$\text{porque tu} = \frac{3960}{3960 + \dfrac{362}{5280}} \approx 0.999982687 \text{ 1 milla} \cdot 5280 \text{ pies}$$

Resolviendo para u se obtiene

$$u \approx \cos\text{-}1\ 10.9999826872 \approx 0.33715^\circ \approx 20.23'$$

El folleto no indica si la distancia se mide en millas náuticas o millas terrestres. Calculemos ambas distancias.

La distancia s en millas náuticas (consulte el Problema 120, pág. 409) es la medida del ángulo u en minutos, por lo que s ≈ 20,23 millas náuticas.

La distancia s en millas terrestres viene dada por la fórmula s = ru, donde u se mide en radianes. Entonces, desde

$$u \approx 0{,}33715^\circ \approx 0{,}00588 \text{ radianes}$$

$$1 \cdot \frac{\text{C}}{\text{PAG}}{180} \text{ radián}$$

Machine Translated by Google

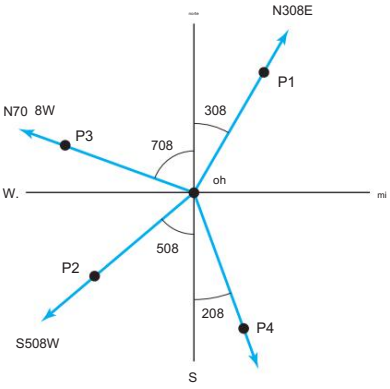


Figura 16

esto significa que

$$s = ru \approx 3960 \# 0{,}00588 \approx 23{,}3 \text{ millas}$$

En cualquier caso, parecería que el folleto exagera un poco la distancia.

En navegación y topografía, la dirección o rumbo desde un punto O a un punto P es igual al ángulo agudo u entre el rayo OP y la línea vertical que pasa por O, la línea norte-sur.

La Figura 16 ilustra algunos rodamientos. Observe que el rumbo de O a P1 se denota con el simbolismo N30°E, lo que indica que el rumbo está 30° al este del norte. Al escribir el rumbo de O a P, la dirección norte o sur siempre aparece primero, seguida de un ángulo agudo, seguido de este u oeste. En la Figura 16, el rumbo de O a P2 es S50°W, y de O a P3 es N70°W.

EJEMPLO 11 Encontrar el rumbo de un objeto

En la Figura 16, ¿cuál es la orientación de O a un objeto en P4?

Solución El ángulo agudo entre el rayo OP4 y la línea norte-sur que pasa por O es de 20°. El rumbo de O a P4 es S20°E.

EJEMPLO 12 Encontrar el rumbo de un avión

Un avión Boeing 777 despega del aeropuerto O'Hare por la pista 2 IZQUIERDA, que tiene rumbo N20°E.* Después de volar 1 milla, el piloto del avión solicita permiso para girar 90° y dirigirse hacia el noroeste. Se concede la solicitud. Después de que el avión recorre 2 millas en esta dirección, ¿qué rumbo debe utilizar la torre de control para localizar el avión?

Solución

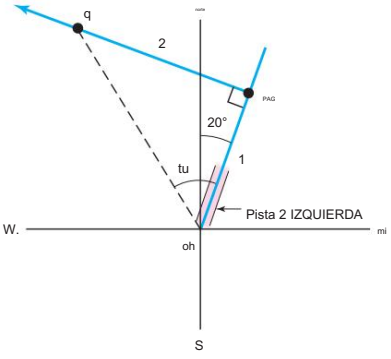


Figura 17

La figura 17 ilustra la situación. Después de volar 1 milla desde el aeropuerto O (la torre de control), la aeronave está en P. Después de girar 90° hacia el noroeste y volar 2 millas, la aeronave está en el punto Q. En el triángulo OPQ, el ángulo u obedece a la ecuación

$$\tan u = 1 \quad \frac{2}{} = 2 \text{ entonces } u = \tan^{-1} 2 \approx 63{,}4°$$

El ángulo agudo entre el norte y el rayo OQ es 63,4° - 20° = 43,4°. El rumbo de la aeronave de O a Q es N43,4°W.

Ahora resuelve el problema 6 3

8.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. En un triángulo rectángulo, si la longitud de la hipotenusa es 5 y la longitud de uno de los otros lados es 3, ¿cuál es la longitud del tercer lado? (págs. A14–A15)

2. Si u es un ángulo agudo, resuelve la ecuación $\tan u = 1$. expreso $\frac{}{2}$ su respuesta en grados, redondeada a un decimal. (págs. 505 a 510)

3. Si u es un ángulo agudo, resuelve la ecuación $\operatorname{sen} u = \frac{1}{2}$. (págs. 505 a 510)

*En navegación aérea, el término azimut denota el ángulo positivo medido en el sentido de las agujas del reloj desde el norte (N) hasta un rayo OP. En la Figura 16, el acimut de O a P1 es 30°; el acimut de O a P2 es 230°; el acimut de O a P3 es 290°. Al nombrar pistas, el dígito de las unidades se deja fuera del acimut. Pista 2 IZQUIERDA significa la pista izquierda con una dirección de azimut 20° (rumbo N20°E). La pista 23 es la pista con azimut 230° y rumbo S50°W.

Machine Translated by Google

Conceptos y vocabulario

4. Verdadero o Falso pecado 52° = cos 48°

5. Opción múltiple La suma de las medidas de los dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo es (a) 45° (b) 90° (c) _____. 180° (d) 360°

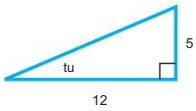
6. Cuando miras un objeto, el ángulo agudo medido desde la horizontal hasta la línea de visión del objeto se llama _____ ___ _____.

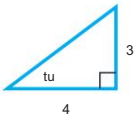
7. Verdadero o Falso En un triángulo rectángulo, si se conocen dos lados, puede resolver el triángulo.

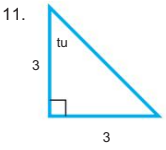
8. Verdadero o Falso En un triángulo rectángulo, si conocemos los dos agudos ángulos, podemos resolver el triángulo.

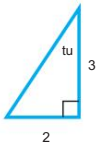
Desarrollo de habilidades

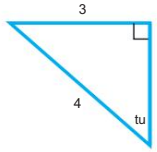
En los problemas 9 a 18, encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas del ángulo u en cada figura.

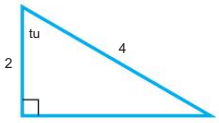
9. 

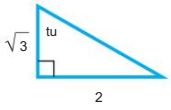
10. 

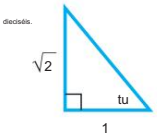
11. 

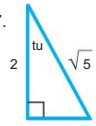
12. 

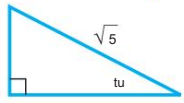
13. 

14. 

15. 



17. 

18. 

En los problemas 19 a 28, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

19. pecado 38° - cos 52°

20. bronceado 12° - cuna 78°

21. $\dfrac{\cos 40^\circ}{\text{pecado } 50^\circ}$

22. $\dfrac{\cos 10^\circ}{\text{pecado } 80^\circ}$

23. 1 + tan2 5° - csc2 85°

24. 1 - cos2 20° - cos2 70°

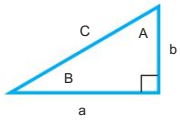
25. cuna 40° - $\dfrac{\text{pecado } 50^\circ}{\text{pecado } 40^\circ}$

26. bronceado 20° - $\dfrac{\cos 70^\circ}{\cos 20^\circ}$

27. seg 35° csc 55° - bronceado 35° cuna 55°

28. cos 35° sen 55° + sen 35° cos 55°

En los problemas 29 a 42, utilice el triángulo rectángulo que se muestra a continuación. Luego, usando la información dada, resuelve el triángulo.



29. b = 5, B = 20°; encuentre a, c y A 31. a = 7, B = 50°; encuentre b, cy A 33. b = 6, A = 20°; encontrar a, c y b

30. b = 4, B = 10°; encontrar a, c y a

32. a = 6, B = 40°; encontrar b, c y a

34. b = 4, A = 10°; encontrar a, c y b

35. a = 6, A = 40°; encuentre b, c y B 37. c = 10, A = 40°; encuentre b, a y B 39. a = 5, b = 3; encuentre c, A y B 41. b = 4, c = 6; encontrar a, a y b

36. a = 5, A = 25°; encontrar b, c y b

38. c = 9, B = 20°; encontrar b, a y a

40. a = 2, b = 8; encontrar c, a y b

42. a = 2, c = 5; encontrar b, a y b

Aplicaciones y extensiones

43. Geometría La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 3 pies. Si un cateto mide 1 pie, encuentra la medida en grados de cada ángulo.

44. Geometría La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 4 pulgadas. Si un cateto mide 2 pulgadas, encuentre la medida en grados de cada ángulo.

45. Geometría Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 10 centímetros de longitud. Si un ángulo mide 40°, encuentra la longitud de cada cateto.

46. Geometría Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 8 pulgadas de largo. Si un ángulo mide 35°, encuentra la longitud de cada cateto.

47. Geometría Un triángulo rectángulo contiene un ángulo de 8 $\frac{\text{pag}}{}$ radián.

(a) Si un cateto mide 3 metros de largo, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa?

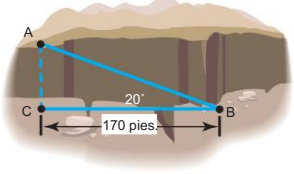
(b) Hay dos respuestas. ¿Cómo es esto posible?

48. Geometría Un triángulo rectángulo contiene un ángulo de 25°.

(a) Si un cateto mide 5 pulgadas de largo, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa?

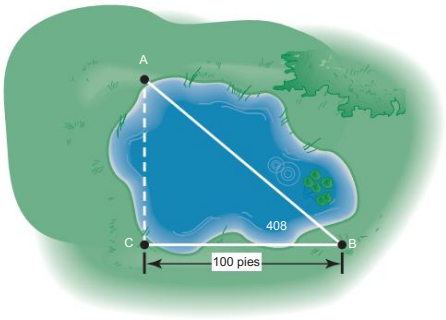
(b) Hay dos respuestas. ¿Cómo es esto posible?

49. Calcular el ancho de un desfiladero Calcula la distancia de A a C a través del desfiladero ilustrado en la figura.

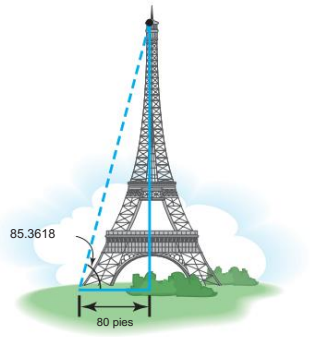


Machine Translated by Google

50. Calcular la distancia a través de un estanque Calcula la distancia de A a C a través del estanque ilustrado en la figura.



51. La Torre Eiffel La torre más alta construida antes de la era de los mástiles de televisión, la Torre Eiffel, se completó el 31 de marzo de 1889. Encuentre la altura de la Torre Eiffel (antes de que se agregara un mástil de televisión en la parte superior) usando la información proporcionada en la figura.



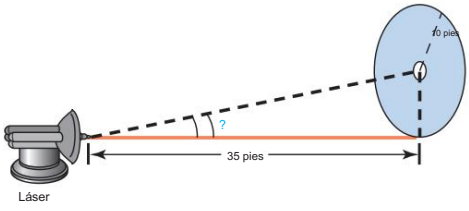
52. Calcular la distancia de un barco a la costa Una persona en un bote pequeño, frente a la costa desde un acantilado vertical que se sabe que tiene 100 pies de altura, observa la cima del acantilado.
Si se encuentra que el ángulo de elevación es de 25°, ¿a qué distancia de la costa se encuentra el barco?

53. Calcular la distancia a una meseta Supongamos que te diriges hacia una meseta de 50 metros de altura. Si el ángulo de elevación hasta la cima de la meseta es de 20°, ¿a qué distancia estás de la base de la meseta?

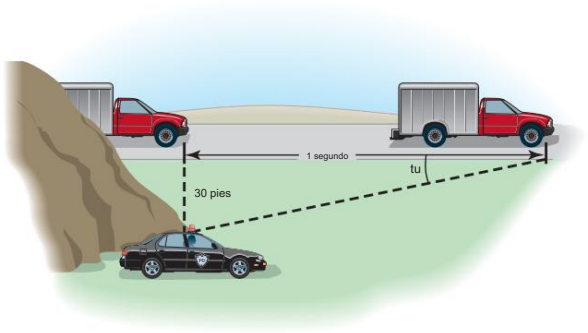
54. Calcular el alcance de una escalera Una escalera extensible de 22 pies apoyada contra un edificio forma un ángulo de 70° con el suelo.
¿A qué altura del edificio toca la escalera?

55. Calcular el ángulo de elevación del sol A las 10 a. m. del 26 de abril de 2019, un edificio de 300 pies de altura proyectó una sombra de 50 pies de largo. ¿Cuál era el ángulo de elevación del Sol?

56. Dirigir un rayo láser Se debe dirigir un rayo láser a través de un pequeño orificio en el centro de un círculo de 10 pies de radio. El origen del rayo está a 35 pies del círculo (ver la figura). ¿A qué ángulo de elevación se debe apuntar el haz para asegurar que pase a través del agujero?



57. Calcular la velocidad de un camión Un policía estatal está escondido a 30 pies de una carretera. Un segundo después de que pasa un camión, se mide el ángulo u entre la carretera y la línea de observación de la patrulla al camión.
Ver la figura.



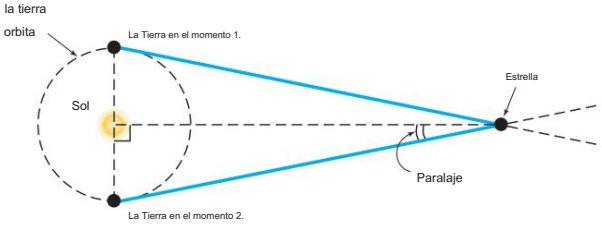
(a) Si el ángulo mide 15°, ¿a qué velocidad viaja el camión?
Exprese la respuesta en pies por segundo y en millas por hora.

(b) Si el ángulo mide 20°, ¿a qué velocidad viaja el camión?
Exprese la respuesta en pies por segundo y en millas por hora.

(c) Si el límite de velocidad es 55 millas por hora y se emite una multa por exceso de velocidad por velocidades de 5 millas por hora o más por encima del límite, ¿para qué ángulos debe emitir una multa el policía?

58. Seguridad Una cámara de seguridad en un banco de barrio está montada en una pared a 9 pies sobre el suelo. ¿Qué ángulo de depresión se debe utilizar si la cámara se va a dirigir a un punto a 6 pies sobre el piso y a 12 pies de la pared?

59. Paralaje Un método para medir la distancia de la Tierra a una estrella es el método de paralaje. La idea detrás de calcular esta distancia es medir el ángulo formado entre la Tierra y la estrella en dos momentos diferentes en el tiempo. Normalmente, las medidas se toman de modo que el lado opuesto al ángulo sea lo más grande posible. Por lo tanto, el enfoque óptimo es medir el ángulo cuando la Tierra está en lados opuestos del Sol, como se muestra en la figura.



(a) Proxima Centauri está a 4,22 años luz de la Tierra. Si 1 año luz equivale aproximadamente a 5,9 billones de millas, ¿a cuántas millas está Próxima Centauri de la Tierra?

(b) La distancia media de la Tierra al Sol es 93.000.000 millas. ¿Cuál es el paralaje de Próxima Centauri?

Machine Translated by Google

60. Paralaje Véase el problema 59. La estrella 61 Cygni, a veces llamada estrella de Bessel (en honor a Friedrich Bessel, quien midió la distancia entre la Tierra y la estrella en 1838), es una estrella en la constelación de Cygnus.

(a) 61 Cygni está a 11,14 años luz de la Tierra. Si 1 año luz equivale aproximadamente a 5,9 billones de millas, ¿cuántas millas hay a 61 Cygni de la Tierra?

(b) La distancia media de la Tierra al Sol es 93.000.000 millas. ¿Cuál es el paralaje de 61 Cygni?

61. Monumento a Washington El ángulo de elevación del Sol es de 35,1° en el instante en que la sombra proyectada por el Monumento a Washington mide 789 pies de largo. Utilice esta información para calcular la altura del monumento.

62. Calcular la longitud de un sendero de montaña Un sendero recto con una inclinación de 17° conduce desde un hotel a una altura de 9000 pies hasta un lago de montaña a una altura de 11,200 pies.
¿Cuál es la longitud del sendero?

63. Encontrar el rumbo de una aeronave Un avión DC-9 sale del aeropuerto Midway desde la pista 4 DERECHA, cuyo rumbo es 1

N40°E. Después de volar una milla, el piloto solicita permiso 2

para girar 90° y dirigirse hacia el sureste. Se concede el permiso. Después de que el avión recorre 1 milla en esta dirección, ¿qué rumbo debe utilizar la torre de control para localizar el avión?

64. Calcular el rumbo de un barco Un barco sale del puerto de Miami con un rumbo de S80°E y una velocidad de 15 nudos. Después de 1 hora, el barco gira 90° hacia el sur. Después de 2 horas, manteniendo la misma velocidad, ¿cuál es el rumbo del barco desde el puerto?

65. Ferrocarril inclinado de las cataratas del Niágara Situado entre Portage Road y Niagara Parkway, justo enfrente de las cataratas canadienses Horseshoe, el ferrocarril inclinado de las cataratas es un funicular que lleva a los pasajeros por un terraplén hasta el punto de observación de Table Rock. Si la longitud de la vía es de 51,8 metros y el ángulo de inclinación es de 36°2′ , determine la altura del terraplén.

Fuente: www.niagaraparks.com

66. Willis Tower Willis Tower en Chicago es el segundo edificio más alto de Estados Unidos y está coronado por una alta antena.
Un topógrafo en el terreno toma las siguientes medidas:

1. El ángulo de elevación desde su posición hasta la cima del edificio es de 34°.
2. La distancia desde su posición hasta la cima del edificio es 2595 pies.
3. La distancia desde su posición hasta la parte superior de la antena es 2760 pies.

(a) ¿A qué distancia de la (base del) edificio está el topógrafo?

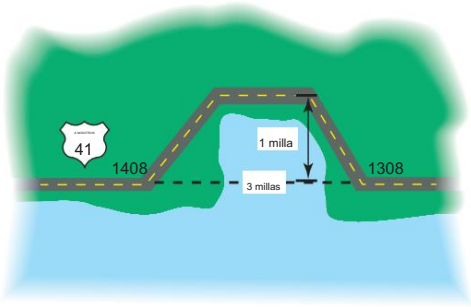
(b) ¿Qué altura tiene el edificio?

(c) ¿Cuál es el ángulo de elevación desde el topógrafo hasta la parte superior de la antena?

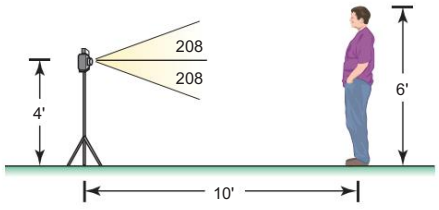
(d) ¿Qué altura tiene la antena?

Fuente: Consejo de Edificios Altos y Hábitat Urbano

67. Construcción de una carretera Se está construyendo una carretera cuyas direcciones principales son norte-sur a lo largo de la costa oeste de Florida. Cerca de Nápoles, una bahía obstruye el rumbo recto de la carretera. Como el coste de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden rodear la bahía. La figura muestra el camino que deciden y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud de la carretera necesaria para rodear la bahía?

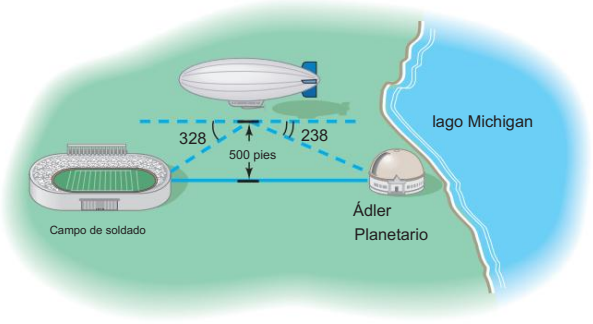


68. Fotografía Una cámara está montada en un trípode de 4 pies de altura a una distancia de 10 pies de George, que mide 6 pies de altura. Ver la figura. Si la lente de la cámara tiene ángulos de depresión y elevación de 20°, ¿la lente verá los pies y la cabeza de George? Si no, ¿a qué distancia será necesario mover la cámara para incluir los pies y la cabeza de George?



69. Calcular la distancia entre dos objetos Un dirigible, suspendido en el aire a una altura de 500 pies, se encuentra directamente sobre una línea que va desde Soldier Field hasta el Planetario Adler en Lake

Michigan (ver la figura). Si el ángulo de depresión del dirigible al estadio es de 32° y del dirigible al planetario es de 23°, encuentre la distancia entre Soldier Field y el Planetario Adler.

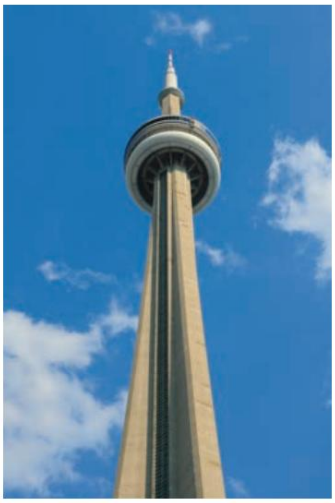


70. Globo aerostático Mientras da un paseo en globo aerostático en el Valle de Napa, Francisco se pregunta qué tan alto está. Para averiguarlo, elige un punto de referencia que está al este del globo y mide el ángulo de depresión en 54°.
Unos minutos más tarde, después de viajar 100 pies hacia el este, se determina que el ángulo de depresión hacia el mismo punto de referencia es de 61°. Utilice esta información para determinar la altura del globo.

Machine Translated by Google

71. Monte Rushmore Para medir la altura de la caricatura de Lincoln en el Monte Rushmore, se toman dos avistamientos a 800 pies de la base de la montaña. Si el ángulo de elevación hacia la parte inferior de la cara de Lincoln es de 32° y el ángulo de elevación hacia la parte superior es de 35°, ¿cuál es la altura de la cara de Lincoln?

72. La Torre CN La Torre CN, ubicada en Toronto, Canadá, es la estructura más alta de América. Mientras visitaba Toronto, un turista se preguntó cuál es la altura de la torre sobre la cima del Sky Pod. Mientras estaba a 4000 pies de la torre, midió que el ángulo con la parte superior del Sky Pod era de 20,1°. A esta misma distancia, se encontró que el ángulo de elevación hasta la cima de la torre era de 24,4°. Utilice esta información para determinar la altura de la torre sobre el Sky Pod.

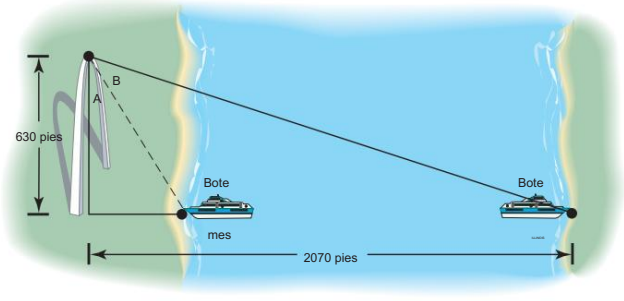


73. Rascacielos de Chicago El ángulo de inclinación desde la base del Centro John Hancock hasta la cima de la estructura principal de la Torre Willis es de aproximadamente 10,3°. Si la estructura principal de la Torre Willis mide 1451 pies de altura, ¿a qué distancia están los dos rascacielos? Suponga que las bases de los dos edificios están a la misma altura.

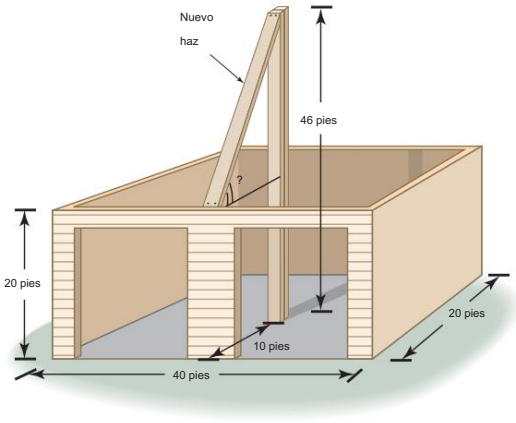
Fuente: www.emporis.com

74. Estimación del ancho del río Mississippi Un turista en la cima del Arco Gateway (altura, 630 pies) en St. Louis, Missouri, observa un barco amarrado en el lado de Illinois del río Mississippi, a 2070 pies directamente frente al Arco. .
También observa un barco amarrado en el lado de Missouri, directamente frente al primer barco (ver figura). Dado que
$B = \cot^{-1}\frac{67}{55}$, estima el ancho del río Mississippi en la orilla del río St. Louis.

Fuente: Cuerpo de Ingenieros del Ejército de EE. UU.

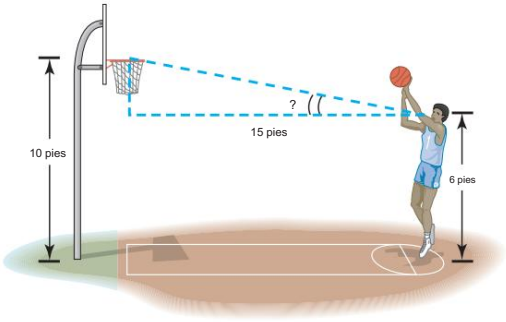


75. Encontrar la inclinación de un techo Un carpintero se está preparando para poner un techo en un garaje que mide 20 pies por 40 pies por 20 pies. En el centro del garaje se coloca una viga de soporte de acero de 38 pies de largo. Para soportar el techo, se colocará otra viga en la parte superior de la viga central (consulte la figura).
¿A qué ángulo de elevación se encuentra el nuevo haz? En otras palabras, ¿cuál es la pendiente del techo?



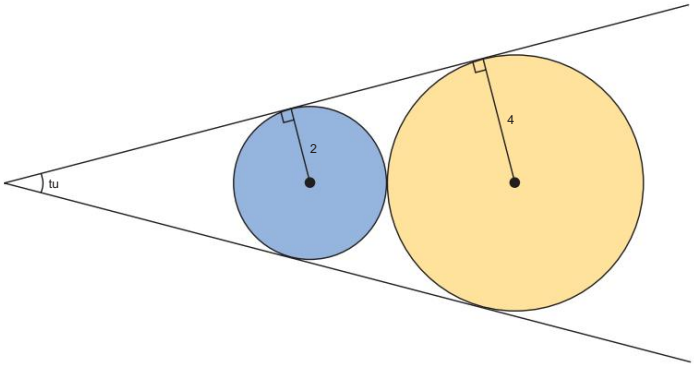
76. Lanzar tiros libres en baloncesto Los ojos de un jugador de baloncesto están a 6 pies del suelo. El jugador está en la línea de tiro libre, que está a 15 pies del centro del aro de la canasta (ver figura). ¿Cuál es el ángulo de elevación desde los ojos del jugador hasta el centro del aro?

[Pista: el borde está a 10 pies del suelo.]



77. Geometría Encuentra el valor del ángulo u en grados redondeados.

a la décima de grado más cercana.



Machine Translated by Google

78. Satélites de vigilancia Un satélite de vigilancia gira alrededor de la Tierra a una altura de h millas sobre la superficie. Supongamos que d es la distancia, en millas, sobre la superficie de la Tierra que se puede observar desde el satélite. Ver la figura.

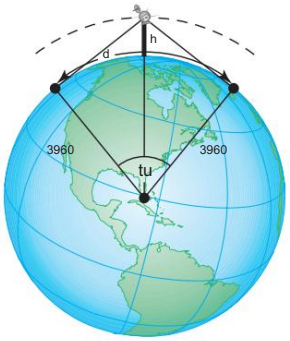
(a) Encuentre una ecuación que relacione el ángulo central u con el altura h.

(b) Encuentre una ecuación que relacione la distancia observable d y tú.

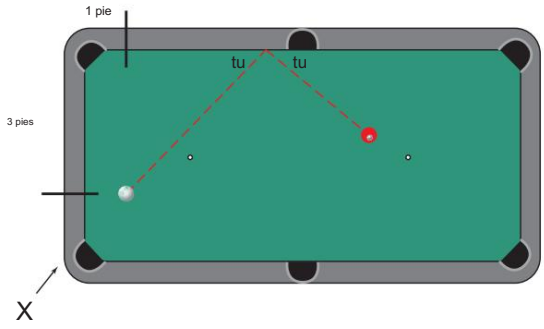
(c) Encuentre una ecuación que relacione d y h.

(d) Si d debe ser 2500 millas, ¿a qué altura debe orbitar el satélite sobre la Tierra?

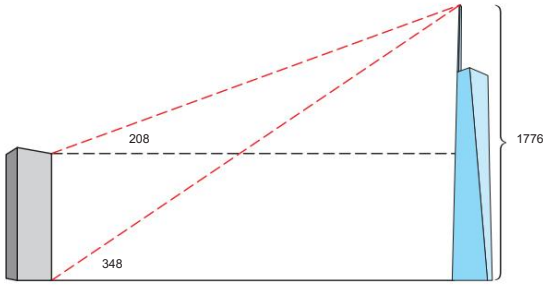
(e) Si el satélite orbita a una altura de 300 millas, ¿qué distancia d en la superficie se puede observar?



79. Calcular tiros de billar Un jugador de billar ubicado en X quiere disparar la bola blanca desde la banda superior y golpear la bola roja en el centro. Sabe por la física que la bola blanca saldrá de una banda en el mismo ángulo en el que golpeó la banda. Si el ángulo de deflexión, u, es de 52°, ¿en qué parte de la banda superior debería golpear la bola blanca?



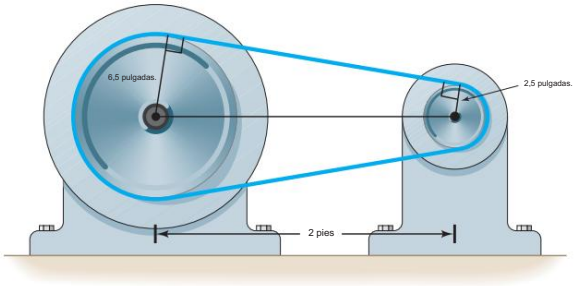
80. One World Trade Center El One World Trade Center (1WTC) es la pieza central de la reconstrucción del World Trade Center en la ciudad de Nueva York. La torre mide 1776 pies de altura (incluida su aguja). El ángulo de elevación desde la base de una oficina. edificio hasta la punta de la aguja es de 34°. El ángulo de elevación desde el helipuerto en el techo del edificio de oficinas hasta la punta de la aguja es de 20°.



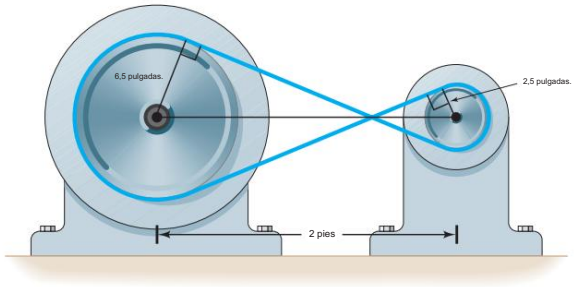
(a) ¿A qué distancia está el edificio de oficinas del One World Trade Center? Suponga que el lado de la torre es vertical.
Redondea al pie más cercano.

(b) ¿Qué altura tiene el edificio de oficinas? Redondear al más cercano pie.

81. Desafío Problema Rueda motriz de un motor La rueda motriz de un motor tiene 13 pulgadas de diámetro y la polea de la bomba rotativa tiene 5 pulgadas de diámetro. Si los ejes de la rueda motriz y la polea están separados 2 pies, ¿qué longitud de correa se requiere para unirlos como se muestra en la figura?



82. Problema de desafío Reelaboración del problema 81 si la correa está cruzada, como se muestra en la figura.



Explicar conceptos: discusión y escritura

83. Explica cómo medirías el ancho del Grand Cañón desde un punto de su cresta.

84. Explica cómo medirías la altura de una torre de televisión que está en el techo de un edificio alto.

85. Faro de Gibb's Hill, Southampton, Bermuda En funcionamiento desde 1846, el faro de Gibb's Hill se alza 117 pies de altura sobre una colina de 245 pies de altura, por lo que su haz de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que los barcos que se encuentran a 40 millas de distancia pueden ver la luz y los aviones que vuelan a 10.000 pies pueden verla a 120 millas de distancia. Verifique la exactitud de estas declaraciones. ¿Qué suposición hacía el folleto sobre la altura del barco?

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 86 a 95 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

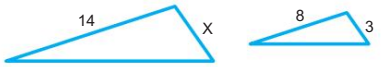
86. Determina si x - 3 es factor de x4 + 2x3 - 21x2 + 19x - 3.

87. Encuentra el valor exacto del pecado $\frac{\text{pag}}{12}$.

88. Si f1x2 = 2x, encuentre $\frac{f1x2 - f142}{x - 4}$, para x = 5, 4,5 y 4,1. Redondea los resultados a tres decimales.

89. Resuelve 2 sen2 u - sen u + 5 = 6 para 0 … u 6 2p.

90. Si los dos triángulos que se muestran son similares, encuentre x.



91. Si una función polinómica de cuarto grado con coeficientes reales tiene ceros de 2, 7 y 3 - 25, ¿cuál es el cero restante?

92. Simplifica $\frac{1e2x - 12^{2} + 12ex\,2^{2}}{1e2x + 12^{2}}$.

93. ¿Cuál es el resto cuando P1x2 = 2x4 - 3x3 - x + 7? se divide por x + 2?

94. Escribe la ecuación de un círculo con radio r = 25 y centro 1 - 4, 02 en estándar de.

95. Encuentra el dominio de g1x2 = 3· x2 - 1· - 5.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 4 2. 26,6° 3. 30°

8.2 La ley de los senos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Ecuaciones trigonométricas (Sección 7.3, págs. 505–510)
- Fórmula de diferencia para la función seno (Sección 7.5, p. 526)
- Conceptos básicos de geometría (Sección A.2, págs. A14–A19)
- Aproximar el valor de una función trigonométrica (Sección 6.2, p. 421)
- Aproximación del valor de una función trigonométrica inversa (Sección 7.2, págs. 500 y 501)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 578.

OBJETIVOS 1 Resolver triángulos SAA o ASA (p. 572)
2 Resolver triángulos SSA (p. 573)
3 Resolver problemas aplicados (p. 575)

Si ninguno de los ángulos de un triángulo es recto, el triángulo se llama oblicuo. Un triángulo oblicuo tendrá tres ángulos agudos o dos ángulos agudos y un ángulo obtuso (un ángulo que mide entre 90° y 180°). Ver Figura 18.

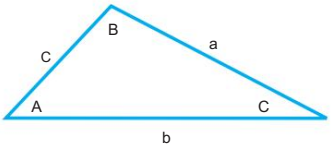


Figura 19 Triángulo oblicuo

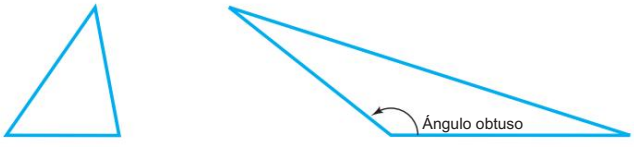


Figura 18 (a) Todos los ángulos son agudos (b) Dos ángulos agudos y un ángulo obtuso

En la discusión que sigue, un triángulo oblicuo siempre se etiqueta de modo que el lado a sea el ángulo opuesto A, el lado b sea el ángulo opuesto B y el lado c sea el ángulo opuesto C, como se muestra en la Figura 19.

Machine Translated by Google

ADVERTENCIA Los triángulos oblicuos no se pueden resolver utilizando los métodos de la Sección 8.1. ¿Sabes por qué?

Resolver un triángulo oblicuo significa encontrar las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos. Para hacer esto, necesitamos saber la longitud de un lado*, junto con (i) dos ángulos, (ii) un ángulo y otro lado, o (iii) los otros dos lados. Hay cuatro posibilidades a considerar.

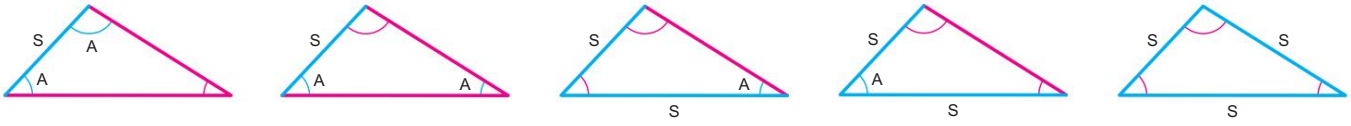
Caso 1: Se conocen un lado y dos ángulos (ASA o SAA).

Caso 2: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (SSA).

Caso 3: Se conocen dos lados y el ángulo incluido (SAS).

Caso 4: Se conocen tres lados (SSS).

La Figura 20 ilustra los cuatro casos, donde las medidas conocidas se muestran en azul.



Caso 1: ASA | Caso 1: AEA | Caso 2: ASS | Caso 3: SAS | Caso 4: SSS

Figura 20

La ley de los senos se utiliza para resolver triángulos para los cuales se cumple el caso 1 o 2. Casos 3 y 4 se consideran cuando estudiamos la ley de los cosenos en la siguiente sección.

TEOREMA Ley de los senos

Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C, respectivamente,

$$\frac{\text{pecado } A}{a} = \frac{\text{pecado } b}{b} = \frac{\text{pecado } C}{C} \qquad (1)$$

Al final de esta sección se ofrece una prueba de la Ley de los Senos.

La Ley de los Senos en realidad consta de tres igualdades:

$$\frac{\text{pecado } A}{a} = \frac{\text{pecado } b}{b} \qquad \frac{\text{pecado } A}{a} = \frac{\text{pecado } C}{C} \qquad \frac{\text{pecado } b}{b} = \frac{\text{pecado } C}{C}$$

La fórmula (1) es una forma compacta de escribir estas tres ecuaciones.

Normalmente, para resolver triángulos con la Ley de los Senos, utilizamos el hecho de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180°; eso es,

$$A + B + C = 180° \qquad (2)$$

1 Resolver triángulos SAA o ASA

Los primeros dos ejemplos muestran cómo resolver un triángulo cuando se conocen un lado y dos ángulos (Caso 1: SAA o ASA).

EJEMPLO 1 Usando la ley de los senos para resolver un triángulo SAA

Resuelve el triángulo: A = 40°, B = 60°, a = 4

Solución La Figura 21 muestra el triángulo a resolver. El tercer ángulo C se encuentra usando la fórmula (2).

$$A + B + C = 180°$$
$$40° + 60° + C = 180°$$
$$C = 80°$$

* Se debe conocer la longitud de un lado porque conociendo solo los ángulos se obtiene una familia de triángulos semejantes.

Machine Translated by Google

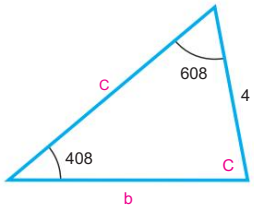


Figura 21

NOTA Aunque no es una verificación completa, la razonabilidad de las respuestas se puede verificar determinando si el lado más largo está opuesto al ángulo más grande y el lado más corto está opuesto al ángulo más pequeño.

Ahora usa la Ley de los senos (dos veces) para encontrar los lados desconocidos b y c.

$$\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado b}}{b} \qquad \frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado C}}{C}$$

Como a = 4, A = 40°, B = 60° y C = 80°, tenemos

$$\frac{\text{pecado } 40^\circ}{4} = \frac{\text{pecado } 60^\circ}{b} \qquad \frac{\text{pecado } 40^\circ}{4} = \frac{\text{pecado } 80^\circ}{C}$$

Resolviendo para b y c se obtiene

$$b = \frac{4 \text{ pecado } 60^\circ}{\text{pecado } 40^\circ} \approx 5{,}39 \qquad c = \frac{4 \text{ pecado } 80^\circ}{\text{pecado } 40^\circ} \approx 6{,}13$$

Observe en el ejemplo 1 que b y c se encuentran trabajando con el lado dado a. Este es mejor que encontrar b primero y trabajar con un valor redondeado de b para encontrar c.

Ahora problema de trabajo 1 1

EJEMPLO 2 Usando la ley de los senos para resolver un triángulo ASA

Resuelve el triángulo: A = 35°, B = 15°, c = 5

Solución

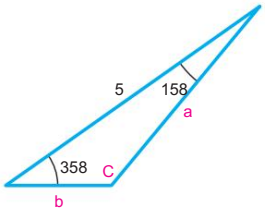


Figura 22

La Figura 22 ilustra el triángulo a resolver. Se conocen dos ángulos (A = 35° y B = 15°). Encuentra el tercer ángulo usando la fórmula (2):

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$35^\circ + 15^\circ + C = 180^\circ$$

$$C = 130^\circ$$

Ahora se conocen los tres ángulos y un lado 1c = 52 del triángulo. Para encontrar los dos lados restantes a y b, usa la Ley de los senos (dos veces).

$$\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado C}}{C} \qquad \frac{\text{pecado b}}{b} = \frac{\text{pecado C}}{C}$$

$$\frac{\text{pecado } 35^\circ}{a} = \frac{\text{pecado } 130^\circ}{5} \qquad \frac{\text{pecado } 15^\circ}{b} = \frac{\text{pecado } 130^\circ}{5}$$

$$un = \frac{5 \text{ pecado } 35^\circ}{\text{pecado } 130^\circ} \approx 3{,}74 \qquad \text{segundo} = \frac{5 \text{ pecado } 15^\circ}{\text{pecado } 130^\circ} \approx 1{,}69$$

Ahora resuelve el problema 2 5

2 Resolver triángulos SSA

El caso 2 (SSA), que describe triángulos de los cuales se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se denomina caso ambiguo, porque la información conocida puede dar como resultado un triángulo, dos triángulos o ningún triángulo. Supongamos que se dan los lados a y b y el ángulo A , como se ilustra en la Figura 23. La clave para determinar cuántos triángulos, si es que se pueden formar alguno, se pueden formar a partir de la información dada reside principalmente en el tamaño relativo del lado a, la altura h, y el hecho de que h = b sen A.

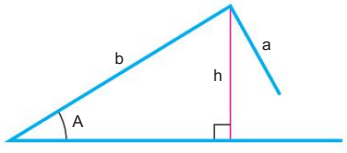


Figura 23 h = b sen A

No hay triángulo Si a 6 h = b sen A, entonces el lado a no es lo suficientemente largo para formar un triángulo. Ver Figura 24.

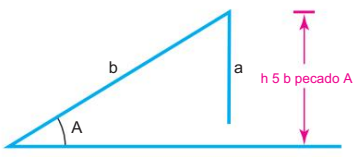


Figura 24 a 6 h = b sen A

Un triángulo rectángulo Si a = h = b sen A, entonces el lado a es lo suficientemente largo para formar un triángulo rectángulo. Ver Figura 25.

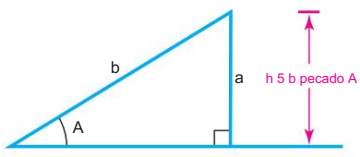


Figura 25 a = h = b sen A

Machine Translated by Google

Dos triángulos Si h = b sen A 6 a y a 6 b, entonces se pueden formar dos triángulos distintos a partir de la información dada. Ver Figura 26.

Un Triángulo Si a Ú b, sólo se puede formar un triángulo. Ver Figura 27.

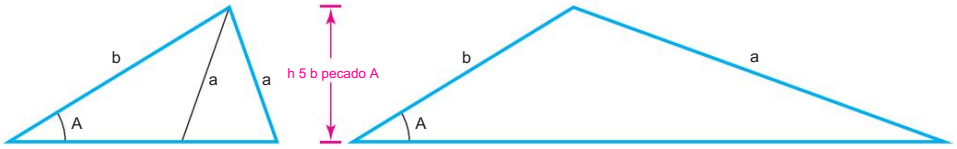


Figura 26 b sen A 6 a y a 6 b

Figura 27 a Ú b

Afortunadamente, no es necesario basarse en una cifra o en relaciones complicadas para sacar la conclusión correcta en un caso ambiguo. La Ley de los Senos nos lleva a la correcta determinación. Veamos cómo.

EJEMPLO 3 Usando la ley de los senos para resolver un triángulo SSA (sin solución)

Resuelve el triángulo: a = 2, c = 1, C = 50°

Solución

Como se conocen a = 2, c = 1 y C = 50°, usa la ley de los senos para encontrar el ángulo A.

$$\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado C}}{C}$$

$$\frac{\text{pecado A}}{2} = \frac{\text{pecado } 50^\circ}{1}$$

$$\text{sen A} = 2 \text{ sen } 50^\circ \approx 1{,}53$$

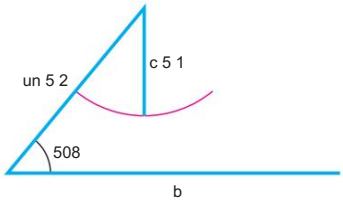


Figura 28

Como no existe ningún ángulo A para el cual sen A 7 1, no existe ningún triángulo con las medidas dadas. La Figura 28 ilustra las medidas dadas. Tenga en cuenta que no importa cómo esté colocado el lado c , nunca tocará el lado b para formar un triángulo.

EJEMPLO 4 Usando la ley de los senos para resolver un triángulo SSA (una solución)

Resuelve el triángulo: a = 3, b = 2, A = 40°

Solución

Ver Figura 29(a). Como se conocen a = 3, b = 2 y A = 40°, usa la ley de los senos para encontrar el ángulo B.

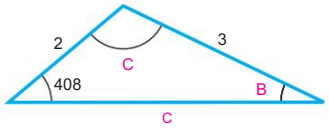


Figura 29(a)

$$\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado b}}{b}$$

Entonces

$$\frac{\text{pecado } 40^\circ}{3} = \frac{\text{pecado b}}{2}$$

$$\text{pecado B} = \frac{2 \text{ pecado } 40^\circ}{3} \approx 0{,}43$$

Hay dos ángulos B, 0° 6 B 6 180°, para los cuales sen B ≈ 0,43.

$$B1 \approx 25{,}4^\circ \text{ y } B2 \approx 180^\circ - 25{,}4^\circ = 154{,}6^\circ$$

El ángulo B2 ≈ 154,6° se descarta porque la suma de los ángulos de un triángulo debe igual a 180°, pero A + B2 ≈ 40° + 154,6° = 194,6° 7 180°. Usando B1 ≈ 25,4° se obtiene

$$C = 180^\circ - A - B1 \approx 180^\circ - 40^\circ - 25{,}4^\circ = 114{,}6^\circ$$

NOTA El ángulo B1 fue determinado por encontrar el valor de sen-1 a 2 sen 40° 3b. Usar el valor redondeado y evaluar sen-1 10,432 producirá un resultado ligeramente diferente.

Machine Translated by Google

El tercer lado c ahora se puede determinar usando la Ley de los Senos.

$$\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado C}}{C}$$

$$\frac{\text{pecado } 40^\circ}{3} = \frac{\text{pecado } 114{,}6^\circ}{C}$$

$$c = \frac{3 \text{ pecado } 114{,}6^\circ}{\text{pecado } 40^\circ} \approx 4{,}24$$

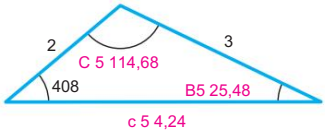


Figura 29(b)

La Figura 29(b) ilustra el triángulo resuelto.

EJEMPLO 5 Usando la ley de los senos para resolver un triángulo SSA (dos soluciones)

Resuelve el triángulo: a = 6, b = 8, A = 35°

Solución

Como se conocen a = 6, b = 8 y A = 35°, usa la ley de los senos para encontrar el ángulo B.

$$\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado b}}{b}$$

Entonces

$$\frac{\text{pecado } 35^\circ}{6} = \frac{\text{pecado b}}{8}$$

$$\text{pecado B} = \frac{8 \text{ pecado } 35^\circ}{6} \approx 0{,}76$$

$$B1 \approx 49{,}9^\circ \text{ o } B2 \approx 180^\circ - 49{,}9^\circ = 130{,}1^\circ$$

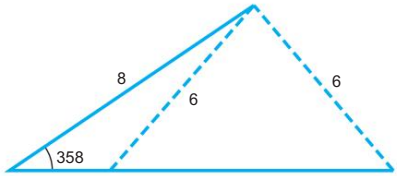


Figura 30(a)

Ambas opciones de B dan como resultado A + B 6 180°. Hay dos triángulos, uno que contiene el ángulo B1 ≈ 49,9° y el otro que contiene el ángulo B2 ≈ 130,1°. Ver Figura 30(a).

El tercer ángulo C es

$$C1 = 180^\circ - A - B1 \approx 95{,}1^\circ \text{ o } C2 = 180^\circ - A - B2 \approx 14{,}9^\circ$$

C
A · 35°; B1 · 49,9°

C
A · 35°; B2 · 130,1°

Ahora, usa la ley de los senos para encontrar el tercer lado c.

$$\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado C1}}{c1} \qquad \frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado C2}}{c2}$$

$$\frac{\text{pecado } 35^\circ}{6} = \frac{\text{pecado } 95.1^\circ}{c1} \qquad \frac{\text{pecado } 35^\circ}{6} = \frac{\text{pecado } 14.9^\circ}{c2}$$

$$c1 = \frac{6 \text{ pecado } 95{,}1^\circ}{\text{sen } 35^\circ} \approx 10{,}42 \qquad c2 = \frac{6 \text{ pecado } 14{,}9^\circ}{\text{pecado } 35^\circ} \approx 2{,}69$$

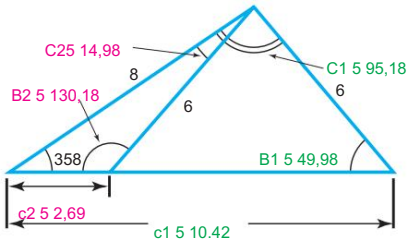


Figura 30(b)

Los dos triángulos resueltos se ilustran en la Figura 30(b).

Ahora resuelve los problemas 2 7 y 3 3

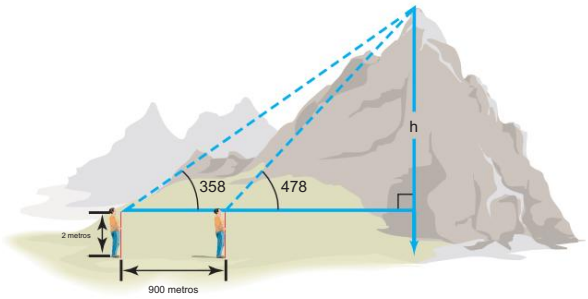
3 resolver problemas aplicados

EJEMPLO 6 Encontrar la altura de una montaña

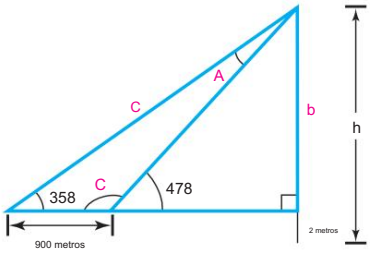
Para medir la altura de una montaña, un topógrafo toma dos avistamientos del pico a una distancia de 900 metros en línea directa con la montaña.* Consulte la Figura 31(a) en la página siguiente. La primera observación da como resultado un ángulo de elevación de 47° y la segunda da como resultado un ángulo de elevación de 35°. Si el tránsito tiene 2 metros de altura, ¿cuál es la altura h de la montaña?

*Para simplificar, supongamos que estos avistamientos están al mismo nivel.

Machine Translated by Google



(a)



(b)

Figura 31

Solución La Figura 31(b) muestra los triángulos que modelan la situación en la Figura 31(a). Dado que C + 47° = 180°, esto significa que C = 133°. Además, dado que A + C + 35° = 180°, esto significa que A = 180° - 35° - C = 145° - 133° = 12°. Usa la ley de los senos para encontrar c.

$$\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado C}}{C} \qquad \text{La} \cdot 12°, \text{C} \cdot 133°, \text{una} \cdot 900$$

$$c = \frac{900 \text{ sen } 133°}{\text{pecado } 12°} \approx 3165{,}86$$

Usando el triángulo rectángulo más grande se obtiene

$$\text{pecado } 35° = \frac{b}{C}$$

$$b = 3165{,}86 \text{ sen } 35° \approx 1815{,}86 \approx 1816 \text{ metros}$$

La altura del pico desde el nivel del suelo es de aproximadamente 1816 + 2 = 1818 metros.

Ahora resuelve el problema 3 9

EJEMPLO 7 Rescate en el mar

La estación de la Guardia Costera Zulu está ubicada a 120 millas al oeste de la estación de rayos X. Un barco en el mar envía una llamada SOS que es recibida por cada estación. La llamada a la estación Zulu indica que el rumbo del barco procedente de Zulu es N40°E (40° al este del norte). La llamada a la estación de rayos X indica que el rumbo del barco desde los rayos X es N30°W (30° al oeste del norte).

(a) ¿A qué distancia está cada estación del barco?

(b) Si se envía un helicóptero capaz de volar a 200 millas por hora desde la estación más cercana al barco, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al barco?

Solución (a) La Figura 32 ilustra la situación. Se encuentra que el ángulo C es

$$C = 180° - 50° - 60° = 70°$$

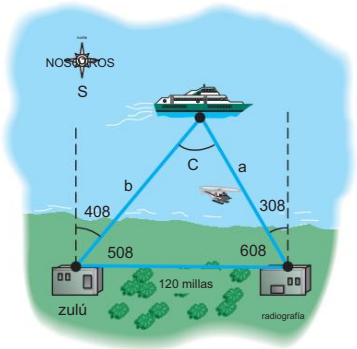


Figura 32

Ahora se puede utilizar la ley de los senos para encontrar las dos distancias a y b necesarias.

$$\frac{\text{pecado } 50°}{a} = \frac{\text{pecado } 70°}{120}$$

$$un = \frac{120 \text{ sen } 50°}{\text{pecado } 70°} \approx 97{,}82 \text{ millas}$$

$$\frac{\text{pecado } 60°}{b} = \frac{\text{pecado } 70°}{120}$$

$$\text{segundo} = \frac{120 \text{ sen } 60°}{\text{pecado } 70°} \approx 110{,}59 \text{ millas}$$

La estación Zulu está a unas 111 millas del barco y la estación de rayos X está a unas 98 millas del barco.

Machine Translated by Google

(b) El tiempo t necesario para que el helicóptero llegue al barco desde la estación de rayos X se encuentra utilizando la fórmula

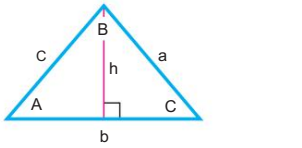
1Velocidad, r2 1Tiempo, t2 = Distancia, a

Entonces

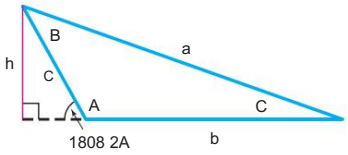
$$t = \frac{a}{r} = \frac{97,82}{200} \approx 0,49 \text{ horas} \approx 29 \text{ minutos}$$

El helicóptero tardará unos 29 minutos en llegar al barco.

Ahora problema de trabajo 4 9



(a)



(b)

Figura 33

Prueba de la ley de los senos Para probar la ley de los senos, construya una altura de longitud h a partir de uno de los vértices de un triángulo. La Figura 33(a) muestra h para un triángulo con tres ángulos agudos y la Figura 33(b) muestra h para un triángulo con un ángulo obtuso. En cada caso, la altitud se extrae del vértice en B. Usando cualquiera de las figuras

$$\text{pecado } C = \frac{h}{a}$$

a partir del cual

$$h = \text{un pecado } C \tag{3}$$

De la Figura 33(a), también se deduce que

$$\text{pecado } A = \frac{h}{C}$$

a partir del cual

$$h = c \text{ sen } A \tag{4}$$

De la Figura 33(b), se deduce que

$$\text{sen}1180° - A2 = \text{sen } A = \frac{h}{C}$$

sen 1180° · A2 · sen 180° cos A · cos 180° sen A · sen A

que de nuevo da

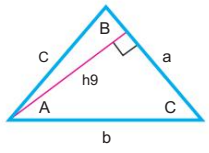
$$h = c \text{ sen } A$$

Entonces, ya sea que el triángulo tenga tres ángulos agudos o tenga dos ángulos agudos y un ángulo obtuso, las ecuaciones (3) y (4) se cumplen. Como resultado, las expresiones para h en las ecuaciones (3) y (4) son iguales. Eso es,

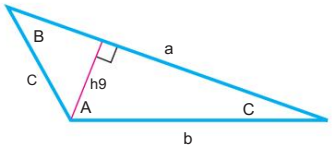
$$a \text{ pecado } C = c \text{ pecado } A$$

a partir del cual

$$\frac{\text{pecado } A}{a} = \frac{\text{pecado } C}{C} \tag{5}$$



(a)



(b)

Figura 34

De manera similar, construir la altitud h′ desde el vértice del ángulo A, como se muestra en la Figura 34, revela que

$$\text{pecado } B = \frac{h'}{C} \quad \text{y pecado } C = \frac{h'}{b}$$

Al equiparar las expresiones para h′ se obtiene

$$h' = c \text{ sen } B = b \text{ sen } C$$

a partir del cual

$$\frac{\text{pecado } b}{b} = \frac{\text{pecado } C}{C} \tag{6}$$

Cuando se combinan las ecuaciones (5) y (6), el resultado es la Ley de los Senos.

■

Machine Translated by Google

8.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La fórmula de diferencia para la función seno es
   pecado1A - B2 = _____ . (pág. 526)

2. Resuelve el pecado A = $\frac{1}{2}$ si 0… A … p. (págs. 505 a 508)

3. Aproximar sen 40° y sen 80°. (pág. 421)

4. Sen-1 aproximado 0,76. Expresa la respuesta en grados. (págs. 500–501)

Conceptos y vocabulario

5. Opción múltiple Si ninguno de los ángulos de un triángulo es recto, el triángulo se llama (a) oblicuo _____ .
   (b) obtuso (c) agudo (d) escaleno

6. Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C, la La ley de senos establece que _____ .

7. Opción múltiple Si dos ángulos de un triángulo miden 48° y 93°, ¿cuál es la medida del tercer ángulo?
   (a) 132° (b) 77° (c) 42° (d) 39°

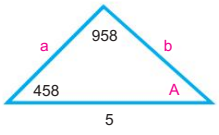
8. Verdadero o Falso Cuando se dan dos lados y un ángulo, se puede formar al menos un triángulo.

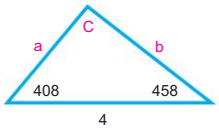
9. Verdadero o Falso La Ley de los Senos se puede utilizar para resolver triángulos donde se conocen tres lados.

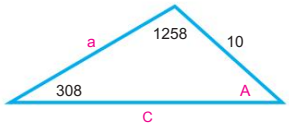
10. Los triángulos cuyos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos son conocidos (SSA) se denominan
    _____ _____ .

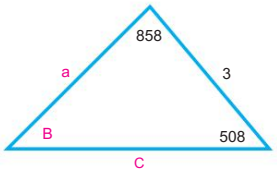
Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 18, resuelve cada triángulo.

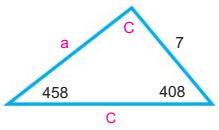
11. 

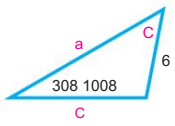
12. 

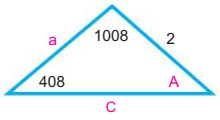
13. 

14. 

15.

dieciséis. 

17. 

18. 

En los problemas 19 a 26, resuelve cada triángulo.

19. A = 50°, C = 20°, a = 3

22. B = 64°, C = 47°, b = 6

25. A = 40°, B = 40°, c = 2

20. A = 55°, B = 25°, a = 4

23. B = 10°, C = 100°, b = 2

26. B = 20°, C = 70°, a = 1

21. A = 70°, B = 60°, c = 4

24. A = 110°, C = 30°, c = 3

En los problemas 27 a 38 se dan dos lados y un ángulo. Determina si la información dada da como resultado un triángulo, dos triángulos o ningún triángulo. Resuelve cualquier triángulo resultante.

27. a = 3, b = 2, A = 50°

30. b = 9, c = 4, B = 115°

33. b = 4, c = 6, B = 20°

36. a = 8, c = 3, C = 125°

28. b = 4, c = 3, B = 40°

31. b = 2, c = 3, B = 40°

34. a = 3, b = 7, A = 70°

37. b = 4, c = 5, B = 40°

29. a = 2, c = 1, A = 120°

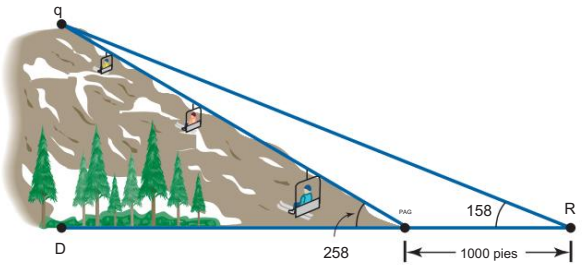
32. a = 7, b = 14, A = 30°

35. b = 4, c = 5, B = 95°

38. a = 7, c = 3, C = 12°

Aplicaciones y extensiones

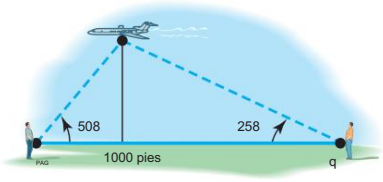
39. Calcular la longitud de un remonte Consulta la figura. Para encontrar la longitud del tramo de un remonte propuesto de P a Q, un topógrafo mide DPQ como 25° y luego retrocede una distancia de 1000 pies hasta R y mide PRQ como 15°.
¿ Cuál es la distancia de P a Q?



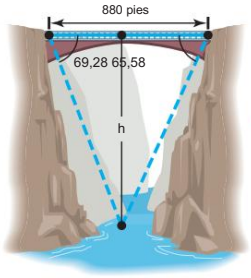
Machine Translated by Google

40. Hallar la altura de una montaña Usa la figura del problema 39 para encontrar la altura QD de la montaña.

41. Calcular la altura de un avión Dos observadores que están a 1000 pies de distancia divisan un avión. A medida que el avión pasa sobre la línea que los une, cada observador observa el ángulo de elevación con respecto al avión, como se indica en la figura.
¿Qué altura tiene el avión?



42. Encontrar la altura del puente sobre Royal Gorge El puente más alto del mundo es el puente sobre Royal Gorge del río Arkansas en Colorado. Los avistamientos del mismo punto al nivel del agua directamente debajo del puente se toman desde cada lado del puente de 880 pies de largo, como se indica en la figura. ¿Qué altura tiene el puente?



Fuente: Libro Guinness de los Récords Mundiales

43. Dimensiones del terreno Un terreno triangular tiene un lado a lo largo de un camino recto que mide 201 pies. Un segundo lado forma un ángulo de 23°. ángulo con la carretera, y el tercer lado forma un ángulo de 22° con la carretera. ¿Cuánto miden los otros dos lados?

44. Distancia entre corredores Dos corredores en una maratón

Determine que los ángulos de elevación de un helicóptero de noticias que cubre la carrera son 38° y 45°. Si el helicóptero está a 1700 pies directamente sobre la línea de meta, ¿a qué distancia están los corredores?

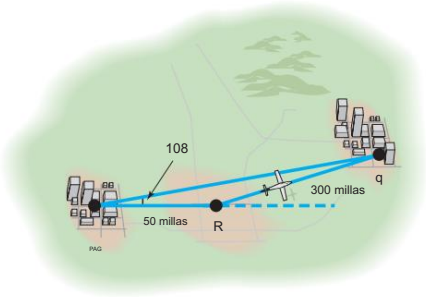
45. Paisajismo Pat necesita determinar la altura de un árbol antes de talarlo para asegurarse de que no caiga sobre una cerca cercana. El ángulo de elevación del árbol desde una posición en un camino plano desde el árbol es de 30°, y desde una segunda posición a 40 pies más lejos a lo largo de este camino es de 20°. ¿Cuál es la altura del árbol?

46. Construcción Una rampa de carga de 10 pies de largo que forma un ángulo de 18° con la horizontal se va a reemplazar por una que forma un ángulo de 12° con la horizontal. ¿Cuánto mide la nueva rampa?

47. Navegación comercial Adam debe volar a su casa en St. Louis desde una reunión de negocios en Oklahoma City. Una opción de vuelo vuela directamente a St. Louis, una distancia de aproximadamente 461,1 millas. Una segunda opción de vuelo vuela primero a Kansas City y luego conecta con St. Louis. La dirección de Oklahoma City a Kansas City es N29,6°E, y la dirección de Oklahoma City a St. Louis es N57,7°E. La dirección de San Luis a Oklahoma City es S57,7°W, y la dirección de San Luis a Kansas City es N79,4°W. ¿Cuántas millas de viajero frecuente más recibirá Adam si toma el vuelo de conexión en lugar del vuelo directo?

Fuente: www.landings.com

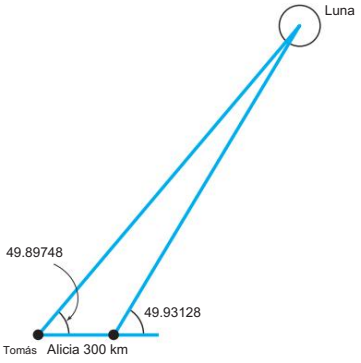
48. Tiempo perdido por un error de navegación Al intentar volar de la ciudad P a la ciudad Q, una aeronave siguió un rumbo con un error de 10°, como se indica en la figura. Después de volar una distancia de 50 millas, el piloto corrigió el rumbo girando en el punto R y volando 300 millas más lejos. Si la velocidad constante del avión era de 250 millas por hora, ¿cuánto tiempo se perdió debido al error?



49. El rescate en la estación Able de la Guardia Costera está ubicada a 150 millas al sur de la estación Baker. Un barco en el mar envía una llamada SOS que es recibida por cada estación. La llamada a la Estación Able indica que el rumbo del barco es N55°E; la llamada a la estación Baker indica que el rumbo del barco es S60°E.
(a) ¿A qué distancia está cada estación del barco?
(b) Si se envía un helicóptero capaz de volar a 200 millas por hora desde la estación más cercana al barco, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al barco?

50. Distancia a la Luna

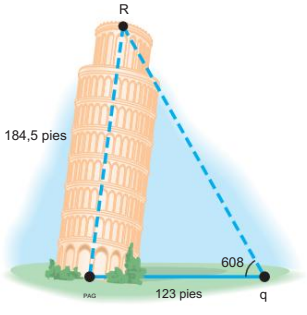
Exactamente al mismo tiempo, Tom y Alice midieron el ángulo de elevación con respecto a la Luna estando exactamente a 300 km de distancia. El ángulo de elevación a la luna para Tom fue de 49,8974°, y el ángulo de elevación a la luna para Alice fue de 49,9312°. Ver la figura.



Redondeado a los 1000 km más cercanos, ¿a qué distancia estaba la Luna de la Tierra cuando se obtuvieron las mediciones?

51. Encontrar la inclinación de la torre inclinada de Pisa
La famosa Torre Inclinada de Pisa tenía originalmente 184,5 pies de altura.* A una distancia de 123 pies de la base de la torre, se encuentra que el ángulo de elevación hasta la cima de la torre es de 60°.

Encuentre RPQ indicado en la figura. Además, encuentre la distancia perpendicular de R a PQ.

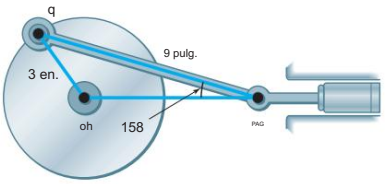


*El 27 de febrero de 1964, el gobierno de Italia solicitó ayuda para evitar el derrumbe de la torre. Se asignó un grupo de trabajo multinacional de ingenieros, matemáticos e historiadores que se reunió en las islas Azores para discutir métodos de estabilización. Después de más de dos décadas de trabajo en el tema, la torre se cerró al público en enero de 1990. Durante el tiempo que la torre estuvo cerrada, se quitaron las campanas para aliviarla de algo de peso y se sujetaron cables alrededor del tercer nivel y anclado a varios cientos de metros de distancia. Los apartamentos y casas en el camino de la torre fueron desalojados por motivos de seguridad. Después de una década de esfuerzos correctivos de reconstrucción y estabilización, la torre fue reabierta al público el 15 de diciembre de 2001.

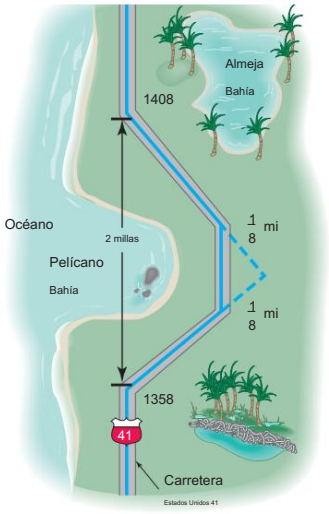
Se propusieron muchos métodos para estabilizar la torre, incluida la adición de 800 toneladas métricas de contrapesos de plomo al extremo elevado de la base. La solución final fue retirar 38 metros cúbicos de tierra debajo del extremo elevado. La torre ha sido declarada estable durante al menos otros 300 años.
Fuente: https://www.history.com/this-day-in-history/leaning-tower-needs-help

Machine Translated by Google

52. Cigüeñales en automóviles En cierto automóvil, el cigüeñal mide 3 pulgadas de largo y la biela mide 9 pulgadas de largo (vea la figura). En el momento en que OPQ es 15°, ¿a qué distancia está el pistón (P) del centro (O) del cigüeñal?



53. Construyendo una carretera La US 41, una carretera cuya dirección principal es norte-sur, se está construyendo a lo largo de la costa oeste de Florida. Cerca Nápoles, una bahía obstruye el recto trazado de la carretera. Como el coste de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden rodear la bahía. En la figura se muestra el camino que deciden y las medidas.



tomado. ¿Cuál es la longitud de la carretera necesaria para rodear la bahía?

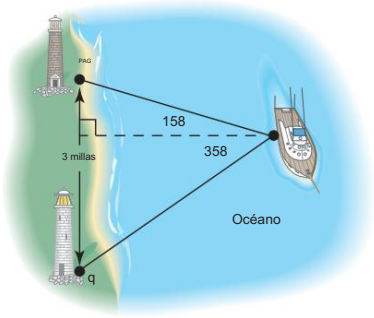
54. Calcular distancias en el mar El navegante de un barco en el mar ve dos faros que sabe que están a 3 millas de distancia a lo largo de una costa recta. Ella determina que los ángulos formados entre dos observaciones de línea de visión de los faros y la línea desde el barco directamente a la costa son 15° y 35°.

Ver la figura.

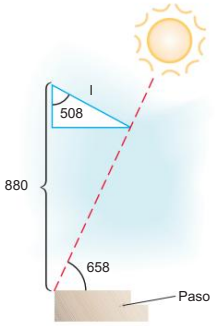
(a) ¿ A qué distancia está el barco del faro P?

(b) ¿ A qué distancia está el barco del faro Q?

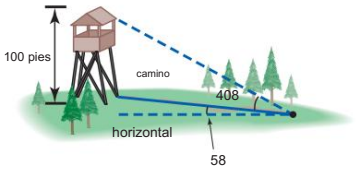
(c) ¿A qué distancia está el barco de la costa?



55. Diseñar un toldo Un toldo que cubre una puerta corrediza de vidrio de 88 pulgadas de alto forma un ángulo de 50° con la pared. La finalidad del toldo es evitar que la luz del sol entre en la casa cuando el ángulo de elevación del Sol es superior a 65°. Ver la figura. Encuentra la longitud L del toldo.



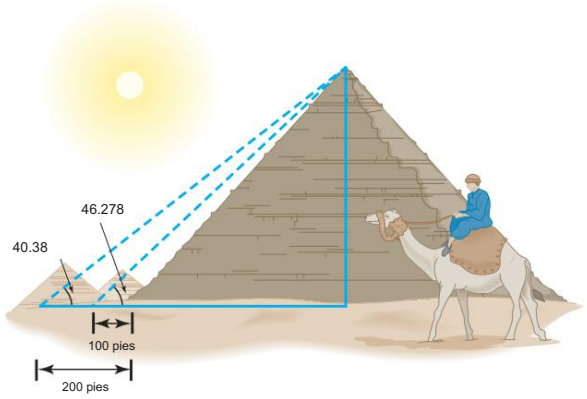
56. Hallar distancias Un guardabosques camina por un sendero inclinado 5° con respecto a la horizontal directamente hacia una torre de observación de incendios de 100 pies de altura. El ángulo de elevación desde el camino hasta la cima de la torre es de 40°. ¿A qué distancia está el guardabosques de la torre en este momento?



57. Gran Pirámide de Keops Una de las Siete Maravillas del Mundo originales, la Gran Pirámide de Keops fue construida alrededor del 2580 a.C. Su altura original era de 480 pies y 11 pulgadas, pero debido a la pérdida de las piedras superiores, ahora es más corto.

Encuentra la altura actual de la Gran Pirámide usando la información proporcionada en la figura.

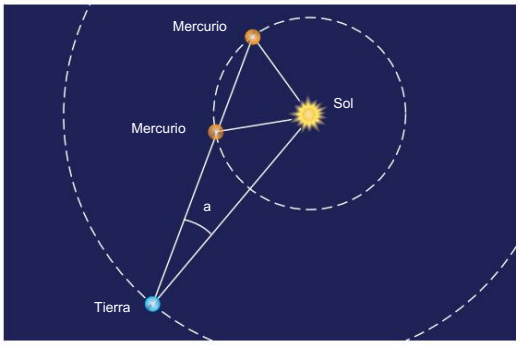
Fuente: Libro Guinness de los Récords Mundiales



58. Determinación de la altura de una aeronave Dos sensores están espaciados a 700 pies a lo largo de la vía de acceso a un aeropuerto pequeño. Cuando una aeronave se acerca al aeropuerto, el ángulo de elevación desde el primer sensor hasta la aeronave es de 20° y desde el segundo sensor hasta la aeronave es de 15°. Determine qué tan alto está el avión en este momento.

59. Mercurio La distancia del Sol a la Tierra es de aproximadamente 149.600.000 kilómetros (km). La distancia del Sol a Mercurio es de aproximadamente 57.910.000 km. El ángulo de elongación a es el ángulo formado entre la línea de visión de la Tierra al Sol y la línea de visión de la Tierra a Mercurio.

Ver la figura. Supongamos que el ángulo de alargamiento de Mercurio es de 15°. Usa esta información para encontrar las distancias posibles entre la Tierra y Mercurio.



Machine Translated by Google

60. Venus La distancia del Sol a la Tierra es de aproximadamente 149.600.000 km. La distancia del Sol a Venus es de aproximadamente 108.200.000 km. El ángulo de elongación a es el ángulo formado entre la línea de visión de la Tierra al Sol y la línea de visión de la Tierra a Venus. Supongamos que el ángulo de alargamiento de Venus es de 10°. Usa esta información para encontrar las distancias posibles entre la Tierra y Venus.

61. La noria original George Washington Gale Ferris, Jr., diseñó la noria original para la Exposición Mundial Colombina de 1893 en Chicago, Illinois.
La rueda tenía 36 vagones equidistantes, cada uno del tamaño de un autobús escolar. La distancia entre autos adyacentes era de aproximadamente 22 pies. Determine el diámetro de la rueda al pie más cercano.

Fuente: Biblioteca Carnegie de Pittsburgh, www.clpgh.org

62. Problema de desafío Fórmula de Mollweide Para cualquier triángulo, la fórmula de Mollweide (llamada así en honor a Karl Mollweide, 1774–1825) establece que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}C}$$

Derivalo.

[Sugerencia: use la ley de los senos y luego una fórmula de suma a producto.] Observe que esta fórmula involucra las seis partes de un triángulo. Como resultado, a veces se utiliza para comprobar la solución de un triángulo.

63. Problema de desafío Fórmula de Mollweide Otra forma de la fórmula de Mollweide es

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C}$$

Derivalo.

64. Problema de desafío Para cualquier triángulo, deriva la fórmula

$$a = b\cos C + c\cos B$$

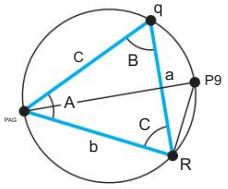
65. Problema de desafío Ley de las tangentes Para cualquier triángulo, deriva la ley de las tangentes:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}$$

66. Problema de desafío que circunscribe un triángulo Demuestre que

$$\frac{\text{pecado } A}{a} = \frac{\text{pecado } b}{b} = \frac{\text{pecado } C}{c} = \frac{1}{2r}$$

Vea la figura donde r es el radio del círculo que circunscribe el triángulo PQR cuyos lados son a, byc, y PP′ = 2r es un diámetro del círculo.



Explicar conceptos: discusión y escritura

67. Inventa tres problemas que involucren triángulos oblicuos. Uno debería resultar en un triángulo, el segundo en dos triángulos y el tercero en ningún triángulo.

68. ¿ Qué haces primero si te piden que resuelvas un triángulo y ¿Se les da un lado y dos ángulos?

69. ¿ Qué haces primero si te piden que resuelvas un triángulo y te dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos?

70. Resuelva el ejemplo 6 usando geometría de triángulo rectángulo. Comenta qué solución, usando la ley de los senos o usando triángulos rectángulos, prefieres. Dar razones.

Conserve su conocimiento

Los problemas 71 a 80 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

71. Resuelve: $3x^3 + 4x^2 - 27x - 36 = 0$

72. Encuentra la distancia exacta entre P1 = 1 - 1, - 72 y P2 = 1 2, - 12. Luego aproxima la distancia a dos decimales.

73. Encuentra el valor exacto de $\tan(c \cos^{-1} a - \frac{7}{8})$.

74. Grafica $y = 4 \operatorname{sen}(a \frac{1}{2}x)$. Mostrar al menos dos períodos.

75. Escribe la ecuación 100 = a0.2x en forma logarítmica.

76. Calcule la tasa de cambio promedio para $g(x) = e^{2x} + 3 \ln x$ en el intervalo 31, 34 . Redondea a tres decimales.

77. Encuentra la asíntota horizontal de

$$h(x) = 4\frac{-3x^2 - 7x + 1}{-9x^2}$$

78. Encuentra una ecuación de la recta perpendicular a $y = -x + 7$ $\frac{2}{3}$ que contiene el punto 1 - 2, - 52.

79. Determina si $h(x) = 5x^3 - 4x + 1$ es par, impar o ninguna de las dos cosas.

80. Resuelve: $\frac{1}{3}(x - 6)^2 + 4x \geq 0$

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. pecado A cos B - cos A pecado B
2. episodio $\frac{5p}{6}, \frac{}{6f}$
3. sen 40° = 0,64; sen 80° = 0,98
4. 49,5°

Machine Translated by Google

8.3 La ley de los cosenos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Ecuaciones trigonométricas (Sección 7.3, págs. 505–510) • Fórmula de distancia (Sección 1.1, p. 39)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 585.

OBJETIVOS 1 Resolver triángulos SAS (p. 583)

2 Resolver triángulos SSS (p. 583)

3 Resolver problemas aplicados (p. 584)

En la sección anterior, se utilizó la Ley de los Senos para resolver el Caso 1 (SAA o ASA) y el Caso 2 (SSA) de un triángulo oblicuo. En esta sección, se deriva la ley de los cosenos y se utiliza para resolver los casos 3 y 4.

Caso 3: Se conocen dos lados y el ángulo incluido (SAS).

Caso 4: Se conocen tres lados (SSS).

TEOREMA Ley de los cosenos

Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C, respectivamente,

$$c2 = a2 + b2 - 2ab \text{ porque } C \quad b2 \tag{1}$$

$$= a2 + c2 - 2ac \text{ porque } B \quad a2 = \tag{2}$$

$$b2 + c2 - 2bc \text{ porque } A \tag{3}$$

Demostración Aquí sólo se demuestra la fórmula (1). Las fórmulas (2) y (3) se pueden probar utilizando el mismo argumento.

Comience colocando estratégicamente un triángulo en un sistema de coordenadas rectangular de modo que el vértice del ángulo C esté en el origen y el lado b quede a lo largo del eje x positivo. Independientemente de si C es agudo, como en la Figura 35(a), u obtuso, como en la Figura 35(b), el vértice del ángulo B tiene coordenadas 1a cos C, a sen C2. El vértice del ángulo A tiene coordenadas 1b, 02.

Utilice la fórmula de la distancia para calcular c2 .

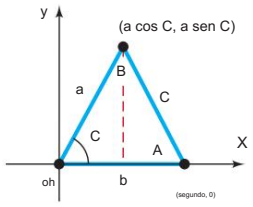
$$c2 = 1b - a \cos C2 \quad ^2 + 10 - a \text{ sen } C2 = \quad ^2$$

$$b2 - 2ab \cos C + a2 \cos2 C + a2 \text{ sen2 } C$$

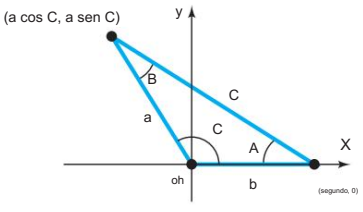
$$= b2 - 2ab \cos C + a2 \, 1\cos2 C + \text{sen2 } C2$$

$$= a2 + b2 - 2ab \text{ porque } C$$

■



(a) El ángulo C es agudo



(b) El ángulo C es obtuso

Figura 35

Cada una de las fórmulas (1), (2) y (3) se puede expresar en palabras de la siguiente manera:

TEOREMA Ley de los cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble de su producto por el coseno de su ángulo incluido.

Observe que si el triángulo es rectángulo (de modo que, digamos, C = 90°), la fórmula (1) se convierte en el conocido teorema de Pitágoras: c2 = a2 + b2 . Es decir, el Teorema de Pitágoras es un caso especial de la Ley de los cosenos.

Machine Translated by Google

1 Resolver triángulos SAS

La Ley de los cosenos se utiliza para resolver el Caso 3 (SAS), que se aplica a triángulos cuyos dos lados y el ángulo incluido se conocen.

EJEMPLO 1 Usando la ley de los cosenos para resolver un triángulo SAS

Resuelve el triángulo: a = 2, b = 3, C = 60°

Solución

Vea la Figura 36. Como se conocen dos lados, a y b, y el ángulo incluido, C = 60°, la ley de los cosenos facilita encontrar el tercer lado, c.

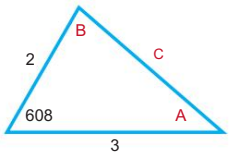


Figura 36

$$c2 = a2 + b2 - 2ab \text{ porque } C$$

$$= 22 + 32 - 2 \# 2 \# 3 \# \cos 60° \quad a \cdot 2, b \cdot 3, C \cdot 60°$$

$$= 13 - 12 \# = 7\frac{1}{2}$$

$$c = \sqrt{27}$$

El lado c tiene una longitud de $\sqrt{17}$. Para encontrar los ángulos A y B, se puede usar la ley de los senos o la ley de los cosenos.

Es preferible usar la ley de los cosenos porque conducirá a una ecuación con una solución, ya sea que resuelva A o B. Usar la ley de los senos conduciría a una ecuación con dos soluciones que deberían verificarse para determinar cuál solución se ajusta los datos proporcionados.*

Elegimos utilizar las fórmulas (2) y (3) de la ley de los cosenos para encontrar A y B. Para :

$$a2 = b2 + c2 - 2bc \text{ porque } A$$

$$2bc \text{ porque } A = b2 + c2 - a2$$

$$\text{porque } A = \frac{b2 + c2 - a2}{2 a. C.} = \frac{9 + 7 - 4}{2 \# \sqrt{27}} = \frac{12}{6\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$A = \cos\text{-}1 \quad \frac{2\sqrt{7}}{7} \approx 40{,}9°$$

Para B:

$$b2 = a2 + c2 - 2ac \text{ porque } B$$

$$\text{porque } B = \frac{a2 + c2 - b2}{2ac} = \frac{4 + 7 - 9}{4\sqrt{7}} = \frac{2}{4\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

$$B = \cos\text{-}1 \quad \frac{\sqrt{7}}{14} \approx 79{,}1°$$

NOTA El ángulo B también se puede encontrar usando A + B + C = 180°, entonces B = 180° - 40,9° - 60° = 79,1°. j

Observe que A + B + C = 40,9° + 79,1° + 60° = 180°, según sea necesario.

Ahora resuelva los problemas 9 y 1 7

2 Resolver triángulos SSS

El siguiente ejemplo utiliza la Ley de los cosenos para resolver un triángulo cuando se conocen tres lados, Caso 4 (SSS).

*La Ley de los Senos se puede utilizar cuando se busca el ángulo opuesto al lado menor, ya que es agudo. (En la Figura 36, use la Ley de los senos para encontrar A, el ángulo opuesto al lado más pequeño).

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Usando la ley de los cosenos para resolver un triángulo SSS

Resuelve el triángulo: a = 4, b = 3, c = 6

Solución Vea la Figura 37. Para encontrar los ángulos A, B y C, use la ley de los cosenos.

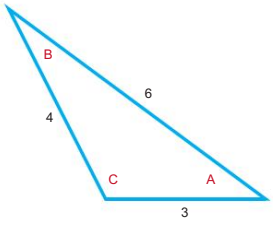


Figura 37

Para :

$$\text{porque A} = \frac{b2 + c2 - a2}{2\text{ a. C.}} = \frac{9 + 36 - 16}{2 \# 3 \# 6} = \frac{29}{36}$$

$$A = \cos\text{-}1\ 36\ \frac{29}{} \approx 36{,}3°$$

Para B:

$$\text{porque B} = \frac{a2 + c2 - b2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 9}{2 \# 4 \# 6} = \frac{43}{48}$$

$$B = \cos\text{-}1\ 48\ \frac{43}{} \approx 26{,}4°$$

Ahora usa A y B para encontrar C:

$$C = 180° - A - B \approx 180° - 36{,}3° - 26{,}4° = 117{,}3°$$

Ahora resuelve los problemas 1 5 y 2 5

3 resolver problemas aplicados

EJEMPLO 3 Corregir un error de navegación

Un velero motorizado sale de Naples, Florida, con destino a Key West, a 150 millas de distancia. Manteniendo una velocidad constante de 15 millas por hora, pero encontrando fuertes vientos cruzados y fuertes corrientes, la tripulación descubre, después de 4 horas, que el velero se desvía 20° de su rumbo.

(a) ¿A qué distancia está el velero de Key West en este momento?

(b) ¿Qué ángulo debe girar el velero para corregir su rumbo?

(c) ¿Cuánto tiempo se ha agregado al viaje debido a esto? (Suponga que la velocidad se mantiene en 15 millas por hora).

Solución Vea la Figura 38. Con una velocidad de 15 millas por hora, el velero ha recorrido 60 millas después de 4 horas. Se debe encontrar la distancia x del velero desde Key West, junto con el ángulo u que debe girar el velero para corregir su rumbo.

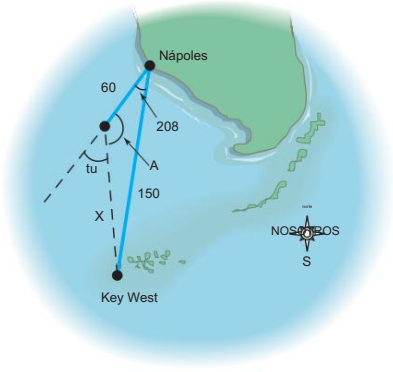


Figura 38

(a) Para encontrar x, use la ley de los cosenos, porque dos lados y el ángulo incluido son conocido.

$$x2 = 1502 + 602 - 2 \# 150 \# 60 \# \cos 20° \approx 9185{,}53$$

$$x \approx 95{,}8$$

El velero está a unas 96 millas de Key West.

(b) Una vez conocidos los tres lados del triángulo, utilice nuevamente la ley de los cosenos para Encuentre el ángulo A opuesto al lado de 150 millas de longitud.

$$1502 = 962 + 602 - 2 \# 96 \# 60 \# \text{porque A}$$

$$9684 = -11{,}520 \cos A$$

$$\cos A \approx -0{,}8406$$

$$A \approx 147{,}2°$$

Entonces,

$$u = 180° - A \approx 180° - 147{,}2° = 32{,}8°$$

El velero debe girar un ángulo de unos 33° para corregir su rumbo.

Machine Translated by Google

(c) La longitud total del viaje es ahora 60 + 96 = 156 millas. Las 6 millas adicionales sólo requerirán alrededor de 0,4 horas, o 24 minutos, más si se mantiene la velocidad de 15 millas por hora.

Ahora problema de trabajo 4 7

Característica histórica

La Ley de los Senos se conocía vagamente mucho antes de que fuera declarado explícitamente por Nasir Eddin (alrededor de 1250 d.C.). Ptolomeo (alrededor del año 150 d.C.) se dio cuenta de ello en una forma que utilizaba una función de cuerda en lugar de la función seno. Pero Regiomontano fue el primero en afirmarlo claramente en Europa, escribiendo en 1464.

La ley de los cosenos aparece por primera vez en Los Elementos de Euclides (Libro II), pero en una forma bien disfrazada en la que se suman cuadrados construidos sobre los lados de triángulos y se resta un rectángulo que representa el término coseno. Por tanto, era conocido por todos los matemáticos debido a su Familiaridad con la obra de Euclides. François Viète (en 1593) enunció una forma moderna temprana de la ley de los cosenos, que sirve para encontrar el ángulo cuando se conocen los lados.

La ley de las tangentes (véase el problema 65 de la sección 8.2) se ha vuelto obsoleta. En el pasado se usaba en lugar de la Ley de los cosenos, porque la Ley de los cosenos era muy inconveniente para calcular con logaritmos o reglas de cálculo. Sin embargo, combinar la suma y la multiplicación ahora es muy fácil en una calculadora y la Ley de las Tangentes ha sido archivada junto con la regla de cálculo.

8.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Escribe la fórmula para la distancia d desde P1 = 1x1 , y12 a P2 = 1x2 , y22. (pág. 39)

2. Si u es un ángulo agudo, resuelve la ecuación cos u = $\frac{12}{2}$. (págs. 505 a 510)

Conceptos y vocabulario

3. Si se conocen tres lados de un triángulo, la Ley de _____ se utiliza para resolver el triángulo.

4. Opción múltiple Si se conocen un lado y dos ángulos de un triángulo, ¿qué ley se puede usar para resolver el triángulo?
(a) Ley de los senos (b) Ley de los cosenos
(c) Ya sea a o b (d) El triángulo no se puede resolver.

5. Opción múltiple Si se conocen dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, ¿qué ley se puede usar para resolver el triángulo?
(a) Ley de los senos (b) Ley de los cosenos (c) Ya sea a o b (d) El triángulo no se puede resolver.

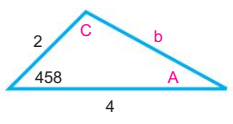
6. Verdadero o Falso Dados solo los tres lados de un triángulo, no hay información suficiente para resolver el triángulo.

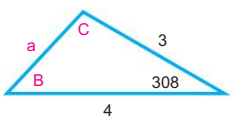
7. Verdadero o Falso La Ley de los Cosenos establece que el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble de su producto.

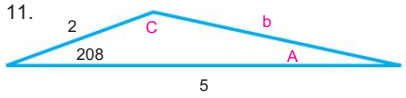
8. Verdadero o Falso Un caso especial de la Ley de los cosenos es el Teorema de Pitágoras.

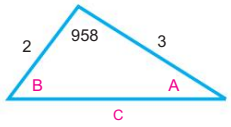
Desarrollo de habilidades

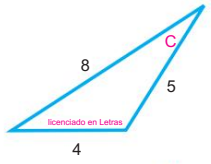
En los problemas 9 a 16, resuelve cada triángulo.

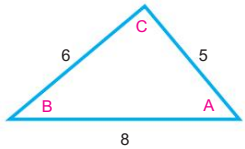
9.


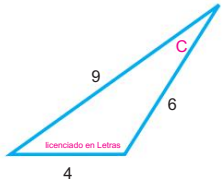
10.


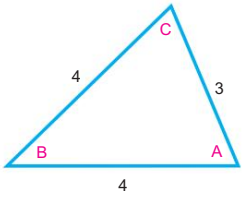
11.


12.


13.


14.


15.


dieciséis.


Machine Translated by Google

En los problemas 17 a 32, resuelve cada triángulo.

17. a = 3, b = 4, C = 40° 18. a = 2, c = 1, B = 10° 19. a = 6, b = 4, C = 60°
20. b = 2, c = 4, A = 75° 21. b = 4, c = 1, A = 120° 22. a = 5, c = 3, B = 105°
23. a = 3, c = 2, B = 90° 24. a = 2, b = 3, C = 70° 25. a = 20, b = 29, c = 21
26. a = 4, b = 5, c = 3 27. a = 3, b = 3, c = 2 28. a = 2, b = 2, c = 2
29. a = 4, b = 3, c = 6 30. a = 6, b = 11, c = 12 31. a = 9, b = 7, c = 10
32. a = 15, b = 13, c = 3

Práctica mixta En los problemas 33 a 44, resuelve cada triángulo.

33. A = 50°, B = 55°, c = 9 34. B = 20°, C = 75°, b = 5 35. a = 14, b = 7, A = 85°
36. a = 6, b = 8, c = 9 37. a = 4, c = 5, B = 55° 38. B = 35°, C = 65°, a = 15
39. a = 20, A = 73°, C = 17° 40. c = 8, A = 38°, B = 52° 41. A = 65°, B = 72°, b = 7
42. A = 10°, a = 3, b = 10 43. a = 10, segundo = 10, c = 15 44. b = 5, c = 12, A = 60°

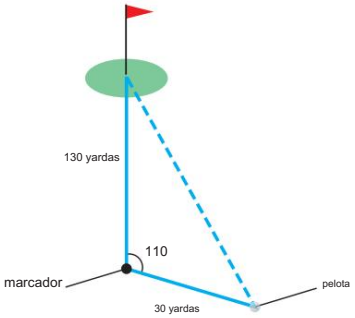
Aplicaciones y extensiones

45. Distancia al green

Un golfista realiza un golpe de salida errante que aterriza en el aspero. Un marcador en el centro de la calle está a 130 yardas del centro del green.

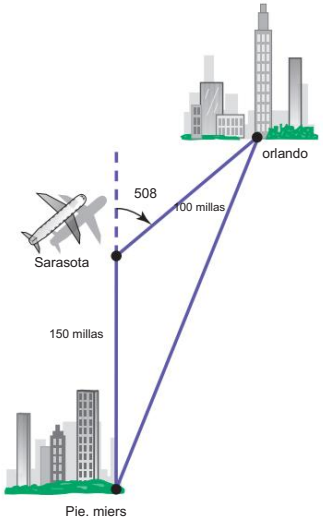
Mientras está de pie sobre el marcador y de cara al green, el golfista gira 110° hacia su bola.

Luego camina 30 yardas hacia su pelota. ¿A qué distancia está la bola del centro del green?



46. Navegación Un avión vuela hacia el norte desde Ft. Myers a Sarasota, una distancia de 150 millas, y luego gira en un ángulo de 50° y vuela a Orlando, una distancia de 100 millas. Ver la figura.

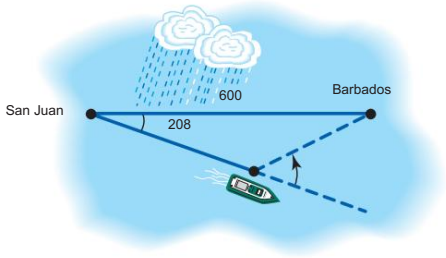
(a) ¿ A qué distancia está directamente de Ft. ¿De Myers a Orlando?
(b) ¿Qué rumbo debe utilizar el piloto para volar directamente desde Ft. ¿De Myers a Orlando?



47. Evitar una tormenta tropical Un crucero mantiene una velocidad de 23 nudos (millas náuticas por hora) navegando de San Juan a Barbados, una distancia de 600 millas náuticas. A

Para evitar una tormenta tropical, el capitán sale de San Juan en una dirección de 13° con rumbo directo a Barbados. El capitán mantiene la velocidad de 23 nudos durante 12 horas, tras lo cual el camino hacia Barbados queda libre de tormentas.

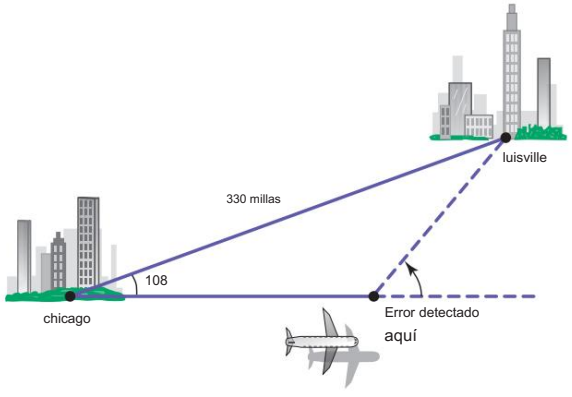
(a) ¿ En qué ángulo debe girar el capitán para dirigirse directamente a Barbados?
(b) Una vez realizado el viraje, ¿cuánto tiempo pasará antes de que el barco llegue a Barbados si se mantiene la misma velocidad de 23 nudos?



48. Revisión de un plan de vuelo Al intentar volar de Chicago a Louisville, una distancia de 330 millas, un piloto sin darse cuenta tomó un rumbo que tenía un error de 10°, como se indica en la figura.

(a) Si la aeronave mantiene una velocidad promedio de 220 millas por hora y si el error de dirección se descubre después de 15 minutos, ¿qué ángulo debe girar el piloto para dirigirse hacia Louisville?

(b) ¿Qué nueva velocidad promedio debe mantener el piloto para que el tiempo total del viaje sea de 90 minutos?



Machine Translated by Google

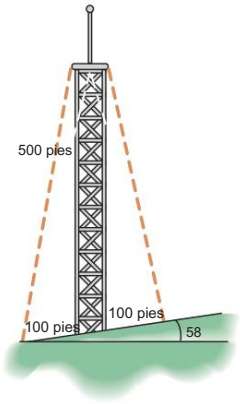
49. Campo de béisbol de las Grandes Ligas Supongamos que cierto diamante de béisbol es un cuadrado de 65 pies de lado. La goma de lanzamiento está ubicada a 41,5 pies del plato de home en una línea que une el plato de home y la segunda base.

(a) ¿Qué distancia hay desde la goma de lanzamiento hasta la primera base?
(b) ¿A qué distancia está la goma de lanzar hasta la segunda base? (c) Si un lanzador mira hacia el plato de home, ¿a través de qué ángulo mira?
¿Necesitas girar para mirar a la primera base?

50. Campo de béisbol de las ligas menores Según las regulaciones oficiales de las ligas menores de béisbol, el diamante es un cuadrado de 60 pies de lado. La goma de lanzamiento está ubicada a 46 pies del plato de home en una línea que une el plato de home y la segunda base.
(a) ¿Qué distancia hay desde la goma de lanzamiento hasta la primera base?
(b) ¿A qué distancia está la goma de lanzar hasta la segunda base?
(c) Si un lanzador mira hacia el plato de home, ¿a través de qué ángulo mira?
¿Necesitas girar para mirar a la primera base?

51. Calcular la longitud de un cable tensor Una torre de radio de 500 pies de altura está ubicada en la ladera de una colina con una inclinación respecto de la horizontal de 5°. Ver la figura.

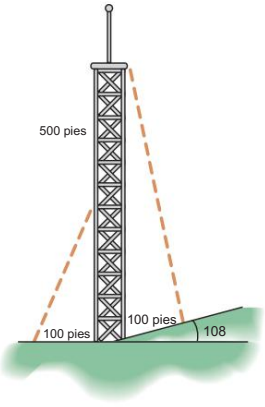
¿Qué longitud deben tener dos cables de sujeción si se van a conectar a la parte superior de la torre y se deben asegurar en dos puntos a 100 pies directamente encima y directamente debajo de la base de la torre?



52. Calcular la longitud de un cable tensor La altura de una torre de radio es de 500 pies y el suelo en un lado de la torre tiene una pendiente hacia arriba en un ángulo de 10° (consulte la figura).
(a) ¿ Qué longitud debe tener un cable de sujeción si se va a conectar a la parte superior de la torre y se debe asegurar en un punto en el lado inclinado a 100 pies de la base de la torre?

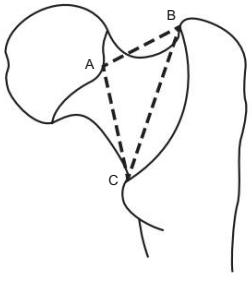
¿torre?

(b) ¿ Qué longitud debe tener un segundo cable de sujeción si se va a conectar al centro de la torre y se debe asegurar en una posición a 100 pies de la base en el lado plano?



53. Identificación de restos El triángulo de Purkait, situado en el extremo proximal del fémur, se ha utilizado para identificar el género de restos esqueléticos fragmentados. Ver la figura.
(a) Dado $\overline{AB}$ = 30,1 mm, AC = 51,4 mm y A = 89,2°, encuentre la longitud de $\overline{BC}$.

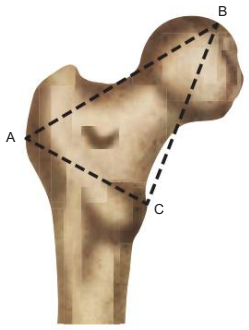
(b) Si la longitud promedio de $\overline{BC}$ es 59,4 mm para hombres y 53,3 mm para mujeres, ¿qué género se identificaría para las mediciones del inciso (a)?



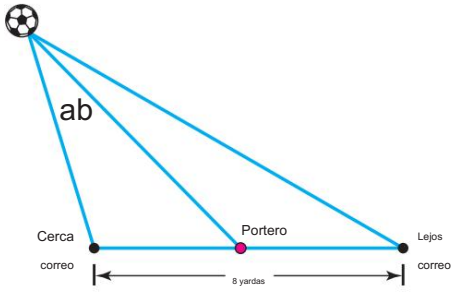
54. Identificación de restos Al igual que el triángulo de Purkait en el problema 53, el triángulo métrico está ubicado en el extremo proximal del fémur y se ha utilizado para identificar el género de restos esqueléticos fragmentados. Ver la figura.

(a) Si $\overline{AC}$ = 48,8 mm, BC = 62,2 mm y C = 89°, encuentre la longitud de $\overline{AB}$.

(b) Si $\overline{AB}$ 6 80 mm normalmente indica una hembra y $\overline{AB}$ 7 80 mm normalmente indica un hombre, cuyo género, si lo hubiera, se identificaría a partir de las mediciones en parte (a)?



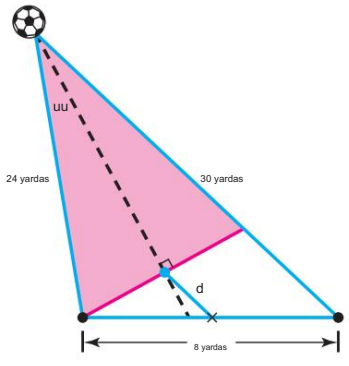
55. Ángulos del fútbol Una portería de fútbol tiene 8 yardas de ancho. Supongamos que una portera está parada en su línea en el centro de su portería mientras un delantero del equipo contrario mueve el balón hacia ella.
El ángulo del primer palo, a, está formado por rayos que se extienden desde el balón hasta el primer palo y el portero. De manera similar, el ángulo del segundo palo, b, está formado por rayos que se extienden desde el balón hasta el segundo palo y el portero. Ver la figura.



(a) Determine el ángulo del poste cercano y el ángulo del poste lejano cuando el delantero está a 20 yardas del poste cercano y a 24 yardas del poste lejano.

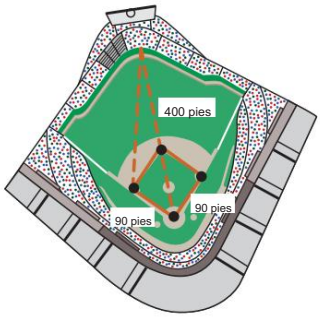
(b) ¿A qué distancia está el portero del balón?
(c) Para cubrir el poste cercano, el portero se mueve hacia el poste cercano para igualar el ángulo del poste cercano y el ángulo del poste lejano. ¿Qué tan lejos debe moverse el portero hacia su primer poste?

56. Cubrir los ángulos En el fútbol, un portero defensor quiere ocupar una posición que biseque el ángulo que necesita cubrirse. Ver la figura. El portero se ubica en escuadra con respecto al balón, es decir, perpendicular a la línea de bisección, en un punto donde el área cubierta (sombreada) queda completamente fuera de la portería. ¿A qué distancia está el portero del centro de la línea de gol si un delantero atacante está a 24 yardas del primer palo y a 30 yardas del segundo palo?



Machine Translated by Google

57. Wrigley Field, hogar de los Cachorros de Chicago La distancia desde el plato de home hasta la cerca en el centro del Wrigley Field es de 400 pies (vea la figura). ¿Qué distancia hay desde la valla en el centro hasta la tercera base?



58. Béisbol de ligas menores La distancia desde el plato de home hasta la cerca en el centro del campo de ligas menores de Oak Lawn es de 280 pies. ¿Qué distancia hay entre la valla en el centro y la tercera?
¿base?

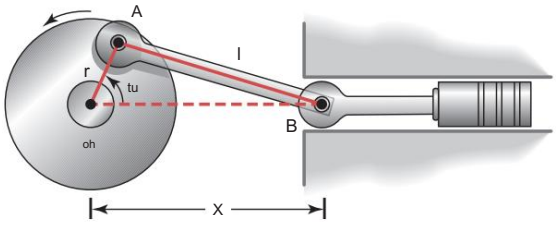
[Pista: La distancia entre las bases en las ligas menores es de 60 pies.]

59. Construyendo un columpio Clint está construyendo un columpio de madera para sus hijos. Cada extremo de soporte del columpio debe ser un marco en A construido con dos 4 por 4 de 10 pies de largo unidos en un ángulo de 45°. Para evitar que el columpio se vuelque, Clint quiere asegurar la base de cada estructura en A a bases de concreto. ¿A qué distancia deben estar las bases de cada marco en A?

60. Bielas y pistones Vea la figura (arriba, derecha). La varilla OA gira alrededor del punto fijo O de modo que el punto A se desplaza en un círculo de radio r. Conectada al punto A hay otra varilla AB de longitud L 7 2r, y el punto B está conectado a un pistón. Demuestre que la distancia x entre el punto O y el punto B está dada por

$$x = r \cos u + \sqrt{2r^2 \cos^2 u + L^2 - r^2}$$

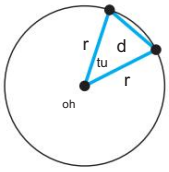
donde u es el ángulo de rotación de la varilla OA.



61. Problema de desafío Geometría Demuestre que la longitud d de una cuerda de un círculo de radio r está dada por la fórmula

$$d = 2r \operatorname{sen} \frac{tu}{2}$$

donde u, 0 6 u 6 p, es el ángulo central formado por los radios hasta los extremos de la cuerda. Ver la figura. Utilice este resultado para derivar el hecho de que sen u 6 u, donde u se mide en radianes.



62. Problema de desafío Para cualquier triángulo, demuestra que

$$\text{porque } \frac{C}{2} = B\, s1s - c2b$$

donde s = $\frac{1}{2}$ 1a + b + c2.

63. Problema de desafío Para cualquier triángulo, demuestra que

$$\text{pecado } \frac{C}{2} = B\, 1s - a2\, 1s - b2$$

donde s = $\frac{1}{2}$ 1a + b + c2.

64. Problema de desafío Usa la ley de los cosenos para demostrar la identidad

$$\frac{\text{porque } A}{a} + \frac{\text{porque } B}{b} + \frac{\text{porque } C}{c} = \frac{a2 + b2 + c2}{2abc}$$

Explicar conceptos: discusión y escritura

65. ¿ Qué haces primero si te piden que resuelvas un triángulo y te dan dos lados y el ángulo incluido?

66. ¿ Qué haces primero si te piden que resuelvas un triángulo y te dan tres lados?

67. Invente un problema aplicado que requiera utilizar la Ley de Cosenos.

68. Escribe tu estrategia para resolver un triángulo oblicuo.

69. Enuncia la ley de los cosenos con palabras.

Conserve su conocimiento

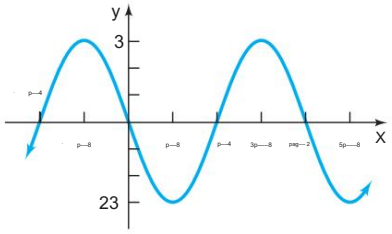
Los problemas 70 a 79 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

70. Gráfica: $R1x2 = \frac{2x + 1}{x - 3}$

71. Resuelve 4x = 3x+1 . Expresa la solución en forma exacta.

72. Si $\tan u = -\frac{\sqrt{226}}{5}$ y porque tu = - 7 $\frac{5}{}$, encontrar el valor exacto de cada una de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

73. Encuentra una ecuación para la gráfica.



Machine Translated by Google

74. Encuentra f^{-1} 1x2 si f1x2 = 5x $\frac{A}{+ 2}$, Un · 0.

75. Si F1x2 = - + 3x + $\frac{x3}{3}$ C y 3a, b4 = 31, 24,
encuentre F1b2 - F1a2.

76. Simplifica: $\frac{4 \# 3x \# \ln 3 \# x1>2 - 4 \# 3x \# \# \frac{1}{2} x\text{-}1>2}{1\ 2x2\ 2}$

77. Resuelve: · 4x - 3· Ú x + 1

78. Convertir 96° a radianes.

79. Si f1x2 = ax2 - 2x + 5 y a 6 0, ¿en qué cuadrante se ubica el vértice?
¿ Cuántas intersecciones con el eje x tiene la gráfica de f ?

'¿Estas preparado?' Respuestas

1.d = $\sqrt{21x2 - x1\ 2^2 + 1y2 - y1\ 2^2}$ 2. u = 45° o 4 $\frac{pag}{}$

8.4 Área de un triángulo

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Conocer fórmulas de geometría (Sección A.2, págs. A15–A16) • Usar fórmulas de medio ángulo para encontrar valores exactos (Sección 7.6, págs. 540–542)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 592.

OBJETIVOS 1 Calcular el área de los triángulos SAS (pág. 589)
2 Encuentra el área de los triángulos SSS (p. 590)

En esta sección se derivan varias fórmulas para calcular el área de un triángulo.

NOTA Normalmente, A se utiliza para el área. Sin embargo, debido a que A también se usa como medida de un ángulo, aquí se usa K para área para evitar confusiones.

TEOREMA Área de un triángulo

El área K de un triángulo es

$$K = \frac{1}{2}bh \qquad (1)$$

donde b es la base y h es la altitud dibujada a esa base.

Prueba Mire el triángulo en la Figura 39. Alrededor del triángulo construya un rectángulo de altura h y base b, como se muestra en la Figura 40.

Los triángulos 1 y 2 en la Figura 40 tienen el mismo área, al igual que los triángulos 3 y 4. En consecuencia, el área del triángulo con base b y altura h es exactamente la mitad del área del rectángulo, que es bh.

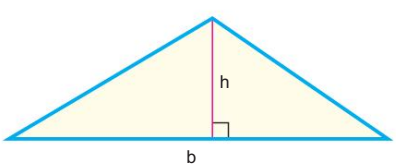


Figura 39

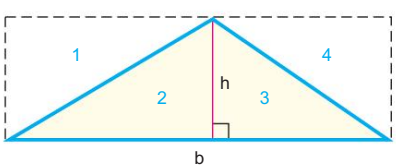


Figura 40 ■

1 Encuentra el área de los triángulos SAS

Si se conocen la base b y la altura h a esa base, entonces el área del triángulo se puede encontrar usando la fórmula (1). Sin embargo, normalmente no se proporciona la información necesaria para utilizar la fórmula (1). Supongamos, por ejemplo, que dos lados a y b y

Machine Translated by Google

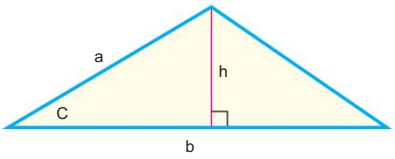


Figura 41

el ángulo incluido C son conocidos. Vea la Figura 41. Entonces la altitud h se puede encontrar observando que

$$\frac{h}{a} = \text{pecado } C$$

entonces

$$h = \text{un pecado } C$$

Usar este hecho en la fórmula (1) produce

$$k = 2 \quad \frac{1}{2}bh = b1\frac{1}{2}a \text{ sen } C2 = \quad \frac{1}{2}ab \text{ pecado } C$$

El área K del triángulo está dada por la fórmula

TEOREMA Área de un triángulo SAS

$$K = ab\frac{1}{2}\text{sen } C \quad (2)$$

Bajar altitudes desde los otros dos vértices del triángulo conduce a la siguientes fórmulas correspondientes:

$$K = \text{antes de Cristo}\frac{1}{2}\text{sen } A \quad (3)$$

$$k = \frac{1}{B}\frac{1}{2}\text{ca pecado} \quad (4)$$

Es más fácil recordar estas fórmulas utilizando la siguiente redacción:

TEOREMA Área de un triángulo SAS

El área K de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno de su ángulo incluido.

EJEMPLO 1 Encontrar el área de un triángulo SAS

Encuentre el área K del triángulo para el cual a = 8, b = 6 y C = 30°.

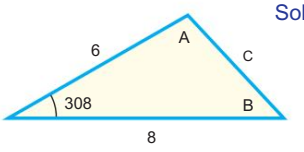


Figura 42

Solución Vea la Figura 42. Utilice la fórmula (2) para obtener

$$K = ab\frac{1}{2}\text{sen } C = \#\ 8\ \#\ 6\ \frac{1}{2}\ \#\ \text{sen } 30° = 12 \text{ unidades cuadradas}$$

Ahora resuelva los problemas 9 y 1 7

2 Encuentra el área de los triángulos SSS

Si se conocen los tres lados de un triángulo, se utiliza otra fórmula, llamada Fórmula de Herón. (llamado así por Herón de Alejandría), se puede utilizar para encontrar el área de un triángulo.

TEOREMA Fórmula de Heron

El área K de un triángulo de lados a, b y c es

$$K = \sqrt{2s1s - a2\ 1s - b2\ 1s - c2} \quad (5)$$

donde $s = 1a\frac{1}{2}b + c2.$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Encontrar el área de un triángulo SSS

Encuentra el área de un triángulo cuyos lados son 4, 5 y 7.

Solución Sean a = 4, b = 5 y c = 7. Entonces

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(4 + 5 + 7) = 8$$

La fórmula de Heron da el área K como

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}$$

$$= \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ unidades cuadradas}$$

Ahora resuelve los problemas 15 y 23

Prueba de la fórmula de Heron La prueba dada aquí utiliza la Ley de los cosenos.
De la ley de los cosenos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

y la fórmula del medio ángulo,

$$\cos^2\frac{C}{2} = \frac{1 + \cos C}{2}$$

resulta que

$$\cos^2\frac{C}{2} = \frac{1 + \cos C}{2} = \frac{1 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{2}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{4ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a + b + c)}{4ab} = \frac{(2s - c)(2s)}{4ab} = \frac{s(s-c)}{ab} \quad (6)$$

Diferencia de dos cuadrados

$a \cdot a = a^2$, $b \cdot b = b^2$, $2ab + 2ab = 4ab$, $a + b + c = 2s$, $a + b - c = 2s - 2c$

De manera similar, usando $\sin^2\frac{C}{2} = \frac{1 - \cos C}{2}$, resulta que

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab} \quad (7)$$

Ahora usa la fórmula (2) para el área.

$$k = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$= \frac{1}{2}ab(2)\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$\sin C = \sin 2\left(\frac{C}{2}\right) = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

Utilice las ecuaciones (6) y (7).

$$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

■

Característica histórica

La Fórmula de Heron (también conocida como Fórmula de Hérón) fue la primera expresado por Garza de Alejandría (siglo I d.C.), quien tenía, además de sus talentos matemáticos, habilidades de ingeniería. En varios templos, sus dispositivos mecánicos produjeron efectos que parecían sobrenaturales y supuestamente incitaron a los visitantes a la generosidad. El libro Metrica de Heron , sobre cómo hacer tales dispositivos, ha sobrevivido y fue descubierto en 1896 en la ciudad de Constantinopla.

Las fórmulas de Heron para el área de un triángulo causaron cierta incomodidad en las matemáticas griegas, porque un producto con dos factores era un área y uno con tres factores era un volumen, pero cuatro factores parecían contradictorios en la época de Heron.

Machine Translated by Google

8.4 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. El área K de un triángulo cuya base es b y cuya altura es . (pág. A15) es su _ _____

2. Verdadero o Falso $\cos 2\frac{tu}{2} = \frac{1 + \text{pecado } u}{2}$ (págs. 540–542)

Conceptos y vocabulario

3. Si en un triángulo se conocen dos lados a y b y el ángulo incluido C , entonces el área K se encuentra usando la fórmula K = _____ .

4. El área K de un triángulo con lados a, b y c es

   k = _____ ,

   donde s = _____ .

5. Encuentra el área del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4.

6. Verdadero o Falso El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos de sus lados por el seno de su ángulo incluido.

7. Opción múltiple Dados dos lados de un triángulo, b y c, y el ángulo A incluido, la altitud h desde el ángulo B hasta el lado b está dada por 1 _____ .

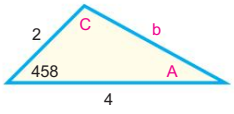
   (a) ¯ ab pecado A (b) b pecado A (c) c pecado A (d) 2 $\frac{1}{2}$ antes de Cristo pecado A

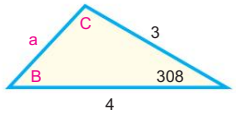
8. La fórmula de Heron de opción múltiple se utiliza para encontrar el área de de _____ los triángulos.

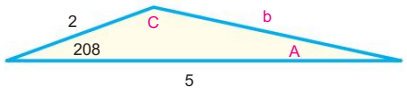
   (a) AAS (b) SAS (c) SSS (d) ASA

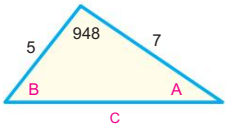
Desarrollo de habilidades

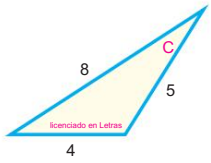
En los problemas 9 a 16, encuentra el área de cada triángulo. Redondea las respuestas a dos decimales.

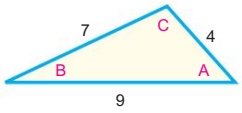
9. 

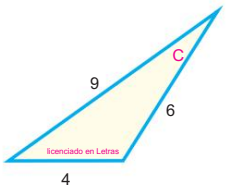
10. 

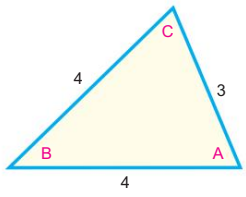
11. 

12. 

13. 

14. 

15. 

dieciséis. 

En los problemas 17 a 28, encuentra el área de cada triángulo. Redondea las respuestas a dos decimales.

17. a = 3, b = 4, C = 50° 18. a = 2, c = 1, B = 10° 19. a = 6, b = 4, C = 60°
20. b = 1, c = 8, A = 75° 21. b = 4, c = 1, A = 120° 22. a = 3, c = 2, B = 115°
23. a = 12, b = 35, c = 37 24. a = 4, b = 5, c = 3 27. a = 4, b = 3 , c = 6 25. a = 3, b = 3, c = 2
26. a = 4, b = 4 , c = 4 28. a = 11, b = 14, c = 20

Aplicaciones y extensiones

29. Área de un triángulo ASA Si se dan dos ángulos y el lado incluido, el tercer ángulo es fácil de encontrar. Utilice la ley de los senos para demostrar que el área K de un triángulo con lado a y ángulos A, B y C es

$$k = \frac{a2 \text{ sen B sen C}}{2 \text{ pecado A}}$$

30. Área de un triángulo Demuestre las otras dos formas de la fórmula para el área K de un triángulo dada en el problema 29.

$$k = \frac{b2 \text{ pecado A pecado C}}{2 \text{ pecado B}} \quad \text{y K} = \frac{c2 \text{ pecado A pecado B}}{2 \text{ pecado C}}$$

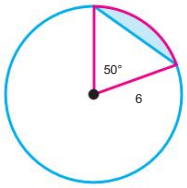
En los problemas 31 a 36, utilice los resultados de los problemas 29 o 30 para encontrar el área de cada triángulo. Redondea las respuestas a dos decimales.

31. A = 50°, C = 20°, a = 3 34. B = 40°, C = 70°, b = 10
32. A = 70°, B = 10°, a = 10 35. B = 10°, C = 100°, b = 2
33. A = 70°, B = 60°, c = 4
36. A = 120°, C = 40°, c = 6

Machine Translated by Google

37. Área de un segmento Encuentra el área del segmento (sombreado en azul en la figura) de un círculo cuyo radio es 6 pies, formado por un ángulo central de 50°.

[Pista: Resta el área del triángulo del área del sector para obtener el área del segmento.]

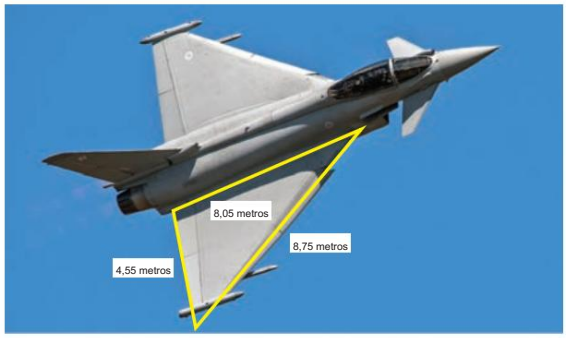


38. Área de un segmento Calcula el área del segmento de un círculo cuyo radio es de 5 pulgadas, formado por un ángulo central de 40°.

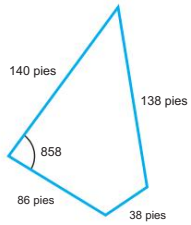
39. Costo de un lote triangular Las dimensiones de un lote triangular son 170 pies por 104 pies por 146 pies. Si el precio de dicho terreno es de $3 por pie cuadrado, ¿cuánto cuesta el lote?

40. Cantidad de material para hacer una tienda de campaña Una tienda de campaña en forma de cono se fabrica a partir de una pieza circular de lona de 24 pies de diámetro quitando un sector con un ángulo central de 100° y conectando los extremos. ¿Cuál es la superficie de la tienda?

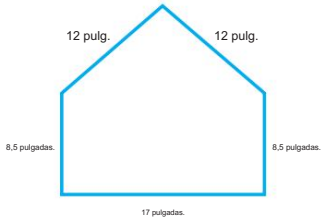
41. Diseño del avión de combate El Eurofighter Typhoon tiene un diseño de ala canard-delta que contiene un ala principal triangular grande. Utilice las dimensiones que se muestran para aproximar el área de una de las alas principales.



42. Área de la propiedad Un lote en venta en un fraccionamiento tiene la forma del cuadrilátero que se muestra en la figura. Calcula el área del lote al pie cuadrado más cercano.

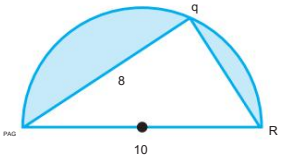


43. Dimensiones del plato de home Se muestran las dimensiones del plato de home en cualquier estadio de béisbol de las grandes ligas. Encuentra el área del plato de home.

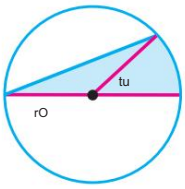


44. Áreas de Computación Ver la figura. Encuentre el área de la región sombreada encerrada en un semicírculo de 10 pulgadas de diámetro. La longitud de la cuerda PQ es de 8 pulgadas.

[Pista: El triángulo PQR es un triángulo rectángulo.]

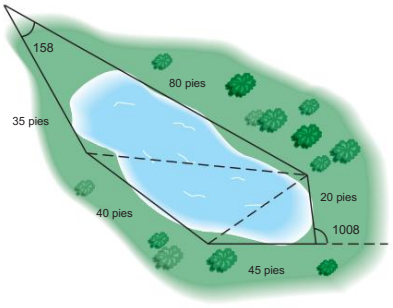


45. Geometría Vea la figura, que muestra un círculo de radio r. con centro en O. Encuentre el área K de la región sombreada en función del ángulo central u.



46. Aproximación del área de un lago Para aproximar el área de un lago, un topógrafo camina alrededor del perímetro del lago y toma las medidas que se muestran en la figura. Usando esta técnica, ¿cuál es el área aproximada del lago?

[Sugerencia: use la ley de los cosenos en los tres triángulos que se muestran y luego encuentre la suma de sus áreas.]



47. El edificio Flatiron Terminado en 1902 en la ciudad de Nueva York, el edificio Flatiron tiene forma triangular y está delimitado por la calle 22, Broadway y la Quinta Avenida. El edificio mide aproximadamente 87 pies en el lado de la calle 22, 190 pies en el lado de Broadway y 173 pies en el lado de la Quinta Avenida. Calcule el área del terreno cubierta por el edificio.

Fuente: Sarah Bradford Landau y Carl W. Condit, Rise of the New York Skyscraper: 1865–1913. New Haven, CT: Yale University Press, 1996

48. Triángulo de las Bermudas El Triángulo de las Bermudas está definido aproximadamente por Hamilton, Bermuda; San Juan, Puerto Rico; y Fort Lauderdale, Florida. Las distancias de Hamilton a Fort Lauderdale, de Fort Lauderdale a San Juan y de San Juan a Hamilton son aproximadamente 1028, 1046 y 965 millas, respectivamente. Haciendo caso omiso de la curvatura de la Tierra, aproxime el área del Triángulo de las Bermudas.

Fuente: www.worldatlas.com

49. Fórmula de Bretschneider Existe una fórmula de tipo Heron que se puede utilizar para encontrar el área de un cuadrilátero general.

$$K = \sqrt{21s - a2\ 1s - b2\ 1s - c2\ 1s - d2 - abcd\cos2\ u}$$

donde a, b, cyd son las longitudes de los lados, u es la mitad de la suma de dos ángulos opuestos y s es la mitad del perímetro.

Demuestre que si un triángulo se considera un cuadrilátero con un lado igual a 0, la fórmula de Bretschneider se reduce a la fórmula de Heron.

50. (a) Demuestre que el área de un dodecágono regular (polígono de 12 lados) viene dada por $K = 3a2 \cot \frac{pag}{} \text{ o } K = 12r \tan \frac{pag}{12},$

donde a es la longitud de uno de los lados y r es el radio del círculo inscrito.

(b) Dado que cada ángulo interior de un ángulo regular de n lados $1n - 22 \# p$

El polígono $1n$ Ú 32 mide estas $\frac{\quad}{\text{norte}}$, generalizar

fórmulas para cualquier polígono regular.

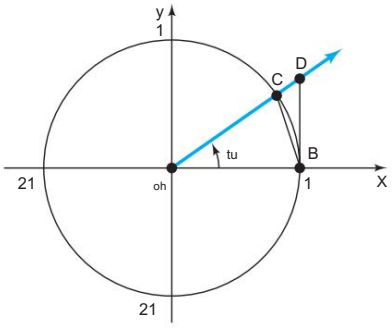
Machine Translated by Google

51. Geometría Consulte la figura en la que se dibuja un círculo unitario. El segmento DB es tangente a la circunferencia y u es aguda.
(a) Exprese el área de ΔOBC en términos de sen u y cos u.
(b) Exprese el área de ΔOBD en términos de sen u y cos u.
(c) El área del sector OBC del círculo es u, donde u $\frac{1}{2}$ se mide en radianes. Utilice los resultados de las partes (a) y (b) y el hecho de que

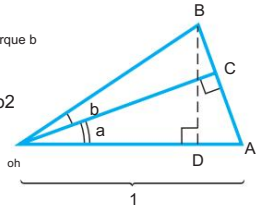
Área ΔOBC 6 Área OBC 6 Área ΔOBD

para mostrar que

dieciséis $\frac{\text{tu}}{\text{pecado u}}$ 6 $\frac{1}{\text{porque tú}}$

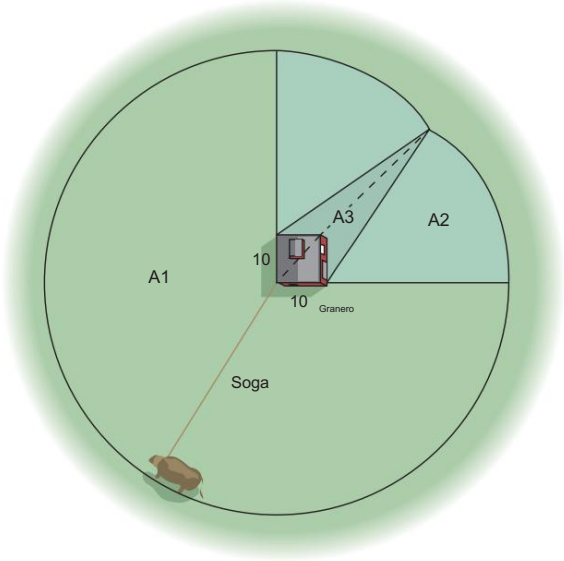


52. Geometría Consulte la figura. Si 0 OA0 = 1, demuestre que:
(a) Área ΔOAC = sen a cos a $\frac{1}{2}$
(b) Área ΔOCB = $\frac{1}{2}$ 0 OB 0 ^{2} pecado b porque b
(c) Área ΔOAB = 2 $\frac{1}{}$ 0 OB 0 sen1a + b2
(d) 0 OB 0 = $\frac{\text{porque un}}{\cos b}$
(e) sen1a + b2 = sen a cos b + cos a sen b



[Pista: Área ΔOAB = Área ΔOAC + Área ΔOCB]

53. El problema de la vaca* Una vaca está atada a una esquina de un granero cuadrado, de 10 pies por 10 pies, con una cuerda de 100 pies de largo. ¿Cuál es la superficie máxima de pastoreo para la vaca? Ver la figura.



54. Otro problema de las vacas Si el granero del problema 53 es rectangular, de 10 pies por 20 pies, ¿cuál es el área máxima de pastoreo para la vaca?

55. Triángulos perfectos Un triángulo perfecto es aquel que tiene números enteros por lados cuyo área es numéricamente igual al perímetro. Demuestre que los triángulos con las longitudes de lados dadas son perfectos.

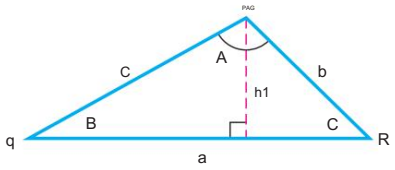
(a) 9, 10, 17 (b) 6, 8, 10

56. Si h1 , h2 y h3 son las altitudes caídas desde P, Q y R, respectivamente, en un triángulo (ver la figura), demuestre que

$$\frac{1}{h1} + \frac{1}{h2} + \frac{1}{h3} = \frac{s}{k}$$

donde K es el área del triángulo y s = 2 $\frac{1}{}$ 1a + b + c2.

[Pista: h1 = .] $\frac{2K}{a}$

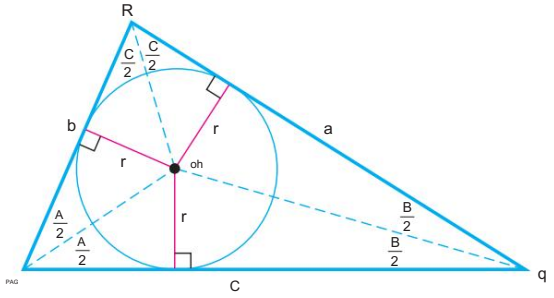


57. Demuestre que una fórmula para la altitud h desde un vértice hasta el El lado opuesto a de un triángulo es

$$h = \frac{\text{a pecado B pecado C}}{\text{pecado A}}$$

58. Problema de desafío Un triángulo tiene los vértices A10, 02, B11, 02 y C, donde C es el punto en el círculo unitario correspondiente a un ángulo de 105° cuando se dibuja en la posición estándar.
Encuentra el área del triángulo. Indique la respuesta en forma completamente simplificada con un denominador racionalizado.

Problemas de desafío Círculo inscrito Para los problemas 59 a 62, las rectas que bisecan cada ángulo de un triángulo se encuentran en un solo punto O, y la distancia perpendicular r desde O a cada lado del triángulo es la misma. La circunferencia con centro en O y radio r se llama circunferencia inscrita del triángulo (ver figura).



59. Utilice la fórmula del problema 57 con el triángulo OPQ para muestra esa

$$r = \frac{\frac{A}{\text{c pecado pecado 2}} \quad \frac{B}{2}}{\text{porque } \frac{C}{2}}$$

*Sugerido por el profesor Teddy Koukounas del Suffolk Community College, quien se enteró por un viejo granjero de Virginia.

Machine Translated by Google

60. Utilice el resultado del problema 59 y los resultados de los problemas 62. y 63 en la Sección 8.3 para demostrar que

$$\text{cuna}\frac{C}{2} = \frac{s - c}{r}$$

donde $s = \frac{1}{2}1a + b + c2$.

61. Demuestra que

$$\text{cuna}\frac{A}{2} + \text{cuna}\frac{B}{2} + \text{cuna}\frac{C}{2} = \frac{s}{r}$$

62. Demuestre que el área K del triángulo PQR es K = rs, donde $s = \frac{1}{2}1a + b + c2$. Entonces muestra que

$$r = C\,1s - a2\,1s - b2\,1s - c2$$

Explicar conceptos: discusión y escritura

63. ¿ Qué haces primero si te piden encontrar el área de un triángulo y te dan dos lados y el ángulo incluido?

64. ¿ Qué haces primero si te piden encontrar el área de un triángulo y te dan tres lados?

65. Indique la fórmula para encontrar el área de un triángulo SAS en palabras.

Conserve su conocimiento

Los problemas 66 a 75 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

66. Sin representar gráficamente, determina si la función cuadrática f 1x2 = - 3x2 + 12x + 5 tiene un valor máximo o un valor mínimo, y luego encuentra el valor.

67. Resuelve la desigualdad: $\frac{x + 1}{x2 - 9} \ldots 0$

68. $P = a - \frac{27}{3}, \frac{22}{3}$ b es el punto del círculo unitario que corresponde a un número real t. Encuentra los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de t.

69. Establecer la identidad: csc u - sen u = cos u cot u

70. Encuentra el dominio de f1x2 = ln1x2 - 252 + 3.

71. Un rectángulo tiene una diagonal de longitud 12. Exprese la perímetro P en función de su ancho, w.

72. Enumere todos los ceros racionales potenciales de P1x2 = 2x3 - 5x2 + 13x + 6.

73. Resuelve: · 15x - 72 - 5· … 0.05

74. Resuelve: x1x - 72 = 18

75. La pendiente m de la recta tangente a la gráfica. de f1x2 = 3x4 - 7x2 + 2 en cualquier número x viene dado por m = f′ 1x2 = 12x3 - 14x. Encuentra una ecuación de la recta tangente en x = 1.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. $K = bh\frac{1}{2}$ 2. Falso

8.5 Movimiento Armónico Simple; movimiento amortiguado; Combinando ondas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Gráficas sinusoidales (Sección 6.4, págs. 446–452)
- Velocidad angular (Sección 6.1, págs. 405–406)

Ahora trabaje el '¿Estás preparado? problemas en la página 601.

OBJETIVOS 1 Construir un modelo para un objeto en movimiento armónico simple (p. 595)
2 Analizar el movimiento armónico simple (p. 597)
3 Analizar un objeto en movimiento amortiguado (p. 598)
4 Grafica la suma de dos funciones (p. 600)

1 Construya un modelo para un objeto en movimiento armónico simple

Muchos fenómenos físicos pueden describirse como movimiento armónico simple. Las ondas de radio y televisión, las ondas de luz, las ondas sonoras y las ondas de agua exhiben un movimiento armónico simple.

Machine Translated by Google

Diapasón

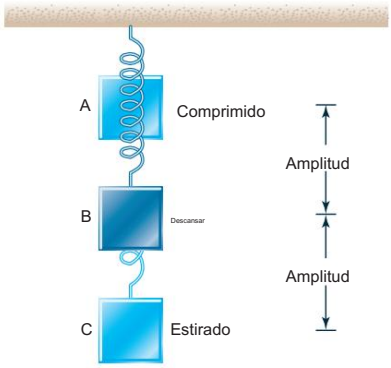


Figura 43 Resorte en espiral

El balanceo de un péndulo, las vibraciones de un diapasón y el balanceo de un peso sujeto a un resorte en espiral son ejemplos de movimiento vibratorio. En este tipo de movimiento, un objeto se balancea hacia adelante y hacia atrás siguiendo el mismo camino. En la Figura 43, el punto B es la posición de equilibrio (reposo) del objeto vibrante. La amplitud es la distancia desde la posición de reposo del objeto hasta su punto de mayor desplazamiento (ya sea el punto A o el punto C en la Figura 43). El período es el tiempo necesario para completar una vibración, es decir, el tiempo que se tarda en pasar, digamos, del punto A , pasando por B , hasta C y de regreso a A.

El movimiento armónico simple es un tipo especial de movimiento vibratorio en el que la aceleración a del objeto es directamente proporcional al negativo de su desplazamiento d desde su posición de reposo. Es decir, a = - kd, k 7 0.

Por ejemplo, cuando la masa que cuelga del resorte en la Figura 43 se tira hacia abajo desde su posición de reposo B hasta el punto C, la fuerza del resorte intenta restaurar la masa a su posición de reposo. Suponiendo que no hay fuerza de fricción que retarde el movimiento, la amplitud permanecerá constante. La fuerza aumenta en proporción directa a la distancia que recorre la masa desde su posición de reposo. Dado que la fuerza aumenta directamente, la aceleración de la masa del objeto debe hacerlo de la misma manera, porque (según la Segunda Ley del Movimiento de Newton) la fuerza es directamente proporcional a la aceleración. Como resultado, la aceleración del objeto varía directamente con su desplazamiento y el movimiento es un ejemplo de movimiento armónico simple.

El movimiento armónico simple está relacionado con el movimiento circular. Para ver esta relación, considere un círculo de radio a, con centro en 10, 02. Vea la Figura 44. Suponga que un objeto inicialmente colocado en 1a , 02 se mueve en sentido antihorario alrededor del círculo con una velocidad angular constante v. Supongamos además que después de un tiempo t ha transcurrido el objeto está en el punto P = 1x, y2 en el círculo. El ángulo u, en radianes, barrido por el rayo $\overline{OP>}$ en este tiempo t está

$$u = vtV \cdot \frac{Ud.}{t}$$

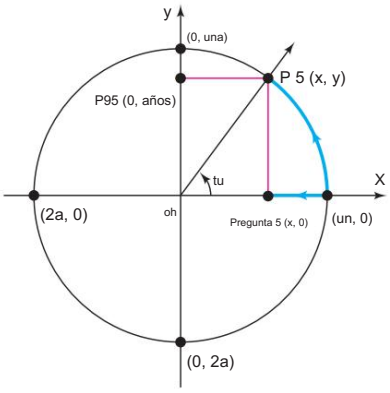


Figura 44

Las coordenadas del punto P en el tiempo t son

$$x = a \cos u = a \cos 1vt2$$

$$y = un \operatorname{sen} u = un \operatorname{sen} 1vt2$$

A cada posición P = 1x, y2 del objeto que se mueve alrededor del círculo le corresponde el punto Q = 1x, 02, llamado proyección de P sobre el eje x. A medida que P se mueve alrededor del círculo a velocidad constante, el punto Q se mueve hacia adelante y hacia atrás entre los puntos 1a, 02 y 1 - a, 02 a lo largo del eje x con un movimiento armónico simple.
De manera similar, para cada punto P hay un punto Q′ = 10, y2, llamado proyección de P sobre el eje y. A medida que P se mueve alrededor del círculo, el punto Q′ se mueve hacia adelante y hacia atrás entre los puntos 10, a2 y 10, - a2 en el eje y con un movimiento armónico simple.
Por tanto, el movimiento armónico simple puede describirse como la proyección de un movimiento circular constante sobre un eje de coordenadas.

Para ilustrar, considere nuevamente una masa que cuelga de un resorte donde la masa se tira hacia abajo desde su posición de reposo hasta el punto C y luego se suelta. Véase la Figura 45(a).
La gráfica que se muestra en la Figura 45(b) describe el desplazamiento d del objeto desde su posición de reposo en función del tiempo t, suponiendo que no hay fuerza de fricción presente.

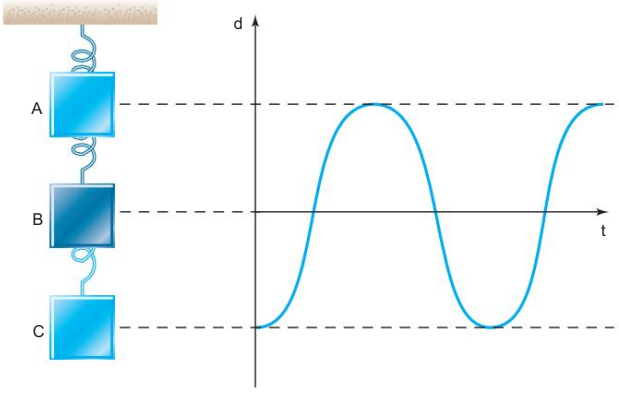


Figura 45 (a) (b)

Machine Translated by Google

TEOREMA Movimiento armónico simple

Un objeto que se mueve sobre un eje de coordenadas de modo que el desplazamiento d desde su posición de reposo en el tiempo t está dado por

$$d(t) = a\cos(vt) \text{ o } d(t) = a\sin(vt)$$

donde a y v > 0 son constantes, se mueve con movimiento armónico simple. El movimiento tiene amplitud |a| y periodo $T = \frac{2\pi}{v}$.

La frecuencia f de un objeto en movimiento armónico simple es el número de oscilaciones por unidad de tiempo. Dado que el período es el tiempo necesario para una oscilación, se deduce que la frecuencia es el recíproco del período; eso es,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi} \qquad v > 0$$

EJEMPLO 1 Construya un modelo para un objeto en movimiento armónico simple

Suponga que un objeto sujeto a un resorte en espiral se tira hacia abajo una distancia de 5 pulgadas desde su posición de reposo y luego se suelta. Si el tiempo para una oscilación es de 3 segundos, desarrolle un modelo que relacione el desplazamiento d del objeto desde su posición de reposo después del tiempo t (en segundos). Suponga que no hay fricción.

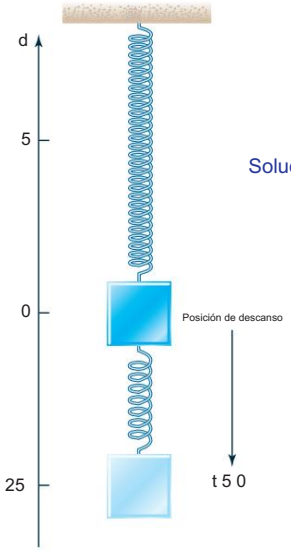


Figura 46

NOTA En la solución del ejemplo 1, a = -5 porque inicialmente el objeto se tira hacia abajo. (Si la dirección inicial es hacia arriba, entonces use a = 5.)

Solución El movimiento del objeto es armónico simple. Consulte la Figura 46. Cuando se suelta el objeto (t = 0), el desplazamiento del objeto desde la posición de reposo es -5 unidades (desde que el objeto fue bajado). Como d = -5 cuando t = 0, es más fácil usar la función coseno

$$d(t) = a\cos(vt)$$

para describir el movimiento.* La amplitud es |0 - 5| = 5 y el período es 3, entonces

$$a = -5 \text{ y } \frac{2\pi}{v} = \text{periodo} = 3, \text{ entonces } v = \frac{2\pi}{3}$$

Una función que modela el movimiento del objeto es

$$d(t) = -5\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

Ahora trabaja el problema 7

2 Analizar el movimiento armónico simple

EJEMPLO 2 Analizar el movimiento de un objeto

Supongamos que el desplazamiento d (en metros) de un objeto en el tiempo t (en segundos) viene dado por la función

$$d(t) = 10\sin(5t)$$

(a) Describe el movimiento del objeto.
(b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo desde su posición de reposo?
(c) ¿Cuál es el tiempo requerido para una oscilación?
(d) ¿Cuál es la frecuencia?

*No se requiere cambio de fase si se utiliza una función coseno.

Machine Translated by Google

Solución La función d1t2 = 10 sen15t2 tiene la forma

$$d1t2 = un\ pecado1vt2$$

donde a = 10 y v = 5.

(a) El movimiento es armónico simple.

(b) El desplazamiento máximo del objeto desde su posición de reposo es el amplitud: 0 a 0 = 10 metros.

(c) El tiempo requerido para una oscilación es el período:

$$\text{Periodo} = T = \frac{2p}{v} = \frac{2p}{5} \text{ segundos}$$

(d) La frecuencia es el recíproco del período.

$$\text{Frecuencia} = f = \frac{1}{t} = \frac{5}{2p} \text{ oscilación por segundo}$$

Ahora resuelve el problema 1 5

3 Analizar un objeto en movimiento amortiguado

En los modelos comentados hasta ahora el movimiento era armónico simple. Es decir, asumieron que ninguna fuerza retardaba el movimiento. Sin embargo, la mayoría de los fenómenos físicos se ven afectados por la fricción u otras fuerzas de resistencia. Estas fuerzas eliminan energía de un sistema en movimiento y, por lo tanto, amortiguan su movimiento. Por ejemplo, cuando una masa que cuelga de un resorte se tira hacia abajo una distancia a y se suelta, la fricción en el resorte hace que la distancia que la masa se mueve desde su posición de reposo disminuya con el tiempo. Como resultado, la amplitud de cualquier resorte oscilante real o péndulo oscilante disminuye con el tiempo debido a la resistencia del aire, la fricción u otras fuerzas. Ver Figura 47.

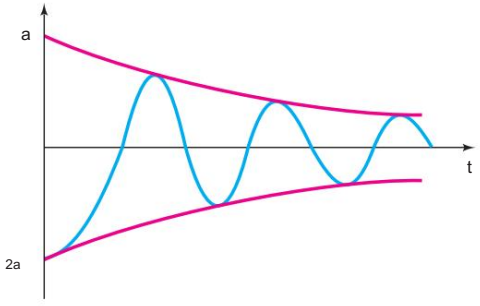


Figura 47 Movimiento amortiguado

Un modelo que describe este fenómeno mantiene un componente sinusoidal, pero la amplitud de este componente disminuye con el tiempo para tener en cuenta el efecto de amortiguación. Además, el período del componente oscilante se ve afectado por la amortiguación. El siguiente teorema, de la física, describe el movimiento amortiguado.

TEOREMA Movimiento amortiguado

El desplazamiento d de un objeto oscilante desde su posición de reposo en el tiempo t está dado por

$$d1t2 = ae^{-bt>12m2}\cos\left(\sqrt{Bv2 - \frac{b2}{4m2}}\,t\right)$$

donde b es el factor de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento y m es la masa del objeto oscilante. Aquí 0 a 0 es el desplazamiento en t = 0, y bajo $\frac{2p}{v}$ es el periodo movimiento armónico simple (sin amortiguación).

Machine Translated by Google

Observe que para b = 0 (amortiguación cero), tenemos la fórmula para armónico simple movimiento con amplitud 0 a 0 y periodo $\frac{2p}{v}$.

EJEMPLO 3 Análisis de la gráfica de un objeto en movimiento amortiguado

Analizar la gráfica de un objeto en movimiento amortiguado modelado por

d1t2 = et>p cos tt Ú 0

Solución El desplazamiento d es el producto de y = et >py y = cos t. Usando las propiedades del valor absoluto y el hecho de que 0 cos t 0 … 1, se deduce que

0 d1t2 0 = 0 et>p cos t 0 = 0 et>p 0 0 cos t 0 … 0 et>p 0 = et>p

c

e·t>P + 0

Como resultado,

- et>p … d1t2 … et>p

Esto significa que la gráfica de d se encuentra entre las gráficas de y = et>p y y = - et>p, llamadas curvas delimitadoras de d.

Además, la gráfica de d toca las gráficas de las curvas delimitadoras cuando 0 cos t 0 = 1; es decir, cuando t = 0, p, 2p, etc. Las intersecciones con el eje x de la gráfica de d ocurren cuando cos t = 0; es decir, a las $\frac{pag}{2}, \frac{3p}{2}, \frac{5p}{2}$, etcétera. Ver Tabla 1.

tabla 1

t	0	$\frac{PAG}{2}$	PAG	$\frac{3P}{2}$	2P
et>p	1	e-1>2	e-1	e-3>2	e-2
costo	1	0	-1	0	1
d1t2 = et>p cos t	1	0	-e-1	0	e-2
Punto en la gráfica de d	(0, 1)	ap2, 0b	1p, -e-12	un 3p2, 0b	12p, e-22

La Figura 48 muestra la gráfica de y = cos t, en negro, las gráficas de y = et>p e y = - et>p, las curvas acotadas, en rojo, y la gráfica de d1t2 = et>p cos t en azul .

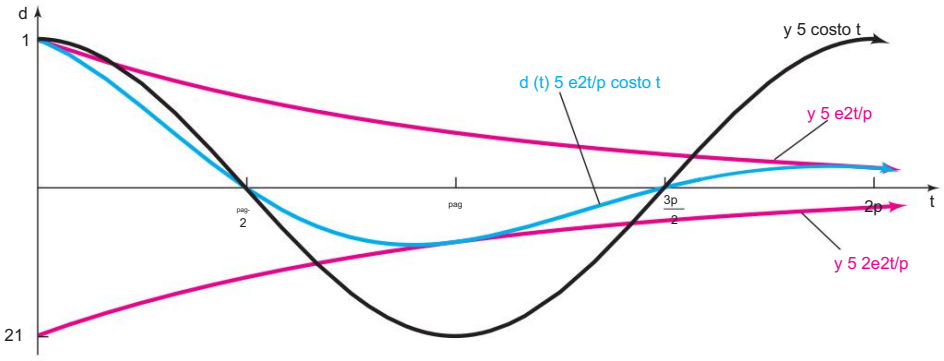


Figura 48 Gráfico de vibración amortiguada con curvas delimitadoras

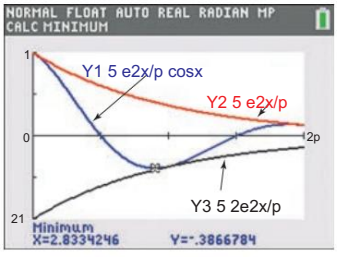


Figura 49

Exploración

Grafique Y1 = ex>p cos x, junto con Y2 = ex>p e Y3 = -ex>p, para 0 … x … 2p. Determine dónde tiene Y1 su primer punto de inflexión (mínimo local). Compare esto con el lugar donde Y1 se cruza con Y3.

Resultado La Figura 49 muestra las gráficas de Y1 = ex>p cos x, Y2 = ex>p e Y3 = -ex>p en una TI-84 Plus C. Usando MINIMUM, el primer punto de inflexión ocurre en x ≈ 2,83; Y1 INTERSECTA Y3 en x = p ≈ 3.14.

Ahora resuelve el problema 2 3

Machine Translated by Google

También existen situaciones en las que fuerzas externas hacen que un sistema vibratorio oscile con amplitudes cada vez mayores. Este fenómeno, conocido como resonancia del latín resonare (que significa "resonar") o resonantia (que significa "eco"), ocurre cuando las vibraciones externas coinciden con la frecuencia natural del sistema vibratorio. La resonancia puede ser destructiva para puentes, edificios o incluso dispositivos mecánicos. Por ejemplo, los puentes pueden verse afectados por los soldados que marchan al paso, los edificios pueden verse afectados por los vientos y los automóviles pueden verse afectados por las vibraciones de sus neumáticos. Los ingenieros tienen en cuenta las vibraciones externas esperadas en sus diseños e incorporan amortiguadores o amortiguadores para contrarrestar el efecto de la resonancia.

4 Graficar la suma de dos funciones

Muchas aplicaciones físicas y biológicas requieren la gráfica de la suma de dos funciones, como

f1x2 = x + sen x o g1x2 = sen x + cos12x2

Por ejemplo, si se emiten dos tonos, el sonido producido es la suma de las ondas producidas por los dos tonos. Consulte el Problema 51 en la Sección 7.7 para obtener una explicación de los teléfonos de tonos.

Para graficar la suma de dos (o más) funciones, suma las coordenadas y que corresponden a valores iguales de x.

EJEMPLO 4 Graficar la suma de dos funciones

Grafique f1x2 = x + sen x.

Solución Primero, grafica las funciones componentes,

y = f1 1x2 = xy = f2 1x2 = sen x

en los mismos ejes de coordenadas. Ver Figura 50(a). Ahora, seleccione varios valores de x , digamos

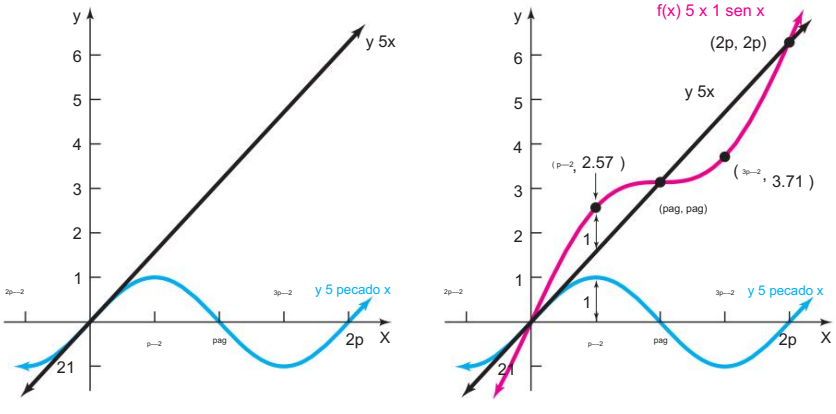
$x = 0 \qquad x = \frac{pag}{2} \qquad x = p\,x = \frac{3p}{2} \qquad y \qquad x = 2p$

y utilícelos para calcular f1x2 = f1 1x2 + f2 1x2. La Tabla 2 muestra los cálculos.
Traza estos puntos y conéctalos para obtener la gráfica, como se muestra en la Figura 50(b).

Tabla 2

X	0	$\frac{PAG}{2}$	PAG	$\frac{3P}{2}$	2P
y = f1 1x2 = x	0	$\frac{pag}{2}$	pag	$\frac{3p}{2}$	2p
y = f2 1x2 = sen x	0	1	0	-1	0
f1x2 = x + sen x	0	$\frac{pag}{2}$ + 1 ≈ 2,57	pag	$\frac{3p}{2}$ - 1 ≈ 3,71	2p
Punto en la gráfica de f	(0, 0)	ap$\frac{2}{2}$, 2,57b	1p,p2	un $\frac{3p}{2}$, 3,71b	12p, 2p2

Verifique: Grafique Y1 = x, Y2 = sen x, e Y3 = x + sen x y compare el resultado con la Figura 50(b). Utilice INTERSECT para verificar que las gráficas de Y1 e Y3 se cruzan cuando sen x = 0.



(a) (b)

Figura 50

Machine Translated by Google

En la Figura 50(b), observe que la gráfica de f1x2 = x + sen x interseca la recta y = x siempre que sen x = 0. Además, observe que la gráfica de f no es periódica.

El siguiente ejemplo muestra una gráfica periódica.

EJEMPLO 5 Graficar la suma de dos funciones sinusoidales

Grafique f1x2 = sen x + cos12x2.

Solución Grafique f sumando las coordenadas y de y = senx e y = cos12x2. La Tabla 3 muestra los pasos para calcular varios puntos en la gráfica de f. La Figura 51 ilustra las gráficas de las funciones componentes, y = f1 1x2 = sen x (en azul) e y = f2 1x2 = cos12x2 (en negro), y la gráfica de f1x2 = sen x + cos12x2, que se muestra en rojo. .

Tabla 3

x	. PAG 2	0	PAG 2	PAG	3P 2	2P
y = f1 1x2 = sen	-1	0	1	0	-1	0
xy = f2 1x2 = cos12x2	-1	1	-1	1	-1	1
f1x2 = sen x + cos12x2	-2	1	0	1	-2	1
Punto en la gráfica de f	a-p 2, -2b	(0, 1)	ap 2, 0b	1p, 12	un 3p 2, -2b	12p, 12

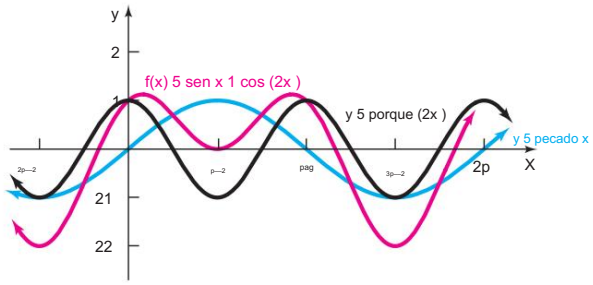


Figura 51

Observe que la función f1x2 = sen x + cos12x2 es periódica, con período 2p.

Verifique: Grafique Y1 = sen x, Y2 = cos12x2 e Y3 = sen x + cos12x2 y compare el resultado con la Figura 51.

Ahora resuelve el problema 2 7

8.5 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La amplitud A y el período T de f1x2 = 5 sen14x2 son . _____ y _____(págs. 446–448)
2. Calcule la velocidad angular del segundero de un reloj en rad/seg. (Redondear a tres decimales) (págs. 405–406)
3. Escribe una ecuación para una función seno con período 12 y amplitud 7. (pág. 452)

Machine Translated by Google

Conceptos y vocabulario

4. El movimiento de un objeto viene dado por d1t2 = 4 cos16t2. Semejante . el el movimiento se describe como _____ _____numero 4 se llama el _____.

5. Cuando una masa que cuelga de un resorte se tira hacia abajo y luego se suelta, el movimiento se llama si hay _____ _____

6. Verdadero o Falso Si la distancia d de un objeto desde su posición de reposo en el tiempo t está dada por una gráfica sinusoidal, el movimiento del objeto es un movimiento armónico simple.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 10, un objeto sujeto a un resorte helicoidal se tira hacia abajo una distancia a desde su posición de reposo y luego se suelta. Suponiendo que el movimiento es armónico simple con el período T, encuentre una función que relacione el desplazamiento d del objeto desde su posición de reposo después de t segundos. Suponga que la dirección positiva del movimiento es hacia arriba.

7. a = 5; T = 2 segundos

8. a = 10; T = 3 segundos

9. a = 7; T = 5p segundos

10. a = 4; t = $\frac{\text{pag}}{2}$ segundos

11. Vuelva a resolver el problema 7 en las mismas condiciones, excepto que en el tiempo t = 0, el objeto está en su posición de reposo y se mueve hacia abajo.

12. Vuelva a resolver el problema 8 en las mismas condiciones, excepto que en el tiempo t = 0, el objeto está en su posición de reposo y se mueve hacia abajo.

13. Vuelva a resolver el problema 9 en las mismas condiciones, excepto que en el tiempo t = 0, el objeto está en su posición de reposo y se mueve hacia abajo.

14. Vuelva a resolver el problema 10 en las mismas condiciones, excepto que en el tiempo t = 0, el objeto está en su posición de reposo y se mueve hacia abajo.

En los problemas 15 a 22 se da el desplazamiento d (en metros) de un objeto en el tiempo t (en segundos).
(a) Describe el movimiento del objeto.
(b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo desde su posición de reposo?
(c) ¿Cuál es el tiempo requerido para una oscilación?
(d) ¿Cuál es la frecuencia?

15. d1t2 = 5 sen13t2

16. d1t2 = 4 sen12t2

17. d1t2 = 5 cosa p $\frac{}{\text{2 cucharadas}}$

18. d1t2 = 8 cos12pt2

19. d1t2 = - 2 cos12t2

20. d1t2 = - 9 sina 1 $\frac{}{\text{4 cucharadas}}$

21. d1t2 = 4 + 3 sen1pt2

22. d1t2 = 3 + 7 cos13pt2

En los problemas 23 a 26, represente gráficamente cada curva de vibración amortiguada para 0... t ... 2p.

23. d1t2 = et>p cos12t2

24. d1t2 = et>2p cos12t2

25. d1t2 = et>4p cos t

26. d1t2 = et>2p cos t

En los problemas 27 a 34, grafica cada función sumando las coordenadas y.

27. f1x2 = x + cos x 28. f1x2 = x + cos12x2 31. f1x2 = x - porque x 29. f1x2 = = x - sen x 33. g1x2 = = sen12x2 + cos x 34. g1x2 = sen x 32. f1x2 = sen x + cos x cos12x2 + cos x + sen12x2

Práctica mixta En los problemas 35 a 40, (a) use las fórmulas de producto a suma para expresar cada producto como una suma y (b) use el método de sumar coordenadas y para representar gráficamente cada función en el intervalo 30, 2p4.

35. F1x2 = sen13x2 senx 36. f1x2 = sen12x2 senx 38. G1x2 = cos14x2 cos 12x2 39. g1x2 = 2 sen x cos13x2

37. h1x2 = cos12x2 cos1x2

40. H1x2 = 2 sen13x2 cos1x2

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 41 a 46, un objeto de masa m (en gramos) sujeto a un resorte helicoidal con factor de amortiguación b (en gramos por segundo) se tira hacia abajo una distancia a (en centímetros) desde su posición de reposo y luego se suelta. Suponga que la dirección positiva del movimiento es hacia arriba y el período es T (en segundos) bajo movimiento armónico simple.

(a) Encuentre una función que relacione el desplazamiento d del objeto desde su posición de reposo después de t segundos.
(b) Grafique la función encontrada en el inciso (a) para 5 oscilaciones usando una utilidad gráfica.

41. m = 20, a = 15, b = 0,75, T = 6 43. m = 15, a = 16, b = 0,65, T = 5 45. m = 10, a = 5, b = 0,7, T = 3

42. m = 25, a = 10, b = 0,7, T = 5

44. m = 30, a = 18, b = 0,6, T = 4

46. m = 10, a = 5, b = 0,8, T = 3

Machine Translated by Google

En los problemas 47 a 52, la función d modela la distancia (en metros) de la masa de un péndulo de masa m (en kilogramos) desde su posición de reposo en el tiempo t (en segundos). La pesa se suelta desde la izquierda de su posición de reposo y representa una dirección negativa.

(a) Describe el movimiento del objeto. Asegúrese de dar la masa y el factor de amortiguación.

(b) ¿Cuál es el desplazamiento inicial de la pesa? Es decir, ¿cuál es el desplazamiento en t = 0?

(c) Grafique el movimiento usando una utilidad gráfica.

(d) ¿Cuál es el desplazamiento de la pesa al comienzo de la segunda oscilación?

(e) ¿Qué sucede con el desplazamiento de la pesa a medida que el tiempo aumenta sin límite?

47. d1t2 = - 20e-0.8t>40 cos¢ Ca 2p $\frac{\quad^2}{5\text{ segundo}} - \frac{0{,}64}{1600}$t≤ _

48. d1t2 = - 20e-0.7t>40 cos¢ Ca 2p $\frac{\quad^2}{5\text{ segundo}} - \frac{0{,}49}{1600}$t≤ _

49. d1t2 = - 30e-0.5t>70 cos¢ Cap p $\frac{\quad^2}{2\text{ segundo}} - \frac{0{,}25}{4900}$t≤ _

50. d1t2 = - 30e-0.6t>80 cos¢ Ca 2p $\frac{\quad^2}{7\text{ segundo}} - \frac{0{,}36}{6400}$ t≤

51. d1t2 = - 10e-0.8t>50 cos¢ Ca 2p $\frac{\quad^2}{3\text{ segundo}} - \frac{0{,}64}{2500}$ t≤

52. d1t2 = - 15e-0.9t>30 cos¢ Cap p $\frac{\quad^2}{3\text{ segundo}} - \frac{0{,}81}{900}$ t≤

---

53. Altavoz El diafragma de un altavoz oscila en un movimiento armónico simple descrito por la ecuación d = a cos1vt2 con una frecuencia de 627 hercios (ciclos por segundo) y un desplazamiento máximo de 0,50 milímetros. Encuentre v y luego determine la ecuación que describe el movimiento del diafragma.

54. Colossus Agregado a Six Flags St. Louis en 1986, el Colossus es una noria gigante. Su diámetro es de 165 pies; gira a una velocidad de aproximadamente 1,6 revoluciones por minuto; y la parte inferior de la rueda está a 15 pies del suelo. Encuentre una función que relacione la altura h de un ciclista sobre el suelo en el tiempo t. Supongamos que el pasajero comienza el viaje en la parte inferior de la rueda.

Fuente: Six Flags Theme Parks, Inc.

55. Diapasón El extremo de un diapasón se mueve en un movimiento armónico simple descrito por la función d1t2 = a sin1vt2. Si un diapasón para la nota E encima del Do central en una escala de temperamento uniforme 1E42 tiene una frecuencia de aproximadamente 329,63 hercios (ciclos por segundo), encuentre v. Si el desplazamiento máximo del extremo del diapasón es 0,025 milímetros, encuentre una función que describe el movimiento del diapasón.

Fuente: David Lapp. Física de la Música y los Instrumentos Musicales. Medford, MA: Universidad de Tufts, 2003

56. Diapasón El extremo de un diapasón se mueve en un movimiento armónico simple descrito por la función d1t2 = a sen 1vt2. Si un diapasón para la nota La por encima del Do central en una escala templada (La4, el tono con el que se afina una orquesta) tiene una frecuencia de 440 hercios (ciclos por segundo), encuentre v. Si el desplazamiento máximo del extremo del diapasón es de 0,01 milímetros, encuentre una función que describa el movimiento del diapasón.

Fuente: David Lapp. Física de la Música y los Instrumentos Musicales. Medford, MA: Universidad de Tufts, 2003

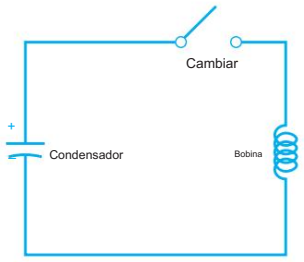
57. Carga de un condensador Consulte la figura (arriba, derecha). Si un condensador cargado se conecta a una bobina cerrando un interruptor, la energía se transfiere a la bobina y luego regresa al condensador en un movimiento oscilatorio. El voltaje V (en voltios) a través del capacitor disminuirá gradualmente hasta 0 con el tiempo t (en segundos).

(a) Grafique la función que relaciona V y t:

V1t2 = et>3 cos1pt2 0... t ... 3

(b) ¿ En qué momentos t la gráfica de V toca la gráfica de y = et>3 ? ¿Cuándo la gráfica de V toca la gráfica de y = -et>3 ?

(c) ¿Cuándo está el voltaje V entre -0,4 y 0,4 voltios?



58. La curva en diente de sierra Un osciloscopio suele mostrar una curva en diente de sierra. Esta curva puede aproximarse mediante curvas sinusoidales de períodos y amplitudes variables.

(a) Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la siguiente función, que se puede utilizar para aproximar la curva en diente de sierra.

$$f1x2 = \text{pecado}12px2 + \frac{1}{2}\text{pecado}14px2 \quad 0 \ldots x \ldots 4$$

(b) Una mejor aproximación a la curva en diente de sierra viene dada por

$$f1x2 = \frac{1}{2}\text{pecado}12px2 + \frac{1}{4}\text{pecado}14px2 + \frac{1}{8}\text{pecado}18px2$$

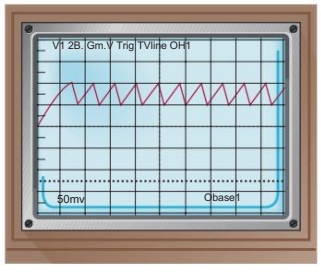
Utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente esta función para 0... x ... 4 y compare el resultado con la gráfica obtenida en el inciso (a).

(c) Una tercera e incluso mejor aproximación al diente de sierra la curva está dada por

$$f1x2 = \frac{1}{2}\text{pecado}12px2 + \frac{1}{4}\text{pecado}14px2 + \frac{1}{8}\text{pecado}18px2 + \frac{1}{\text{dieciséis}}\text{pecado}116px2$$

Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente esta función para 0… x … 4 y compare el resultado con las gráficas obtenidas en los incisos (a) y (b).

(d) ¿Cuál cree usted que es la próxima aproximación a la curva de diente de sierra es?



Machine Translated by Google

59. Una señal de reloj Una señal de reloj es una señal no sinusoidal que se utiliza para coordinar las acciones de un circuito digital. Estas señales oscilan entre dos niveles, alto y bajo, "instantáneamente" a intervalos regulares. La señal de reloj más común tiene la forma de una onda cuadrada y puede aproximarse mediante la suma de ondas sinusoidales armónicas simples, como

$$f1x2 = 2{,}35 + \text{sen } x + \frac{\text{pecado}13x2}{3} + \frac{\text{pecado}15x2}{5} + \frac{\text{pecado}17x2}{7} + \frac{\text{pecado}19x2}{9}$$

Grafique esta función para - 4p … x … 4p.

60. Ondas no sinusoidales Tanto las ondas en dientes de sierra como las cuadradas (véanse los problemas 58 y 59) son ejemplos de ondas no sinusoidales. Otro tipo de onda no sinusoidal se ilustra con la función

$$f1x2 = 1{,}6 + \cos x + \frac{1}{9}\text{ porque }13x2 + \frac{1}{25}\text{ porque}15x2 + \frac{1}{49}\cos 17x2$$

Grafique la función para - 5p … x … 5p.

61. Grafique el sonido emitido por la tecla * en un teléfono de tonos.
Consulte el Problema 51 en la Sección 7.7.

62. Experimento CBL El sonido de un diapasón se recoge con el tiempo. A los datos se les ajusta un modelo de la forma y = A cos 3B1x - C24. Encuentra la amplitud, frecuencia y período de la gráfica.

(Actividad 23, Matemáticas del mundo real con el sistema CBL).

63. Experimento CBL Se analiza el movimiento pendular para estimar el movimiento armónico simple. Se genera un gráfico con la posición del péndulo a lo largo del tiempo. La gráfica se utiliza para encontrar una curva sinusoidal de la forma y = A cos 3B1x - C2 4 + D.
Encuentre la amplitud, el período y la frecuencia.
(Actividad 16, Matemáticas del mundo real con el sistema CBL).

64. Problema de desafío Beats Cuando dos ondas sinusoidales viajan a través del mismo medio, se forma una tercera onda que es la suma de las dos ondas originales. Si las dos ondas tienen frecuencias ligeramente diferentes, la suma de las ondas da como resultado un patrón de interferencia conocido como latido . Los músicos utilizan esta idea al afinar un instrumento con la ayuda de un diapasón. Si el instrumento y el diapasón tocan la misma frecuencia, no se escucha ningún ritmo. Supongamos dos ondas dadas por las funciones, y1 = 3 cos1v1t2 e y2 = 3 cos1v2t2 donde v1 7 v2 pasan por el mismo medio y cada una tiene un máximo en t = 0 seg.

(a) ¿Cuánto tiempo le toma a la función suma y3 = y1 + y2 ser igual a 0 por primera vez?

(b) Si los períodos de las dos funciones y1 e y2 son T1 = 19 s y T2 = 20 s, respectivamente, encuentre la primera vez la suma y3 = y1 + y2 = 0.

(c) Utilice los valores del inciso (b) para representar gráficamente y3 en el intervalo 0... x ... 600. ¿Parece que las ondas están afinadas?

Explicar conceptos: discusión y escritura

65. Grafica la función $f1x2 = \frac{\text{pecado } x}{x}$, x 7 0. Según la gráfica, sen x ¿Qué conjeturas sobre el valor de para x cercano a 0? $\frac{}{x}$

66. Grafique y = x sen x, y = x2 sen x e y = x3 sen x para x 7 0.
¿Qué patrones observas?

67. Grafica y = $\frac{1}{x}$ sen x, y = sen $\frac{1}{x}$ e y = sen x para x 7 0.
x2 x3 ¿Qué patrones observas?

68. ¿Cómo le explicarías el movimiento armónico simple a un amigo? ¿Cómo explicarías el movimiento amortiguado?

Conserve su conocimiento

Los problemas 69 a 78 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

69. La función f1x2 = x - 4 $\frac{x - 3}{}$, x · 4, es uno a uno.
Encuentra su función inversa.

70. Escribe como un logaritmo único: log7 x + 3 log7 y - log7 1x + y2

71. Resuelve: log1x + 12 + log1x - 22 = 1

72. Si cos a = 5 $\frac{4}{}$, 0 6 un 6 $\frac{\text{pag}}{2}$, encontrar el valor exacto de:

(a) cos 2 $\frac{a}{}$ (b) pecado $\frac{a}{2}$ (c) bronceado $\frac{a}{2}$

73. Si f1x2 = 23 - 5x y g1x2 = x2 + 7, encuentre g1f1x2 2 y su dominio.

74. Si cos u = y $\frac{5}{7}$ tan u 6 0, ¿cuál es el valor de csc u?

75. La recta normal a una gráfica en un punto es la recta perpendicular a la recta tangente de la gráfica en el punto. si la tangente la recta es y = $\frac{2}{}$x - 1 cuando f132 = 1, encuentre una ecuación de 3 línea normal.

76. Resuelve: $\frac{x2 \# \frac{1}{x} - \text{en } x \# 2x}{1x2^{2}} = 0$

2 77. Si h1x2 es una función con rango 3 - 5, 84, ¿cuál es el rango de h12x + 32?

78. Resuelve: x2 15x - 32 1x + 22 … 0

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. A = 5; t = $\frac{\text{pag}}{2}$ 2. 0,105 rad/seg 3. y = 7 sen a px $\frac{}{\text{6 segundo}}$

Machine Translated by Google

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Fórmulas

Ley de los senos (p. 572)

$$\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado b}}{b} = \frac{\text{pecado C}}{c}$$

Ley de los cosenos (p. 582)

$$c2 = a2 + b2 - 2ab \text{ porque } C$$

$$b2 = a2 + c2 - 2ac \text{ porque } B$$

$$a2 = b2 + c2 - 2bc \text{ porque } A$$

Área de un triángulo (págs. 589 y 591)

$$k = 2 \quad \frac{1}{}\text{bh } K = \quad \frac{1}{}\text{ab sen } CK = 2 \quad \frac{1}{\text{antes de Cristo pecado AK}} \quad \frac{1}{2}\text{ca pecado B}$$

$$= 2$$

$$K = 2s1s - a2\,1s - b2\,1s - c2 \text{ donde } s = \frac{1}{2}\,1a + b + c2$$

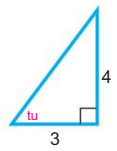
Objetivos

Sección	Deberías poder hacerlo. . .	Ejemplo(s)	Ejercicios de revisión
8.1	1 Encuentra el valor de funciones trigonométricas de ángulos agudos usando triángulos rectángulos (p. 558)	1, 2	1, 2, 27
	2 Usa el teorema de los ángulos complementarios (p. 560)	3	3–5
	3 Resolver triángulos rectángulos (p. 560)	4, 5	6, 7, 27
	4 Resolver problemas aplicados (p. 561)	6-12	28–31, 36–38
8.2	1 Resolver triángulos SAA o ASA (p. 572)	1, 2	8, 19
	2 Resolver triángulos SSA (p. 573)	3–5	9, 10, 12, 16, 18
	3 Resolver problemas aplicados (p. 575)	6, 7	32, 33
8.3	1 Resolver triángulos SAS (p. 583)	1	11, 15, 20
	2 Resolver triángulos SSS (p. 583)	2	13, 14, 17
	3 Resolver problemas aplicados (p. 584)	3	34
8.4	1 Encuentra el área de los triángulos SAS (p. 589)	1	21, 22, 26, 35
	2 Encuentra el área de los triángulos SSS (p. 590)	2	23, 24
8.5	1 Construir un modelo para un objeto en movimiento armónico simple (p. 595)	1	39
	2 Analizar el movimiento armónico simple (p. 597)	2	40, 41
	3 Analizar un objeto en movimiento amortiguado (p. 598)	3	42, 43
	4 Grafica la suma de dos funciones (p. 600)	4, 5	44

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 y 2, encuentra el valor exacto de las seis funciones trigonométricas del ángulo u en cada figura.

1.



2.

En los problemas 3 a 5, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

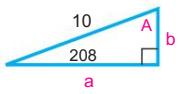
3. cos 62° - sen 28°

4. $\frac{\text{bronceado } 70°}{\text{cuna } 20°}$

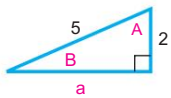
5. cos2 40° + cos2 50°

En los problemas 6 y 7, resuelve cada triángulo.

6.



7.



Machine Translated by Google

En los problemas 8 a 20, encuentre los ángulos y lados restantes de cada triángulo, si existen. Si no existe ningún triángulo, diga "Sin triángulo".

8. A = 30°, B = 75°, b = 5

9. A = 100°, a = 5, c = 2

10. a = 3, c = 1, C = 110°

11. a = 3, c = 1, B = 100°

12. a = 4, b = 6, A = 50°

13. a = 2, b = 3, c = 1

14. a = 6, b = 8, c = 4

15. a = 1, b = 3, C = 40°

16. a = 3, b = 5, C = 40°

17. a = 1, b = 2 $\frac{1}{2}$, c = $\frac{4}{3}$

18. a = 3, A = 10°, b = 4

19. a = 4, A = 20°, B = 100°

20. c = 5, b = 4, A = 70°

En los problemas 21 a 25, encuentra el área de cada triángulo.

21. a = 2, b = 3, C = 40°

22. a = 7, c = 10, B = 60°

23. a = 4, b = 3, c = 5

24. a = 4, b = 2, c = 5

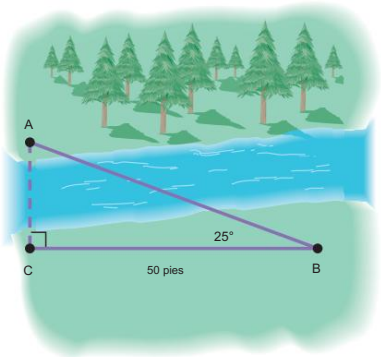
25. B = 40°, C = 60°, b = 4

---

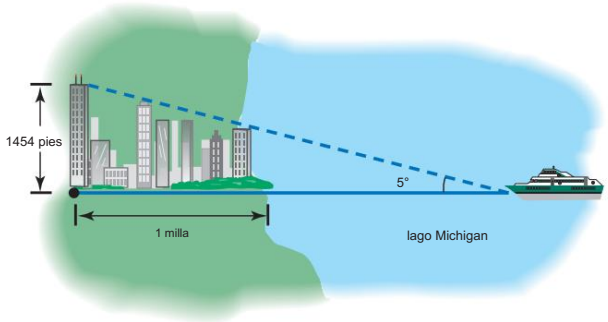
26. Área de un segmento Encuentra el área del segmento de un círculo cuyo radio es de 8 pulgadas formado por un ángulo central de 30°.

27. Geometría La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 7 pies. Si un cateto mide 4 pies, encuentre la medida en grados de cada ángulo.

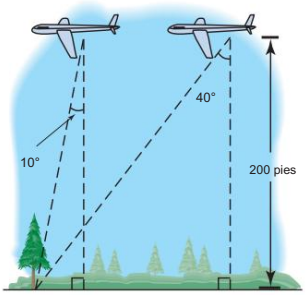
28. Calcular el ancho de un río Calcula la distancia de A a C a través del río ilustrado en la figura.



29. Calcular la distancia a la costa La Torre Willis en Chicago tiene 1454 pies de altura y está situada aproximadamente a 1 milla tierra adentro desde la orilla del lago Michigan, como se indica en la figura. Un observador en un barco de recreo en el lago directamente frente a la Torre Willis mira la parte superior de la torre y mide el ángulo de elevación en 5°. ¿A qué distancia de la costa está el barco?

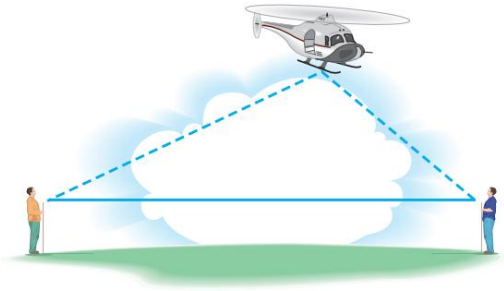


30. Calcular la velocidad de un planeador Desde un planeador a 200 pies sobre el suelo, se toman dos avistamientos de un objeto estacionario directamente en frente con 1 minuto de diferencia (ver la figura, arriba a la derecha). ¿Cuál es la velocidad del planeador?

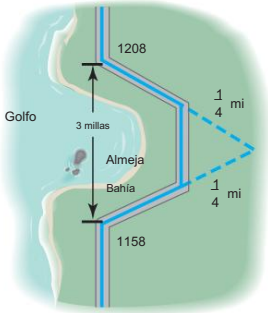


31. Calcular la pendiente de un sendero de montaña Un sendero recto con una inclinación uniforme conduce desde un hotel, con una elevación de 5000 pies, hasta un lago en un valle, con una elevación de 4100 pies. La longitud del sendero es de 4100 pies. ¿Cuál es la inclinación (grado) del sendero?

32. Calcular la altura de un helicóptero Dos observadores miden simultáneamente el ángulo de elevación de un helicóptero. Un ángulo mide 25° y el otro 40° (ver figura). Si los observadores están a 100 pies de distancia y el helicóptero se encuentra sobre la línea que los une, ¿a qué altura está el helicóptero?



33. Construcción de una carretera Se está construyendo una carretera cuyas direcciones principales son norte-sur a lo largo de la costa oeste de Florida. Cerca de Nápoles, una bahía obstruye el rumbo recto de la carretera. Como el coste de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden rodear la bahía. En la figura se muestra el camino que deciden y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud de la carretera necesaria para rodear la bahía?

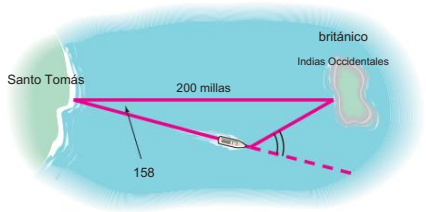


Machine Translated by Google

34. Corregir un error de navegación Un velero sale de St. Thomas con destino a una isla en las Indias Occidentales Británicas, a 200 millas de distancia. Manteniendo una velocidad constante de 18 millas por hora, pero encontrando fuertes vientos cruzados y fuertes corrientes, la tripulación descubre, después de 4 horas, que el velero se desvía 15° de su rumbo.

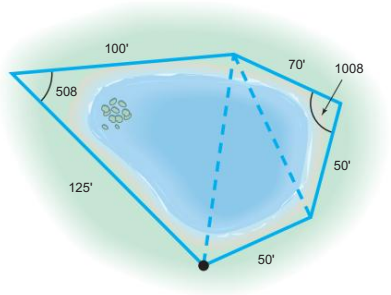
(a) ¿A qué distancia está el velero de la isla en este momento?
(b) ¿Qué ángulo debe girar el velero para corregir su rumbo?

(c) ¿Cuánto tiempo se ha agregado al viaje debido a esto? (Suponga que la velocidad se mantiene en 18 millas por hora).



35. Aproximar el área de un lago Para aproximar el área de un lago, Cindy camina alrededor del perímetro del lago y toma las medidas que se muestran en la figura. Usando esta técnica, ¿cuál es el área aproximada del lago?

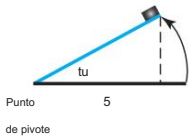
[Sugerencia: use la ley de los cosenos en los tres triángulos que se muestran y luego encuentre la suma de sus áreas.]



36. Determinar el rumbo de un barco El Majesty sale del puerto de Boston hacia las Bermudas con un rumbo de S80°E a una velocidad promedio de 10 nudos. Después de 1 hora, el barco gira 90° hacia el suroeste. Después de 2 horas a una velocidad promedio de 20 nudos, ¿cuál es el rumbo del barco desde Boston?

37. Fuerza de fricción Una caja colocada sobre una superficie plana tiene un coeficiente de fricción estática de ms = 0,3. Si se levanta un extremo de la superficie, la fricción estática evita que la caja se deslice hasta que se supere la fuerza de la fricción estática. El ángulo crítico en el que la caja comienza a deslizarse, uc, se puede encontrar a partir de la ecuación tan uc = (a) ¿Cuál es el EM.
ángulo crítico de la caja?

(b) Si la caja está a 5 pies del punto de pivote, ¿a qué altura comenzará a deslizarse? Ver la figura.



38. Fuerza de fricción (consulte el problema 37). Una vez que la caja comienza a deslizarse y acelerarse, la fricción cinética actúa para frenar la caja con un coeficiente de fricción cinética mk = 0,1. El extremo elevado de la superficie se puede bajar hasta un punto en el que la caja continúa deslizándose pero no acelera. El ángulo crítico en el que esto sucede, uc′ , se puede encontrar a partir de la ecuación tan uc′ = mk.

(a) ¿Cuál es este ángulo crítico para la caja?

(b) Si la caja está a 5 pies del punto de pivote, ¿a qué altura dejará de acelerar?

39. Movimiento armónico simple Un objeto sujeto a un resorte helicoidal se tira hacia abajo una distancia a = 3 unidades desde su posición de reposo y luego se suelta. Suponiendo que el movimiento es armónico simple con período T = 4 segundos, encuentre un modelo que relacione el desplazamiento d del objeto desde su posición de reposo después de t segundos. Suponga también que la dirección positiva del movimiento es hacia arriba.

En los problemas 40 y 41 se da el desplazamiento d (en pies) de un objeto desde su posición de reposo en el tiempo t (en segundos).

(a) Describe el movimiento del objeto.
(b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo desde su posición de reposo?
(c) ¿Cuál es el tiempo requerido para una oscilación?
(d) ¿Cuál es la frecuencia?

40. d1t2 = 6 sen12t2 41. d1t2 = - 2 cos1pt2

42. Movimiento armónico amortiguado Un objeto de masa m = 40 gramos unido a un resorte helicoidal con factor de amortiguación b = 0,75 gramos/segundo se tira hacia abajo una distancia a = 15 centímetros desde su posición de reposo y luego se suelta.
Suponga que la dirección positiva del movimiento es hacia arriba y el período es T = 5 segundos bajo movimiento armónico simple.

(a) Encuentre una función que modele el desplazamiento d del objeto desde su posición de reposo después de t segundos.
(b) Grafique la ecuación encontrada en el inciso (a) para 5 oscilaciones.

43. Movimiento amortiguado El desplazamiento d (en metros) de la masa de un péndulo de 20 kilogramos de masa desde su posición de reposo en el tiempo t (en segundos) está dado como

$$d(t) = -15e^{-0.6t}\cos\left(\frac{2\pi}{5\text{ segundo}} - \frac{0{,}36}{1600}\right)t$$

(a) Describe el movimiento del objeto.

(b) ¿Cuál es el desplazamiento inicial de la pesa? Eso es lo que ¿Es el desplazamiento en t = 0?

(c) Grafique la función d usando una utilidad gráfica.

(d) ¿Cuál es el desplazamiento de la pesa al comienzo de la segunda oscilación?

(e) ¿Qué sucede con el desplazamiento de la pesa a medida que el tiempo aumenta sin límite?

44. Grafique y = 2 sen x + cos12x2 sumando las coordenadas y.

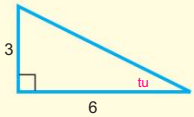
Machine Translated by Google

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

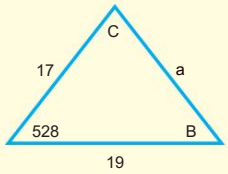
1. Encuentra el valor exacto de las seis funciones trigonométricas de la ángulo u en la figura.



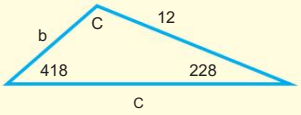
2. Encuentra el valor exacto de sen 40°-cos 50°.

En los problemas 3 a 5, utiliza la información dada para determinar las tres partes restantes de cada triángulo.

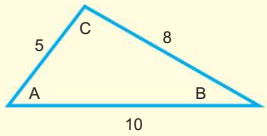
3.



4.



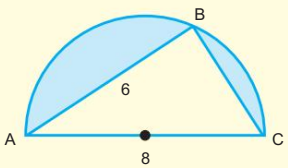
5.



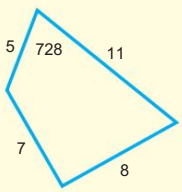
En los problemas 6 a 8, resuelve cada triángulo.

6. A = 55°, C = 20°, a = 4
7. a = 3, b = 7, A = 40°
8. a = 8, b = 4, C = 70°
9. Encuentra el área del triángulo descrito en el Problema 8.
10. Encuentra el área del triángulo descrito en el Problema 5.
11. Una escalera de 12 pies está apoyada contra un edificio. La parte superior de la escalera está apoyada contra la pared a 10,5 pies del suelo. ¿Cuál es el ángulo que forman el suelo y la escalera?
12. Un globo aerostático vuela a una altura de 600 pies y está directamente sobre el Centro Marshall de Vuelos Espaciales en Huntsville, Alabama. El piloto del globo mira hacia el aeropuerto que se sabe que está a 5 millas del Centro Marshall de Vuelos Espaciales. ¿Cuál es el ángulo de depresión del globo al aeropuerto?
13. Calcula el área de la región sombreada encerrada en un semicírculo de 8 centímetros de diámetro. La longitud de la cuerda AB es de 6 centímetros.

    [Pista: El triángulo ABC es un triángulo rectángulo.]

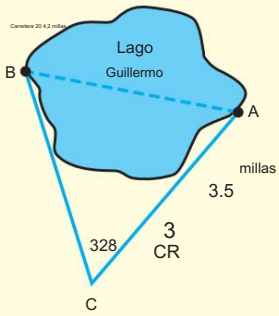


14. Encuentra el área del cuadrilátero que se muestra.

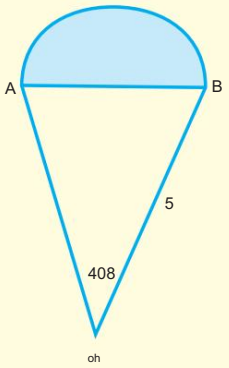


15. Madison quiere cruzar a nado el lago William desde el albergue de pesca (punto A) hasta la rampa para botes (punto B), pero primero quiere saber la distancia. La autopista 20 pasa justo por la rampa para botes y la County Road 3 va hasta el albergue. Los dos caminos se cruzan en el punto C, a 4,2 millas de la rampa y a 3,5 millas del albergue. Madison usa un tránsito para medir el ángulo de intersección de las dos carreteras y es de 32°. ¿Hasta dónde necesitará

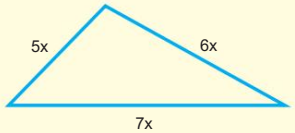
    ¿nadar?



16. Dado que OAB es un triángulo isósceles y el sector sombreado es un semicírculo, encuentra el área de toda la región. Expresa tu respuesta como un decimal redondeado a dos cifras.



17. El área del triángulo que se muestra a continuación es 5426 unidades cuadradas. Encuentra las longitudes de los lados.



18. Logan está jugando en su swing. Un movimiento completo (de adelante hacia atrás y hacia adelante) toma 6 segundos, y en el pico de su movimiento ella está en un ángulo de 42° con la vertical. Si su swing mide 5 pies de largo e ignoramos todas las fuerzas de resistencia, encuentre una función que modele su desplazamiento horizontal (desde la posición de reposo) después del tiempo t.

Machine Translated by Google

Revisión acumulativa

1. Encuentra las soluciones reales, si las hay, de la ecuación 3x2 + 1 = 4x.
2. Encuentra una ecuación para el círculo con centro en el punto 1 - 5, 12 y radio 3. Grafica este círculo.
3. Encuentra el dominio de la función.

$$f1x2 = \sqrt{2x2 - 3x - 4}$$

4. Grafica la función: y = 3 sin1px2
5. Grafica la función: y = - 2 cos12x - p2
6. Si tan u = - 2 y $\frac{3p}{2}$ 6 u 6 2p, encuentra el valor exacto de:

(a) pecado u (b) porque tú (c) pecado12u2

(d) cos12u2 (e) siná 1 $\sqrt{}_{2\text{ unidades}}$ (f) cosa 1 $\sqrt{}_{2\text{ unidades}}$

7. Grafica cada una de las siguientes funciones en el intervalo 30, 44:

(a) y = ex (c) y = ex sen x 8. (b) y = sen x (d) y = 2x + sen x

Grafica cada una de las siguientes funciones:

(a) y = x (d) y = x3 (e) y = ex (f) y = ln x (g) y = sen x (h) y = cos x (i) y = tan x (b) y = x2 (c) y = 1x

9. Resuelve el triángulo cuyo lado a es 20, lado c es 15 y el ángulo C es 40°.
10. En el sistema de números complejos, resuelve la ecuación.

$$3x5 - 10x4 + 21x3 - 42x2 + 36x - 8 = 0$$

11. Grafica la función racional

$$R1x2 = \frac{2x2 - 7x - 4}{x2 + 2x - 15}$$

12. Resuelve 3x = 12. Redondea tu respuesta a dos decimales.
13. Resuelve: log3 1x + 82 + log3 x = 2
14. Supongamos que f1x2 = 4x + 5 y g1x2 = x2 + 5x - 24.

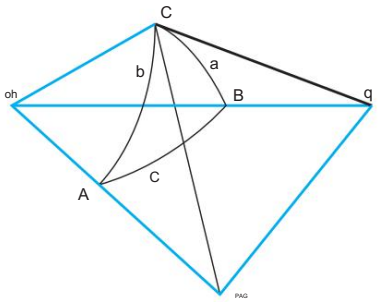
(a) Resuelva f1x2 = 0. (b) Resuelva f1x2 = 13.
(c) Resuelva f1x2 = g1x2. (d) Resuelva f1x2 7 0.
(e) Resuelva g1x2 … 0. (f) Grafique y = f1x2.
(g) Grafique y = g1x2.

Proyectos del Capítulo

I. Trigonometría esférica Cuando la distancia entre dos lugares en la superficie de la Tierra es pequeña, podemos tratar a la Tierra como un plano y calcular la distancia en millas estatutarias. Usando esta suposición, podemos usar la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos para aproximar distancias y ángulos.
Sin embargo, la Tierra es una esfera, por lo que a medida que aumenta la distancia entre dos puntos de su superficie, la distancia lineal es menos precisa. En esta circunstancia, debemos tener en cuenta la curvatura de la Tierra al utilizar la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos.

1. Ver la figura. Los puntos A, B y C son los vértices de un triángulo esférico con lados a, b y c, una figura de tres lados dibujada en la superficie de una esfera con centro en el punto O. Conecte cada vértice por un radio a el centro O de la esfera. Ahora dibuja líneas tangentes a los lados a y b del triángulo que pasa por C.

   Extiende las rectas OA y OB para intersecar las rectas tangentes en P y Q, respectivamente. Enumera los triángulos rectángulos planos. Encuentra las medidas de los ángulos centrales.



2. Usa la ley de los cosenos con los triángulos OPQ y CPQ para encontrar dos expresiones para la longitud de PQ.
3. Resta las expresiones de la parte (2) entre sí.
   Resuelva para encontrar el término que contiene cos c.
4. Utilice el teorema de Pitágoras para encontrar otro valor para OQ2 - CQ2 y OP2 - CP2 . Ahora resuelve para cos c.
5. Reemplazando las razones en la parte (4) por los cosenos de los lados del triángulo esférico, ahora deberías tener la Ley de los cosenos para triángulos esféricos:

   cos c = cos a cos b + sen a sen b cos C

Fuente: Para conocer la ley esférica de los cosenos, consulte Matemáticas desde el nacimiento de los números de Jan Gullberg. WW Norton & Co., Editores, 1996, págs. 491–494.

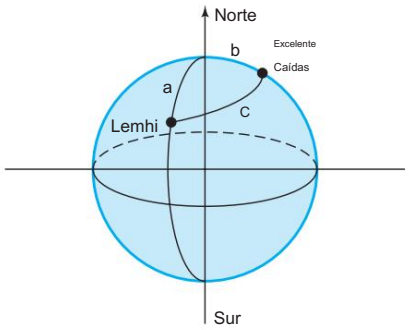
II. La expedición de Lewis y Clark Lewis y Clark siguieron varios ríos en su viaje desde lo que hoy es Great Falls, Montana, hasta la costa del Pacífico. Primero, bajaron por los ríos Missouri y Jefferson desde Great Falls hasta Lemhi, Idaho. Debido a que las dos ciudades están en longitudes y latitudes diferentes, debemos tener en cuenta la curvatura de la Tierra al calcular la distancia que viajaron. Suponga que el radio de la Tierra es de 3960 millas.

1. Great Falls está aproximadamente a 47,5°N y 111,3°W.
   Lemhi está aproximadamente a 45,5 ° N y 113,5 ° W. (Asumiremos que los ríos fluyen directamente desde Great Falls hasta Lemhi en la superficie de la Tierra). Esta línea es (continuación)

Machine Translated by Google

llamada línea geodésica. Usa la ley de los cosenos para un triángulo esférico [ver Proyecto I, parte (5)] para encontrar el ángulo entre Great Falls y Lemhi. (Los ángulos centrales se encuentran usando las diferencias en las latitudes y longitudes de los pueblos. Vea la figura.)

Luego encuentra la longitud del arco que une las dos ciudades. (Recuerde s = r u.)



2. Desde Lemhi, subieron por el río Bitteroot y el río Snake hasta lo que hoy es Lewiston y Clarkston en la frontera de Idaho y Washington. Aunque esto no es realmente un lado de un triángulo, haremos un lado que vaya desde Lemhi hasta Lewiston y Clarkston. Si Lewiston y Clarkston están aproximadamente a 46,5°N 117,0°W, encuentre la distancia desde Lemhi usando la ley de los cosenos para un triángulo esférico y la longitud del arco.
3. ¿ Qué distancia viajaron los exploradores sólo para llegar tan lejos?
4. Dibuja un triángulo plano que conecte las tres ciudades. Si la distancia desde Lewiston a Great Falls es 282 millas y el ángulo en Great Falls es de 42° y el ángulo en Lewiston es de 48.5°, encuentre la distancia de Great Falls a Lemhi y de Lemhi a Lewiston. ¿Cómo se comparan estas distancias con las calculadas en las partes (1) y (2)?

Fuente: Para la expedición de Lewis y Clark: viaje americano: la búsqueda de la libertad hasta 1877, edición de Texas. Prentice Hall, 1992, pág. 345.

Fuente: Para coordenadas cartográficas: National Geographic Atlas of the World, publicado por National Geographic Society, 1981, págs. 74–75.

Cita: Utilizado con autorización de Technology Review, de W. Roush, “From Lewis and Clark to Landsat: David Rumsey's Digital Maps Marry Past and Present”, 108, no. 7, © 2005; permiso transmitido a través de Copyright Clearance Center, Inc.

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC):

III. Proyecto en Motorola: ¿Cómo se puede construir o analizar un perfil de vibración? Las funciones de Fourier no sólo son importantes para analizar vibraciones pero también son lo que un matemático llamaría interesantes. Complete el proyecto para ver por qué.

IV. La trigonometría de la Torre Inclinada de Pisa se utiliza para analizar la altura aparente y la inclinación de la Torre Inclinada de Pisa.

V. Localización del tesoro perdido Los buscadores de tesoros inteligentes que conocen la Ley de los Senos pueden encontrar un tesoro enterrado de manera eficiente.

VI. Campo de Jacob Los ángulos de elevación y la ley de los senos se utilizan para determinar la altura del muro del estadio y la distancia desde plato de home hasta la parte superior de la pared.

Machine Translated by Google

Coordenadas polares; Vectores

9

Cómo vuelan los aviones

Cuatro fuerzas aerodinámicas actúan sobre un avión en vuelo: sustentación, resistencia, empuje y peso (gravedad).

La resistencia es la resistencia de las moléculas de aire que golpean el avión (la fuerza hacia atrás), el empuje es la potencia del motor del avión (la fuerza hacia adelante), la sustentación es la fuerza hacia arriba y el peso es la fuerza hacia abajo . Entonces, para que los aviones vuelen y se mantengan en el aire, el empuje debe ser mayor que la resistencia y la sustentación debe ser mayor que el peso.

Este es ciertamente el caso cuando un avión despega o asciende.
Sin embargo, cuando está en vuelo recto y nivelado, las fuerzas opuestas de sustentación y peso están equilibradas. Durante un descenso, el peso supera la sustentación y, para frenar el avión, la resistencia debe superar el empuje.

El empuje lo genera el motor del avión (hélice o jet), el peso lo crea la fuerza natural de la gravedad que actúa sobre el avión y la resistencia proviene de la fricción cuando el avión se mueve a través de las moléculas de aire.
La resistencia también es una reacción a la sustentación, y esta sustentación debe ser generada por el avión en vuelo. Esto lo hacen las alas del avión.

Una sección transversal del ala de un avión típico muestra que la superficie superior es más curvada que la superficie inferior. Este perfil con forma se llama perfil aerodinámico (o perfil aerodinámico), y la forma se utiliza porque un perfil aerodinámico genera significativamente más sustentación que la resistencia opuesta. En otras palabras, es muy eficiente generando sustentación.

Durante el vuelo, el aire fluye naturalmente sobre y debajo del ala y se desvía hacia arriba sobre la superficie superior y hacia abajo debajo de la superficie inferior. Cualquier diferencia en la deflexión provoca una diferencia en la presión del aire (gradiente de presión) y, debido a la forma del perfil aerodinámico, la presión del aire desviado es menor por encima del perfil aerodinámico que debajo de él. Como resultado, el ala es “empujada” hacia arriba por la presión más alta que hay debajo o, se puede argumentar, es “succionada” hacia arriba por la presión más baja que hay arriba.

Fuente : Adaptado de Pete Carpenter. Cómo vuelan los aviones: los principios básicos del vuelo http://www.rc-airplane-world.com/how-airplanes-fly.html, consultado en mayo de 2018.
© rc-airplane-world.com

—Ver Capítulo Proyecto I—

Una mirada atrás, una mirada adelante

Este capítulo consta de dos partes: Coordenadas polares (Secciones 9.1—9.3) y Vectores (Secciones 9.4—9.7). Son independientes entre sí y pueden cubrirse en cualquier orden.

Secciones 9.1 a 9.3: En el Capítulo 1, introdujimos las coordenadas rectangulares (el plano xy) y analizamos la gráfica de una ecuación en dos variables que involucran x e y. En las secciones 9.1 y 9.2, presentamos las coordenadas polares, una alternativa a las coordenadas rectangulares, y analizamos la representación gráfica de ecuaciones que involucran coordenadas polares. En la sección 5.3 analizamos cómo elevar un número real a una potencia real. En la sección 9.3 ampliamos esta idea elevando un número complejo a una potencia real.
Resulta que las coordenadas polares son útiles para la discusión.

Secciones 9.4 a 9.7: Hemos visto en muchos capítulos que a menudo se nos pide que resuelvamos una ecuación para obtener una solución a problemas aplicados. En las últimas cuatro secciones de este capítulo, desarrollamos la noción de vector y mostramos cómo se puede utilizar para modelar problemas aplicados en física e ingeniería.

Describir

9.1 Coordenadas polares
9.2 Ecuaciones polares y gráficas
9.3 El Plano Complejo; Teorema de De Moivre
9.4 Vectores
9.5 El producto escalar
9.6 Vectores en el espacio
9.7 El producto cruzado
Revisión del capítulo
Prueba de capítulo
Revisión acumulativa
Proyectos del Capítulo

Machine Translated by Google

9.1 Coordenadas polares

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Coordenadas rectangulares (Sección 1.1, págs. 38 y 39)
- Definición de las funciones trigonométricas (Sección 6.2, págs. 412 y 422)
- La fórmula de la distancia (Sección 1.1, págs. 39 y 40)
- Función tangente inversa (Sección 7.1, págs. 490–492)
- Completar el cuadrado (Sección A.3, p. A29)
- Ángulos; Medida de Grados; Medida en radianes (Sección 6.1, págs. 398–403)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 619.

OBJETIVOS 1 Trazar puntos usando coordenadas polares (p. 612)
2 Convertir de coordenadas polares a coordenadas rectangulares (p. 614)
3 Convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares (p. 616)
4 Transformar ecuaciones entre formas polares y rectangulares (p. 618)

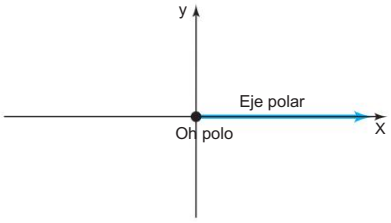


Figura 1

Hasta ahora siempre hemos utilizado un sistema de coordenadas rectangulares para trazar puntos en el plano. Ahora estamos listos para describir otro sistema, llamado coordenadas polares. En muchos casos, las coordenadas polares ofrecen ciertas ventajas sobre las coordenadas rectangulares.

Como recordará, en un sistema de coordenadas rectangular, un punto en el plano está representado por un par ordenado de números 1x, y2, donde x e y son iguales a las distancias con signo del punto desde el eje y y el eje x, respectivamente. . En un sistema de coordenadas polares, seleccionamos un punto, llamado polo, y luego un rayo con vértice en el polo, llamado eje polar. Consulte la Figura 1. Al comparar los sistemas de coordenadas rectangulares y polares, observe que el origen en coordenadas rectangulares coincide con el polo en coordenadas polares y el eje x positivo en coordenadas rectangulares coincide con el eje polar en coordenadas polares.

1 Trazar puntos usando coordenadas polares

Un punto P en un sistema de coordenadas polares está representado por un par ordenado 1r, u2 de números. Si r 7 0, entonces r es la distancia del punto al polo; u es un ángulo (en grados o radianes) formado por el eje polar y un rayo del polo que pasa por el punto. Al par ordenado 1r, u2 lo llamamos coordenadas polares del punto. Ver Figura 2.

Como ejemplo, supongamos que un punto P tiene coordenadas polares a2, $\frac{\pi}{4}$b. Localizar P dibujando primero un ángulo de 4 $\frac{\pi}{4}$ radianes, situando su vértice en el polo y su lado inicial a lo largo del eje polar. Luego recorra una distancia de 2 unidades a lo largo del lado terminal del ángulo para llegar al punto P. Consulte la Figura 3.

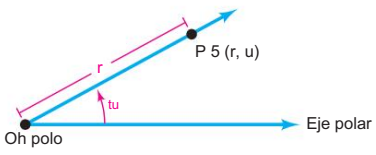


Figura 2

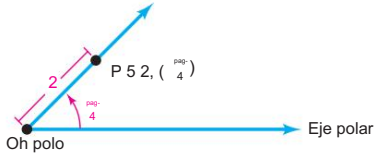


figura 3

Al utilizar las coordenadas polares 1r, u2, es posible que r sea negativo. Cuando esto sucede, en lugar de que el punto esté en el lado terminal de u, está en el rayo del polo que se extiende en dirección opuesta al lado terminal de u a una distancia de 0r0 unidades del polo. Consulte la Figura 4 para ver una ilustración.

Por ejemplo, para trazar el punto a - 3, $\frac{2\pi}{3}$b, usa el rayo en la dirección opuesta de $\frac{2\pi}{3}$ y sale 0 - 3 0 = 3 unidades a lo largo de ese rayo. Ver Figura 5.

Machine Translated by Google

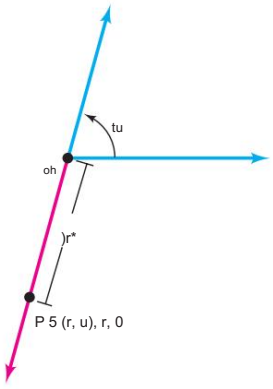


Figura 4

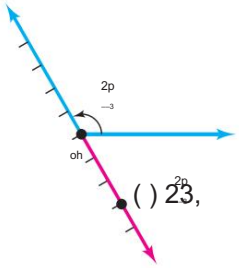


Figura 5

EJEMPLO 1 Trazar puntos usando coordenadas polares

Traza los puntos con las siguientes coordenadas polares:

(a)a3, 5p ——— (b) a2, - pag ——— (c) 13, 02 (d) a - 2, pag ———
3 segundo 4 segundo 4 segundo

Solución La Figura 6 muestra los puntos.

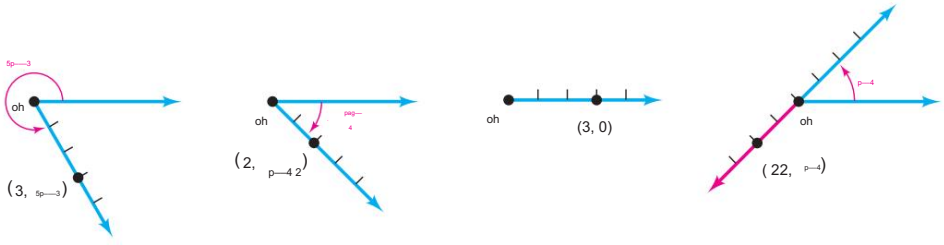


Figura 6 (a) (b) (C) (d)

Ahora problemas de trabajo 1 3 , 2 5 , y 3 1

Recuerde que un ángulo medido en el sentido contrario a las agujas del reloj es positivo y un ángulo medido en el sentido de las agujas del reloj es negativo. Esta convención tiene algunas consecuencias interesantes relacionadas con las coordenadas polares.

EJEMPLO 2 Encontrar varias coordenadas polares de un solo punto

Consideremos nuevamente el punto P con coordenadas polares a2, p 4b, como se muestra en la Figura 7(a). porque 4 pag —, 9p —, y - 7p — todos tienen el mismo lado terminal, este punto P también puede ser
4 4 4

localizado usando las coordenadas polares a2, 9p 4 b o las coordenadas polares a2, - 7p 4b,

como se muestra en las Figuras 7(b) y (c). El punto a2, p 4 b también puede representarse por el

coordenadas polares a - 2, 5p 4b. Véase la Figura 7(d).

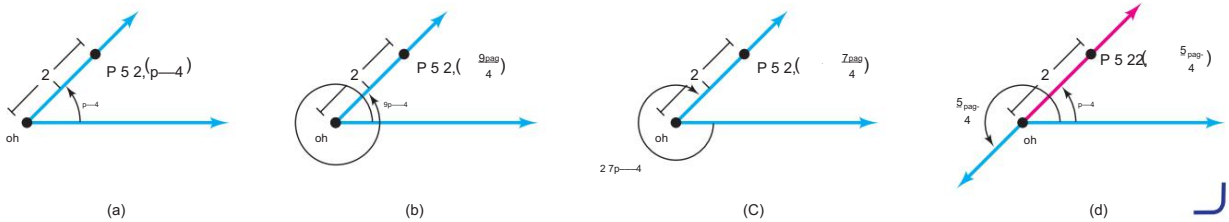


Figura 7 (a) (b) (C) (d)

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Encontrar otras coordenadas polares de un punto determinado

Traza el punto P con coordenadas polares a3, p 6 b, y encontrar otras coordenadas polares 1r, u2 de este mismo punto para lo cual:

(a) r 7 0, 2p … u 6 4p (c) r 7 0, - 2p … u 6 0

(b) r 6 0, 0 … u 6 2p

Solución

El punto a3, p 6b se representa en la Figura 8.

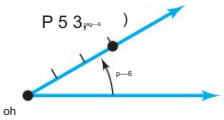


Figura 8

(a) Sume 1 revolución de 12p radianes2 al ángulo pag 6 Llegar

P = a3, p 6 + 2pb = a3, 13p 6b.

Ver Figura 9.

(b) Añadir 1 2 revolución 1p radianes2 al ángulo pag 6, y reemplace 3 por - 3 para obtener P = a - 3, pag 6 + pb = a - 3, 7p 6b. Ver Figura 10.

(c) Resta 2p del ángulo Figura 11. pag 6 para obtener P = a3, p 6 - 2pb = a3, - 11p 6b. Ver

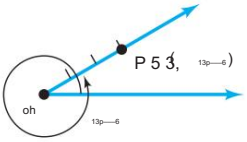


Figura 9

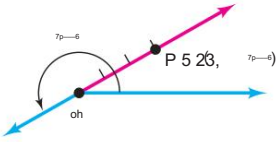


Figura 10

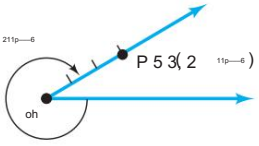


Figura 11

Estos ejemplos muestran una diferencia importante entre coordenadas rectangulares y coordenadas polares. Un punto tiene exactamente un par de coordenadas rectangulares; sin embargo, un punto tiene infinitos pares de coordenadas polares.

RESUMEN

Un punto con coordenadas polares 1r, u2, u en radianes también se puede representar mediante cualquiera de las siguientes formas:

1r, u + 2pk2 o 1 - r, u + p + 2pk2 k un número entero

Las coordenadas polares del polo son 10, u2, donde u puede ser cualquier ángulo.

Ahora resuelve el problema 3 5

2 Convertir de coordenadas polares a coordenadas rectangulares

En ocasiones es necesario convertir coordenadas o ecuaciones en forma rectangular a forma polar, y viceversa. Para hacer esto, recuerde que el origen en coordenadas rectangulares es el polo en coordenadas polares y que el eje x positivo en coordenadas rectangulares es el eje polar en coordenadas polares.

TEOREMA Conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Si P es un punto con coordenadas polares 1r, u2, las coordenadas rectangulares 1x, y2 de P están dados por

$$x = r\cos u \quad y = r \operatorname{sen} u \qquad (1)$$

Machine Translated by Google

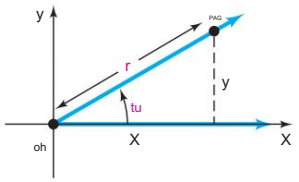


Figura 12

Demostración Supongamos que P tiene las coordenadas polares 1r, u2. Buscamos las coordenadas rectangulares 1x, y2 de P. Consulte la Figura 12.

- Si r = 0, entonces, independientemente de u, el punto P es el polo, para el cual el rectángulo las coordenadas son 10, 02. La fórmula (1) es válida para r = 0.
- Si r 7 0, el punto P está en el lado terminal de u, y r = d1O, P2 = 2x2 + y2 .
  Porque

$$\text{porque tu} = \frac{x}{r} \qquad \text{pecado u} = \frac{y}{r}$$

esto significa

$$x = r \text{ porque u} \qquad y = r \text{ sen u}$$

- Si r 6 0 y u están en radianes, entonces el punto P = 1r, u2 se puede representar como 1 - r, p + u2, donde - r 7 0. Porque

$$\cos 1p + u2 = -\cos u = \frac{x}{-r} \qquad \text{sen}1p + u2 = -\text{sen } u = \frac{y}{-r}$$

esto significa

$$x = r \text{ porque u} \qquad y = r \text{ sen u}$$

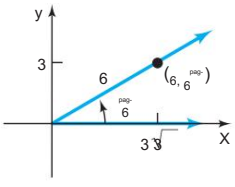
.

EJEMPLO 4 Conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares

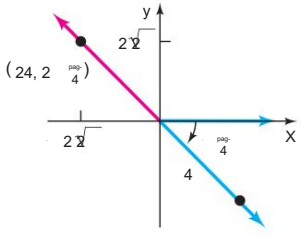
Encuentra las coordenadas rectangulares de los puntos con coordenadas polares:

(a) a6, pag segundo (b) un - 4, - pag 4 segundo

Solución Utilice las ecuaciones (1): x = r cos u y y = r sen u.



(a)



(b)

Figura 13

(a) La figura 13(a) muestra a6, p 6 b trazado. Observe que a6, p 6 b se encuentra en el cuadrante I del sistema de coordenadas rectangulares. Entonces, tanto la coordenada x como la coordenada y será positivo. Sustituyendo r = 6 y u = pag 6 da

$$x = r \text{ porque u} = 6 \text{ porque } \frac{\text{pag}}{6} = 6 \# \frac{13}{2} = 323$$

$$y = r \text{ sen u} = 6 \text{ sen } \frac{\text{pag}}{6} = 6 \# \frac{1}{2} = 3$$

Las coordenadas rectangulares del punto a6, p 6 b son 1323, 32, que se encuentra en cuadrante I, como se esperaba.

(b) La figura 13(b) muestra a - 4, - pag 4 b trazado. Observe que a - 4, - pag 4 b se encuentra en el cuadrante II del sistema de coordenadas rectangular. Sustituyendo r = - 4 y u = - pag 4 da

$$x = r \cos u = -4 \cos a - \frac{\text{pag}}{4} b = -4 \# \frac{12}{2} = -222$$

$$\text{sen } u = -4 \text{ sina} - \frac{\text{pag}}{4} b = -4a - \frac{12}{2} b = 222$$

Las coordenadas rectangulares del punto a - 4, - pag 4 b son 1 - 222, 222 2, que se encuentra en el cuadrante II, como se esperaba.

COMENTARIO Muchas calculadoras tienen la capacidad de convertir de coordenadas polares a coordenadas rectangulares. Consulte el manual del usuario para conocer las pulsaciones de teclas adecuadas. En la mayoría de los casos, este procedimiento es tedioso, por lo que probablemente encontrará que usar las ecuaciones (1) es más rápido.

Ahora resuelve los problemas 4 3 y 5 5

Machine Translated by Google

3 Convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Convertir de coordenadas rectangulares 1x, y2 a coordenadas polares 1r, u2 es un poco más complicado. Observe que cada solución comienza trazando las coordenadas rectangulares dadas.

EJEMPLO 5 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares donde el punto se encuentra en un eje de coordenadas

Encuentra las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son 10, 32.

Solución paso-a-paso

Paso 1: Traza el punto (x, y) y observa el cuadrante en el que se encuentra el punto o el eje de coordenadas en el que se encuentra el punto.

Traza el punto 10, 32 en un sistema de coordenadas rectangular. Vea la Figura 14. El punto se encuentra en el eje y positivo.

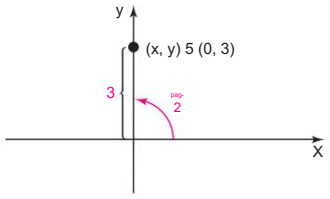


Figura 14

Paso 2: Encuentra la distancia r desde el origen hasta el punto.

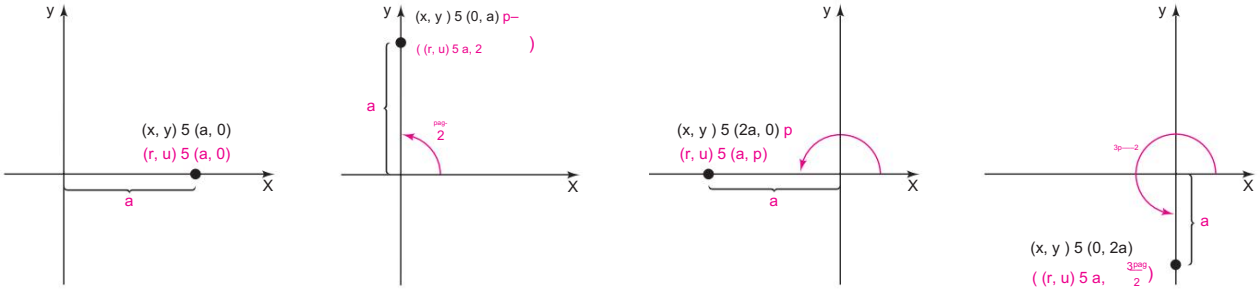
El punto 10, 32 se encuentra en el eje y a una distancia de 3 unidades del origen (polo), por lo que r = 3.

Paso 3: Determinar u.

Un rayo con vértice en el polo que pasa por 10, 32 forma un ángulo u = $\frac{\text{pag}}{2}$ con el eje polar.

Las coordenadas polares para este punto pueden estar dadas por a3, p $\overline{}$ 2b. Otros posibles las representaciones incluyen a - 3, - $\overline{}$ 2b y a3, 5p $\overline{}$ 2b.

La Figura 15 muestra las coordenadas polares de los puntos que se encuentran en el eje x o en el eje x. el eje y. En cada ilustración, un 7 0.



(a) (x, y) 5 (a, 0), a . 0 (b) (x, y) 5 (0, a), a . 0 (c) (x, y) 5 (2a, 0), a . 0 (d) (x, y) 5 (0, 2a), a . 0

Figura 15

Ahora problema de trabajo 5 9

EJEMPLO 6 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares donde el punto se encuentra en un cuadrante

Encuentra las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son 12, - 22.

Solución paso-a-paso

Paso 1: Traza el punto (x, y) y observa el cuadrante en el que se encuentra el punto o el eje de coordenadas en el que se encuentra el punto.

Traza el punto 12, - 22 en un sistema de coordenadas rectangular. Ver Figura 16. El punto se encuentra en el cuadrante IV.

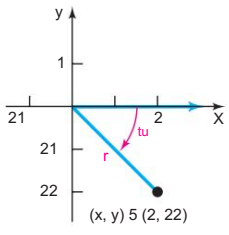


Figura 16

Machine Translated by Google

Paso 2: Encuentra la distancia r desde el origen hasta el punto.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12^2 + (-22)^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Paso 3: Determinar u.

Encuentre u recordando que $\tan u = \frac{y}{x}$, entonces $u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$. Porque 12, - 22 se encuentra en el cuadrante IV, esto significa que $-\frac{\pi}{2} < u < 0$. Como resultado,

$$u = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(-\sqrt{2}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

COMENTARIO Muchas calculadoras tienen la capacidad de convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares. Consulte el manual del usuario para conocer las pulsaciones de teclas adecuadas.

Las coordenadas polares del punto 12, - 22 son $\left(2\sqrt{7}, -\frac{\pi}{4}\right)$. Otros posibles representaciones incluyen $\left(2\sqrt{7}, \frac{7\pi}{4}\right)$ y $\left(-2\sqrt{7}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

EJEMPLO 7 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Encuentre las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son $(-1, -2\sqrt{3})$.

Solución

Paso 1: Ver Figura 17. El punto se encuentra en el cuadrante III.

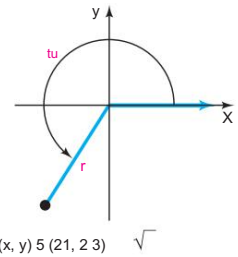


Figura 17

Paso 2: La distancia r desde el origen hasta el punto $(-1, -2\sqrt{3})$ es

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Paso 3: Para encontrarte, usa

$$a = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1} = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$$

Dado que el punto $(-1, -2\sqrt{3})$ se encuentra en el cuadrante III y la función tangente inversa da un ángulo en el cuadrante I, suma p al resultado para obtener un ángulo en el cuadrante III. Entonces

$$u = \pi + a = \pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Las coordenadas polares de este punto son $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$. Otras representaciones posibles incluyen $\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

La Figura 18 muestra cómo encontrar las coordenadas polares de un punto que se encuentra en un cuadrante cuando se dan sus coordenadas rectangulares 1x, y2.

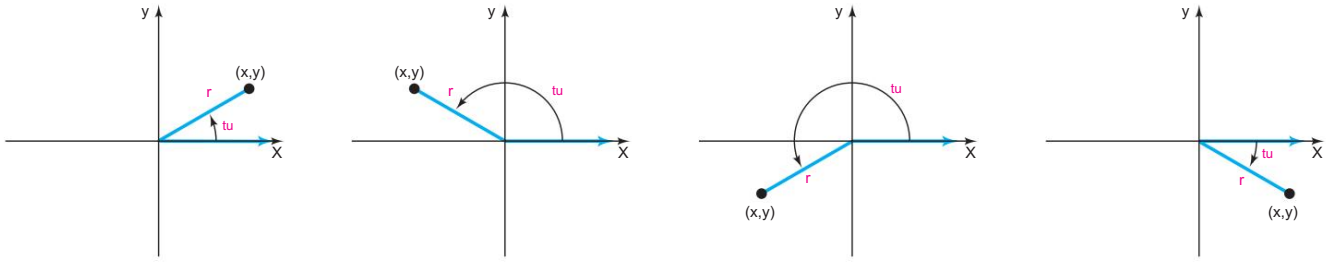


Figura 18 (a) $2r\ 5x\sqrt{1\ y^2}\ 5\ \tan 21\ \frac{y}{x}$ (b) $2r\ 5x\sqrt{1\ y^2}\ 5\ p\ 1\ \tan 21\ \frac{y}{x}$ (C) $2r\ 5x\sqrt{1\ y^2}\ 5\ p\ 1\ \tan 21\ \frac{y}{x}$ (d) $2r\ 5x\sqrt{1\ y^2}\ 5\ \tan 21\ \frac{y}{x}$

Machine Translated by Google

TEOREMA Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Si P es un punto con coordenadas rectangulares 1x, y2, las coordenadas polares 1r, u2 de P están dados por

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan u = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \cdot 0$$
$$r = y \qquad tu = \frac{pag}{2} \quad \text{si } x = 0 \qquad (2)$$

Para utilizar las ecuaciones (2) de forma eficaz, siga estos pasos:

Pasos para convertir de coordenadas rectangulares a polares

Paso 1: Traza el punto 1x, y2, como se muestra en los ejemplos 5, 6 y 7.

Paso 2: Si x = 0 o y = 0, usa la gráfica para encontrar r.

Si x · 0 e y · 0, entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Paso 3: Encuéntrate. Si x = 0 o y = 0, usa la gráfica para encontrar u.

Si x · 0 e y · 0, observe el cuadrante en el que se encuentra el punto.

Cuadrante I o IV: $u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

Cuadrante II o III: $u = p + \tan^{-1}\frac{y}{x}$

Ahora resuelve el problema 6 3

4 Transformar ecuaciones entre formas polares y rectangulares

Las ecuaciones (1) y (2) se pueden utilizar para transformar ecuaciones de forma polar a forma rectangular, y viceversa. Dos técnicas comunes para transformar una ecuación de forma polar a forma rectangular son

- Multiplica ambos lados de la ecuación por r
- Cuadrar ambos lados de la ecuación

EJEMPLO 8 Transformar una ecuación de forma polar a rectangular

Transforma la ecuación r = 6 cos u de coordenadas polares a coordenadas rectangulares e identifica la gráfica.

Solución

Multiplicar ambos lados por r facilita el uso de las ecuaciones (1) y (2).

r = 6 porque tu

$r^2 = 6r \cos u$ Multiplica ambos lados por r.

$x^2 + y^2 = 6x$ $r^2 \cdot x^2 \cdot y^2;\ x \cdot r \cos U$

Esta es la ecuación de un círculo. Complete el cuadrado para obtener el formulario estándar.

$x^2 + y^2 = 6x$

$1x^2 - 6x^2 + y^2 = 0$ Forma general

$1x^2 - 6x + 92 + y^2 = 9$ Completa el cuadrado en x.

$1x - 32^2 + y^2 = 9$ Factorizar.

Esta es la forma estándar de la ecuación de un círculo con centro 13, 02 y radio 3.

Ahora problema de trabajo 7 9

Machine Translated by Google

EJEMPLO 9 Transformar una ecuación de forma rectangular a polar

Transforma la ecuación 4xy = 9 de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

Solución

Utilice x = r cos u y y = r sen u.

$$4xy = 9$$
$$41r\cos u2\ 1r\sin u2 = 9 \quad x \cdot r\cos U,\ y \cdot r\sin U$$
$$4r^2 \text{porque u sen u} = 9$$

Esta es la forma polar de la ecuación. Se puede simplificar de la siguiente manera:

$$2\ 2r\ \ 12\ \text{sen u cos u2} = 9 \quad \text{Factoriza 2r2.}$$
$$2r^2\ \text{sin12u2} = 9 \quad \text{Fórmula de doble ángulo}$$

Ahora problema de trabajo 7 3

9.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Traza el punto cuyas coordenadas rectangulares son 13, - 12. ¿En qué cuadrante se encuentra el punto? (págs. 38 y 39)
2. La distancia entre dos puntos P1 = 1x1, y12 y P2 = 1x2, y22 es d1P1, P22 = _____. (págs. 39 y 40)
3. Para completar el cuadrado de x2 + 6x, suma ____. (pág. A29)
4. Dibuja el ángulo $\frac{5p}{6}$ en posición estándar. (págs. 398–403)
5. Si P = 1x, y2 es un punto en el lado terminal del ángulo u a una distancia r del origen, entonces tan u = _____. (p. 422)
6. tan-1 1 - 12 = _____. (págs. 490–492)

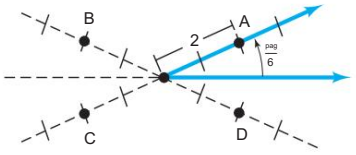
Conceptos y vocabulario

7. El origen en coordenadas rectangulares coincide con el el _____ de coordenadas polares; el eje x positivo en Las coordenadas rectangulares coinciden con _____ _____ las coordenadas polares.
8. Si P es un punto con coordenadas polares 1r, u2, las coordenadas rectangulares 1x, y2 de P están dadas por x = e y = _____
9. Opción múltiple En un sistema de coordenadas rectangular, donde ¿El punto con coordenadas polares a1, - $\frac{pag}{2b}$ mentira?
   (a) en el cuadrante IV (b) en el eje y
   (c) en el cuadrante II (d) en el eje x
10. Opción múltiple El punto a5, p $\overline{6}$ b también se puede representar ¿Por qué coordenadas polares?
    (a) a5, - (c) $\frac{pag}{6\ segundo}$ (b) a - 5, $\frac{13p}{6\ segundo}$
    a5, - $\frac{5p}{6\ segundo}$ (d) a - 5, $\frac{7p}{6\ segundo}$
11. Verdadero o Falso En las coordenadas polares 1r, u2, r puede ser negativo.
12. Verdadero o Falso Las coordenadas polares de un punto son únicas.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 20, haga coincidir cada punto en coordenadas polares con A, B, C o D en la gráfica.

13. a2, - $\frac{11p}{6\ segundo}$ 14. a - 2, - 18. $\frac{pag}{6\ segundo}$ 15. a2, 7p $\overline{6b}$ 16. a - 2, $\frac{pag}{6\ segundo}$
17. a - 2, $\frac{5p}{6\ segundo}$ a2, 5p $\frac{}{6\ segundo}$ 19. a2, 11p $\frac{}{6\ segundo}$ 20. a - 2, $\frac{7p}{6\ segundo}$



En los problemas 21 a 34, trace cada punto dado en coordenadas polares.

21. a4, 3p $\overline{2b}$ 22. a3, pag $\overline{3}$ b 23. 1 - 3, pág.2 24. 1 - 2, 02 25. a6, pág segundo
26. a5, 5p $\overline{3}$ b 27. a - 3, $\frac{2p}{\overline{3}\ b}$ 28. a - 2, $\frac{3p}{4\ segundo}$ 29. a2, - $\frac{5p}{4\ segundo}$ 30. a4, - $\frac{2p}{3\ segundo}$
31. a - 1, - $\frac{pag}{3\ segundo}$ 32. a - 3, - $\frac{3p}{4\ segundo}$ 33. a - 3, - $\frac{pag}{2\ segundo}$ 34. 1 - 2, - p2

Machine Translated by Google

En los problemas 35 a 42, trace cada punto dado en coordenadas polares y encuentre otras coordenadas polares 1r, u2 del punto para las cuales:
(a) r 7 0, - 2p … u 6 0 (b) r 6 0, 0 … u 6 2p (c) r 7 0, 2p … u 6 4p

35. a5, 2p 3 segundo
36. a4, 3p 4 b
37. 1 - 3, 4p2
38. 1 - 2, 3p2
39. 12, p2
40. a1, pág segundo
41. a - 2, - 2p / 3 segundo
42. a - 3, - pag / 4 segundo

En los problemas 43 a 58 se dan las coordenadas polares de un punto. Encuentra las coordenadas rectangulares de cada punto.

43. a3, pág3b
44. a4, 3p 2b
45. 1 - 3, pág.2
46. 1 - 2, 02
47. a5, 5p 3b
48. a6, 5p 6 b
49. a - 2, 2p / 3 segundo
50. a - 2, 3p / 4 segundo
51. a - 6, - pag / 4 segundo
52. a - 5, - pag / 6 segundo
53. a - 3, - pag / 2 segundo
54. 1 - 2, - p2
55. a7.5, 11p / 18 segundo
56. a - 3.1, 91p / 90b
57. 18.1, 5.22
58. 16.3, 3.82

En los problemas 59 a 70 se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Encuentra las coordenadas polares para cada punto.

59. 13, 02
60. 10, 22
61. 10, -
62. 1 - 1, 02
63. 11, - 12
64. 1 - 3, 32
65. un - 22 23 / 2, 1 / 2 segundo
66. 15, 5232
67. 1- 0,8, - 2,12
68. 11.3, - 2.12
69. 1 - 2,3, 0,22
70. 18.3, 4.22

En los problemas 71 a 78, las letras xey representan coordenadas rectangulares. Escribe cada ecuación usando las coordenadas polares 1r, u2.

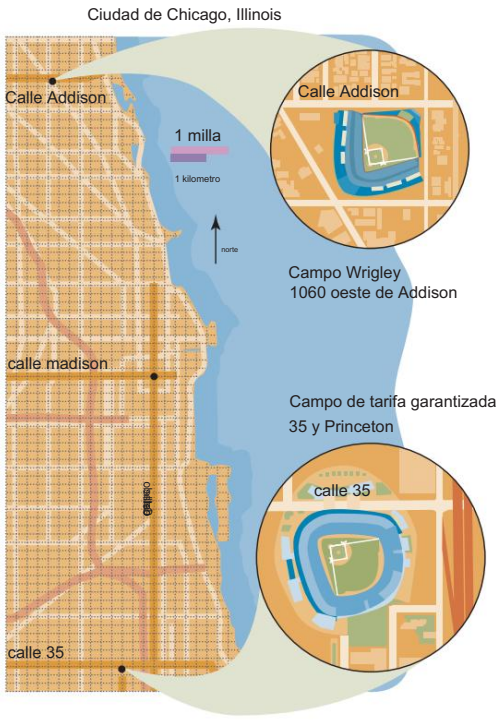
71. x2 + y2 = x
75. 4x2 y = 1
72. 2x2 + 2y2 = 3
73. x2 = 4y
74. y2 = 2x
76. 2xy = 1
77. y = - 3
78. x = 4

En los problemas 79 a 86, las letras r y u representan coordenadas polares. Escribe cada ecuación usando coordenadas rectangulares 1x, y2.

79. r = porque u
80. r = sen u + 1
81. r = sen u - porque u
82. r = porque tu
83. r = 4
84. r = 2
85. r = 3 / - porque tu
86. r = 4 / - porque tu

Aplicaciones y extensiones

87. Chicago En Chicago, el sistema de carreteras está configurado como un plano cartesiano, donde las calles están indicadas por el número de cuadras a las que se encuentran desde Madison Street y State Street. Por ejemplo, Wrigley Field en Chicago está ubicado en 1060 West Addison, que está a 10 cuadras al oeste de State Street y 36 cuadras al norte. de la calle Madison. Tratar la intersección de Madison Street. y State Street como origen de un sistema de coordenadas, siendo el este el eje x positivo.
(a) Escriba la ubicación de Wrigley Field usando rectángulos. coordenadas.
(b) Escriba la ubicación de Wrigley Field usando coordenadas polares. Utilice la dirección este para el eje polar. Exprese u en grados.
(c) Guaranteed Rate Field, sede de los White Sox, está ubicado en 35th y Princeton, 3 cuadras al oeste de State Street y 35 cuadras al sur de Madison. Escribir la ubicación del campo de tasa garantizada usando coordenadas rectangulares.
(d) Escriba la ubicación del campo de tasa garantizada usando coordenadas polares. Utilice la dirección este para el eje polar. Exprese u en grados.



88. Demuestre que la fórmula para la distancia d entre dos puntos P1 = 1r1 , u12 y P2 = 1r2 , u22 es

re = 2r1 2 + r2 - 2r1 r2 cos1u2 - u12

Machine Translated by Google

89. Desafío Problema Detección de radar A las 10:15 am, una estación de radar detecta una aeronave en un punto a 80 millas de distancia y 25 grados al norte del este. A las 10:25 am, el avión se encuentra a 110 millas de distancia y 5 grados al sur del este.
(a) Usando la estación de radar como polo y hacia el este como eje polar, escriba las dos ubicaciones de la aeronave en coordenadas polares.
(b) Escriba las dos ubicaciones de la aeronave en coordenadas rectangulares. Redondea las respuestas a dos decimales.
(c) ¿Cuál es la velocidad del avión en millas por hora? Redondea la respuesta a un decimal.

90. Desafío Problema La estación de radar A utiliza un sistema de coordenadas donde A está ubicado en el polo y hacia el este está el eje polar. En este sistema, otras dos estaciones de radar, B y C, están situadas en las coordenadas (150, - 24°) y (100, 32°), respectivamente. Si la estación de radar B usa un sistema de coordenadas donde B está ubicado en el polo y hacia el este está el eje polar, ¿cuáles son las coordenadas de las estaciones de radar A y C en este segundo sistema? Redondea las respuestas a un decimal.

Explicar conceptos: discusión y escritura

91. Al convertir de coordenadas polares a coordenadas rectangulares, ¿qué ecuaciones usarás?

92. Explica cómo convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

93. ¿El sistema de calles de su ciudad se basa en un sistema de coordenadas rectangular, un sistema de coordenadas polares o algún otro sistema? Explicar.

Conserve su conocimiento

Los problemas 94 a 103 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

94. Resuelve: log4 1x + 32 - log4 1x - 12 = 2

95. Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar el número posible de ceros reales positivos o negativos para la función f1x2 = - 2x3 + 6x2 - 7x - 8

96. Encuentra el punto medio del segmento de línea que conecta el puntos 1 - 3, 72 y un 1 $\overline{2}$, 2b.

97. Dado que el punto 13, 82 está en la gráfica de y = f1x2, ¿cuál es el punto correspondiente en la gráfica de y = - 2f1x + 32 + 5?

98. Si z = 2 - 5i y w = 4 + i, encuentre z # w.

99. Resuelve la ecuación: 4 sen u cos u = 1, 0… u 6 2p

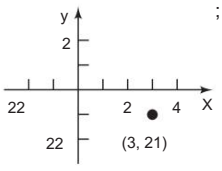
100. Resuelve el triángulo: A = 65°, B = 37°, c = 10

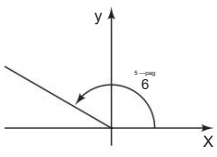
101. Encuentra el valor exacto del pecado. $\frac{7p}{12}$.

102. Simplifica: $\frac{5x2 \# 3e3x - e3x \# 10x}{15x2\ 2^{2}}$

103. Demuestre que sen5 x = sen x - 2 cos2 x sen x + cos4 x sen x.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 

; cuadrante IV 2. 21x2 - x12 ^{2} + 1y2 - y12 ^{2} 3. 9 4. 

5. $\frac{y}{x}$ 6. - 4 $\frac{pag}{}$

9.2 Ecuaciones polares y gráficas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Simetría (Sección 1.2, págs. 49–53)
- Círculos (Sección 1.4, págs. 71–75)
- Propiedades pares-impares de las funciones trigonométricas (Sección 6.3, págs. 438 y 439)
- Fórmulas de diferencia para seno y coseno (Sección 7.5, págs. 523 y 526)
- Valores de las funciones seno y coseno en ciertos Ángulos (Sección 6.2, págs. 414–421)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 633.

OBJETIVOS 1 Identificar y representar gráficamente ecuaciones polares convirtiéndolas a rectangulares. Ecuaciones (pág. 622)

2 Prueba de simetría de ecuaciones polares (p. 625)

3 Graficar ecuaciones polares trazando puntos (p. 626)

Machine Translated by Google

Así como se puede usar una cuadrícula rectangular para trazar puntos dados por coordenadas rectangulares, como los puntos 1 - 3, 12 y 11, 22 que se muestran en la Figura 19(a), una cuadrícula que consta de círculos concéntricos (con centros en el polo) y los rayos (con vértices en el polo) pueden ser

Se utiliza para trazar puntos dados por coordenadas polares, como los puntos a4, 5pb y a2, p 4 segundo se muestra en la Figura 19(b). Estas cuadrículas polares se utilizan para representar gráficamente ecuaciones polares.

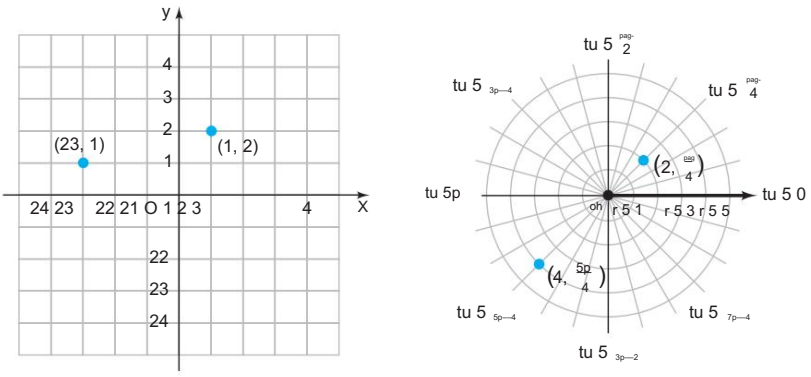


Figura 19 (a) Cuadrícula rectangular (b) Cuadrícula polar

DEFINICIÓN Ecuación polar

Una ecuación cuyas variables son coordenadas polares se llama ecuación polar. La gráfica de una ecuación polar consta de todos los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen la ecuación.

1 Identificar y graficar ecuaciones polares convirtiéndolas a ecuaciones rectangulares

Un método que se puede utilizar para representar gráficamente una ecuación polar es convertir la ecuación a coordenadas rectangulares. En la siguiente discusión, 1x, y2 representa las coordenadas rectangulares de un punto P, y 1r, u2 representa las coordenadas polares del punto P.

EJEMPLO 1 Identificar y representar gráficamente una ecuación polar (círculo)

Identifica y grafica la ecuación: r = 3

Solución Convierte la ecuación polar a una ecuación rectangular.

$$r = 3$$

$$r^2 = 9 \quad \text{Cuadra ambos lados.}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad r^2 \cdot x^2 \cdot y^2$$

La gráfica de r = 3 es un círculo, con centro en el polo y radio 3. Ver Figura 20.

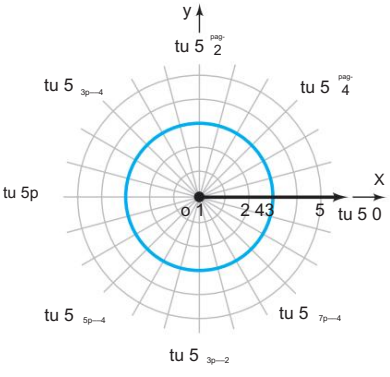


Figura 20 r = 3 o x 2 2 = 9 + y

Ahora resuelve el problema 1 5

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Identificar y representar gráficamente una ecuación polar (línea)

Identifica y grafica la ecuación: $u = \frac{\pi}{3}$

Solución Convierte la ecuación polar a una ecuación rectangular.

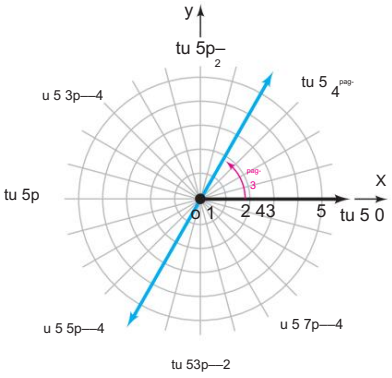


Figura 21 $tu = \frac{\pi}{3}$ o $y = 23x$

$$tu = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan u = \tan \frac{\pi}{3}$$ Encuentra la tangente de ambos lados.

$$\frac{y}{x} = 23 \quad \tan U \cdot \quad \frac{y}{x} \cdot \text{bronceado} \frac{PAG}{3} \cdot 3$$

$$y = 23x$$

La gráfica de $u = \frac{\pi}{3}$ es una recta que pasa por el poste formando un ángulo de 3 $\frac{\pi}{3}$ con el eje polar. Ver Figura 21.

Ahora resuelve el problema 1 7

EJEMPLO 3 Identificar y representar gráficamente una ecuación polar (línea horizontal)

Identifica y grafica la ecuación: r sen u = 2

Solución

Como y = r sen u, podemos escribir la ecuación como

$$y = 2$$

Por lo tanto, la gráfica de r sen u = 2 es una línea horizontal 2 unidades por encima del polo. Ver Figura 22.

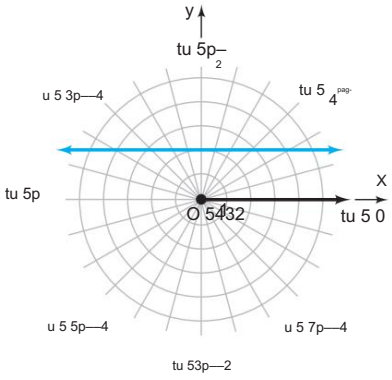


Figura 22 r sen u = 2 o y = 2

COMENTARIO Se puede utilizar una utilidad gráfica para representar gráficamente ecuaciones polares. Lea Uso de una utilidad gráfica para representar gráficamente una ecuación polar, Sección B.8. ■

EJEMPLO 4 Identificar y representar gráficamente una ecuación polar (línea vertical)

Identifica y grafica la ecuación: r cos u = - 3

Solución Como x = r cos u, podemos escribir la ecuación como

$$x = -3$$

Por lo tanto, la gráfica de r cos u = - 3 es una línea vertical 3 unidades a la izquierda del polo. Ver Figura 23.

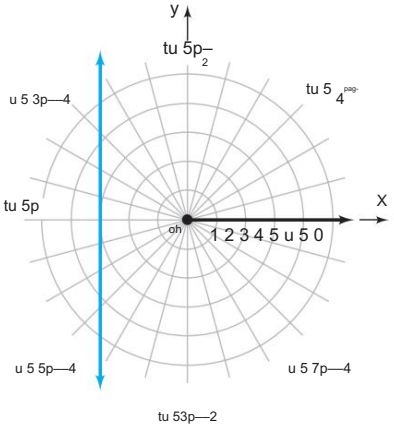


Figura 23 r cos u = -3 o x = -3

Machine Translated by Google

Los ejemplos 3 y 4 de la página anterior conducen a los siguientes resultados. (Las pruebas se dejan como ejercicios. Véanse los problemas 83 y 84.)

TEOREMA

Sea a un número real. Entonces la gráfica de la ecuación

r sen u = a

es una línea horizontal. Se encuentra a unidades por encima del polo si a Ú 0 y se encuentra 0 a 0 unidades por debajo del polo si a 6 0.

La gráfica de la ecuación.

r porque u = a

es una línea vertical. Se encuentra a unidades a la derecha del polo si a Ú 0 y se encuentra 0 a 0 unidades a la izquierda del polo si a 6 0.

Ahora resuelve el problema 2 1

EJEMPLO 5 Identificar y representar gráficamente una ecuación polar (círculo)

Identifica y grafica la ecuación: r = 4 sen u

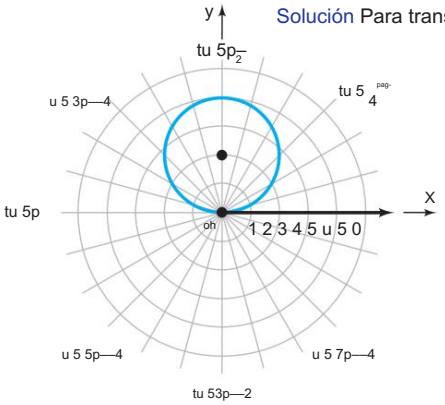


Figura 24
2 r = 4 sen u o x + (y - 2)2 = 4

Solución Para transformar la ecuación polar a coordenadas rectangulares, multiplica ambos lados por r.

$$2r = 4r \operatorname{sen} u$$

Ahora usa los hechos que $r^2 = x2 + y2$ e y = r sen u. Entonces

$$x2 + y2 = 4y$$

$$x2 + 1y2 - 4y2 = 0$$

$$x2 + 1y2 - 4y + 42 = 4$$ Completa el cuadrado en y.

$$x2 + 1y - 22^2 = 4$$ factores.

Esta es la ecuación estándar de un círculo con centro 10, 22 en coordenadas rectangulares y radio 2. Consulte la Figura 24.

EJEMPLO 6 Identificar y representar gráficamente una ecuación polar (círculo)

Identifica y grafica la ecuación: r = - 2 cos u

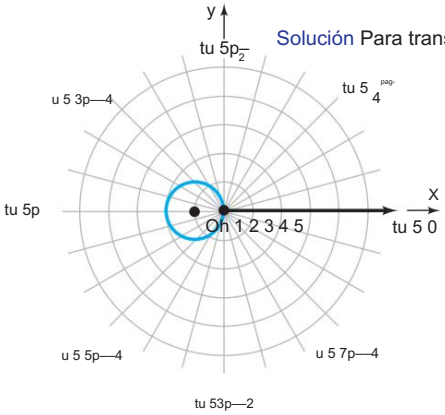


Figura 25
r = -2 porque u o (x + 1)2 + y 2 = 1

Solución Para transformar la ecuación polar a coordenadas rectangulares, multiplica ambos lados por r.

$$2r = - 2r \text{ porque } tu$$

$$x2 + y2 = - 2x$$ r2 · x2 · y2; x · r porque U

$$x2 + 2x + y2 = 0$$

$$1x2 + 2x + 12 + y2 = 1$$ Completa el cuadrado en x.

$$1x + 12^2 + y2 = 1$$ Factor.

Esta es la ecuación estándar de un círculo con centro 1 - 1, 02 en coordenadas rectangulares y radio 1. Consulte la Figura 25.

Machine Translated by Google

Exploración

Asegúrese de que el modo de su utilidad gráfica esté configurado en coordenadas polares y medida en radianes. Usando una pantalla cuadrada, grafique r1 = sen u, r2 = 2 sen u y r3 = 3 sen u. ¿Ves el patrón? Despeje la pantalla y grafique r1 = -sen u, r2 = -2 sen u, y r3 = -3 sen u. ¿Ves el patrón? Despeje la pantalla y grafique r1 = cos u, r2 = 2 cos u y r3 = 3 cos u. ¿Ves el patrón? Despeje la pantalla y grafique r1 = -cos u, r2 = -2 cos u y r3 = -3 cos u. ¿Ves el patrón?

Con base en los Ejemplos 5 y 6 y la Exploración de la izquierda, llegamos a la siguientes resultados. (Las pruebas se dejan como ejercicios. Véanse los problemas 85 a 88).

TEOREMA

Supongamos que a es un número real positivo. Entonces

Descripción de la ecuación	
• r = 2a sen u	• r = Círculo: radio a; centro en 10, a2 en coordenadas rectangulares
- 2a sen u	Círculo: radio a; centro en 10, - a2 en coordenadas rectangulares
• r = 2a porque u	Círculo: radio a; centro en 1a, 02 en coordenadas rectangulares
• r = - 2a cos u	Círculo: radio a; centro en 1 - a, 02 en coordenadas rectangulares

Cada círculo pasa por el poste.

Ahora resuelve el problema 2 3

El método de convertir una ecuación polar en una ecuación rectangular identificable para obtener la gráfica no siempre es útil ni siempre es necesario. Por lo general, se crea una tabla que enumera varios puntos del gráfico. Al verificar la simetría, es posible reducir la cantidad de puntos necesarios para dibujar la gráfica.

2 Prueba de ecuaciones polares para determinar la simetría

En coordenadas polares, los puntos 1r, u2 y 1r, -u2 son simétricos con respecto al eje polar (y al eje x). Ver Figura 26(a). Los puntos 1r, u2 y 1r, p - u2 son simétricos con respecto a la recta u = puntos 1r, u2 y $\frac{\text{pag}}{2}$ (el eje y). Véase la Figura 26(b). El 1 - r, u2 son simétricos con respecto al polo (el origen). Ver Figura 26(c).

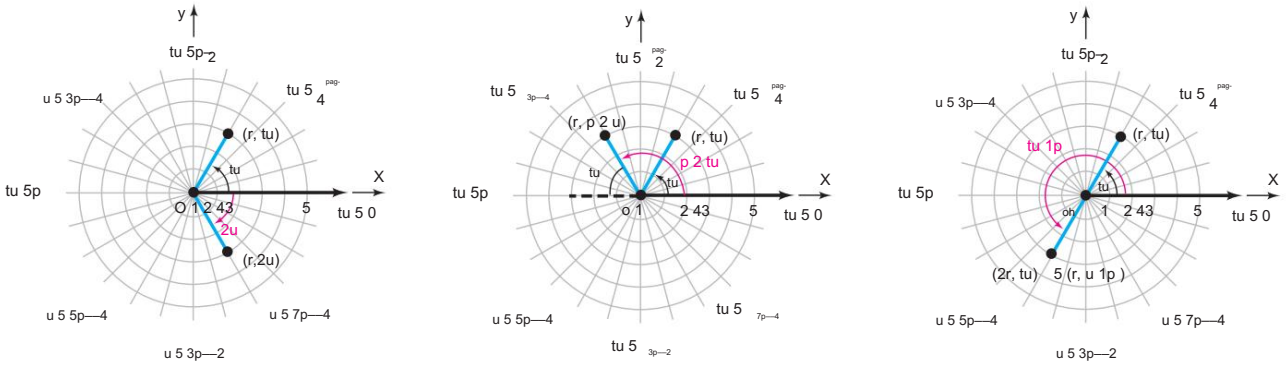


Figura 26

(a) Puntos simétricos con respecto al eje polar

(b) Puntos simétricos con respecto a la recta u 5 p–2

(c) Puntos simétricos con respeto al polo

Las siguientes pruebas son consecuencia de estas observaciones.

TEOREMA Pruebas de simetría

- Simetría con respecto al eje polar (eje x)

  En una ecuación polar, reemplaza u por - u. Si resulta una ecuación equivalente, la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

- Simetría con respecto a la recta U · $\frac{\text{PAG}}{2}$ (eje y)

  En una ecuación polar, reemplaza u por p - u. Si resulta una ecuación equivalente, la gráfica es simétrica con respecto a la recta u = $\frac{\text{pag}}{2}$.

- Simetría con respecto al polo (Origen)

  En una ecuación polar, reemplaza r por - r o u por u + p. Si resulta una ecuación equivalente, la gráfica es simétrica con respecto al polo.

Machine Translated by Google

Las tres pruebas de simetría dadas en la página anterior son condiciones suficientes para la simetría, pero no son condiciones necesarias . Es decir, una ecuación puede no pasar estas pruebas. y todavía tenemos una gráfica que es simétrica con respecto al eje polar, la recta u = pag —, 2 o el poste. Por ejemplo, la gráfica de r = sin12u2 resulta simétrica con respecto al eje polar, la recta u = y el polo, pero solo la prueba de simetría pag —, 2 con respecto al polo (reemplace u por u + p) funciona. Véanse también los problemas 93 a 95.

3 Graficar ecuaciones polares trazando puntos

EJEMPLO 7 Graficar una ecuación polar (cardioide)

Grafique la ecuación: r = 1 - sen u

Solución Primero verifica la simetría.

Eje Polar: Reemplazar u por -u. El resultado es

r = 1 - sen1 - u2 = 1 + sen u sen 1 ·U2 · ·sen U

La prueba falla, por lo que la gráfica puede ser simétrica o no con respecto al eje polar.

La línea U · PAG 2: Reemplace u por p - u. El resultado es

r = 1 - sen1p - u2 = 1 - 1sen p cos u - cos p sen u2

= 1 - 30 # porque u - 1 - 12 sen u4 = 1 - sen u

La prueba se cumple, por lo que la gráfica es simétrica con respecto a la recta u = pag 2.

El polaco: Reemplace r por - r. Entonces el resultado es - r = 1 - sen u, entonces r = - 1 + sen u. La prueba falla. Reemplace u por u + p. El resultado es

r = 1 - pecado(u + p)

= 1 - 3 sen u cos p + cos u sen p4

= 1 - 3 sen u # (- 1) + cos u # 04

= 1 + sen u

Esta prueba también falla, por lo que la gráfica puede ser simétrica o no con respecto al polo.

Luego, identifica puntos en la gráfica asignando valores al ángulo u y calculando los valores correspondientes de r. Debido a la periodicidad de la función seno. y la simetría con respecto a la recta u = pag 2 2 simplemente asigna valores a u desde - pag — a pag 2, como se indica en la Tabla 1.

tabla 1

Ud.	r · 1 · sen U
- pag 2	1-1-12 = 2
- pag 3	13 1 - a - 1 2 b ≈ 1,87
- pag 6	- a - 1 2 segundo = 3 2
0	1 - 0 = 1
pag 6	1 - 1 2 = 1 2
pag 3	1 - 23 2 ≈ 0,13
pag 2	1 - 1 = 0

Ahora trace los puntos 1r, u2 de la Tabla 1 y trace la gráfica, comenzando en el punto a2, - pag 2 b y termina en el punto a0, p 2b. Luego refleja esta parte de la gráfica sobre la recta u = pag 2 (el eje y) para obtener el gráfico completo. Ver Figura 27.

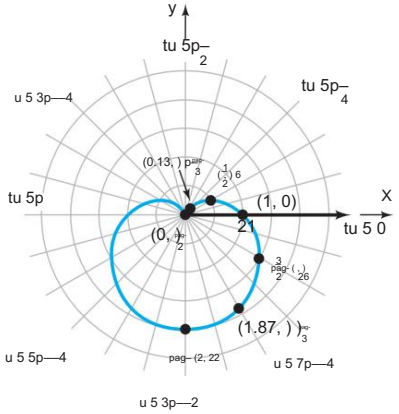


Figura 27 r = 1 - sen u

La curva de la Figura 27 es un ejemplo de cardioide (una curva en forma de corazón).

Exploración

Grafique r1 = 1 + sen u. Despeje la pantalla y grafique r1 = 1 - cos u. Despeje la pantalla y grafique r1 = 1 + cos u. ¿Ves un patrón?

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Cardiodes

Los cardioides se caracterizan por ecuaciones de la forma.

• r = a11 + cos u2 • r = a11 - cos u2 • r = a11 + sen u2 • r = a11 - sen u2

donde a 7 0. La gráfica de un cardioide pasa por el polo.

Ahora resuelve el problema 3 9

EJEMPLO 8 Graficar una ecuación polar (Limaçon sin bucle interior)

Grafique la ecuación: r = 3 + 2 cos u

Solución Primero verifica la simetría.

Eje Polar: Reemplazar u por -u. El resultado es

r = 3 + 2 cos1 - u2 = 3 + 2 porque u cos 1 ·U2 · cos U

La prueba se cumple, por lo que la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

La línea U · $\frac{\text{PAG}}{2}$: Reemplace u por p - u. El resultado es

r = 3 + 2 cos1p - u2 = 3 + 21cos p cos u + sen p sen u2
= 3 - 2 porque u

La prueba falla, por lo que la gráfica puede o no ser simétrica con respecto a la línea u = $\frac{\text{pag}}{2}$.

El polaco: Reemplace r por - r. La prueba falla, por lo que la gráfica puede ser simétrica o no con respecto al polo. Reemplace u por u + p. La prueba falla, por lo que la gráfica puede ser simétrica o no con respecto al polo.

Luego, identifica puntos en la gráfica asignando valores al ángulo u y calculando los valores correspondientes de r. Debido a la periodicidad de la función coseno y la simetría con respecto al eje polar, basta con asignar valores a u de 0 a p,
como se indica en la Tabla 2.

Tabla 2

Ud.	r · 3 · 2 porque U
0	3 + 2 # 1 = 5
$\frac{\text{pag}}{6}$	3+2 # $\frac{\sqrt{23}}{2}$ ≈ 4,73
$\frac{\text{pag}}{3}$	3 + 2 # $\frac{1}{2}$ = 4
$\frac{\text{pag}}{2}$	3 + 2 # 0 = 3
$\frac{2p}{3}$	3+2a-1 $\frac{\sqrt{}}{2}$ b = 2
$\frac{5p}{6}$	3+2a- $\frac{\sqrt{23}}{2}$ b ≈ 1,27
pag	3 + 21-12 = 1

Ahora traza los puntos 1r, u2 de la Tabla 2 y traza la gráfica, comenzando en el punto 15, 02 y terminando en el punto 11, p2. Luego refleja esta porción de la gráfica alrededor del eje polar (el eje x) para obtener la gráfica completa. Ver Figura 28.

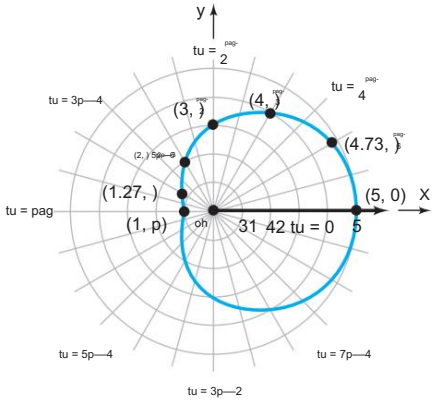


Figura 28 r = 3 + 2 porque u

Exploración

Grafica r1 = 3 - 2 cos u. Despeje la pantalla y grafique r1 = 3 + 2 sen u. Despeje la pantalla y grafique r1 = 3 - 2 sen u. ¿Ves un patrón?

La curva de la Figura 28 es un ejemplo de limaçon (palabra francesa para caracol) sin bucle interior.

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Limaçons sin bucle interior

Los limaçons sin bucle interior se caracterizan por ecuaciones de la forma

- r = a + b porque u
- r = a + b sen u
- r = a - b porque u
- r = a - b sen u

donde a 7 b 7 0. La gráfica de un limaçon sin bucle interior no pasa por el polo.

Ahora resuelve el problema 4 5

EJEMPLO 9 Graficar una ecuación polar (Limaçon con un bucle interno)

Grafique la ecuación: r = 1 + 2 cos u

Solución Primero, verifica la simetría.

Eje Polar: Reemplazar u por -u. El resultado es

$$r = 1 + 2\cos 1 - u2 = 1 + 2 \text{ porque } u$$

La prueba se cumple, por lo que la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

La línea U · $\frac{\text{PAG}}{2}$: Reemplace u por p - u. El resultado es

$$r = 1 + 2\cos 1p - u2 = 1 + 21\cos p \cos u + \text{sen } p \text{ sen } u2$$
$$= 1 - 2 \text{ porque } u$$

La prueba falla, por lo que la gráfica puede o no ser simétrica con respecto a la línea u = $\frac{\text{pag}}{2}$.

Tabla 3

Ud.	r · 1 · 2 porque U
0	1 + 2 # 1 = 3
$\frac{\text{pag}}{6}$	$1 + 2 \# \frac{23}{2} \approx 2{,}73$
$\frac{\text{pag}}{3}$	$1 + 2 \# \frac{1}{2} = 2$
$\frac{\text{pag}}{2}$	1 + 2 # 0 = 1
$\frac{2p}{3}$	1 + 2a-1 2 b = 0
$\frac{5p}{6}$	$1+2a-\frac{23}{2}\ b \approx -0{,}73$
pag	1 + 21 -12 = -1

El polaco: Reemplace r por - r. La prueba falla, por lo que la gráfica puede ser simétrica o no con respecto al polo. Reemplace u por u + p. La prueba falla, por lo que la gráfica puede ser simétrica o no con respecto al polo.

Luego, identifica puntos en la gráfica de r = 1 + 2 cos u asignando valores al ángulo u y calculando los valores correspondientes de r. Debido a la periodicidad de la función coseno y la simetría con respecto al eje polar, basta con asignar valores a u de 0 a p, como se indica en la Tabla 3.

Ahora traza los puntos 1r, u2 de la Tabla 3, comenzando en 13, 02 y terminando en 1 - 1, p2. Ver Figura 29(a). Finalmente, refleja esta parte de la gráfica alrededor del eje polar (el eje x) para obtener la gráfica completa. Véase la Figura 29(b).

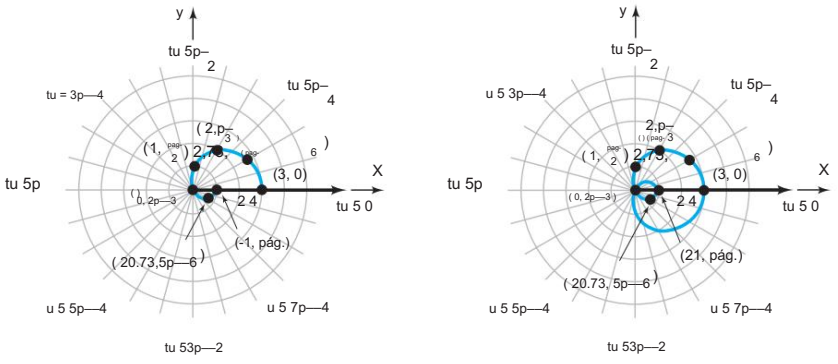


Figura 29 (a) (b) r 5 1 1 2 porque u

Exploración

Grafique r1 = 1 - 2 cos u. Despeje la pantalla y grafique r1 = 1 + 2 sen u. Despeje la pantalla y grafique r1 = 1 - 2 sen u. ¿Ves un patrón?

La curva de la Figura 29(b) es un ejemplo de limaçon con un bucle interior.

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Limaçons con bucle interior

Los limaçons con un bucle interior se caracterizan por ecuaciones de la forma

- r = a + b porque u
- r = a + b sen u
- r = a - b porque u
- r = a - b sen u

donde b 7 a 7 0. La gráfica de un limaçon con un bucle interior pasa dos veces por el poste.

Ahora problema de trabajo 4 7

EJEMPLO 10 Graficar una ecuación polar (rosa)

Grafica la ecuación: r = 2 cos12u2

Solución Comprueba la simetría.

Eje Polar: Reemplazar u por -u. El resultado es

r = 2 cos 321 - u2 4 = 2 cos12u2

La prueba se cumple, por lo que la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

La línea U · $\frac{PAG}{2}$: Reemplace u por p - u. El resultado es

r = 2 cos 321p - u2 4 = 2 cos12p - 2u2 = 2 cos12u2

La prueba se cumple, por lo que la gráfica es simétrica con respecto a la recta u = $\frac{pag}{2}$.

El Polo: Dado que la gráfica es simétrica con respecto tanto al eje polar como al línea u = $\frac{pag}{2}$, debe ser simétrico con respecto al polo.

Tabla 4

Ud.	r · 2 cos (2U)
0	2 # 1 = 2
$\frac{pag}{6}$	$2 \#_{2} \frac{1}{2} = 1$
$\frac{pag}{4}$	2 # 0 = 0
$\frac{pag}{3}$	$2a - \frac{1}{2} b = -1$
$\frac{pag}{2}$	21 -12 = -2

A continuación, construya la Tabla 4. Debido a la periodicidad de la función coseno y la simetría con respecto al eje polar, la recta u = $\frac{pag}{2}$, y el polo, solo lista valores de u de 0 a 2 $\frac{pag}{}$.

Trace y conecte estos puntos como se muestra en la Figura 30(a). Finalmente, debido a la simetría, refleje esta porción de la gráfica primero alrededor del eje polar (el eje x) y entonces sobre la recta u = $\frac{pag}{2}$ (el eje y) para obtener el gráfico completo. Ver Figura 30(b).

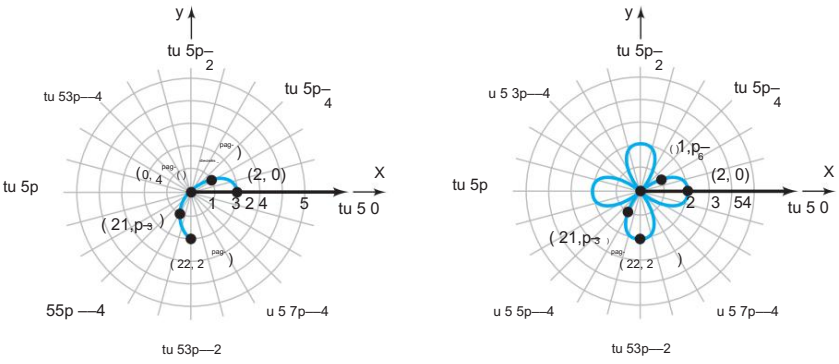


Figura 30 (a) (b) r 5 2 cos (2u)

Exploración

Gráfica r1 = 2 cos14u2; borre la pantalla y grafique r1 = 2 cos16u2. ¿Cuántos pétalos tenía cada una de estas gráficas?

Borre la pantalla y grafique, en orden, cada uno en una pantalla clara, r1 = 2 cos13u2, r1 = 2 cos15u2 y r1 = 2 cos17u2. ¿Qué notas sobre la cantidad de pétalos?

La curva de la Figura 30(b) se llama rosa de cuatro pétalos.

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Rosa

Las curvas de rosa se caracterizan por ecuaciones de la forma

• r = a cos1nu2 • r = un sen1nu2 un · 0

y tienen gráficos en forma de rosa.

Si n · 0 es par, la rosa tiene 2n pétalos; si n · {1 es impar, la rosa tiene n pétalos.

Ahora resuelve el problema 5 1

EJEMPLO 11 Graficar una ecuación polar (lemniscata)

Grafique la ecuación: r ^{2} = 4 pecado12u2

Solución

Te dejamos a ti comprobar que la gráfica es simétrica respecto al polo. Debido a la simetría con respecto al polo, solo enumere aquellos valores de u entre u = 0 y u = p. Tenga en cuenta que para 2 $\frac{pag}{}$ 6 u 6 p (cuadrante II) no hay puntos en el gráfico desde r ^{2} 6 0 para tales valores. La Tabla 5 enumera los puntos del gráfico para valores de u = 0 a u = en la Figura $\frac{pag}{}$. Los puntos de la Tabla 5 donde se trazan r Ú 0 2 31(a). Los puntos restantes del gráfico se pueden obtener mediante simetría. La Figura 31(b) muestra el gráfico final dibujado.

Tabla 5

Ud.	2 r · 4 pecados (2U)	r
0	4 # 0 = 0	0
$\frac{pag}{6}$	$4 \# \frac{\sqrt{13}}{2} = 223$	{1,9
$\frac{pag}{4}$	4 # 1 = 4	{2
$\frac{pag}{3}$	$4 \# \frac{\sqrt{23}}{2} = 223$	{1.9
$\frac{pag}{2}$	4 # 0 = 0	0

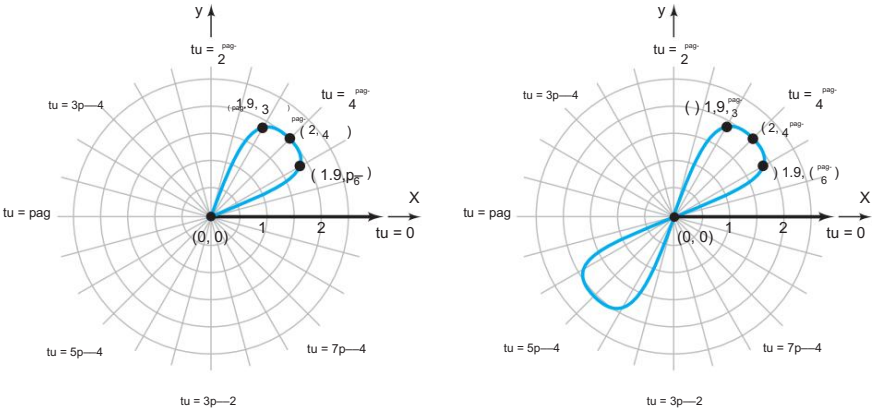


Figura 31

La curva de la Figura 31(b) es un ejemplo de lemniscata (de la palabra griega que significa cinta).

DEFINICIÓN Lemniscatas

Las lemniscatas se caracterizan por ecuaciones de la forma

2 • r = a2 sen12u2 2 • r = a2 cos12u2

donde a · 0, y tienen gráficas con forma de hélice.

Ahora resuelve el problema 5 5

EJEMPLO 12 Graficar una ecuación polar (espiral)

Grafique la ecuación: r = eu>5

Solución

Las pruebas de simetría con respecto al polo, el eje polar y la recta u = $\frac{pag}{}$ 2 fallar. Además, no existe ningún número u para el cual r = 0, por lo que la gráfica no pasa por el polo. De la ecuación, observe que r es positivo para todo u, r aumenta a medida que u aumenta, r S 0 cuando u S - q, y r S q como u S q.

Machine Translated by Google

Tabla 6

Ud.	r · eU>5
- 3p/2	0,39
- pag	0,53
- pag/2	0,73
- pag/4	0,85
0	1
pag/4	1.17
pag/2	1.37
pag	1,87
3p/2	2.57
2p	3.51

Con la ayuda de una calculadora se pueden obtener los valores de la Tabla 6. Ver Figura 32.

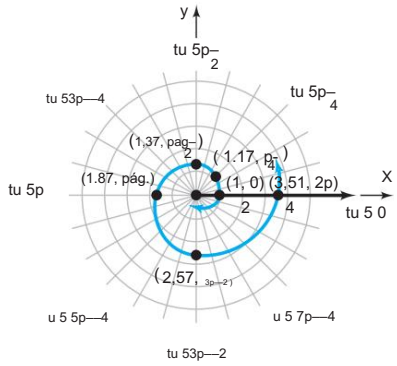


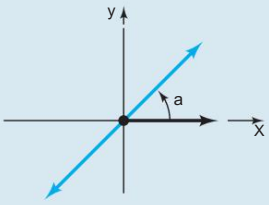
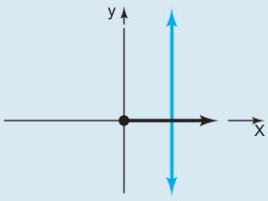
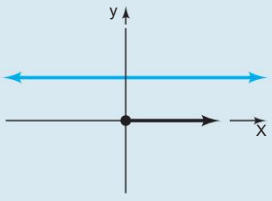
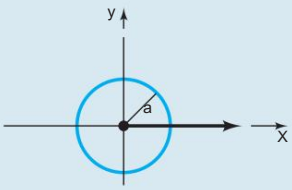
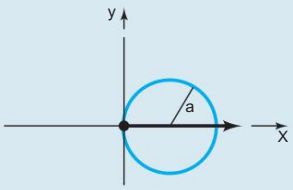
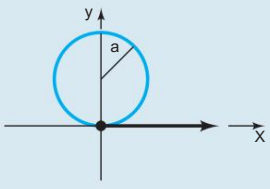
Figura 32 r = ue/5

La curva de la Figura 32 se llama espiral logarítmica, ya que su ecuación se puede escribir como u = 5 ln r y forma una espiral infinita tanto hacia el polo como alejándose de él.

Clasificación de ecuaciones polares

Las ecuaciones de algunas rectas y círculos en coordenadas polares y sus correspondientes ecuaciones en coordenadas rectangulares se dan en la Tabla 7. También se incluyen los nombres y gráficas de algunas de las ecuaciones polares que se encuentran con más frecuencia.

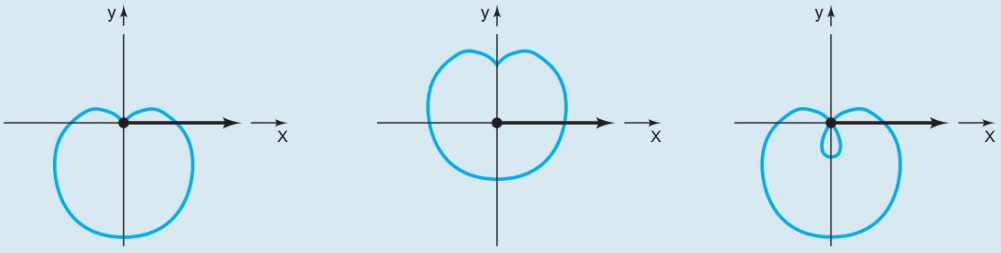
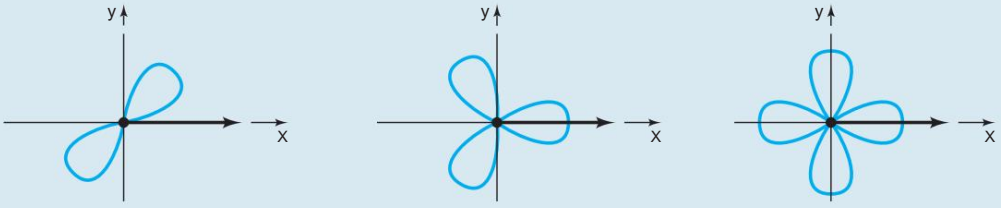
Tabla 7

Líneas			
Descripción	Línea que pasa por el poste formando un ángulo a con el eje polar	Linea vertical	Linea horizontal
ecuación rectangular	y = (tan a)x	x = un	y = segundo
ecuación polar	tu = un	r porque u = a	r sen u = b
Gráfico típico			
circulos			
Descripción	Centro en el polo, radio a	Pasando por el poste, tangente a la recta. tu = pag/2, centrarse en el eje polar, radio a	Pasando por el polo, tangente al eje polar, centro en la recta. tu = pag/2, radio a
ecuación rectangular	x2 + y 2 = a2 , un 7 0	x2 + y 2 = {2ax, a 7 0	x2 + y2 = {2ay, a 7 0
ecuación polar	r = a, a 7 0	r = {2a porque u, a 7 0	r = {2a sen u, a 7 0
Gráfico típico			

(continuado)

Machine Translated by Google

Tabla 7 (continuación)

Otras ecuaciones			
Nombre	Cardioide	Limaçon sin bucle interior	Limaçon con bucle interior
Ecuaciones polares	r = a { a porque u, a 7 0	r = a { b porque u, a 7 b 7 0	r = a { b porque u, b 7 a 7 0
	r = a { a sen u, a 7 0	r = a { b sen u, a 7 b 7 0	r = a { b sen u, b 7 a 7 0
Gráfico típico			
Nombre	lemniscata	Rosa con tres pétalos	Rosa con cuatro pétalos.
Ecuaciones polares	^{2}r = a2 cos12u2, a · 0 = a2	r = a sin13u2, a 7 0	r = a sin12u2, a 7 0
	^{2}r sen12u2, a · 0	r = a cos13u2, a 7 0	r = a cos12u2, a 7 0
Gráfico típico			

Dibujar rápidamente

Si una ecuación polar involucra solo una función seno (o coseno), puedes obtener rápidamente su gráfica haciendo uso de la Tabla 7, la periodicidad y una tabla breve.

EJEMPLO 13 Dibujar rápidamente la gráfica de una ecuación polar

Grafique la ecuación: r = 2 + 2 sen u

Solución

Como a = b = 2, la gráfica de esta ecuación polar es cardioide. El período del pecado u es 2p, así que forme una tabla usando 0... u... 2p, calcule r, grafique los puntos 1r, u2 y dibuje la gráfica de un cardioide cuando u varía de 0 a 2p. Consulte la Tabla 8 y la Figura 33.

Tabla 8

Ud.	r · 2 · 2 sen U
0	2 + 2 # 0 = 2
pag/2	2 + 2 # 1 = 4
pag	2 + 2 # 0 = 2
3p/2	2 + 21-12 = 0
2p	2 + 2 # 0 = 2

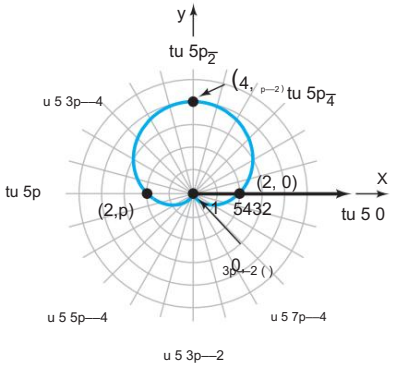


Figura 33 r = 2 + 2 sen u

Machine Translated by Google

Comentario sobre cálculo Para aquellos que planean estudiar cálculo, es necesario un comentario sobre una función importante de las ecuaciones polares.

En coordenadas rectangulares, la ecuación x2 + y2 = 1, cuya gráfica es el círculo unitario, no es la gráfica de una función. De hecho, se requieren dos funciones para obtener la gráfica del círculo unitario:

$$y1 = \sqrt{1 - x^2}$$ Semicírculo superior $$y2 = -\sqrt{1 - x^2}$$ Semicírculo inferior

En coordenadas polares, la ecuación r = 1, cuya gráfica es también el círculo unitario, sí define una función. Para cada elección de u, sólo hay un valor correspondiente de r, es decir, r = 1. Dado que muchos problemas de cálculo requieren el uso de funciones, la oportunidad de expresar no funciones en coordenadas rectangulares como funciones en coordenadas polares resulta extremadamente útil.

Tenga en cuenta también que la prueba de la línea vertical para funciones es válida sólo para ecuaciones en coordenadas rectangulares.

Característica histórica

Jakob Bernoulli
(1654-1705)

Las coordenadas polares parecen haber sido inventado por Jakob Bernoulli (1654-1705) alrededor de 1691, aunque, como ocurre con la mayoría de estas ideas, existen rastros anteriores de la noción. Los primeros usuarios del cálculo siguieron comprometidos con las coordenadas rectangulares, y las coordenadas polares no se utilizaron ampliamente hasta principios del siglo XIX. Incluso entonces, eran en su mayoría geómetras. quien los usó para describir curvas impares. Finalmente, hacia mediados del siglo XIX, los matemáticos aplicados se dieron cuenta de la tremenda simplificación que hacen posible las coordenadas polares en la descripción de objetos con simetría circular o cilíndrica. A partir de entonces su uso se generalizó.

9.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Si las coordenadas rectangulares de un punto son 14, - 62, el punto simétrico a él respecto al origen es _____ . (págs. 49 a 53)
2. La fórmula de diferencia para el coseno es cos1A - B2 = _____ · (pág. 523)
3. La ecuación estándar de un círculo con centro en 1 - 2, 52 y . (págs. 71 a 75) radio 3 es _____
4. ¿ La función seno es par, impar o ninguna de las dos? (págs. 438 y 439)
5. pecado $\frac{5p}{4}$ = _____ (págs. 414–421)
6. porque $\frac{2p}{3}$ = _____ (págs. 414–421)

Conceptos y vocabulario

7. Una ecuación cuyas variables son coordenadas polares se llama un) _____ _____ .
8. Verdadero o Falso Las pruebas de simetría en coordenadas polares son siempre concluyentes.
9. Para probar si la gráfica de una ecuación polar puede ser simétrica con respecto al eje polar, reemplace u por 10. Para probar si la gráfica _____ · de una ecuación polar puede ser simétrica con respecto a la recta u = $\frac{pag}{2}$, reemplazarte por _____ ·
11. Las curvas de rosa se caracterizan por ecuaciones de la forma r = a cos 1n u2 o r = a sin 1n u2, a · 0. Si n · 0 es par, la rosa tiene pétalos; si n · {1 es impar, la rosa tiene pétalos. _____
12. Verdadero o Falso Un cardioide pasa por el polo.
13. Opción múltiple Para un número real positivo a, ¿qué ecuación polar es un círculo con radio a y centro 1a, 02 en coordenadas rectangulares?

    (a) r = 2a sen u (c) r = 2a porque u
    (b) r = - 2a sen u (d) r = - 2a porque u
14. Opción múltiple En coordenadas polares, los puntos 1r, u2 y 1 - r, u2 son simétricos con respecto a cuál de los siguientes?

    (a) el eje polar (o eje x) (b) el polo (u origen)
    (c) la recta u = $\frac{pag}{}$ (o eje y) 2 (d) la línea u = 4 $\frac{pag}{}$ 1o y = x2

Desarrollo de habilidades

En los problemas 15 a 30, transforme cada ecuación polar en una ecuación en coordenadas rectangulares. Luego identifica y grafica la ecuación.

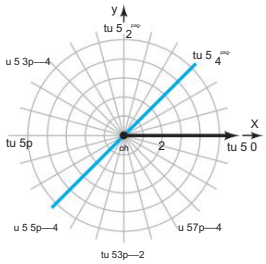
15. r = 4
16. r = 2
17. tu = $\frac{pag}{}$
18. tu = - 4 $\frac{pag}{}$
19. r porque tu = 4
20. r sen u = 4
21. r porque u = - 2
22. r sen u = - 2

Machine Translated by Google

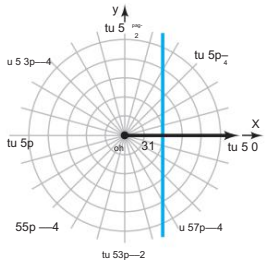
23. r = 2 porque u
24. r = 2 sen u
25. r = - 4 porque tu
26. r = - 4 sen u
27. r csc u = 8
28. r seg u = 4
29. r seg u = - 4
30. r csc u = - 2

En los problemas 31 a 38, relacione cada una de las gráficas (A) a (H) con una de las siguientes ecuaciones polares.

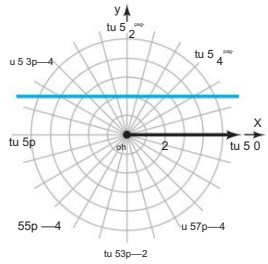
31. tu = $\frac{\text{pag}}{4}$
32. r = 2
33. r porque tu = 2
34. r = 2 porque tu
35. r = 2 sen u
36. r = 1 + porque tu
37. r sen u = 2
38. tu = $\frac{3p}{4}$



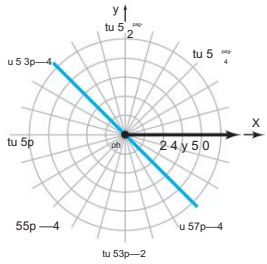
(A)



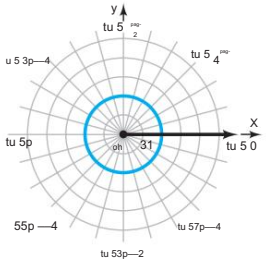
(B)



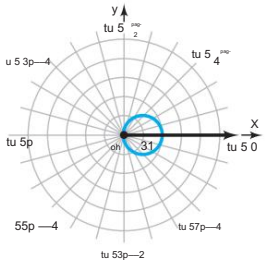
(C)



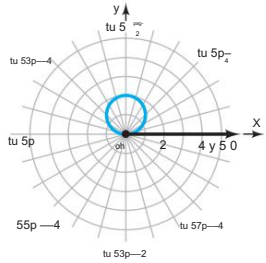
(D)



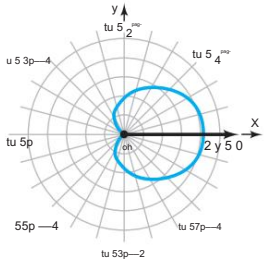
(MI)



(F)



(GRAMO)



(H)

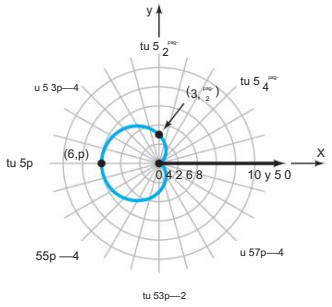
En los problemas 39 a 62, identifique y represente gráficamente cada ecuación polar.

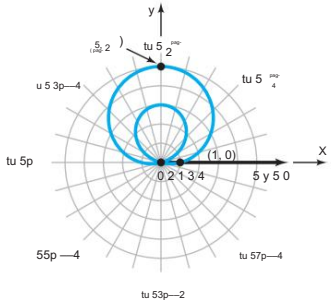
39. r = 2 + 2 porque tu
40. r = 1 + sen u
41. r = 2 - 2 porque tu
42. r = 3 - 3 sen u
43. r = 2 - porque tu
44. r = 2 + sen u
45. r = 4 - 2 porque tu
46. r = 4 + 2 sen u
47. r = 1 + 2 sen u
48. r = 1 - 2 sen u
49. r = 2 + 4 porque tu
50. r = 2 - 3 porque tu
51. r = 3 cos12u2
52. r = 2 sen13u2
53. r = 3 cos14u2 57. r = 3u
54. r = 4 sen15u2
58.r = 2u _
2 55.r _ = 9 cos12u2
2 56.r _ = sen12u2
59. r = 3 + cos u
60. r = 1 - porque u
61. r = 4 cos13u2
62. r = 1 - 3 porque tu

Aplicaciones y extensiones

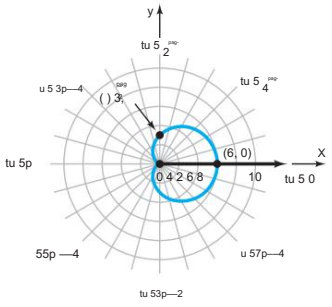
En los problemas 63 a 66, la ecuación polar para cada gráfica es r = a + b cos u o r = a + b sen u, a 7 0. Seleccione la ecuación correcta y encuentre los valores de a y b.

63.

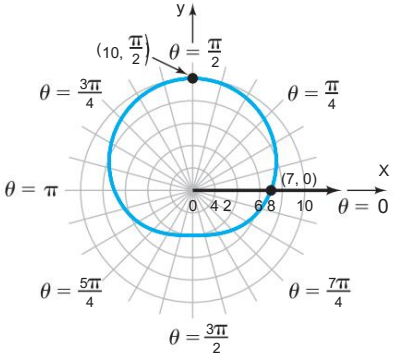




64.



66.



Machine Translated by Google

En los problemas 67 a 72, grafica cada par de ecuaciones polares en la misma cuadrícula polar. Encuentre las coordenadas polares de los puntos de intersección y etiquételos en la gráfica.

67. r = 8 sen u; r = 4 csc u 70. r =

sen u; r = 1 + porque tu

68. r = 8 porque tu; r = 2 segundos u

71. r = 1 + porque tu; r = 3 porque tu

69.r = 3; r = 2 + 2 porque tu

72. r = 1 + sen u; r = 1 + porque tu

En los problemas 73 a 82, grafica cada ecuación polar.

73.r = _ $\frac{2}{1 - 2 \text{ porque tú}}$ (hipérbola)

74.r = _ $\frac{2}{1 - \text{porque tú}}$ (parábola)

75.r = _ $\frac{1}{1 - \text{porque tú}}$ (parábola)

76.r = _ $\frac{1}{3 - 2 \text{ porque tú}}$ (elipse)

77.r = _ $\frac{3}{\text{tu}}$ (espiral recíproca)

78. r = u, u Ú 0 (espiral de Arquímedes)

79. r = sen u tan u (cisoide)

80. r = csc u - 2, 0 6 u 6 p (concoide)

81. r = cos 2 $\frac{\text{tu}}{}$

82. r = tan u, - 2 $\frac{\text{pag}}{}$ 6 y 6 $\frac{\text{pag}}{2}$ (curva kappa)

83. Demuestre que la gráfica de la ecuación r sen u = a es una recta horizontal a unidades por encima del polo si a Ú 0 y 0 a 0 unidades por debajo del polo si a 6 0.

84. Demuestre que la gráfica de la ecuación r cos u = a es una recta vertical a unidades a la derecha del polo si a Ú 0 y 0 a 0 unidades a la izquierda del polo si a 6 0.

85. Demuestre que la gráfica de la ecuación r = 2a sen u, a 7 0, es un círculo de radio a con centro 10, a2 en coordenadas rectangulares.

86. Demuestre que la gráfica de la ecuación r = - 2a sen u, a 7 0, es un círculo de radio a con centro 10, - a2 en coordenadas rectangulares.

87. Demuestre que la gráfica de la ecuación r = 2a cos u, a 7 0, es un círculo de radio a con centro 1a, 02 en coordenadas rectangulares.

88. Demuestre que la gráfica de la ecuación r = - 2a cos u, a 7 0, es un círculo de radio a con centro 1 - a, 02 en coordenadas rectangulares.

---

89. Los gráficos de navegación polar proporcionan velocidades alcanzables de un velero específico que navega en diferentes ángulos con un viento de una velocidad determinada. Ver la figura. Utilice el gráfico para aproximar la velocidad alcanzable del velero en las condiciones dadas.

(a) Navegando en un ángulo de 140° con un viento de 6 nudos.

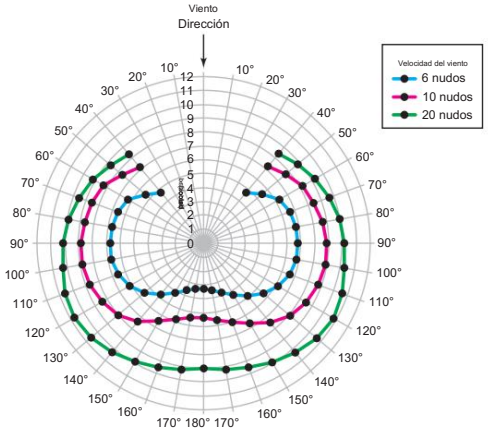
(b) Navegando en un ángulo de 160° con un viento de 10 nudos.

(c) Navegando en un ángulo de 80° con un viento de 20 nudos.

(d) Si el viento sopla a 20 nudos, ¿en qué ángulos alcanzará el velero una velocidad de 10 nudos o más?

(e) Si el viento sopla a 10 nudos, ¿cuál es la velocidad máxima? ¿Velocidad alcanzable del velero? ¿Para qué ángulo(s) se produce esta velocidad?

Fuente: myhanse.com



90. Problema de desafío Demuestre que r = a cos u + b sen u, con a, b no ambos cero, es la ecuación de un círculo. Encuentra el centro y el radio del círculo.

91. Problema de desafío Demuestra que el área del triángulo con vértices 10, 02, 1r1, u12 y 1r2, u22, 0… u1 6 u2 … p, es

$$k = \frac{1}{2} r1r2 \text{ sen}1u2 - u12$$

92. Problema de desafío Expresar coordenadas ^{2} = cos12u2 en rectangular r libres de radicales.

Explicar conceptos: discusión y escritura

93. Explique por qué es válida la siguiente prueba de simetría: Reemplace r por - r y u por - u en una ecuación polar. Si resulta una ecuación equivalente, la gráfica es simétrica con respecto a la recta u = 2 $\frac{\text{pag}}{}$ (eje y).

(a) Demuestre que la prueba de la página 625 falla para r ^{2} = porque tú, todavía esta nueva prueba funciona.

(b) Demuestre que la prueba de la página 625 funciona si ^{2} = pecado u, todavía esta nueva prueba falla.

94. Escribe dos pruebas diferentes de simetría con respecto al eje polar. Encuentre ejemplos en los que una prueba funciona y la otra falla. ¿Qué prueba prefieres usar? Justifica tu respuesta.

95. Las pruebas de simetría dadas en la página 625 son suficientes, pero no es necesario. Explique qué significa esto.

96. Explique por qué la prueba de la línea vertical utilizada para identificar funciones en coordenadas rectangulares no funciona para ecuaciones expresadas en coordenadas polares.

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 97 a 106 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

97. Resuelve: $\frac{5}{x - 3} \le 1$

98. Convertir $\frac{7\pi}{3}$ radianes a grados.

99. Determine la amplitud y el período de y = - 2sin15x2 sin graficar.

100. Encuentra las asíntotas para la gráfica de

$$R(x) = \frac{x + 3}{x^2 - x - 12}$$

101. Encuentra el resto al dividir 3x5 - 2x3 + 7x - 5 por x - 1.

102. Encuentra el área de un triángulo con lados 6, 11 y 13.

103. Resuelve: 32x-3 = 91-x

104. Resuelve: 6x2 + 7x = 20

105. $m = f'(x) = 3x^2 + 8x$ da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ en cualquier número x. Encuentre una ecuación de la recta tangente a f en x = - 2.

106. Demuestre que $\cos 3x = \cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x$.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 1 - 4, 62 2. cos A cos B + sen A sen B 3. 1x + 22 ^{2} + 1 año - 52 ^{2} = 9 4. Impar 5. - $\frac{12}{2}$ 6. - 2 $\frac{1}{}$

9.3 El Plano Complejo; Teorema de De Moivre

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Números complejos (Sección A.7, págs. A54–A59)
- Valores de las funciones seno y coseno en ciertos Ángulos (Sección 6.2, págs. 414–421)
- Fórmulas de suma y diferencia para seno y coseno (Sección 7.5, págs. 523 y 526)
- Leyes de los exponentes (Sección A.1, págs. A7–A9)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 643.

OBJETIVOS 1 Trazar puntos en el plano complejo (p. 636)

2 Convertir un número complejo entre forma rectangular y forma polar o forma exponencial (p. 637)

3 Encuentra productos y cocientes de números complejos (p. 639)

4 Utilice el teorema de De Moivre (p. 640)

5 Encuentre raíces complejas (p. 641)

1 Trazar puntos en el plano complejo

Los números complejos se analizan en el Apéndice A, Sección A.7. En esa discusión no estábamos preparados para dar una interpretación geométrica de un número complejo. Ahora estamos listos.

Un número complejo z = x + yi puede interpretarse geométricamente como el punto 1x, y2 en el plano xy. Cada punto del plano corresponde a un número complejo y, a la inversa, cada número complejo corresponde a un punto del plano. El conjunto de tales puntos se denomina plano complejo. El eje x se conoce como eje real, porque cualquier punto que se encuentre en el eje real tiene la forma z = x + 0i = x, un número real. El eje y se llama eje imaginario, porque cualquier punto que se encuentre en el eje imaginario tiene la forma z = 0 + yi = yi, un número imaginario puro. Ver Figura 34.

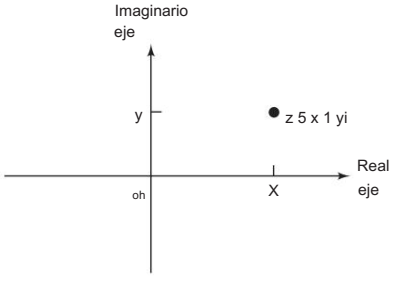


Figura 34 Plano complejo

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1 Trazar un punto en el plano complejo

Trazar el punto correspondiente a $z = 13 - i$ en el plano complejo.

Solución

El punto correspondiente a $z = 23 - i$ tiene las coordenadas rectangulares 123, - 12. Este punto, ubicado en el cuadrante IV, está trazado en la Figura 35.

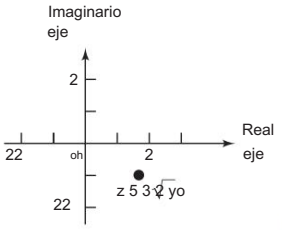


Figura 35

DEFINICIÓN Magnitud o Módulo

Supongamos que $z = x + yi$ es un número complejo. La magnitud o módulo de z, denotada 0 z 0 , es la distancia desde el origen hasta el punto 1x, y2. Eso es,

$$0\,z\,0 = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

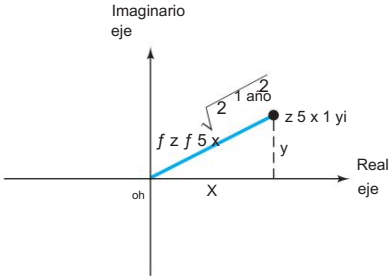


Figura 36

Consulte la Figura 36 para ver una ilustración.

Esta definición de 0 z 0 es consistente con la definición del valor absoluto de un número real: Si $z = x + yi$ es un número real, entonces $z = x + 0i$ y

$$0\,z\,0 = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = 0\,x\,0$$

Por esta razón, a la magnitud de z a veces se le llama valor absoluto de z.

Recuerde que si $z = x + yi$, entonces su conjugado, denotado $\bar{z}$, es $z = x - yi$. Como $z\bar{z} = x^2 + y^2$ es un número real no negativo, de la ecuación (1) se deduce que la magnitud de z se puede escribir como

$$0\,z\,0 = \sqrt{z\bar{z}} \qquad (2)$$

2 Convertir un número complejo entre forma rectangular y forma polar o forma exponencial

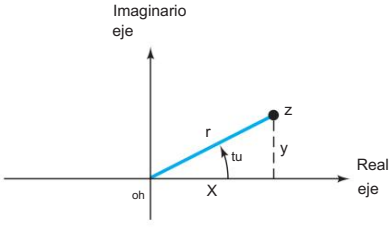
Cuando un número complejo se escribe en la forma estándar $z = x + yi$, está en forma rectangular o cartesiana , porque 1x, y2 son las coordenadas rectangulares del punto correspondiente en el plano complejo. Supongamos que 1r, u2 son coordenadas polares de este punto. Entonces

$$x = r \cos u \qquad y = r \operatorname{sen} u$$

DEFINICIÓN Forma polar de un número complejo

Si r Ú 0 y 0 … u 6 2p, el número complejo $z = x + yi$ se puede escribir en forma polar como

$$z = x + yi = r \cos u + 1r \operatorname{sen} u2i = r1\cos u + i \operatorname{sen} u2 \qquad (3)$$



z 5 x 1 yi 5 r(cos u 1 i sen u),
r $ 0, 0 # u , 2p

Figura 37

Ver Figura 37.

Si $z = r1\cos u + i \operatorname{sen} u2$ es la forma polar de un número complejo,* el ángulo u, 0 … u 6 2p, se llama argumento de z.

*Algunos textos abrevian la forma polar usando $z = r1\cos u + i \operatorname{sen} u2 = r \operatorname{cis} u$.

Machine Translated by Google

Además, como r Ú 0, tenemos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. De la ecuación (1), se deduce que la magnitud de z = r1cos u + i sen u2 es

$$0\,z\,0 = r$$

¿Necesita revisar?
El número e se define en la Sección 5.3, p. 323.

Leonhard Euler (1707-1783) estableció una relación, conocida como la de Euler. Fórmula, entre números complejos y el número e.

TEOREMA Fórmula de Euler

Para cualquier número real u,

$$e^{iu} = \cos u + i \operatorname{sen} u$$

La demostración de la fórmula de Euler requiere matemáticas más allá del nivel de este texto, por lo que no se incluye aquí.

La fórmula de Euler nos permite escribir la forma polar de un número complejo usando notación exponencial.

$$r1\cos u + i \operatorname{sen} u2 = re^{iu} \qquad (4)$$

Cuando un número complejo se escribe en la forma $z = re^{iu}$, se dice que está escrito en forma exponencial. Observe en la fórmula de Euler que u es un número real. Es decir, u está en radianes.

EJEMPLO 2 Escribir un número complejo en forma polar y en forma exponencial

Escribe $z = 23 - i$ en forma polar y en forma exponencial.

Solución

Como x = 23 e y = - 1, se deduce que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{31}\,232\,2 + 1 - 12^{\,2} = 24 = 2$$

entonces

$$\text{porque } tu = \frac{x}{r} = \frac{23}{2} \qquad \text{pecado } u = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} \qquad 0 \ldots u\ 6\ 2p$$

El ángulo u, 0 … u 6 2p, que satisface ambas ecuaciones es $u = \frac{11p}{6}$. Con $u = \frac{11p}{6}$ y r = 2, la forma polar de z = 23 - i es

$$z = r1\cos u + i \operatorname{sen} u2 = 2\text{acos } \frac{11p}{6} + \text{peco}_\,\frac{11p}{6\ \text{segundo}}$$

La forma exponencial de $z = 23 - i$ es

$$z = re^{iu} = 2ei\,\#\,11p{>}6\ U \cdot \frac{11p}{6}, r \cdot 2$$

Ahora resuelve el problema 1 3

EJEMPLO 3 Trazar un punto en el plano complejo y convertirlo en Forma rectangular

Trazar el punto correspondiente a $z = 2\text{acos } p\ \frac{pag}{6} + \text{peco}_\,\frac{pag}{6}\ b = 2ei\,\#\,p{>}6$ en el complejo plano y convertir z a forma rectangular.

Machine Translated by Google

Solución

Para trazar el número complejo z = 2 acos p 6 b = 2ei # p>6 cuyas coordenadas polares $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, traza el punto

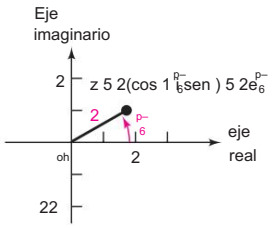


Figura 38 z = 2ei # p>6

son 1r, u2 = a2, p 6 b como se muestra en la Figura 38. Para expresar z en forma rectangular, expanda z = 2 acos p $\frac{\pi}{6}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{6b}$.

$$z = 2\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6b} = 2a\frac{23}{2} + \frac{1}{2ib} = 23 + yo$$

Ahora resuelve el problema 2 5

3 Encontrar productos y cocientes de números complejos

La forma exponencial de un número complejo es particularmente útil para encontrar productos y cocientes de números complejos. El siguiente teorema establece que se pueden utilizar las leyes de los exponentes.

> **¿Necesita revisar?**
> Las leyes de los exponentes se analizan en la sección A.1, págs. A7–A9.

TEOREMA

Supongamos que z1 = r1ei u1 y z2 = r2ei u2 son dos números complejos. Entonces

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{5}$$

Si z2 · 0, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{6}$$

Prueba Probamos la fórmula (5). La demostración de la fórmula (6) se deja como ejercicio (ver Problema 70).

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2}$$

$$= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2))$$

$$= r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

■

EJEMPLO 4 Encontrar productos y cocientes de números complejos

Si $z = 3\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}$ b y $w = 5\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}$ b, encontrar

(a) zw (b) $\frac{z}{w}$

Expresa las respuestas en forma polar y en forma exponencial.

Solución (a) $zw = 3\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9b} \cdot 5\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}$ segundo

$= 3e^{i\pi/9} \cdot 5e^{i5\pi/9}$ Escribe los números complejos en forma exponencial.

$= 3 \cdot 5 \cdot e^{i(\pi/9 + 5\pi/92)}$ Utilice la fórmula (5).

$= 15e^{i2\pi/3}$ Forma exponencial del producto zw

$= 15\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ segundo Forma polar del producto zw

(continuado)

Machine Translated by Google

(b) $\frac{z}{w} = \frac{3\text{acos } p\frac{}{9} + \text{peco } _\frac{\text{pag}}{9\text{ segundo}}}{5\text{acos } 5p\frac{}{9} + \text{peco } _\frac{5p}{9\text{ segundo}}} = \frac{3\text{ei \# p>9}}{5\text{ei \# 5p>9}}$ Escribe los números complejos en forma exponencial.

$= \frac{3}{5}\text{ei \# 1p>9 - 5p>92} = \frac{3}{5}\text{ei \# 1-4p>92}$ Utilice la fórmula (6).

$= \frac{3}{5}\text{ c cosa - }\frac{4p}{9}\text{ b + i sina - }\frac{4p}{9\text{ dormitorios}}$

$= \frac{3}{5}\text{ c cos }\frac{14p}{9} + \text{peco } _\frac{14p}{9\text{ días}}$ El argumento debe estar entre 0 y 2P.

Forma polar del cociente $\frac{z}{w}$

$= \frac{3}{5}\text{ie \# 14p>9}$ Forma exponencial del cociente $\frac{z}{w}$

Ahora resuelve el problema 3 7

Observe que la solución del ejemplo 4(b) demuestra que el argumento de un número complejo es periódico.

TEOREMA

El argumento de un número complejo es periódico.

$\text{rei } u = \text{rei1u + 2kp2 k un número entero}$

Se le pide que demuestre este teorema en el problema 71.

4 Utilice el teorema de De Moivre

Hemos visto que las cuatro operaciones fundamentales de suma, resta, multiplicación y división se pueden realizar con números complejos.

El teorema de De Moivre, enunciado por Abraham De Moivre (1667-1754) en 1730, pero ya conocido por mucha gente en 1710, es importante porque permite utilizar las dos últimas operaciones algebraicas fundamentales, elevar a una potencia y extraer raíces, con números complejos.

El teorema de De Moivre, en su forma más básica, es una fórmula para plantear un complejo número z elevado a n, donde n Ú 1 es un número entero.

Supongamos z = rei u es un número complejo. Entonces

n = 2: z2 = 1rei u 22 = rei u # rei u 2 ei12u2 = r 2 ei12u2 Fórmula (5)

z3 = 1rei u 23 = r # rei u n = 3: = r 3 Fórmula ei13u2 (5)

rei u n = 4: z4 = 1rei u 24 = r 3 ei13u2 # = r 4 Fórmula ei14u2 (5)

¿Ves el patrón? Cuando se escriben en forma exponencial, las reglas para los exponentes se pueden usar para elevar un número complejo a una potencia entera positiva.

TEOREMA Teorema de De Moivre

Si z = rei u es un número complejo, entonces

$zn = r\ \text{ei1nu2 _}$

donde n Ú 1 es un número entero.

La demostración del teorema de De Moivre requiere inducción matemática (que no se analiza hasta la sección 12.4), por lo que se omite aquí. En realidad, el teorema es cierto para todos los números enteros n. Se le pide que demuestre esto en el problema 73.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Usando el teorema de De Moivre

Expreso c 2acos p $\frac{}{9}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{\text{9 dormitorios}}$ ^{3} en forma exponencial rei u y en rectangular forma x + yi.

Solución

c 2acos p$\frac{}{9}$ + yo peco ^{3} $_{\text{9 dormitorios}}$ = a2ei # p> 9b ^{3} Convierte el número complejo a forma exponencial.

= 23 ei # 13 # p>92 = 8ei # p>3 Utilice el teorema de De Moivre.

= 8acosp $\frac{}{3}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{\text{3 segundo}}$ Convierte el número complejo a forma polar.

= 8a 1$\frac{}{2}$ + $\frac{23^{-}}{2ib}$ = 4 + 423i

Entonces, c 2acos$\frac{}{9}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{\text{9 dormitorios}}$ ^{3} = 8ei # p>3 = 4 + 423i.

Ahora resuelve el problema 4 5

EJEMPLO 6 Usando el teorema de De Moivre

Expresa 11 + i2 ^{5} en forma exponencial rei u y en forma rectangular x + yi.

Solución Para utilizar el teorema de De Moivre, primero convierte el número complejo a forma exponencial.

Dado que la magnitud de 1 + i es 21 2 $\overline{\quad + 1^{2}}$ = 22, comienza escribiendo

1 + yo = 22a 1 $\frac{}{22^{-}}$ + $\frac{1}{22^{-}}$ ib = 22acosp $\frac{}{4}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{\text{4 b = 22 ei # p>4}}$

NOTA En la solución del Ejemplo 6, el método utilizado en el Ejemplo 2 también podría usarse para escribir 1 + i en forma polar. j

Entonces

11 + i2 ^{5} $_{\text{= 1 22 ei # p>4 25 = 1 222 5}}$ ei15 # p>42 = 422 ei # 5p>4

= 422acos 5p $\frac{}{4}$ + peco _ $\frac{5p}{4b}$ = 422c - $\frac{1}{22^{-}}$ + un - $\frac{1}{22^{-}}$ bi d = - 4 - 4i

Entonces, 11 + i2 ^{5} = 422 ei # 5p>4 = - 4 - 4i.

5 Encuentra raíces complejas

Supongamos que w es un número complejo y n Ú 2 es un número entero positivo. Cualquier número complejo z que satisfaga la ecuación

$$z^n = w$$

es una raíz enésima compleja de w. De acuerdo con el uso anterior, si n = 2, las soluciones de la ecuación z2 = w se llaman raíces cuadradas complejas de w, y si n = 3, las soluciones de la ecuación z3 = w se llaman raíces cúbicas complejas de w.

TEOREMA Encontrar raíces complejas

Supongamos que w = rei u es un número complejo y n Ú 2 es un número entero. Si w · 0, hay n raíces complejas distintas de w, dadas por la fórmula

$$= 1 \quad \overline{r}\, ei11>n21u + 2kp2\, zk \qquad (7)$$

donde k = 0, 1, 2, c , norte -1.

Machine Translated by Google

Prueba (Esquema) No probamos este resultado en su totalidad. En cambio, mostramos sólo que cada zk en la fórmula (7) satisface la ecuación $z^n = w$, demostrando que cada z_k es una raíz enésima compleja de w.

$$z_k^n = c\,1\ r\,ei11{>}n21u + 2kp2\,d\,n = 1\ 1\ n\ r2\ n\ ei\ \#\ 3n\ \#\ 11{>}n2\,1u + 2kp24 = rei1u + 2kp2 = rei\,u = w$$

Teorema de De Moivre

El argumento de un número complejo es periódico.

Entonces, cada z_k, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, es una raíz enésima compleja de w. Para completar la prueba, necesitamos demostrar que cada z_k, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, es, de hecho, distinta y que hay no son raíces enésimas complejas de w distintas de las dadas por la fórmula (7). ■

EJEMPLO 7 Encontrar raíces cúbicas complejas

Encuentra las raíces cúbicas complejas de $-1 + \sqrt{3}i$. Expresa las respuestas en forma exponencial.

Solución Primero, expresa $-1 + \sqrt{3}i$ en forma exponencial.

$$-1 + 23\ yo = 2a - \frac{1}{2} + \frac{23}{2\ ib} = 2acos\ 2p\ \frac{}{3} + peco\ _\ \frac{2p}{3\ b} = 2\ ei\ \#\ 2p{>}3$$

porque $U \cdot \cdot 2\ \frac{1}{}$; pecado $U \cdot \frac{!3}{2}\ k\ U \cdot \frac{2P}{3}$

Luego, usando la fórmula (7), las tres raíces cúbicas complejas de $-1 + 23i = 2ei\ \#\ 2p{>}3$ son

$$zk = 23\ 2\ ei11{>}3212p{>}3 + 6kp{>}32 = 23\ 2\ ei12p + 6kp2{>}9\ k = 0, 1, 2$$

Eso es,

$$z0 = 23\ 2\ ei12p + 6\ \#\ 0\ \#\ p2{>}9 = 23\ 2\ ei\ \#\ 2p{>}9$$

$$z1 = 23\ 2\ ei12p + 6\ \#\ 1\ \#\ p2{>}9 = 23\ 2\ ei\ \#\ 8p{>}9$$

$$z2 = 23\ 2\ ei12p + 6\ \#\ 2\ \#\ p2{>}9 = 23\ 2\ ei\ \#\ 14p{>}9$$

Observe que cada raíz compleja de $-1 + 23\,i$ tiene la misma magnitud, $23\ 2$. Esto significa que el punto correspondiente a cada raíz cúbica está a la misma distancia del origen y se encuentra en un círculo con centro en el origen y radio $23\ 2$. Además, el

Los argumentos de estas raíces cúbicas son $\frac{2p}{9\ 1.}$, $\frac{8p}{9}$, y $\frac{14p}{9}$, y la diferencia de consecutivos pares es $\#\ 2p = \frac{2p}{3}$. Esto significa que los tres puntos están equidistantes en el círculo, como se muestra en la Figura 39. Estos resultados no son coincidentes. De hecho, se le pide que demuestre que estos resultados son válidos para raíces enésimas complejas de los problemas 67 al 69.

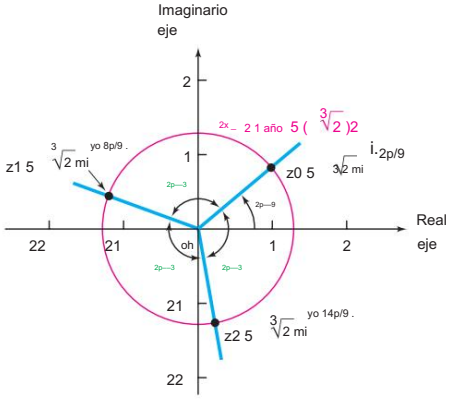


Figura 39

Ahora problema de trabajo 57

Machine Translated by Google

Característica histórica

Juan Wallis

Los babilonios, los griegos y los árabes consideradas raíces cuadradas de negativos cantidades imposibles y ecuaciones con soluciones complejas irresolubles. El primer indicio de que había alguna conexión entre las soluciones reales de ecuaciones y los números complejos se produjo cuando Girolamo Cardano (1501-1576) y Tartaglia (1499-1557) encontraron raíces reales de ecuaciones cúbicas extrayendo raíces cúbicas de cantidades complejas . Durante los siglos siguientes, Los matemáticos trabajaban con números complejos sin creer mucho en su existencia real. En 1673, John Wallis parece haber sido el primero en sugerir la representación gráfica de números complejos, una idea verdaderamente significativa que no se desarrolló más hasta alrededor de 1800. Varias personas, incluido Karl Friedrich Gauss (1777-1855), redescubrieron la idea y la representación gráfica ayudó a establecer los números complejos como miembros iguales de la familia numérica. En aplicaciones prácticas, los números complejos han encontrado sus mayores usos en el estudio de la corriente alterna, donde son una herramienta común, y en el campo de la física subatómica.

Problemas históricos

1. La fórmula cuadrática funciona perfectamente si los coeficientes son números complejos. Resuelve lo siguiente.
   (a) $z^2 - 12 + 5i2z - 3 + 5i = 0$ (b) $z^2 - 11 + i2z - 2 - i = 0$

9.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. El conjugado de - 4 - 3i es _____ . (págs. A54–A59)
2. Las fórmulas de suma de las funciones seno y coseno son:
   (a) sen1A + B2 = (b) _____ . (pág. 526)
   cos1A + B2 = _____ . (pág. 523)
3. pecado $\frac{2p}{3}$ = _____; porque $\frac{4p}{3}$ = _____ (págs. 414–421)
4. Simplifica: e2 # e5 = _____; 1e4 2^3 = _____ (págs. A7–A9)

Conceptos y vocabulario

5. En el plano complejo, el eje x se denomina eje y el eje y se _____ denomina eje. _____
6. Cuando un número complejo z se escribe en polar
   De la forma z = r1cos u + i sen u2, el número no negativo r es el de z,
   y el ángulo u, 0 … u 6 2p, es el de z.
   _____
7. Supongamos que z1 = r1eiu1 y z2 = r2eiu2 son dos números complejos.
   Entonces z1z2 _____ .
8. Verdadero o Falso Si z = reiu es un número complejo y n es un entero, entonces $z^n = r^n e^{iu}$.
9. Todo número complejo distinto de cero tiene exactamente _____ distinto raíces cúbicas complejas.
10. Verdadero o Falso La forma polar de un número complejo distinto de cero es único.
11. Opción múltiple Si z = x + yi es un número complejo, entonces la magnitud de z es:
    (a) x2 + y2 (b) · x · + · y ·
    (c) 2x2 + y2 (d) 2· x · + · y ·
12. Opción múltiple Si z1 = r1eiu1 y z2 = r2eiu2 son complejos números, entonces $\frac{z1}{z2} \cdot 0$, es igual a:
    (a) $\frac{r1}{r2}$ ei1u1 - u22 (b) $\frac{r1}{r2}$ ei1u1 # u22
    (C) $\frac{r1}{r2}$ ei1u1 + u22 (d) $\frac{r1}{r2}$ ei1u1>u22

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 24, traza cada número complejo en el plano complejo y escríbelo en forma polar y exponencial.

13. 1 + yo
14. - 1 + yo
15. 1 - 23i
21. $\overline{2 + i}$
16. 23 - $\overline{yo}$
17. - 2
18. - 3i
19. 923 + $\overline{9i}$
20. 4 - 4i
23i
22. 3 - 4i
23. 25 - $\overline{yo}$
24. - 2+ 3i

En los problemas 25 a 36, escribe cada número complejo en forma rectangular.

25. 2acos 2p $\frac{}{3}$ + peco _ $\frac{2p}{3 \text{ segundo}}$
26. 3acos 7p $\frac{}{6}$ + peco _ $\frac{7p}{6 \text{ segundo}}$
27. 2ei # 5p>6
28. 4ei # 7p>4
29. 4acosp $\frac{}{2}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{2 \text{ segundo}}$
30. 3acos 3p $\frac{}{2}$ + peco _ $\frac{3p}{2 \text{ segundo}}$
31. 3ei # p>2
32. 7eip
33. 0.4acos 10p $\frac{}{9}$ + peco _ $\frac{10p}{9 \text{ segundo}}$
34. 0.2acos 5p $\frac{}{9}$ + peco _ $\frac{5p}{9 \text{ segundo}}$
35. 3ei # p>10
36. 2ei # p>18

Machine Translated by Google

En los problemas 37 a 44, encuentre zw y $\frac{z}{w}$. Escribe cada respuesta en forma polar y en forma exponencial.

37. z = 2acos 2p $\frac{}{9}$ + peco _ $\frac{2p}{\text{9 segundo}}$
w = 4acosp $\frac{}{9}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{\text{9 segundo}}$

38. z = cos + i pecado $\frac{2p}{3}$ $\frac{2p}{3}$
w = porque $\frac{5p}{9}$ + peco _ $\frac{5p}{9}$

39. z = 2ei # 4p>9
w = 6ei # 10p>9

40. z = 3ei # 13p>18
w = 4ei # 3p>2

41. z = 4acos 3p $\frac{}{8}$ + peco _ $\frac{3p}{\text{8 segundo}}$
w = 2acos 9p $\frac{}{\text{dieciséis}}$ + peco _ $\frac{9p}{\text{16 segundo}}$

42. z = 2acosp $\frac{}{8}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{\text{8 segundo}}$
w = 2acosp $\frac{}{10}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{\text{10 segundo}}$

43. z = 1 - yo
w = 1 - 23i

44.z = 2 + 2i
w = 23 - yo

En los problemas 45 a 56, escribe cada expresión en forma rectangular x + yi y en forma exponencial reiu .

45.c 4acos 2p $\frac{}{9}$ + peco _ $\frac{2p}{\text{9 dormitorios}}$ 3

46.c 3acos 4p $\frac{}{9}$ + peco _ $\frac{4p}{\text{9 dormitorios}}$ 3

47. c 22 años 5p $\frac{}{\text{dieciséis}}$ + peco _ $\frac{5p}{\text{16 dormitorios}}$ 4

48. c 2acosp $\frac{}{10}$ + peco _ $\frac{\text{pag}}{\text{10 habitaciones}}$ 5

49. c 12 acos 2p $\frac{}{5}$ + peco _ $\frac{2p}{\text{5 dormitorios}}$ 5

50. c 23acosp $\frac{}{18}$ + peco $\frac{\text{pag}}{\text{18 dormitorios}}$ 6

51. 3 23 ei # 5p>18 4 6

52. 3 25 ei # 3p>16 4 4

53. 1 23 - i2 6

54. 11- i2 5

55. 11 - 25 i2 8

56. 1 22 - i2 6

En los problemas 57 a 64, encuentre todas las raíces complejas. Escribe tus respuestas en forma exponencial.

57. Las raíces cúbicas complejas de 1 + i 59. Las raíces cúbicas complejas de - 8 - 8i

61. Las raíces cúbicas complejas de - 8 63. Las raíces quintas complejas de - i

58. Las raíces cuartas complejas de 23 - i

60. Las raíces cuartas complejas de 4 - 423 i

62. Las raíces cuartas complejas de - 16i

63. Las raíces quintas complejas de i

Aplicaciones y extensiones

65. Encuentra las cuatro raíces cuartas complejas de la unidad, 1, y gráficalas.

66. Encuentra las seis raíces sextas complejas de la unidad, 1, y gráficalas.

67. Demuestre que cada raíz enésima compleja de un número complejo w distinto de cero tiene la misma magnitud.

68. Utilice el resultado del problema 67 para sacar la conclusión de que cada raíz n-ésima compleja se encuentra en un círculo con centro en el origen. ¿Cuál es el radio de este círculo?

69. Consulte el problema 68. Demuestre que las raíces enésimas complejas de un número complejo w distinto de cero están igualmente espaciadas en el círculo.

70. Demuestre la fórmula (6).

71. Prueba rei u = rei1u + 2kp2 , k un número entero.

72. Identidad de Euler Demuestre que eip + 1 = 0.

73. Demuestre que el teorema de De Moivre es verdadero para todos los enteros n suponiendo que es verdadero para los enteros n Ú 1 y luego demostrando que es verdadero para 0 y para los enteros negativos.

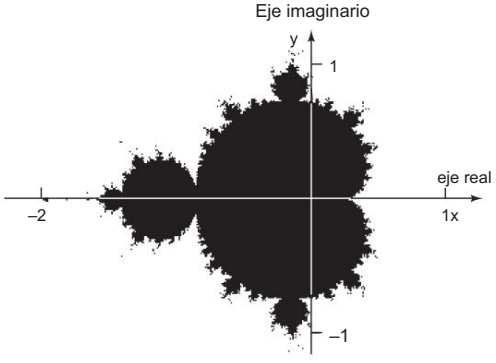
Sugerencia: multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y usa propiedades par-impar.

74. Conjuntos de Mandelbrot

(a) Considere la expresión an = 1an-12 + z, donde z es algún número complejo (llamado semilla) y a0 = z.
Calcular a1 1=a0 2 + z2, a2 1=a1 2 + z2, a3 1=a2 2 + z2, a4, a5, y a6 para las siguientes semillas: z1 = 0,1 - 0,4i, z2 = 0,5 + 0,8i, z3 = - 0,9 + 0,7i, z4 = - 1,1 + 0,1i, z5 = 0 - 1,3i, y z6 = 1 + 1i.

(b) La parte oscura del gráfico representa el conjunto de todos los valores z = x + yi que están en el conjunto de Mandelbrot. Determine qué números complejos del inciso (a) están en este conjunto representándolos en la gráfica. ¿Los números complejos que no están en el conjunto de Mandelbrot tienen alguna característica común con respecto a los valores de a6 encontrados en el inciso (a)?

(c) Calcule 0 z 0 = 2x2 + y2 para cada uno de los números complejos del inciso (a). Ahora calcule 0 a6 0 para cada uno de los números complejos del inciso (a). ¿Para qué números complejos es 0 a6 0 … 0 z 0 y 0 z 0 … 2? Concluya que el criterio para que un número complejo esté en el conjunto de Mandelbrot es que 0 an 0 … 0 z 0 y 0 z 0 … 2.



75. Problema de desafío Resolver ex+yi = 6i.

76. Resolver problema de desafío ex+yi = 7.

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 77 a 86 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

77. Encuentra el área del triángulo con a = 8, b = 11 y C = 113°.

78. Convertir 240° a radianes. Expresa tu respuesta como múltiplo de p.

79. Simplifica: $23\sqrt{24x^2y^5}$

80. Determina si f1x2 = 5x2 - 12x + 4 tiene un valor máximo o un valor mínimo y luego encuentra el valor.

81. Resuelve el triángulo: a = 6, b = 8, c = 12

82. Escribe como un logaritmo simple: 3 loga x + 2 loga y - 5 loga z

83. Resuelve: $\log_5(2x + 4) = 2$

84. Dado f1x2 = 3x2 - 4x y g1x2 = 5x3 , encuentre 1f g2 1x2.

85. Encuentra una ecuación de la recta perpendicular a la gráfica de f1x2 = x - 5 en x = 6.

86. Demuestre que $\sqrt{216\sec^2 x - 16} = 4\tan x$.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. - 4+ 3i 2. (a) sen A cos B + cos A sen B (b) cos A cos B - sen A sen B 3. $\frac{23}{2}; -\frac{1}{2}$ 4. e7 ; e12

9.4 Vectores

OBJETIVOS 1 Graficar vectores (p. 647)
2 Encuentre un vector de posición (p. 648)
3 Sumar y restar vectores algebraicamente (p. 650)
4 Encuentre un múltiplo escalar y la magnitud de un vector (p. 650)
5 Encuentre un vector unitario (p. 651)
6 Encuentre un vector a partir de su dirección y magnitud (p. 652)
7 Modelo con vectores (p. 653)

En términos simples, un vector (derivado del latín vehere, que significa "llevar") es una cantidad que tiene magnitud y dirección. Es habitual representar un vector mediante una flecha. La longitud de la flecha representa la magnitud del vector y la punta de la flecha indica la dirección del vector.

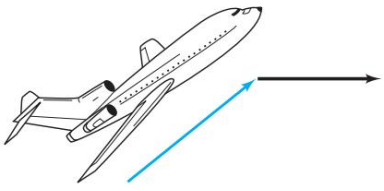


Figura 40

Muchas cantidades en física se pueden representar mediante vectores. Por ejemplo, la velocidad de un avión se puede representar mediante una flecha que apunta en la dirección del movimiento; la longitud de la flecha representa la velocidad. Si el avión acelera, alargamos la flecha; si el avión cambia de dirección, introducimos una flecha en la nueva dirección. Véase la Figura 40. Según esta representación, no sorprende que los vectores y los segmentos de línea dirigidos estén relacionados de alguna manera.

Vectores geométricos

Si P y Q son dos puntos distintos en el plano xy, hay exactamente una línea que contiene tanto P como Q [Figura 41(a)]. Los puntos en esa parte de la línea que une P con Q, incluidos P y Q, forman lo que se llama el segmento de línea PQ [Figura 41(b)]. Ordenar los puntos para que vayan de P a Q da como resultado un segmento de línea dirigido desde P a Q, o un vector geométrico, denotado por $\overrightarrow{PQ}$. En un segmento de línea dirigido $\overrightarrow{PQ}$ p se llama , el punto inicial y Q el punto terminal, como se indica en la Figura 41(c).

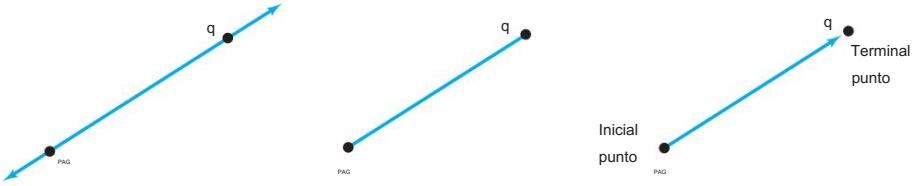


Figura 41 (a) Línea que contiene P y Q (b) Segmento de línea $\overline{PQ}$ (c) Segmento de línea dirigido $\overrightarrow{PQ}$

Machine Translated by Google

NOTA En la impresión, las letras en negrita se utilizan para indicar vectores y distinguirlos de los números. Para trabajos escritos a mano, se coloca una flecha sobre una letra para indicar un vector.

La magnitud del segmento de línea dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es la distancia desde el punto P al punto Q; es decir, es la longitud del segmento de recta. La dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es de P a Q. Si un vector v tiene la misma magnitud y la misma dirección que el segmento de línea dirigido $\overrightarrow{PQ}$, entonces

$$v = \overrightarrow{PQ}$$

El vector v cuya magnitud es 0 se llama vector cero, 0. Al vector cero no se le asigna dirección alguna.

Dos vectores v y w son iguales, escritos

$$v = w$$

si tienen la misma magnitud y la misma dirección.

Por ejemplo, los tres vectores que se muestran en la Figura 42 tienen la misma magnitud y la misma dirección, por lo que son iguales, aunque tengan diferentes puntos iniciales y diferentes puntos terminales. Como resultado, es útil pensar en un vector simplemente como una flecha, teniendo en cuenta que dos flechas (vectores) son iguales si tienen la misma dirección y la misma magnitud (longitud).

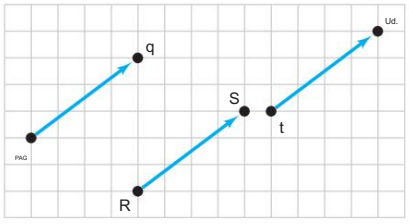


Figura 42 Vectores iguales

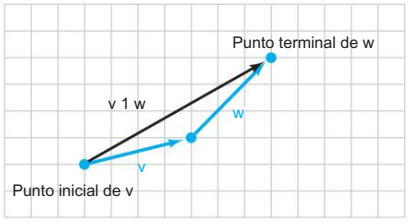


Figura 43 Sumar vectores

Sumar vectores geométricamente

La suma v + w de dos vectores se define de la siguiente manera: Coloque los vectores v y w de modo que el punto terminal de v coincida con el punto inicial de w, como se muestra en la Figura 43. El vector v + w es entonces el único vector cuyo punto inicial coincide con el punto inicial de v y cuyo punto terminal coincide con el punto terminal de w.

La suma de vectores es conmutativa. Es decir, si v y w son dos vectores cualesquiera, entonces

$$v + w = w + v$$

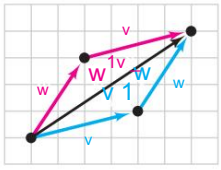


Figura 44 v + w = w + v

La Figura 44 ilustra este hecho. (Obsérvese que la propiedad conmutativa es otra manera de decir que los lados opuestos de un paralelogramo son iguales y paralelos.)

La suma de vectores también es asociativa. Es decir, si u, v y w son vectores, entonces

$$u + 1v + w2 = 1u + v2 + w$$

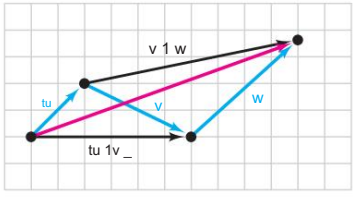


Figura 45
1u + v2 + w = u + 1v + w2

La Figura 45 ilustra la propiedad asociativa de los vectores.

El vector cero 0 tiene la propiedad de que

$$v + 0 = 0 + v = v$$

para cualquier vector v.

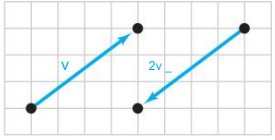


Figura 46 Vectores opuestos

Si v es un vector, entonces - v es el vector que tiene la misma magnitud que v, pero cuya dirección es opuesta a v, como se muestra en la Figura 46.

Además,

$$v + 1 - v2 = 0$$

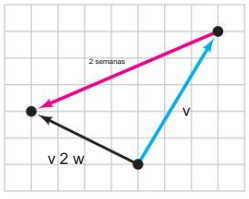


Figura 47 v - w = v + 1 - w2

Si v y w son dos vectores, entonces la diferencia v - w se define como

$$v - w = v + 1 - w2$$

La Figura 47 ilustra las relaciones entre v, w y v - w.

Machine Translated by Google

Multiplicar vectores por números geométricamente

Cuando se utilizan vectores, los números reales se denominan escalares. Los escalares son cantidades que sólo tienen magnitud. Ejemplos de cantidades escalares de la física son la temperatura, la velocidad y el tiempo. Ahora definimos cómo multiplicar un vector por un escalar.

DEFINICIÓN Escalar Múltiple

Si a es un escalar y v es un vector, el múltiplo escalar av se define de la siguiente manera:

- Si a 7 0, av es el vector cuya magnitud es a multiplicada por la magnitud de v y cuya dirección es la misma que la del v.
- Si a 6 0, av es el vector cuya magnitud es 0 a 0 veces la magnitud de v y cuya dirección es opuesta a la del v.
- Si a = 0 o si v = 0, entonces av = 0.

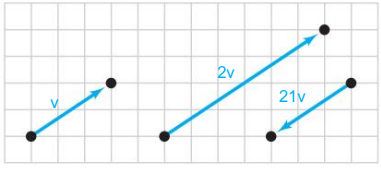


Figura 48 Múltiplos escalares

Consulte la Figura 48 para ver algunas ilustraciones.

Por ejemplo, si a es la aceleración de un objeto de masa m debido a que se ejerce una fuerza F sobre él, entonces, según la segunda ley del movimiento de Newton, F = ma. Aquí, ma es el producto del escalar m y el vector a.

Los múltiplos escalares tienen las siguientes propiedades:

- 0v = 0
- 1v = v
- - 1v = -v
- 1a + b2v = av + bv
- a1v + w2 = av + aw
- a1bv2 = 1ab2v

1 Vectores de gráficos

EJEMPLO 1 Vectores de graficaciones

Utilice los vectores ilustrados en la Figura 49 para representar gráficamente cada uno de los siguientes vectores:

(a) v - w (b) 2v + 3w Solución La (c) 2v - w + u

Figura 50 muestra cada gráfica.

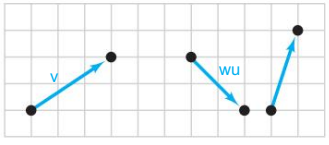
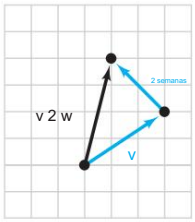
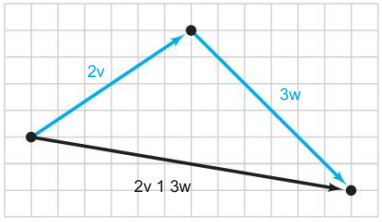


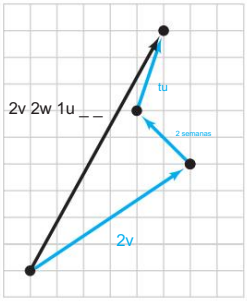
Figura 49



(a) v 2 w



(b) 2v 1 3w



(c) 2v 2w 1u

Figura 50

Ahora resuelva los problemas 1 1 y 1 3

Machine Translated by Google

Magnitud de los vectores

El símbolo 7 v 7 representa la magnitud de un vector v. Dado que 7 v 7 es igual a la longitud de un segmento de línea dirigido, se deduce que 7 v 7 tiene las siguientes propiedades:

TEOREMA Propiedades de la magnitud 7 v 7 de un vector v

Si v es un vector y a es un escalar, entonces

(a) 7 v 7 Ú 0 (b) 7 v 7 = 0 si y sólo si v = 0

(c) 7 - v 7 = 7 v 7 (d) 7 av 7 = 0 a 0 7 v 7

La propiedad (a) es una consecuencia del hecho de que la distancia es un número no negativo. La propiedad (b) se sigue porque la longitud del segmento de línea dirigido PQ> es positivo a menos que P y Q sean el mismo punto, en cuyo caso la longitud es 0. La propiedad (c) se sigue porque la longitud del segmento de línea PQ es igual a la longitud del segmento de línea QP. La propiedad (d) es una consecuencia directa de la definición de un múltiplo escalar.

DEFINICIÓN Vector unitario

Un vector u para el cual 7 u 7 = 1 se llama vector unitario.

2 Encontrar un vector de posición

Para encontrar la magnitud y dirección de un vector, se necesita una forma algebraica de representar vectores.

DEFINICIÓN Vector algebraico

Un vector algebraico v se representa como

$$v = 8a, b9$$

donde a y b son números reales (escalares) llamados componentes del vector v.

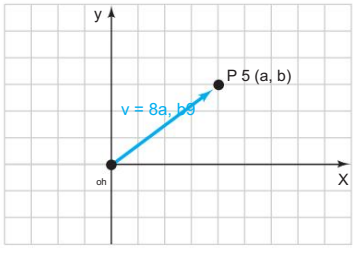


Figura 51 Vector de posición v

Se utiliza un sistema de coordenadas rectangular para representar vectores algebraicos en el plano. Si v = 8a, b9 es un vector algebraico cuyo punto inicial está en el origen, entonces v se llama vector de posición. Vea la Figura 51. Observe que el punto terminal del vector de posición v = 8a, b9 es el punto P = 1a, b2.

El siguiente teorema establece que cualquier vector cuyo punto inicial no esté en el origen es igual a un vector de posición único.

TEOREMA

Supongamos que v es un vector con punto inicial P1 = 1x1, y12, no necesariamente el origen, y punto terminal P2 = 1x2 , y22. Si $v = \overrightarrow{P1P2}$, entonces v es igual a vector de posición

$$v = 8x2 - x1, y2 - y1\ 9 \qquad (1)$$

Machine Translated by Google

Para ver por qué esto es cierto, mire la Figura 52.

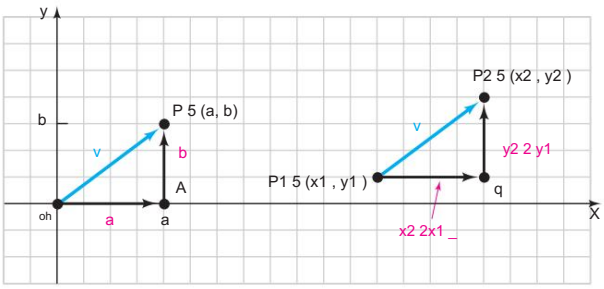


Figura 52 v = 8a, b9 = 8x2 - x1 , y2 - y19

El triángulo OPA y el triángulo P1P2Q son congruentes. [¿Ves por qué? Los segmentos de recta tienen la misma magnitud, entonces d1O, P2 = d1P1 , P22; y tienen la misma dirección, entonces POA = P2P1Q. Como los triángulos son triángulos rectángulos, tenemos ángulo-lado-ángulo.] De ello se deduce que los lados correspondientes son iguales. Como resultado, x2 - x1 = a y y2 - y1 = b, por lo que v puede escribirse como

$$v = 8a, b9 = 8x2 - x1 , y2 - y1\ 9$$

Debido a este resultado, cualquier vector algebraico puede reemplazarse por un vector de posición único y viceversa. Esta flexibilidad es una de las principales razones del amplio uso de vectores.

EJEMPLO 2 Encontrar un vector de posición

Encuentra el vector de posición del vector $v = \overrightarrow{P1P2}$ si P1 = 1 - 1, 22 y P2 = 14, 62.

Solución

Por la ecuación (1), el vector de posición igual a v es v =

$$84 - 1 - 12, 6 - 29 = 85, 49$$

Ver Figura 53.

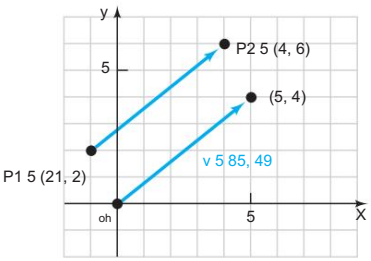


Figura 53

Dos vectores de posición v y w son iguales si y sólo si el punto terminal de v es el igual que el punto terminal de w. Esto lleva al siguiente teorema:

TEOREMA Igualdad de vectores

Dos vectores v y w son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales. Eso es,

Si v = 8a1 , b1 9 y w = 8a2 , b2 9 entonces v = w si y sólo si a1 = a2 y b1 = b2 .

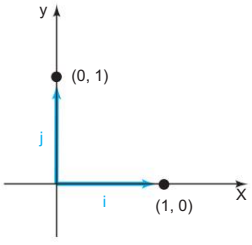


Figura 54 Vectores unitarios i y j

Ahora presentamos una representación alternativa de un vector en el plano que es común en las ciencias físicas. Sea i el vector unitario cuya dirección es a lo largo del eje x positivo; Sea j el vector unitario cuya dirección es a lo largo del eje y positivo. Entonces i = 81, 09 y j = 80, 19, como se muestra en la Figura 54. Cualquier vector v = 8a, b9 se puede escribir usando los vectores unitarios i y j de la siguiente manera:

$$v = 8a, b9 = a81, 09 + b80, 19 = ai + bj$$

Las cantidades a y b se denominan componentes horizontal y vertical de v, respectivamente. Por ejemplo, si v = 85, 49 = 5i + 4j, entonces 5 es el componente horizontal y 4 es el componente vertical.

Ahora trabaja el problema 2 9

Machine Translated by Google

3 Suma y resta de vectores algebraicamente

La suma, la diferencia, el múltiplo escalar y la magnitud de los vectores algebraicos se definen en términos de sus componentes.

En Words
Para sumar dos vectores, agregue los componentes correspondientes. Para restar dos vectores, reste los componentes correspondientes.

DEFINICIÓN

Supongamos que v = a1i + b1 j = 8a1 , b1 9 y w = a2i + b2 j = 8a2 , b2 9 son dos vectores y a es un escalar. Entonces

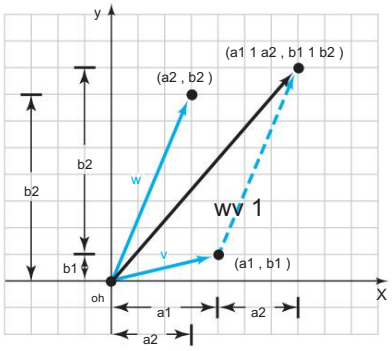
v + w = 1a1 + a22i + 1b1 + b22j = 8a1 + a2 , b1 + b2 9 v - w = 1a1 - (2)

a22i + 1b1 - b22j = 8a1 - a2 , b1 - b2 9 av = 1aa12i + 1ab12j = 8aa1 , (3)

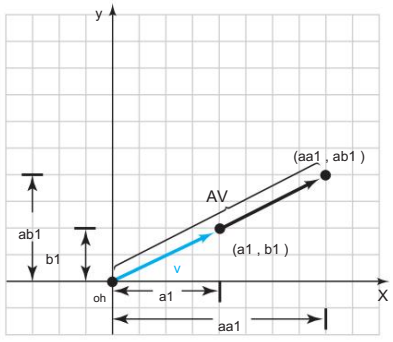
ab1 9 7 contra 7 = 2a2 + b2 (4)

1 1 (5)

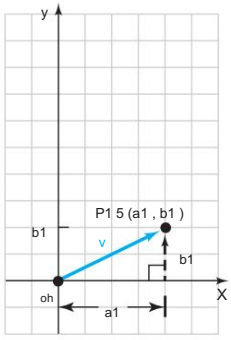
Estas definiciones son compatibles con las definiciones geométricas dadas anteriormente en esta sección. Ver Figura 55.



(a) Ilustración de la propiedad (2)



(b) Ilustración de la propiedad (4), a . 0



(C) Ilustración de la propiedad (5): ||

v || 5 Distancia de O a P1 a2 1 b2

|| v || 5 $\sqrt{}$ 1 1

Figura 55

EJEMPLO 3 Sumar y restar vectores

Si v = 2i + 3j = 82, 39 y w = 3i - 4j = 83, - 49, encuentre: (a) v + w

(b) v - w

Solución (a) v + w = 12i + 3j2 + 13i - 4j2 = 12 + 32i + 13 - 42j = 5i - j

o

v + w = 82, 39 + 83, - 49 = 82 + 3, 3 + 1 - 42 9 = 85, - 19

(b) v - w = 12i + 3j2 - 13i - 4j2 = 12 - 32i + 33 - 1 - 42 4 j = - i + 7j

o

v - w = 82, 39 - 83, - 49 = 82 - 3, 3 - 1 - 42 9 = 8 - 1, 79

4 Encuentre un múltiplo escalar y la magnitud de un vector

EJEMPLO 4 Encontrar múltiplos escalares y magnitudes de vectores

Si v = 2i + 3j = 82, 39 y w = 3i - 4j = 83, - 49, encuentre: (c) 'v' (a) 3v

(b) 2v - 3w

Machine Translated by Google

Solución (a) $3v = 312i + 3j2 = 6i + 9j$

o

$3v = 382, 39 = 86, 99$

(b) $2v - 3w = 212i + 3j2 - 313i - 4j2 = 4i + 6j - 9i + 12j = - 5i + 18j$

o

$2v - 3w = 282, 39 - 383, - 49 = 84, 69 - 89, - 129$

$= 84 - 9, 6 - 1 - 122\ 9 = 8 - 5, 189$

(c) $7\ v\ 7 = 7\ 2i + 3j7 = 222 + 32 = 213$

Ahora resuelve los problemas 3 5 y 4 3

5 Encontrar un vector unitario

Recuerde que un vector unitario u es un vector para el cual $7\ u\ 7 = 1$. En muchas aplicaciones, es útil poder encontrar un vector unitario u que tenga la misma dirección que un vector v dado.

TEOREMA Vector unitario en la dirección de v

Para cualquier vector v distinto de cero, el vector

$$tu = \frac{v}{7 \text{ contra } 7} \qquad (6)$$

es un vector unitario que tiene la misma dirección que v.

Prueba Sea $v = ai + bj$. Entonces $7\ v\ 7 = 2a2 + b2$ y

$$tu = \frac{v}{7 \text{ contra } 7} = \frac{ai + bj}{2a2 + b2} = \frac{a}{2a2 + b2} \text{ yo} + \frac{b}{2a2 + b2} j$$

El vector u tiene la misma dirección que v, ya que $7\ v\ 7\ 7\ 0$. Además,

$$7\ u\ 7 = B\ a2 + b2 = B\ a2 + b2 = 1$$

Es decir, u es un vector unitario que tiene la misma dirección que v. ■

La siguiente es una consecuencia de este teorema.

Si u es un vector unitario que tiene la misma dirección que un vector v, entonces v se puede expresar como

$$v = 7\ v\ 7\ u \qquad (7)$$

EJEMPLO 5 Encontrar un vector unitario

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que $v = 4i - 3j$.

Solución Encuentra 7 contra 7 primero.

$$7\ v\ 7 = 7\ 4i - 3j7 = 216 + 9 = 5$$

(continuado)

Machine Translated by Google

Ahora multiplica v por el escalar 7 v 7 $\frac{1}{\text{ya}} = \frac{1}{5}$. Un vector unitario que tiene la misma dirección. que v es

$$\frac{v}{\text{7 contra 7}} = \frac{4i - 3j}{5} = \frac{4}{5}\text{yo} - \text{j}\frac{3}{5}$$

✓ Verificar: Este vector es un vector unitario porque

$$\text{" v contra 7 "} = \text{Ba 4 sobre 5 segundo + un - 3 sobre 5 segundo}^2 = \text{B 16 sobre 25} + \frac{9}{25} = \text{B 25 sobre 25} = 1$$

Ahora resuelve el problema 5 3

6 Encuentre un vector a partir de su dirección y magnitud

Si un vector representa la velocidad y la dirección de un objeto, se llama vector de velocidad. Si un vector representa la dirección y la cantidad de una fuerza que actúa sobre un objeto, se llama vector de fuerza. En muchas aplicaciones, un vector se describe en términos de su magnitud y dirección, más que en términos de sus componentes. Por ejemplo, una pelota lanzada con una velocidad inicial de 25 millas por hora en un ángulo de 30° con la horizontal es un vector de velocidad.

Supongamos que se nos da la magnitud 'v' de un vector v distinto de cero y el ángulo director a, 0°... a 6 360°, entre v e i. Para expresar v en términos de 'v' y a, primero encuentre el vector unitario u que tenga la misma dirección que v.

Mire la Figura 56. Las coordenadas del punto terminal de u son 1cos a, sen a2. Entonces u = cos a i + sin a j y, de la ecuación (7),

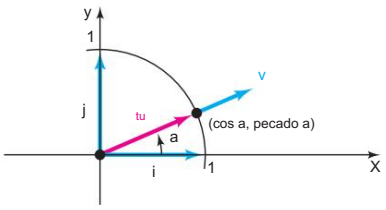


Figura 56 v = 7 v 7 1cos a i + sen a j2

$$v = 7\,v\,7\,1\cos a\,i + \text{sen } a\,j2 \qquad (8)$$

donde a es el ángulo de dirección entre v e i.

EJEMPLO 6 Encontrar un vector cuando se dan su magnitud y dirección

Se lanza una pelota con una velocidad inicial de 25 millas por hora en una dirección que forma un ángulo de 30° con el eje x positivo. Expresar el vector velocidad v en términos de i y j. ¿Cuál es la rapidez inicial en la dirección horizontal? ¿Cuál es la rapidez inicial en la dirección vertical?

Solución La magnitud de v es 7 v 7 = 25 millas por hora, y el ángulo entre la dirección de vey i , el eje x positivo, es a = 30°. Por la ecuación (8),

$$v = 7\,v\,7\,1\cos a\,i + \text{sen } a\,j2 = 251\cos 30°i + \text{sen } 30°j2$$

$$= 25a\,\frac{23}{2}\text{yo} + \frac{1}{2}\text{jb} = \frac{2523}{2}\text{yo} + \frac{25}{2}\text{j}$$

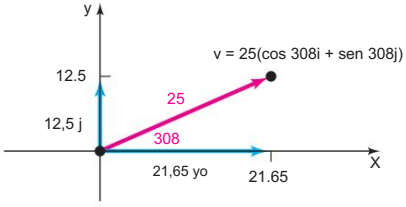


Figura 57

La velocidad inicial de la pelota en la dirección horizontal es la componente horizontal de v, $\approx 21{,}65$ millas por hora. La velocidad inicial en la dirección vertical es la componente vertical de v, $= 12{,}5$ millas por hora. Ver Figura 57.

Ahora resuelve el problema 6 1

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Encontrar el ángulo de dirección de un vector

Encuentre el ángulo de dirección a de v = 4i - 4j.

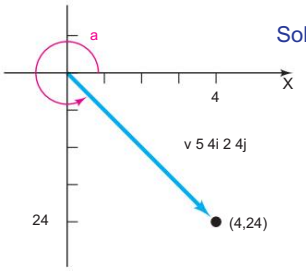


Figura 58

Solución La Figura 58 muestra el vector v y su ángulo director a. Para encontrar un, use la terminal punto 14, - 42 y el hecho de que

$$\tan a = \frac{-4}{4} = -1$$

Como 0°… a 6 360°, el ángulo direccional es a = 315°.

Ahora resuelve el problema 6 7

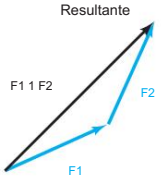


Figura 59 Fuerza resultante

7 Modelo con vectores

Como las fuerzas pueden representarse mediante vectores, dos fuerzas se "combinan" de la misma manera que los vectores se "suma". Si F1 y F2 son dos fuerzas que actúan simultáneamente sobre un objeto, la suma vectorial F1 + F2 es la fuerza resultante. La fuerza resultante produce el mismo efecto sobre el objeto que el obtenido cuando las dos fuerzas F1 y F2 actúan sobre el objeto. Ver Figura 59.

EJEMPLO 8 Encontrar la velocidad y dirección reales de una aeronave

Un avión Boeing 767 mantiene una velocidad constante de 500 millas por hora en dirección sur. La corriente en chorro es de 80 millas por hora en dirección noreste.

(a) Exprese la velocidad va del 767 con respecto al aire y la velocidad vw del jet corriente en términos de i y j.

(b) Encuentre la velocidad del 767 con respecto al suelo.

(c) Encuentre la velocidad y dirección reales del 767 con respecto al suelo.

Solución (a) Configure un sistema de coordenadas en el que el norte (N) esté a lo largo del eje y positivo. Consulte la Figura 60. La velocidad del 767 con respecto al aire es va = - 500j. La velocidad de la corriente en chorro vw tiene magnitud 80 y dirección NE (noreste), por lo que el ángulo entre vw e i es de 45°. Exprese vw en términos de i y j como

$$vw = 801\cos 45°i + \text{sen } 45°j2 = 80a \frac{22}{2} \text{ yo} + \frac{22}{2 \text{ jb}} = 4022\ 1i + j2$$

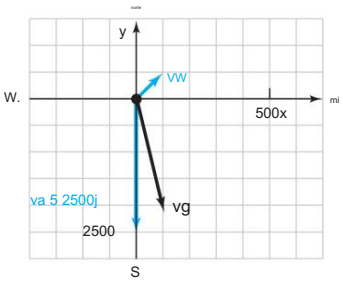


Figura 60

(b) La velocidad del 767 con respecto al suelo vg es

$$vg = va + vw = -500j + 40221i + j2 = 4022i + 14022 - 5002j$$

(c) La velocidad real del 767 es

$$7\ vg\ 7 = 3140222\ 2 + 14022 - 5002\ 2 \approx 447 \text{ millas por hora}$$

Para encontrar la dirección real del 767 con respecto al suelo, determine el ángulo de dirección de vg. El ángulo direccional se encuentra resolviendo

$$\tan a = \frac{4022 - 500}{4022}$$

Entonces a ≈ - 82,7°. El 767 viaja al S7,3°E.

Ahora problema de trabajo 7 9

Machine Translated by Google

EJEMPLO 9 Encontrar el peso de un piano

Dos motores requieren una fuerza de magnitud 300 libras para empujar un piano hacia arriba por una rampa inclinada a un ángulo de 20° con respecto a la horizontal. ¿Cuanto pesa el piano?

Solución Sea F1 la fuerza de gravedad, F2 la fuerza necesaria para mover el piano por la rampa y F3 la fuerza del piano contra la rampa. Ver Figura 61.

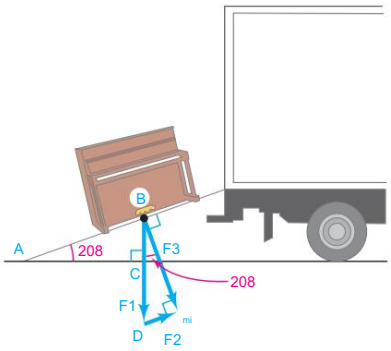


Figura 61

El ángulo entre el suelo y la rampa es el mismo que el ángulo entre F1 y F3 porque los triángulos ABC y BDE son similares, entonces BAC = DBE = 20°. Para encontrar la magnitud de F1 (el peso del piano), calcule

$$\text{sen}20° = \frac{7\,F2\,7}{7\,F1\,7} = \frac{300}{7\,F1\,7}$$

$$7\,F1\,7 = \frac{300 \text{ libras}}{\text{pecado } 20°} \approx 877 \text{ libras}$$

El piano pesa aproximadamente 877 libras.

En la Figura 61, el triángulo formado por los vectores de fuerza (en azul) se llama diagrama de fuerza.

Se dice que un objeto está en equilibrio estático si está en reposo y la suma de sus todas las fuerzas que actúan sobre el objeto son cero, es decir, si la fuerza resultante es 0.

EJEMPLO 10 Analizar un objeto en equilibrio estático

Una caja de suministros que pesa 1200 libras está suspendida mediante dos cables sujetos al techo, como se muestra en la Figura 62. ¿Cuáles son las tensiones en los dos cables?

Solución Dibuje un diagrama de fuerza usando los vectores como se muestra en la Figura 63. Las tensiones en los cables son las magnitudes 7 F1 7 y 7 F2 7 de los vectores de fuerza F1 y F2 . La magnitud del vector de fuerza F3 es igual a 1200 libras, el peso de la caja. Ahora escribe cada vector de en términos de los vectores unitarios i y j. Para F1 y F2 , fuerza v = 7 v 7 1cos a i + sen a j2, donde a es el ángulo entre el vector y el eje x positivo.

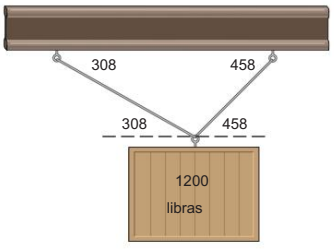


Figura 62

$$F1 = \underset{C}{7\,F1\,7\,1}\cos 150°i + \text{sen } 150°j2 = 7\,F1\,7\,a - \frac{13^{-}}{2}\text{ yo} + \frac{1}{2}\text{ jb} = -\frac{13^{-}}{2}\,7\,F1\,7\text{ yo} + \frac{1}{2}\,7\,F1\,7j$$

v · 7 v 7 1cos A i · sen A j2

$$F2 = \underset{C}{7\,F2\,7\,1}\cos 45°i + \text{sen } 45°j2 = 7\,F2\,7\,a\ \frac{12^{-}}{2}\text{ yo} + \frac{12^{-}}{2}\text{ jb} = \frac{12^{-}}{2}\,7\,F2\,7\text{ yo} + \frac{12^{-}}{2}\,7\,F2\,7j$$

v · 7 v 7 1cos A i · sen A j2

F3 = -1200j

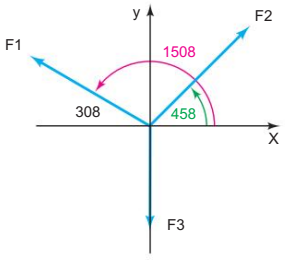


Figura 63 Diagrama de fuerza

Para el equilibrio estático, la suma de los vectores de fuerza debe ser igual al vector cero.

$$F1 + F2 + F3 = -\frac{13^{-}}{2}\,7\,F1\,7\text{ yo} + \frac{1}{2}\,7\,F1\,7\,j + \frac{12^{-}}{2}\,7\,F2\,7\text{ yo} + \frac{12^{-}}{2}\,7\,F2\,7j - 1200j = 0$$

El componente i y el componente j deben ser ambos iguales a cero. Esto da como resultado las dos ecuaciones

$$-\frac{13^{-}}{2}\,7\,F1\,7 + \frac{12^{-}}{2}\,7\,F2\,7 = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{1}{2}\,7\,F1\,7 + \frac{12^{-}}{2}\,7\,F2\,7 - 1200 = 0 \qquad (10)$$

Resuelva la ecuación (9) para 7 F2 7 para obtener

$$7\,F2\,7 = \frac{23^{-}}{7\,12^{-}}\,7\,F1 \qquad (11)$$

Machine Translated by Google

Sustituyendo en la ecuación (10) y resolviendo para 7 F1 7 se obtiene

$$\frac{1}{2}\,7\,F1\,7 + \frac{\overline{12}}{2\ un}\,\frac{\overline{13}}{\overline{12}}\,7\,F1\,7\,b - 1200 = 0$$

$$\frac{1}{2}\,7\,F1\,7 + \frac{\overline{13}}{2}\,7\,F1\,7 - 1200 = 0$$

$$\frac{1+\overline{13}}{2}\,7\,F1\,7 = 1200$$

$$7\,F1\,7 = \frac{2400}{1+\overline{13}} \approx 878{,}5 \text{ libras}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (11) se obtiene 7 F2 7 .

$$7\,F2\,7 = 7\,F1\,7 = 12 \quad \frac{\overline{13}}{\overline{12}} \cdot \frac{2400}{1+\overline{13}} \approx 1075{,}9 \text{ libras}$$

El cable izquierdo tiene una tensión de aproximadamente 878,5 libras y el cable derecho tiene una tensión de aproximadamente 1075,9 libras.

Ahora problema de trabajo 8 9

Característica histórica

Josías Gibbs
(1839-1903)

La historia de los vectores es sorprendentemente complicado para un concepto tan natural. En el plano xy, los números complejos imitan bien los vectores. Alrededor de 1840, los matemáticos se interesaron en encontrar un sistema que hiciera en tres dimensiones lo que los números complejos hacen en dos dimensiones. Hermann Grassmann (1809-1877), en Alemania, y William Rowan Hamilton (1805-1865), en Irlanda, intentaron encontrar soluciones.

El sistema de Hamilton eran los cuaterniones, que se consideran mejor como un número real más un vector; hacen con cuatro dimensiones lo que los números complejos hacen con dos dimensiones. En este sistema importa el orden de multiplicación; es decir, ab · ba. Además, dos productos de vectores. Surgieron el producto escalar (o producto escalar) y el producto vectorial (o producto cruzado).

El estilo abstracto de Grassmann, aunque fácil de leer hoy en día, fue casi impenetrable durante el siglo XIX y sólo algunas de sus ideas fueron apreciadas. Entre esos pocos se encontraban los mismos productos escalares y vectoriales que había encontrado Hamilton.

Hacia 1880, el físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903) elaboró un álgebra que incluía sólo los conceptos más simples: los vectores y los dos productos. Luego añadió algo de cálculo y el sistema resultante fue simple, flexible y bien adaptado para expresar una gran cantidad de leyes físicas. Este sistema permanece en uso esencialmente sin cambios. Los sistemas más extensos de Hamilton y Grassmann dieron origen a matemáticas muy interesantes, pero poco de ellas se ve en los niveles elementales.

9.4 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Un _____ es una cantidad que tiene magnitud y dirección.
2. Si v es un vector, entonces v + (- v) = _____ .
3. Un vector u para el cual 7 u 7 = 1 se llama a(n) _____ vector.
4. Si v = 8a, b9 es un vector algebraico cuyo punto inicial es el origen, entonces v se llama a(n) _____ vector.
5. Si v = ai + bj, entonces a se llama de v y b _____ componente se llama _____ componente de v.
6. Si F1 y F2 son dos fuerzas que actúan sobre un objeto, la suma vectorial F1 + F2 se llama 7. La _____ fuerza.

fuerza verdadera o falsa es un ejemplo de vector.

8. Verdadero o Falso La masa es un ejemplo de vector.

9. Opción múltiple Si v es un vector con punto inicial 1x1, y12 y el punto terminal 1x2, y22, entonces ¿cuál de los siguientes es el vector de posición que es igual a v?

(a) 8x2 - x1, y2 - y1 9 (b) 8x1 - x2, y1 - y2 9

(c) altura $\frac{\text{y2 - y1}}{\text{x2 - x1}}$, $\frac{\text{y2 - y1}}{2}$ yo (d) h $\frac{\text{x1 + x2}}{2}$, $\frac{\text{y1 + y2}}{2}$ yo

10. Opción múltiple Si v es un vector distinto de cero con un ángulo de dirección a, 0°… a 6 360°, entre v e i, entonces v es igual a ¿a cuál de los siguientes?

(a) 7 v 7 1cosai - sinaj2 (b) 7 v 7 1cosai + sinaj2

(c) 7 v 7 1sinaí - cosaj2 (d) 7 v 7 1sinaí + cosaj2

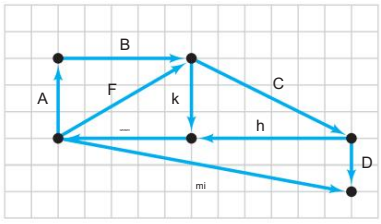
Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 18, utilice los vectores de la figura de la derecha para representar gráficamente cada uno de los siguientes vectores.

11. v + w
12. u + v
13. 3v
14. 2w
15. u - v
16. v - w
17. 2u - 3v + w
18. 3v + u - 2w

En los problemas 19 a 26, utilice la figura de la derecha. Determina si cada afirmación dada es verdadera o falsa.



19. K + GRAMO = F
20. A + B = F
21. GRAMO + H + E = D
22. C = D - E + F
23. H - C = GRAMO - F
24. mi + re = sol + h
25. A + B + C + H + G = 0
26. A + B + K + G = 0

En los problemas 27 a 34, el vector v tiene un punto inicial P y un punto terminal Q. Encuentre su vector de posición. Es decir, exprese v en la forma ai + bj.

27. P = 10, 02; Q = 1 - 3, - 52
28. P = 10, 02; Q = 13, 42
29. P = 13, 22; Q = 15, 62
30. P = 1 - 3 , 22; Q = 16, 52
31. P = 1 - 1, 42; Q = 16, 22
32. P1 - 2, - 12; Q = 16, - 22
33. P = 11, 12; Q = 12, 22
34. P = 11, 02; Q = 10, 12

En los problemas 35 a 42, encuentre 7 v 7 .

35. v = 3i - 4j
36. v = - 5i + 12j
37. v = - yo - j
38. v = yo - j
39. v = 6i + 2j
40. v = - 2i + 3j
41. v = i + cuna uj
42. v = cos ui + sen uj

En los problemas 43 a 48, encuentre cada cantidad si v = 3i - 5j y w = - 2i + 3j.

43. 2v + 3w
44. 3v - 2w
45. 7 v + w 7
46. 7 v - w 7
47. 7v7 + 7w7
48. 7v7 - 7w7

En los problemas 49 a 54, encuentre el vector unitario en la misma dirección que v.

49. v = - 3j
50. v = 5i
51. v = - 5i + 12j
52. v = 3i - 4j
53. v = yo - j
54. v = 2i - j

55. Si 7 v 7 = 2, ¿cuál es la magnitud de $-\frac{3}{4}v$?
56. Si 7 v 7 = 4, ¿cuál es la magnitud de $\frac{1}{2}v + 3v$?
57. Encuentre un vector v cuya magnitud sea 3 y cuya componente en la dirección i sea igual a la componente en la dirección j .
58. Encuentre un vector v cuya magnitud sea 4 y cuya componente en la dirección i sea el doble de la componente en la dirección j .
59. Si P = 1 - 3, 12 y Q = 1x, 42, encuentre todos los números x de modo que el vector representado por PQ> tenga longitud 5.
60. Si v = 2i - j y w = xi + 3j, encuentre todos los números x para los cuales 7 v + w 7 = 5.

En los problemas 61 a 66, escriba el vector v en la forma ai + bj, dada su magnitud 7 v 7 y el ángulo a que forma con el eje x positivo.

61. 7 v 7 = 5, a = 60°
62. 7 v 7 = 8, a = 45°
63. 7 v 7 = 3, a = 240°
64. 7 v 7 = 14, a = 120°
65. 7 v 7 = 15, a = 315°
66. 7 v 7 = 25, a = 330°

En los problemas 67 a 74, encuentre el ángulo director de v.

67. v = 3i + 3j
68. v = i + 23j
69. v = - 5i - 5j
70. v = - 323i + 3j
71. v = 6i - 4j
72. v = 4i - 2j
73. v = - yo + 3j
74. v = - i - 5j

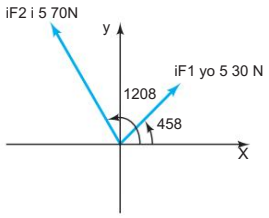
Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

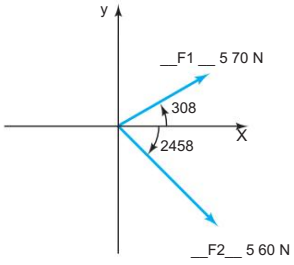
75. Vectores de fuerza Un hombre empuja una carretilla hacia arriba por una pendiente de 20° con una fuerza de 100 libras. Exprese el vector de fuerza F en términos de i y j.

76. Vectores de fuerza Un niño tira de un carro con una fuerza de 15 libras. El mango del carro forma un ángulo de 60°.
con el suelo. Expresar el vector de fuerza F en términos de i
y j.

77. Fuerza resultante Dos fuerzas de magnitud 30 newtons (N) y 70 N actúan sobre un objeto en ángulos de 45° y 120° con el eje x positivo, como se muestra en la figura. Encuentre la dirección y magnitud de la fuerza resultante; es decir, encuentre F1 + F2 .



78. Fuerza resultante Dos fuerzas de magnitud 70 newtons (N) y 60 newtons actúan sobre un objeto en ángulos de 30° y -45° con el eje x positivo, como se muestra en la figura. Encuentre la dirección y magnitud de la fuerza resultante; es decir, encuentre F1 + F2 .



79. Calcular la velocidad y dirección reales de una aeronave Un jumbo jet mantiene una velocidad constante de 550 millas por hora (mi/hr) en dirección norte. La corriente en chorro es de 110 mi/h en dirección noreste.

(a) Exprese la velocidad va del chorro con respecto al aire y la velocidad vw de la corriente en chorro en términos de i y j.
(b) Encuentre la velocidad del chorro con respecto al suelo.
(c) Encuentre la velocidad y dirección reales del chorro con respecto al suelo.

80. Calcular la velocidad y dirección reales de una aeronave Un avión Airbus A320 mantiene una velocidad constante de 500 mph en dirección oeste. La corriente en chorro es de 100 mph en dirección sureste.

(a) Exprese la velocidad va del A320 con respecto al aire y la velocidad vw de la corriente en chorro en términos de i y j.

(b) Encuentre la velocidad del A320 con respecto al suelo.
(c) Encuentre la velocidad y dirección reales del A320 con respecto al suelo.

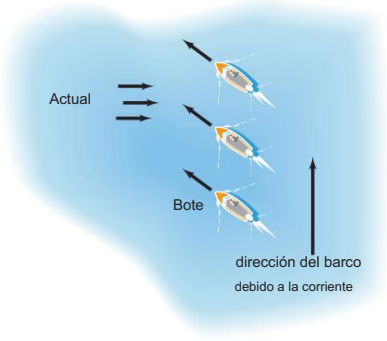
81. Velocidad respecto al suelo y dirección de un avión Un avión tiene una velocidad aérea de 600 km/h con dirección S30°E. La velocidad del viento es de 40 km/h en dirección S45°E. Encuentre el vector resultante que representa la trayectoria del avión con respecto al suelo. ¿Cuál es la velocidad respecto al suelo del avión? ¿Cuál es su dirección?

82. Velocidad respecto al suelo y dirección de un avión Un avión tiene una velocidad aérea de 500 kilómetros por hora con dirección N45°E.
La velocidad del viento es de 80 kilómetros por hora en dirección N30°W. Encuentre el vector resultante que representa la trayectoria del avión con respecto al suelo. ¿Cuál es la velocidad respecto al suelo del avión? ¿Cuál es su dirección?

83. Peso de un automóvil Se requiere una fuerza de magnitud 1200 libras para evitar que un automóvil ruede cuesta abajo cuya inclinación es de 15° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es el peso del auto?

84. Peso de un bote Se requiere una magnitud de 700 libras de fuerza para mantener un bote y su remolque en su lugar sobre una rampa cuya inclinación es de 11° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es el peso combinado del barco y su remolque?

85. Dirección correcta para cruzar un río Un río tiene una corriente constante de 3 kilómetros por hora. ¿En qué ángulo con respecto al muelle de un barco debe dirigirse una lancha a motor, capaz de mantener una velocidad constante de 15 kilómetros por hora, para alcanzar una velocidad de 3? ¿Apunta directamente frente al muelle? Si el río es el kilómetro 4 de ancho, ¿cuánto tiempo tardará en cruzar?



86. Encontrar el rumbo correcto de la brújula El piloto de un avión desea dirigirse directamente hacia el este, pero se enfrenta a una velocidad de viento de 40 mph procedente del noroeste. Si el piloto mantiene una velocidad aérea de 250 mph, ¿qué rumbo de la brújula debe mantener para dirigirse directamente hacia el este? ¿Cuál es la velocidad real del avión?

87. Trazar un rumbo Un piloto de helicóptero necesita viajar a un aeropuerto regional a 25 millas de distancia. Vuela con un rumbo real de N16.26°E con una velocidad aérea de 120 mph y hay un viento que sopla directamente hacia el este a 20 mph.

(a) Determine el rumbo de la brújula que el piloto necesita para llegar a su destino.

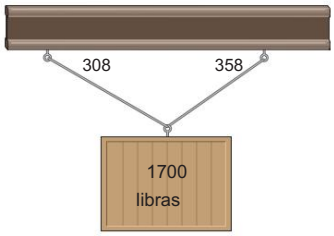
(b) ¿Cuánto tiempo le tomará llegar a su destino? Redondea al minuto más cercano.

88. Cruzar un río Un capitán necesita pilotar un bote a través de un río que tiene 2 km de ancho. La corriente en el río es de 2 km/h y la rapidez del barco en aguas tranquilas es de 10 km/h. El punto de aterrizaje deseado al otro lado está 1 km río arriba.

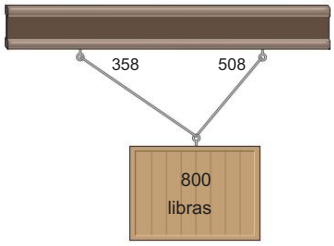
(a) Encuentre la dirección que debe tomar el capitán.
(b) ¿Cuánto durará el viaje?

Machine Translated by Google

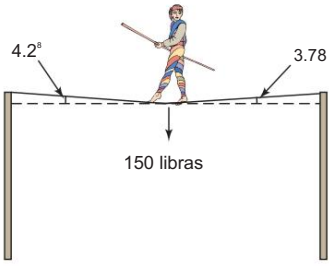
89. Equilibrio estático Se suspende un peso de 1700 libras.
de dos cables como se muestra en la figura. ¿Cuál es la tensión en los dos cables?



90. Equilibrio estático Un peso de 800 libras está suspendido de dos cables, como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las tensiones en los dos cables?

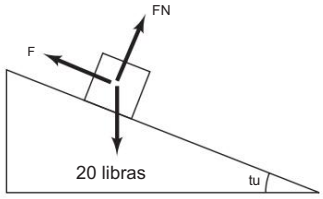


91. Equilibrio estático Un equilibrista situado en un punto determinado desvía la cuerda como se indica en la figura. Si el peso del equilibrista es de 150 libras, ¿cuánta tensión hay en cada parte de la cuerda?

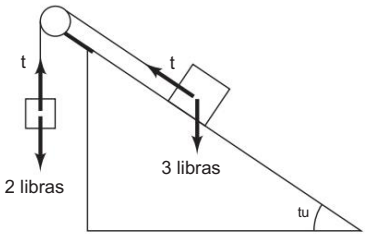


92. Equilibrio estático Repita el problema 91 si el ángulo de la izquierda es de 3,8°, el ángulo de la derecha es de 2,6° y el peso del equilibrista es de 135 libras.

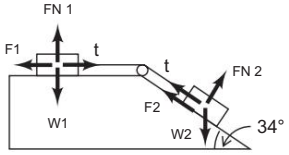
93. Fricción estática Una caja de 20 libras se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal y hay fricción entre la caja y la superficie.
Un lado de la superficie se eleva lentamente para crear una rampa.
La fuerza de fricción f se opone a la dirección del movimiento y es proporcional a la fuerza normal FN ejercida por la superficie de la caja. La constante de proporcionalidad se llama coeficiente de fricción, m. Cuando el ángulo de la rampa, u, alcanza 20°, la caja comienza a deslizarse. Encuentre el valor de m con dos decimales.



94. Rampa inclinada Un peso de 2 libras está unido a un peso de 3 libras mediante una cuerda que pasa sobre una polea ideal. El peso más pequeño cuelga verticalmente, mientras que el peso más grande se coloca sobre una rampa inclinada sin fricción con ángulo u. La cuerda ejerce una fuerza de tensión T sobre ambos pesos a lo largo de la dirección de la cuerda. Encuentre la medida del ángulo para u que se necesita para evitar que el peso mayor se deslice por la rampa. Redondea tu respuesta a la décima de grado más cercana.



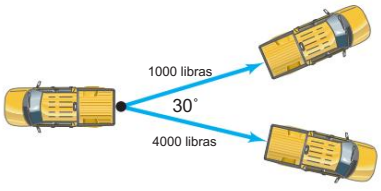
95. Rampa inclinada Una caja que se encuentra sobre una superficie horizontal está unida a una segunda caja que se encuentra sobre una rampa inclinada mediante una cuerda que pasa sobre una polea ideal. La cuerda ejerce una fuerza de tensión T sobre ambos pesos a lo largo de la dirección de la cuerda y el coeficiente de fricción entre la superficie y las cajas es 0,5.
Si la caja de la derecha pesa 120 libras y el ángulo de la rampa es de 34°, ¿cuánto debe pesar la caja de la izquierda para que el sistema esté en equilibrio estático?



96. Fuerza muscular Dos músculos ejercen fuerza sobre un hueso en el mismo punto. El primer músculo ejerce una fuerza de 800 N en un ángulo de 10° con el hueso. El segundo músculo ejerce una fuerza de 710 N en un ángulo de 35° con el hueso. ¿Cuáles son la dirección y magnitud de la fuerza resultante sobre el hueso?

97. Truck Pull En una feria del condado, dos camionetas están unidas a la parte trasera de un monster truck como ilustrado en la figura. Una de las pastillas tira con una fuerza de 1000 libras y la otra tira con una fuerza de 4000 libras con un ángulo de 30° entre ellas. ¿Con cuánta fuerza debe tirar el camión monstruo para permanecer inmóvil?

[Sugerencia: encuentre la fuerza resultante de los dos camiones.]



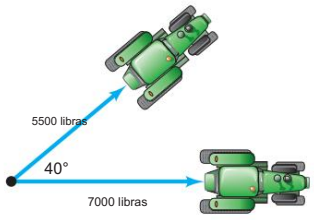
98. Quitar un tocón Un agricultor desea quitar un tocón de un campo sacándolo con su tractor. Habiendo quitado muchos muñones antes, estima que necesitará 6 toneladas (12 000 libras) de fuerza para quitar el muñón.

Sin embargo, su tractor sólo es capaz de tirar con una fuerza de 7000 libras, por lo que le pide ayuda a su vecino. El tractor de su vecino puede tirar con una fuerza de 5500 libras. Sujetan los dos tractores al tocón con un ángulo de 40° entre las fuerzas, como se muestra en la figura.

(a) Suponiendo que la estimación del agricultor de una fuerza necesaria de 6 toneladas es correcta, ¿logrará el agricultor retirar el tocón?

Machine Translated by Google

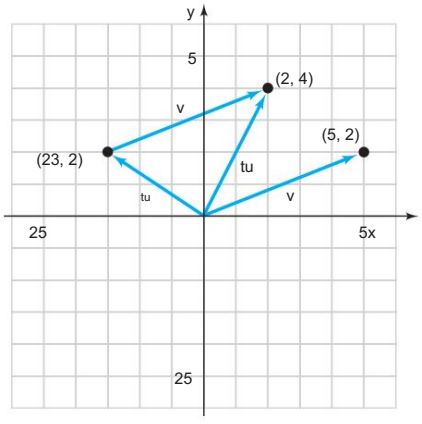
(b) Si el granjero hubiera dispuesto los tractores con un ángulo de 25° entre las fuerzas, ¿habría logrado quitar el tocón?



99. Gráficos por computadora El campo de los gráficos por computadora utiliza vectores para calcular traslaciones de puntos. Por ejemplo, si el punto 1 - 3, 22, representado por el vector u = 8 - 3, 29, se va a traducir por v = 85, 29, entonces la nueva ubicación será u′ = u + v = 8 - 3 , 29 + 85, 29 = 82, 49. Entonces, el punto 1 - 3, 22 se traduce por v a 12, 42 como se muestra en la figura.

(a) Determine las nuevas coordenadas de 13, - 12 si se traduce por v = 8 - 4, 59.

(b) Ilustre esta traducción gráficamente.



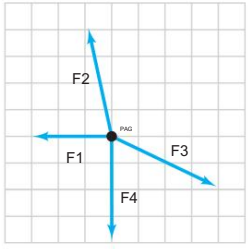
Fuente: Phil Dadd. Vectores y matrices: introducción. www .gamedev.net/articles/programming/math-and-physics/ vectores-y-matrices-un-primer-r1832/

100. Gráficos por computadora Consulte el problema 99. Los puntos 1 - 3, 02, 1 - 1, - 22, 13, 12 y 11, 32 son los vértices de un paralelogramo ABCD.

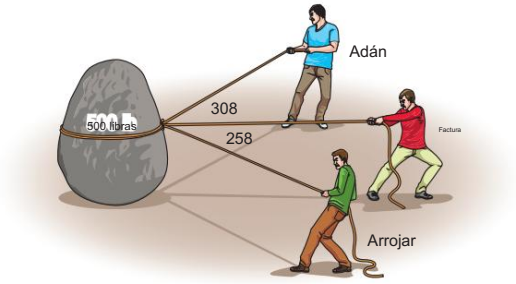
(a) Encuentre los vértices de un nuevo paralelogramo A′ B′ C′ D′ si ABCD se traduce por v = 83, - 29.

(b) Encuentre los vértices de un nuevo paralelogramo A′ B′ C′ D′ si ABCD se traduce por - 2 $\frac{1}{-}$ v.

101. Equilibrio estático Muestre en el siguiente gráfico la fuerza necesaria para que el objeto en P esté en equilibrio estático.



102. Desafío Problema Paisajismo Para arrastrar una roca de 500 libras a su lugar, Adam, Bill y Chuck atan tres cuerdas a la roca como se muestra en el diagrama. Si Adam tira con 240 libras de fuerza y Chuck tira con 110 libras de fuerza, entonces Bill debe tirar con ¿cuánta fuerza para que la roca se mueva?



103. Problema de desafío Véase el problema 102. Si Bill tira hacia el este con 200 libras de fuerza, ¿en qué dirección se mueve la roca?

Explicar conceptos: discusión y escritura

104. Explica con tus propias palabras qué es un vector. Da un ejemplo de un vector.

105. Escribe un breve párrafo comparando el álgebra de números complejos y el álgebra de vectores.

106. Explique la diferencia entre un vector algebraico y un vector de posición.

Conserve su conocimiento

Los problemas 107 a 116 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

107. Resuelve: $\sqrt{23\ x - 2} = 3$

108. Factorizar - 3x3 + 12x2 + 36x completamente.

109. Encuentra el valor exacto de tan c cos-1 a 1 $\frac{}{2}$ hab.

110. Encuentre la amplitud, el período y el cambio de fase de

$$y = \frac{3}{2} \text{ porque } 16x + 3p2$$

Grafica la función, mostrando al menos dos períodos.

111. Encuentra la distancia entre los puntos 1 - 5, - 82 y 17, 12.

112. Escribe la ecuación del círculo en forma estándar:

x2 + y2 - 20x + 4y + 55 = 0

113. Encuentra todas las intersecciones de la gráfica de f1x2 = x3 + 2x2 - 9x - 18

114. Resuelve: 41x - 52 $^{2 + 9 = 53}$

115. Si f1x2 = x4 , $\frac{f1x2 - f132}{\text{encontrar x - 3}}$.

116. Si f1u2 = 225 - u2 y g1u2 = 5 sen u, - demuestre que 1f $\frac{\text{pag}}{2}$ …tú… $\frac{\text{pag}}{2}$, g2 1u2 = 5 cos u.

Machine Translated by Google

9.5 El producto escalar

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Ley de los cosenos (Sección 8.3, págs. 582–584)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problema en la página 665.

OBJETIVOS 1 Encontrar el producto escalar de dos vectores (p. 660)
2 Encuentra el ángulo entre dos vectores (p. 661)
3 Determinar si dos vectores son paralelos (p. 662)
4 Determinar si dos vectores son ortogonales (p. 662)
5 Descomponer un vector en dos vectores ortogonales (p. 662)
6 Computar trabajo (p. 664)

1 Encuentre el producto escalar de dos vectores

En la Sección 9.4, definimos el producto de un escalar y un vector. Aquí definimos el producto de dos vectores, llamado producto escalar.

DEFINICIÓN Producto escalar

Si v = a1i + b1 j y w = a2i + b2 j son dos vectores, el producto escalar v # w se define como

$$v \# w = a1a2 + b1b2 \quad (1)$$

EJEMPLO 1 Encontrar productos punto

Si v = 2i - 3j y w = 5i + 3j, encuentre:

(a) v # w (b) w # v (c) v # v (d) w # w (e) 7 contra 7 (f) 7 w 7

Solución

(a) v # w = 2 # 5 + 1 - 323 = 1 (c) v # v = 2 # 2 + 1 - 32 1 - 32 = 13 (e) 7 v 7 = 222 + 1 - 322 = 213

(b) w # v = 5 # 2 + 31 - 32 = 1

(d) w # w = 5 # 5 + 3 # 3 = 34

(f) 7 w 7 = 252 + 32 = 234

COMENTARIO Un múltiplo escalar av es un vector. Un producto escalar u # v es un escalar (número real). ■

Dado que el producto escalar v # w de dos vectores v y w es un número real (un escalar), a veces se hace referencia al producto escalar como producto escalar.

Los resultados obtenidos en el Ejemplo 1 sugieren algunas propiedades generales del producto escalar.

TEOREMA Propiedades del producto escalar

Si u, v y w son vectores, entonces

Propiedad conmutativa

$$tu \# v = v \# tu \quad (2)$$

Propiedad distributiva

$$u \# 1v + w2 = u \# v + u \# w \quad (3)$$

$$v \# v = 7 v 7 2 \quad (4)$$

$$0 \# v = 0 \quad (5)$$

Machine Translated by Google

Demostración Aquí demostramos las propiedades (2) y (4) y dejamos las propiedades (3) y (5) como ejercicios (véanse los problemas 38 y 39).

Para probar la propiedad (2), sea u = a1i + b1j y v = a2i + b2j. Entonces

$$u \# v = a1a2 + b1b2 = a2a1 + b2b1 = v \# u$$

Para probar la propiedad (4), sea v = ai + bj. Entonces

$$v \# v = a2 + b2 = 7\ v\ 7\ 2$$

■

2 Encuentra el ángulo entre dos vectores

Un uso del producto escalar es encontrar el ángulo entre dos vectores.

Sean u y v dos vectores con el mismo punto inicial A. Entonces los vectores u, v y u - v forman un triángulo. Vea la Figura 64. El ángulo u en el vértice A del triángulo es el ángulo entre los vectores u y v. Deseamos encontrar una fórmula para calcular el ángulo u.

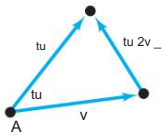


Figura 64

Los lados del triángulo tienen longitudes 7 v 7 , 7 u 7 y 7 u - v 7 , ángulo entre y tu es el incluido los lados de longitud 7 v 7 y 7 u 7 . La ley de los cosenos (Sección 8.3) se puede utilizar para encontrar el coseno del ángulo incluido.

$$7\ u - v\ 7\ 2 = 7\ u\ 7\ 2 + 7\ v\ 7\ 2 - 2\ 7\ u\ 7\ 7\ v\ 7 \text{ porque } u$$

Ahora use la propiedad (4) para reescribir esta ecuación en términos de productos escalares.

$$1u - v2 \# 1u - v2 = u \# u + v \# v - 2\ 7\ u\ 7\ 7\ v\ 7 \text{ porque } u \qquad (6)$$

Luego use la propiedad distributiva (3) dos veces en el lado izquierdo de (6) para obtener

$$\begin{aligned} 1u - v2 \# 1u - v2 &= u \# 1u - v2 - v \# 1u - v2 \\ &= u \# u - u \# v - v \# u + v \# v \\ &= u \# u + v \# v - 2\ u \# v\ c \end{aligned} \qquad (7)$$

Propiedad conmutativa (2)

Combinando las ecuaciones (6) y (7) se obtiene

$$u \# u + v \# v - 2\ u \# v = u \# u + v \# v - 2\ 7\ u\ 7\ 7\ v\ 7 \text{ porque } u$$

$$tu \# v = 7\ tu\ 7\ 7\ v\ 7 \text{ porque } tu$$

TEOREMA Ángulo entre vectores

Si u y v son dos vectores distintos de cero, el ángulo u, 0... u... p, entre u y v está determinado por la fórmula

$$\text{porque } tu = \frac{tu \# v}{7\ u\ 7\ 7\ v\ 7} \qquad (8)$$

EJEMPLO 2

Encontrar el ángulo U entre dos vectores

Encuentra el ángulo u entre u = 4i - 3j y v = 2i + 5j.

Solución

Encuentre u # v, 7 u 7 y 7 v 7 .

$$tu \# v = 4 \# 2 + 1 - 32 \# 5 = - 7$$

$$7\ y\ 7 = 242 + 1 - 322 = 5$$

$$7 \text{ contra } 7 = 222 + 52 = 229$$

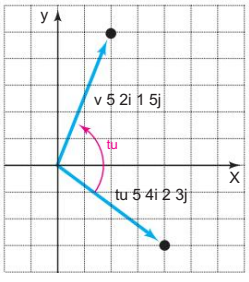


Figura 65 u ≈ 105°

Por la fórmula (8), si u es el ángulo entre u y v, entonces

$$\text{porque } tu = \frac{tu \# v}{7\ u\ 7\ 7\ v} = \frac{- 7}{5229} \approx - 0{,}26$$

7 Por lo tanto, u ≈ cos-1 1 - 0.262 ≈ 105°. Ver Figura 65.

Ahora resuelva el problema 9 (a) y (b).

Machine Translated by Google

3 Determinar si dos vectores son paralelos

Se dice que dos vectores v y w son paralelos si hay un escalar a distinto de cero de modo que v = aw. En este caso, el ángulo u entre v y w es 0 o p.

EJEMPLO 3 Determinar si dos vectores son paralelos

Los vectores v = 3i - j y w = 6i - 2j son paralelos, ya que v = w. Además, 2 desde

$$\text{porque tu} = \frac{v \# w}{7v7\ 7w7} = \frac{18 + 2}{\sqrt{210}\ \sqrt{240}} = \frac{20}{\sqrt{2400}} = 1$$

el ángulo u entre v y w es 0.

4 Determinar si dos vectores son ortogonales

La figura 66 v es ortogonal a w.

NOTA Ortogonal, perpendicular y normal son términos que significan "se encuentran en ángulo recto". Es costumbre referirse a dos vectores como ortogonales, a dos rectas como perpendiculares y a una recta y un plano o a un vector y un plano como normales.

Si el ángulo u entre dos vectores v y w distintos de cero es 2, se llama $\frac{pag}{}$, los vectores v y w son ortogonal. Ver Figura 66.

Desde $\cos \frac{pag}{2} = 0$, de la fórmula (8) se deduce que si los vectores v y w son ortogonal, entonces v # w = 0.

Por otro lado, si v # w = 0, entonces v = 0 o w = 0 o cos u = 0. Si cos u = 0, entonces $tu = \frac{pag}{2}$, y v y w son ortogonales. Si v o w es el vector cero, entonces, dado que el vector cero no tiene una dirección específica, adoptamos la convención de que el vector cero es ortogonal a todo vector.

TEOREMA

Dos vectores v y w son ortogonales si y sólo si

$$v \# w = 0$$

EJEMPLO 4 Determinar si dos vectores son ortogonales

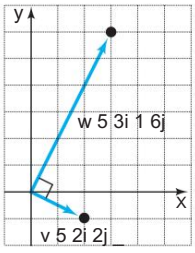


Figura 67

los vectores

$$v = 2i - j \text{ y } w = 3i + 6j$$

son ortogonales, ya que

$$v \# w = 6 - 6 = 0$$

Ver Figura 67.

Ahora resuelve el problema 9 (c)

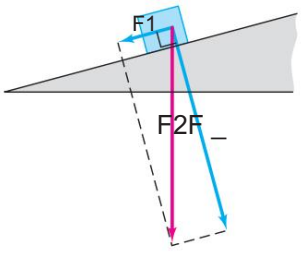
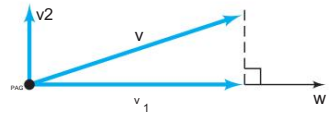


Figura 68

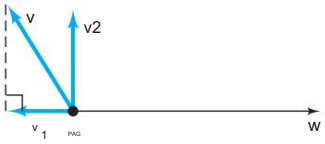
5 Descomponer un vector en dos vectores ortogonales

En muchas aplicaciones físicas, es necesario encontrar “cuánto” de un vector se aplica en una dirección determinada. Mire la Figura 68. La fuerza F debida a la gravedad tira directamente hacia abajo (hacia el centro de la Tierra) del bloque. Para estudiar el efecto de la gravedad sobre el bloque, es necesario determinar cuánto de F realmente empuja el bloque hacia abajo por la pendiente 1F12 y cuánto presiona el bloque contra la pendiente 1F22.
en ángulo recto con la pendiente. Conocer la descomposición de F a menudo nos permite determinar cuándo se supera la fricción (la fuerza que mantiene el bloque en su lugar en el plano inclinado) y el bloque se deslizará hacia abajo.

Machine Translated by Google



(a)



(b)

Figura 69

Supongamos que v y w son dos vectores distintos de cero y no ortogonales con el mismo punto inicial P. Buscamos descomponer v en dos vectores: v1 , que es paralelo a w, y v2 , que es ortogonal a w. Consulte la Figura 69(a) y (b). El vector v1 se llama proyección vectorial de v sobre w.

El vector v1 se obtiene trazando una perpendicular desde el punto terminal de v hasta la recta que contiene a w. El vector v1 es el vector desde P hasta la intersección de la línea que contiene w y la perpendicular. El vector v2 viene dado por v2 = v - v1 .
Tenga en cuenta que v = v1 + v2 , el vector v1 es paralelo a w y el vector v2 es ortogonal a w. Ésta es la descomposición de v que se buscaba.

Ahora buscamos una fórmula para v1 que se base en el conocimiento de los vectores v y W. Como v = v1 + v2 , tenemos

$$v \# w = 1v1 + v22 \# w = v1 \# w + v2 \# w \qquad (9)$$

Como v2 es ortogonal a w, tenemos v2 # w = 0. Como v1 es paralelo a w, tenemos v1 = aw para algún escalar a. La ecuación (9) se puede escribir como

$$v \# w = aw \# w = a \, 7 \, w \, 7 \, 2 \qquad v1 \cdot Aw;\ v2 \# w \cdot 0$$

$$un = \frac{v \# w}{7 \, w \, 7 \, 2}$$

Entonces

$$v1 = aw = \frac{v \# w}{7 \, w \, 7 \, 2} w$$

TEOREMA

Si v y w son dos vectores no ortogonales distintos de cero, la proyección vectorial de v en w es

$$v1 = \frac{v \# w}{7 \, w \, 7 \, 2} w \qquad (10)$$

La descomposición de v en v1 y v2 , donde v1 es paralela a w y v2 es ortogonal a w, es

$$v1 = \frac{v \# w}{7 \, w \, 7 \, 2} w \; v2 = v - v1 \qquad (11)$$

EJEMPLO 5 Descomponer un vector en dos vectores ortogonales

Encuentre la proyección vectorial de v = i + 3j sobre w = i + j. Descomponga v en dos vectores, v1 y v2 , donde v1 es paralelo a w y v2 es ortogonal a w.

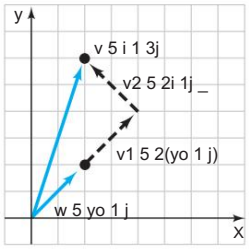


Figura 70

Solución

Utilice las fórmulas (10) y (11).

$$v1 = \frac{v \# w}{7 \, w \, 7 \, 2} w = \frac{1 + 3}{1 \, 222 \, 2} w = 2w = 21i + j2$$

$$v2 = v - v1 = 1i + 3j2 - 21i + j2 = - i + j$$

Ver Figura 70.

Ahora resuelve el problema 2 1

EJEMPLO 6 Encontrar la fuerza necesaria para sostener un carro en una colina

Un carro con dos niños pequeños como ocupantes pesa 100 libras y se encuentra en una colina con una pendiente de 20°. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que se requiere para evitar que el carro ruede colina abajo?

Machine Translated by Google

Solución

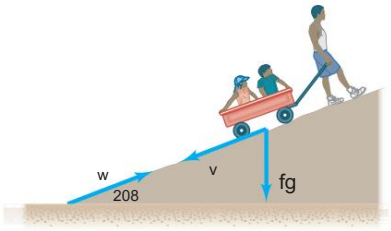


Figura 71

Vea la Figura 71. Necesitamos encontrar la magnitud de la fuerza v que haría que el carro rodara colina abajo. Una fuerza con la misma magnitud en la dirección opuesta a v impedirá que el carro ruede colina abajo. La fuerza de gravedad es ortogonal al nivel del suelo, por lo que la fuerza del vagón debida a la gravedad se puede representar mediante el vector

$$Fg = -100j$$

Determine la proyección vectorial de Fg sobre w, que es la fuerza paralela a la colina.
El vector w viene dado por

$$w = \cos 20°i + \operatorname{sen} 20°j$$

La proyección vectorial de Fg sobre w es

$$v = \frac{fg \# w}{7\,w}\,w$$

$$= \frac{7\,2 - 100(\operatorname{sen} 20°)}{\cancel{1\cos 20°i + \operatorname{sen}20°j2\ 1\ 2\cos2\ 20°} + \operatorname{sen}2\ 20°2\ 2}$$

$$= - 34.21\cos 20°i + \operatorname{sen}20°j2$$

La magnitud de v es 34,2 libras, por lo que la magnitud de la fuerza requerida para evitar que el carro ruede colina abajo es 34,2 libras.

6 Trabajo informático

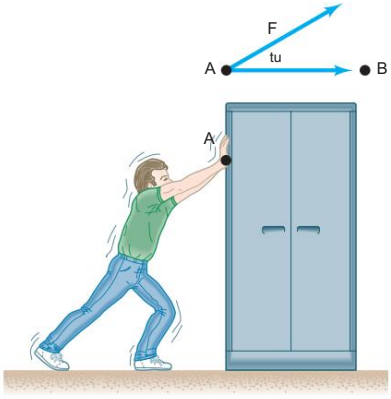


Figura 72

En física elemental, el trabajo W realizado por una fuerza constante F al mover un objeto desde un punto A a un punto B se define como

$$W = 1\text{magnitud de la fuerza}2\ 1\text{distancia}2 = 7\ F7\ 7\ \overline{AB}>\ 7$$

El trabajo se mide comúnmente en libras-pie o en newton-metro (julios).

En esta definición, se supone que la fuerza F se aplica a lo largo de la línea de movimiento.
Si la fuerza constante F no está a lo largo de la línea de movimiento, sino que forma un ángulo u con la dirección del movimiento, como se ilustra en la Figura 72, entonces el trabajo W realizado por F al mover un objeto de A a B está definido como

$$W = F \# \overline{AB}> \qquad (12)$$

Esta definición es compatible con la definición de fuerza-tiempo-distancia, ya que

$$W = 1\text{cantidad de fuerza en la dirección de } \overline{AB} > 2\ 1\text{distancia}2$$

$$= 7 \text{ proyección de F sobre AB } 7\ 7\ \overline{AB}>\ 7 = \frac{F \# \overline{AB}>}{7\ \overline{AB} > 7\ 2}\ 7\overline{AB} > 7\ 7\overline{AB} > 7 = F \# \overline{AB}>$$

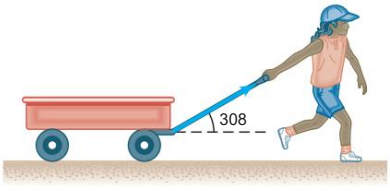
c

Utilice la fórmula (10)

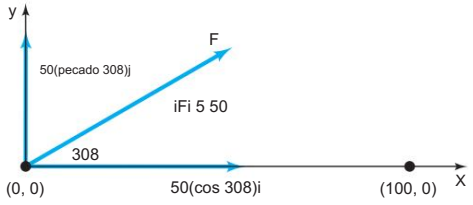
EJEMPLO 7

Trabajo de Computación

Una niña tira de un carro con una fuerza de 50 libras. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover el carro 100 pies si la manija forma un ángulo de 30° con el suelo? Véase la Figura 73(a).



(a)



(b)

Figura 73

Machine Translated by Google

Solución Coloque los vectores en un sistema de coordenadas de tal manera que el vagón se mueva de 10, 02 a 1100, 02. El movimiento es de A = 10, 02 a B = 1100, 02, AB> = entonces 100i. El vector de fuerza F, como se muestra en la Figura 73(b), es

$$F = 501\cos 30°i + \operatorname{sen} 30°j2 = 50a \frac{13}{2} yo + \frac{1}{2} jb = 251\ 23\ i + j2$$

Por la fórmula (12), el trabajo realizado es

$$W = F \# AB > = 251\ 23\ i + j2 \# 100\ i = 250023 \text{ pie@libras}$$

Ahora trabaja el problema 2 9

Característica histórica

Los números complejos se usaban como vectores en el plano antes. Se aclaró la noción general de vector. Supongamos que nosotros Dijimos en el Artículo Histórico de la Sección 9.4 que hacer la correspondencia

Vector	Número complejo
ai + bj	a + bi
c i + dj	c + di

Muestra esa

$$(ai + bj) \# (c\ i + dj) = \text{parte real } 3\ (a + bi)(c + di)4$$

Así es como se encontró originalmente el producto escalar. La parte imaginaria también es interesante. Es un determinante (ver Sección 11.3) y representa el área del paralelogramo cuyas aristas son los vectores. Esto se acerca a algunas de las ideas de Hermann Grassmann y también está relacionado con el triple producto escalar de vectores tridimensionales.

9.5 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' La respuesta se da al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. En un triángulo con lados a, b, c y ángulos A, B, C, la ley de los cosenos establece que . (pág. 582)

Conceptos y vocabulario

2. Si v = a1i + b1 j y w = a2i + b2 j son dos vectores, entonces se define el _____ _____ como v # w = a1a2 + b1b2.
3. Si v # w = 0, entonces los dos vectores v y w son _____ .
4. Si v = 3w, entonces los dos vectores v y w son _____ .
5. Verdadero o Falso Dados dos vectores no ortogonales v distintos de cero y w, siempre es posible descomponer v en dos vectores, uno paralelo a w y el otro ortogonal a w.
6. Verdadero o Falso El trabajo es un ejemplo físico de un vector.
7. Elección múltiple ¿Usando qué fórmula se puede encontrar el ángulo u, 0… u… p, entre dos vectores distintos de cero u y v ?

   (a) $\operatorname{sen} u = \frac{7\ y\ 7}{7\ v\ 7}$ (b) $\text{porque } tu = \frac{7\ y\ 7}{7\ v\ 7}$

   (c) $\operatorname{sen} u = (d) \frac{tu \# v}{v\ 7}$ cos u = 7 u 7 7 v 7 7 u 7 7 $\frac{tu \# v}{}$
8. Opción múltiple Si dos vectores v y w distintos de cero son ortogonales, ¿qué medida tiene el ángulo entre ellos?

   (a) p (b) $\frac{\text{pag}}{2}$ (C) $\frac{3p}{2}$ (d) 2p

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 18, (a) encuentre el producto escalar v # w; (b) encuentre el ángulo entre v y w; (c) indique si los vectores son paralelos, ortogonales o ninguno de los dos.

9. v = yo - j, w = yo + j
10. v = i + j, w = - i + j
11. v = 2i + 2j, w = i + 2j
12. v = 2i + j, w = i - 2j
15. v = 3i - 4j, w = 9i - 12j
13. v = i + 23j, w = i - j
14. v = 23i - j, w = i + j
17. v = i, w = - 3j
19. v = 3i + 4j, w = - 6i - 8j
16. Encuentre b de modo que los vectores v = i + j y w = i + bj son ortogonales.
18. v = 4i, w = j
20. Encuentra a tal que los vectores v = i - aj y w = 2i + 3j sean ortogonales.

En los problemas 21 a 26, descomponga v en dos vectores v1 y v2 , donde v1 es paralelo a w y v2 es ortogonal a w.

21. v = 2i - 3j, w = i - j
22. v = - 3i + 2j, w = 2i + j
23. v = 2i - j, w = i - 2j
24. v = i - j, w = - i - 2j
25. v = i - 3j, w = 4i - j
26. v = 3i + j, w = - 2i - j

Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

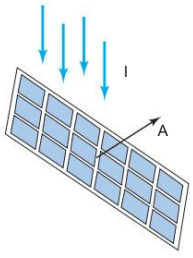
27. Encuentre un vector de magnitud 15 que sea paralelo a 4i - 3j.

28. Encuentre un vector de magnitud 5 que sea paralelo a - 12i + 9j.

29. Calcular el trabajo Encuentre el trabajo W realizado por una fuerza de 7 libras que actúa en la dirección de 60° con respecto a la horizontal al mover un objeto 9 pies desde 10, 02 hasta 19, 02.

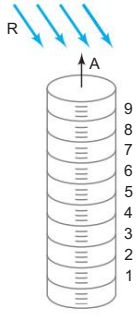
30. Trabajo de cálculo Se tira de un carro horizontalmente ejerciendo una fuerza de 20 libras sobre el mango en un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover el carro 100 pies?

31. Energía solar La cantidad de energía recolectada por un panel solar depende de la intensidad de los rayos del sol y del área del panel. Sea el vector I la intensidad, en vatios por centímetro cuadrado, que tiene la dirección de los rayos del sol.
Sea el vector A el área, en centímetros cuadrados, cuya dirección es la orientación de un panel solar. Ver la figura. El número total de vatios recogidos por el panel solar viene dado por W = 0I # A 0 .



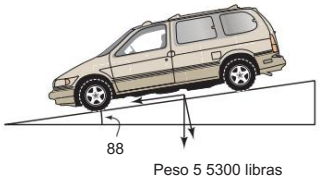
Supongamos que I = 8 - 0,02, - 0,039 y A = 8300, 4009. Responda las partes (a) a (c). (a)
Encuentre 7I7 y 7 A 7 .
(b) Calcule W.
(c) Si el panel solar debe recolectar la cantidad máxima de vatios, ¿qué debe ser cierto acerca de I y A?

32. Medición de las precipitaciones Sea el vector R la cantidad de lluvia, en pulgadas, cuya dirección es la inclinación de la lluvia respecto de un pluviómetro. Sea el vector A el área, en pulgadas cuadradas, cuya dirección es la orientación de la apertura del pluviómetro. Ver la figura. El volumen de lluvia recogido en el pluviómetro, en pulgadas cúbicas, viene dado por V = 0 R # A 0 , incluso cuando la lluvia cae en dirección inclinada o el pluviómetro no está perfectamente vertical.



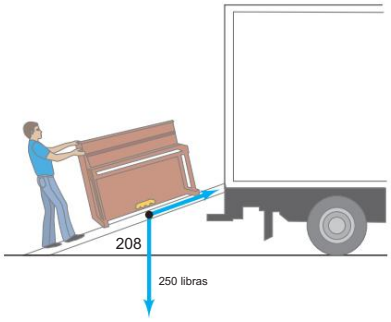
Supongamos que R = 80,75, - 1,759 y A = 80,3, 19.
(a) Encuentre 7R7 y 7 A 7 e interprete el significado de cada uno.
(b) Calcule V e interprete su significado.
(c) Si el pluviómetro debe recolectar el volumen máximo de lluvia, ¿qué debe ser cierto acerca de R y A?

33. Carga de frenado Un Toyota Sienna con un peso bruto de 5300 libras está estacionado en una calle con una pendiente de 8°. Ver la figura. Encuentre la magnitud de la fuerza requerida para evitar que la Sienna ruede colina abajo. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza perpendicular a la colina?



34. Carga de frenado Una Chevrolet Silverado con un peso bruto de 4500 libras está estacionada en una calle con una pendiente de 10°. Encuentre la magnitud de la fuerza requerida para evitar que la Silverado ruede colina abajo. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza perpendicular a la colina?

35. Ángulo de rampa Timmy y Larry están usando una rampa para cargar muebles en un camión. Mientras hacen subir un piano de 290 libras por la rampa, descubren que el camión está demasiado lleno de otros muebles para que quepa el piano. Larry sostiene el piano en su lugar en la rampa mientras Timmy reposiciona otros elementos para hacerle espacio en el camión. Si el ángulo de inclinación de la rampa es de 15°, ¿cuántas libras de fuerza debe ejercer Larry para mantener el piano en posición?



36. Ángulo de inclinación Una topadora ejerce 1000 libras de fuerza para evitar que una roca de 5000 libras ruede colina abajo.
Determine el ángulo de inclinación de la colina.

37. Encuentre el ángulo agudo que forma un vector de fuerza unitaria constante con el eje x positivo si el trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula de 10, 02 a 17, 02 es igual a 5.

38. Demuestre la propiedad distributiva:

$$u \# 1v + w2 = u \# v + u \# w$$

39. Demuestre la propiedad (5): 0 # v = 0.

40. Si v es un vector unitario y el ángulo entre v e i es a, demuestre que v = cos ai + sen aj.

41. Supongamos que v y w son vectores unitarios. Si el ángulo entre v y i es a y el ángulo entre w e i es b, usa la idea del producto escalar v # w para demostrar que

$$\cos 1a - b2 = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

42. Demuestre que la proyección de v sobre i es 1v # i2i. Entonces muestra que siempre podemos escribir un vector v como

$$v = 1v \# i2i + 1v \# j2j$$

Machine Translated by Google

43. Sean v y w dos vectores distintos de cero. Demuestre que los vectores 7 w 7 v + 7 v 7 w y 7 w 7 v - 7 v 7 w son ortogonales.

44. Sean v y w dos vectores distintos de cero. Demuestre que v # w vector v - aw es ortogonal a w si a = $\frac{\quad}{7\ w}$.

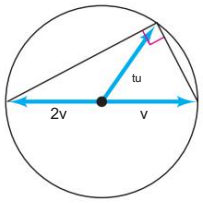
7 2 45. Dados los vectores u = i + 2j y v = 5i + yj, encuentre y tal que El ángulo entre los vectores es de 30°.†

46. Dados los vectores u = xi + 2j y v = 7i - 3j, encuentre x tal que El ángulo entre los vectores es de 30°.

47. Dados los vectores u = 2xi + 3j y v = xi - 8j, encuentre x tal que u y v sean ortogonales.

48. En la definición de trabajo dada en esta sección, ¿cuál es el trabajo realizado si F es ortogonal a AB> ?

49. Problema del desafío
(a) Si u y v tienen la misma magnitud, demuestre que u + v y u - v son ortogonales.
(b) Utilice esto para demostrar que un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto (consulte la figura).



50. Problema de desafío Demuestre la identidad de polarización,

7 u + v 7 2 - 7 u - v 7 2 = 41u # v2

†Cortesía del Departamento de Matemáticas de Joliet Junior College

Explicar conceptos: discusión y escritura

51. Cree una aplicación (diferente a cualquiera que se encuentre en el texto) que requiera un producto escalar.

Conserve su conocimiento

Los problemas 52 a 61 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

52. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = x3 - 5x2 + 27 de - 3 a 2.

53. Encuentra el valor exacto de 5 cos 60° + 2 tan $\frac{\text{pag}}{\quad}$. No uses un 4 calculadora.

54. Establecer la identidad: 11 - sen2 u2 11 + tan2 u2 = 1

55. Volumen de una caja Una caja abierta se fabrica a partir de una lámina de metal cortando cuadrados en cada esquina y doblando los lados. La hoja tiene una longitud de 19 pulgadas y un ancho de 13 pulgadas. Si x es la longitud de un lado de cada cuadrado que se va a cortar, escribe una función, V1x2, para el volumen de la caja en términos de x.

56. Resuelve: 7x-1 = 3 # 2x+4

57. ¿ Cuál es la función que se grafica después de la gráfica? de y = 23 x se desplaza 4 unidades hacia la izquierda y 9 unidades hacia arriba?

58. Encuentra todas las asíntotas de la gráfica de f1x2 $= \frac{2x2 - 5}{x2 - 2x - 15.}$

59. Encuentra el valor exacto de cos 80° cos 70° - sen 80° sen 70°.

60. Encuentra el vértice y determina si la gráfica de 2 f1x2 = $\frac{1}{3}$x2 - 12x + 10 es cóncavo hacia arriba o cóncavo hacia abajo.

61. Si f1x2 = y g1x2 = 3 tan x, demuestre que 1x2 + 92 3>2 1f g2 1x2 = $\frac{1}{27\ 0\text{seg}3\ x\ 0}$

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. c2 = a2 + b2 - 2ab porque C

9.6 Vectores en el espacio

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Fórmula de distancia (Sección 1.1, págs. 39 y 40)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problema en la página 675.

OBJETIVOS 1 Encontrar la distancia entre dos puntos en el espacio (p. 668)
2 Encontrar vectores de posición en el espacio (p. 669)
3 Realizar operaciones con vectores (p. 670)
4 Encuentre el producto escalar (p. 671)
5 Encuentra el ángulo entre dos vectores (p. 672)
6 Encuentra los ángulos directores de un vector (p. 673)

Machine Translated by Google

Coordenadas rectangulares en el espacio

En el plano, cada punto está asociado a un par ordenado de números reales. En el espacio, cada punto está asociado a un triple ordenado de números reales. A través de un punto fijo, llamado origen O, traza tres líneas mutuamente perpendiculares: el eje x, el eje y y el eje z. En cada uno de estos ejes, seleccione una escala adecuada y la dirección positiva. Ver Figura 74.

La dirección elegida para el eje z positivo en la Figura 74 hace que el sistema sea diestro. Esto se ajusta a la regla de la mano derecha, que establece que si el dedo índice de la mano derecha apunta en la dirección del eje x positivo y el dedo medio apunta en la dirección del eje y positivo, entonces el pulgar señalará en la dirección del eje z positivo. Ver Figura 75.

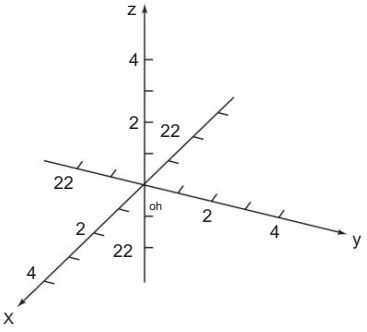


Figura 74

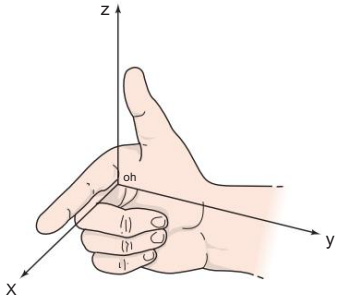


Figura 75

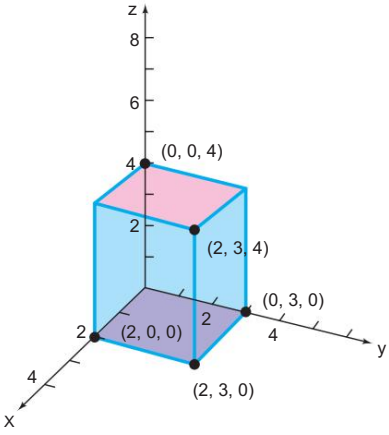


Figura 76

Asociar a cada punto P una tripleta ordenada 1x, y, z2 de números reales, las coordenadas de P. Por ejemplo, el punto 12, 3, 42 se localiza comenzando en el origen y moviéndose 2 unidades a lo largo del eje x positivo, 3 unidades en la dirección del eje y positivo y 4 unidades en la dirección del eje z positivo. Ver Figura 76.

La Figura 76 también muestra la ubicación de los puntos 12, 0, 02, 10, 3, 02, 10, 0, 42 y 12, 3, 02. Los puntos de la forma 1x, 0, 02 se encuentran en el eje x, y los puntos de las formas 10, y, 02 y 10, 0, z2 se encuentran en el eje y y el eje z, respectivamente. Los puntos de la forma 1x, y, 02 se encuentran en un plano llamado plano xy. Su ecuación es z = 0. De manera similar, los puntos de la forma 1x, 0, z2 se encuentran en el plano xz (ecuación y = 0), y los puntos de la forma 10, y, z2 se encuentran en el plano yz (ecuación x = 0). Véase la Figura 77(a). Por extensión de estas ideas, todos los puntos que obedecen a la ecuación z = 3 estarán en un plano paralelo y 3 unidades por encima del plano xy. La ecuación y = 4 representa un plano paralelo al plano xz y 4 unidades a la derecha del plano y = 0. Consulte la Figura 77(b).

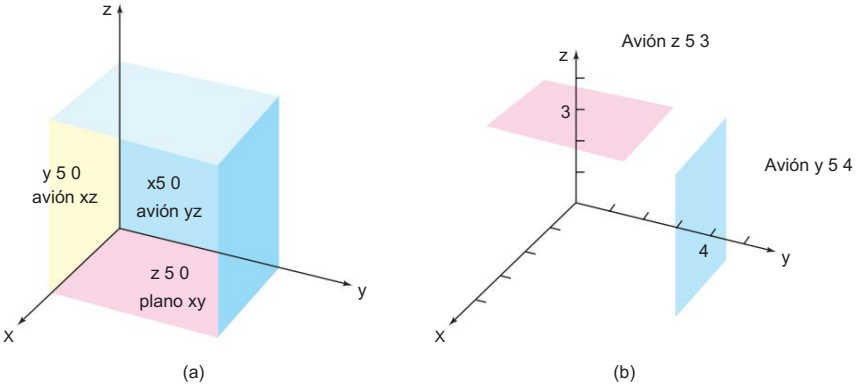


Figura 77

Ahora trabaja el problema 9

1 Encuentra la distancia entre dos puntos en el espacio

La fórmula para la distancia entre dos puntos en el espacio es una extensión de la Fórmula de distancia para puntos en el plano dada en la Sección 1.1.

Machine Translated by Google

TEOREMA Fórmula de la distancia en el espacio

Si P1 = 1x1, y1, z12 y P2 = 1x2, y2, z22 son dos puntos en el espacio, la distancia d de P1 a P2 es

$$re = \sqrt{21x2 - x12^{2} + 1y2 - y12^{2} + 1z2 - z12^{2}} \qquad (1)$$

La demostración, que omitimos, utiliza una doble aplicación del teorema de Pitágoras.

EJEMPLO 1 Usando la fórmula de distancia

Encuentre la distancia desde P1 = 1 - 1, 3, 22 a P2 = 14, - 2, 52.

Solución

$$re = \sqrt{234 - 1 - 12\,4^{2} + 3 - 2 - 34^{2} + 35 - 24^{2}} = \sqrt{225 + 25 + 9} = \sqrt{259}$$

Ahora resuelve el problema 1 5

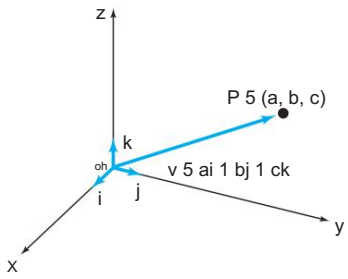


Figura 78

2 Encontrar vectores de posición en el espacio

Para representar vectores en el espacio, introducimos los vectores unitarios i, j y k cuyas direcciones están a lo largo del eje x positivo, el eje y positivo y el eje z positivo, respectivamente. Si v es un vector con punto inicial en el origen O y punto terminal en P = 1a, b, c2, entonces podemos representar v en términos de los vectores i, j y k como

$$v = ai + bj + ck$$

Ver Figura 78.

Los escalares a, b y c se denominan componentes del vector v = ai + bj + ck, siendo a el componente en la dirección i, b el componente en la dirección j y c el componente en la dirección k.

Un vector cuyo punto inicial está en el origen se llama vector de posición. El siguiente resultado establece que cualquier vector cuyo punto inicial no esté en el origen es igual a un vector de posición único.

TEOREMA

Supongamos que v es un vector con punto inicial P1 = 1x1, y1, z12, no necesariamente el origen y el punto terminal P2 = 1x2, y2, z22. Si $v = \overrightarrow{P1P2}$, entonces v es igual a el vector de posición

$$v = 1x2 - x12i + 1y2 - y12j + 1z2 - z12k \qquad (2)$$

La Figura 79 ilustra este resultado.

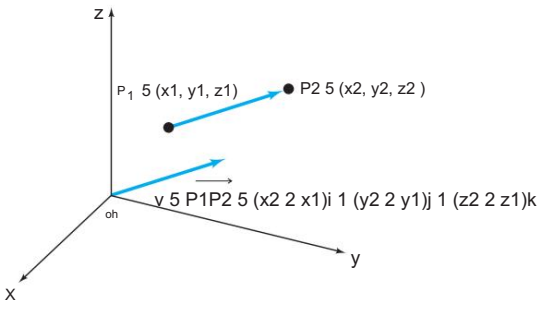


Figura 79

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Encontrar un vector de posición

Encuentra el vector de posición del vector $v = \overrightarrow{P1P2}$ si P1 = 1 - 1, 2, 32 y P2 = 14, 6, 22.

Solución Por la ecuación (2), el vector de posición igual a v es

$$v = 34 - 1 - 12\,4\,i + 16 - 22j + 12 - 32k = 5i + 4j - k$$

Ahora trabaja el problema 2 9

3 Realizar operaciones con vectores

La igualdad, la suma, la resta, el producto escalar y la magnitud se pueden definir en términos de los componentes de un vector.

DEFINICIÓN

Sean $v = a1i + b1j + c1k$ y $w = a2i + b2j + c2k$ dos vectores, y sea a un escalar. Entonces

- v = w si y sólo si a1 = a2, b1 = b2 y c1 = c2
- v + w = 1a1 + a22i + 1b1 + b22j + 1c1 + c22k
- v - w = 1a1 - a22i + 1b1 - b22j + 1c1 - c22k
- av = 1aa12i + 1ab12j + 1ac12k
- 'v' = 2a2 + b2 + c2

$$\frac{}{1 \quad 1 \quad 1}$$

Estas definiciones son compatibles con las definiciones geométricas dadas en la Sección 9.4 para vectores en un plano.

EJEMPLO 3 Sumar y restar vectores

Si $v = 2i + 3j - 2k$ y $w = 3i - 4j + 5k$, encuentre: (a) v + w (b) v - w

Solución

(a) v + w = 12i + 3j - 2k2 + 13i - 4j + 5k2 = 12 + 32i + 13 - 42j + 1 - 2 + 52k = 5i - j + 3k

(b) v - w = 12i + 3j - 2k2 - 13i - 4j + 5k2 = 12 - 32i + 33 - 1 - 42 4 j + 3 - 2 - 54k = - i + 7j - 7k

EJEMPLO 4 Encontrar productos escalares y magnitudes

Si $v = 2i + 3j - 2k$ y $w = 3i - 4j + 5k$, encuentre: (a) 3v (b) 2v - 3w (c) 'v'

Solución

(a) 3v = 312i + 3j - 2k2 = 6i + 9j - 6k (b) 2v - 3w = 212i + 3j - 2k2 - 313i - 4j + 5k2 = 4i + 6j - 4k - 9i + 12j - 15k = - 5i + 18j - 19k = 217

(c) 'v' = '2i + 3j - 2k' = 222 + 32 + 1 - 22 $\frac{}{2}$

Ahora resuelve los problemas 3 3 y 3 9

Machine Translated by Google

Recuerde que un vector unitario u es aquel para el cual 'u' = 1. En muchas aplicaciones, es útil poder encontrar un vector unitario u que tenga la misma dirección que un vector dado v.

TEOREMA Vector unitario en la dirección de v

Para cualquier vector v distinto de cero, el vector

$$u = \frac{v}{'v'}$$

es un vector unitario que tiene la misma dirección que v.

La siguiente es una consecuencia de este teorema.

$$v = 'v'u$$

EJEMPLO 5 Encontrar un vector unitario

Encuentre el vector unitario en la misma dirección que v = 2i - 3j - 6k.

Solución

Encuentra 'v' primero.

$$'v' = '2i - 3j - 6k' = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Ahora multiplica v por el escalar $\frac{1}{'v'} = \frac{1}{7}$. El resultado es el vector unitario.

$$u = \frac{v}{'v'} = \frac{2i - 3j - 6k}{7} = \frac{2}{7}i - \frac{3}{7}j - \frac{6}{7}k$$

Ahora problema de trabajo 47

4 Encuentra el producto escalar

La definición de producto escalar en el espacio es una extensión de la definición dada para vectores en un plano.

DEFINICIÓN Producto escalar

Si v = a1i + b1j + c1k y w = a2i + b2j + c2k son dos vectores, el producto escalar v ~ w se define como

$$v \# w = a1a2 + b1b2 + c1c2 \qquad (3)$$

EJEMPLO 6 Encontrar productos punto

Si v = 2i - 3j + 6k y w = 5i + 3j - k, encuentre:

(a) v ~ w (b) w ~ v (c) v ~ v

(d) w ~ w (e) 'v' (f) 'w'

Machine Translated by Google

Solución (a) $v \sim w = 2 \# 5 + 1 - 32 3 + 61 - 12 = - 5$

(b) $w \sim v = 5 \# 2 + 31 - 32 + 1 - 12 \# 6 = - 5$

(c) $v \sim v = 2 \# 2 + 1 - 32\ 1 - 32 + 6 \# 6 = 49$

(d) $w \sim w = 5 \# 5 + 3 \# 3 + 1 - 12\ 1 - 12 = 35$

(e) $'v' = \sqrt{222 + 1 - 32}$ (f) $'w' = \sqrt{2 + 62} = \sqrt{249} = \sqrt{7}$

$= \sqrt{252 + 32 + 1 - 12}^{2} = \sqrt{235}$

El producto escalar en el espacio tiene las mismas propiedades que el producto escalar en el plano.

TEOREMA Propiedades del producto escalar

Si u, v y w son vectores, entonces

Propiedad conmutativa

$$u \sim v = v \sim u$$

Propiedad distributiva

$$u \sim 1v + w2 = u \sim v + u \sim w$$

$$v \sim v = 'v'^{2}$$

$$0 \sim v = 0$$

5 Encuentra el ángulo entre dos vectores

El ángulo u entre dos vectores en el espacio sigue la misma fórmula que para dos vectores en el plano.

TEOREMA Ángulo entre vectores

Si u y v son dos vectores distintos de cero, el ángulo u, 0... u... p, entre u y v está determinado por la fórmula

$$\text{porque tu} = \frac{u \sim v}{'u'\ 'v'} \qquad (4)$$

EJEMPLO 7 Encontrar el ángulo entre dos vectores

Encuentra el ángulo u entre $u = 2i - 3j + 6k$ y $v = 2i + 5j - k$.

Solución Calcule las cantidades $u \sim v$, $'u'$ y $'v'$.

$$tu \sim v = 2 \# 2 + 1 - 32 \# 5 + 61 - 12 = - 17$$

$$'u' = \sqrt{222 + 1 - 32}\ 'v' = \sqrt{2 + 62} = \sqrt{249} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{222 + 52 + 1 - 12}^{2} = \sqrt{230}$$

Por la fórmula (4), si u es el ángulo entre u y v, entonces

$$\text{porque tu} = \frac{u \sim v}{'u'\ 'v'} = \frac{- 17}{\sqrt{7230}} \approx -0{,}443$$

Entonces, $u \approx \cos^{-1} 1 - 0{,}4432 \approx 116{,}3°$.

Ahora resuelve el problema 5 1

Machine Translated by Google

6 Encuentra los ángulos de dirección de un vector

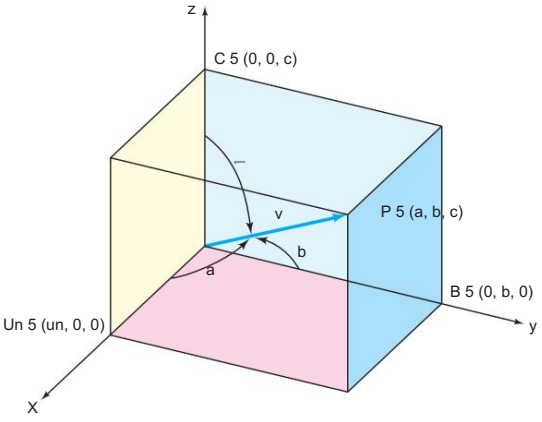
Un vector v distinto de cero en el espacio se puede describir especificando su magnitud y sus tres ángulos directores a, b y g. Estos ángulos de dirección se definen como

a = el ángulo entre v e i, el eje x@positivo, 0 … a … p

b = el ángulo entre v y j, el eje y@ positivo, 0 … b … p

= el ángulo entre v y k, el eje z@positivo, 0 … g … p

Ver Figura 80.



0 # a # p, 0 # b # p, 0 # g # p

Figura 80 Ángulos de dirección

Nuestro primer objetivo es encontrar expresiones para a, b y g en términos de las componentes de un vector. Sea v = ai + bj + ck un vector distinto de cero. El ángulo a entre v y i, el eje x positivo, obedece

$$\text{porque a} = \frac{v \sim yo}{'v'\ 'yo'} = \frac{a}{'v'}$$

Similarmente,

$$\text{porque b} \frac{b}{= 'v'} \quad \text{y porque g} = \frac{C}{'v'}$$

Dado que $'v' = \sqrt{2a2 + b2 + c2}$, se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA Ángulos de dirección

Si v = ai + bj + ck es un vector distinto de cero en el espacio, los ángulos directores a, b y g obedecen

$$\bullet\ \text{porque a} = \frac{a}{\sqrt{2a2 + b2 + c2}} = \frac{a}{'v'} \qquad \bullet\ \text{porque b} \frac{b}{= \sqrt{2a2 + b2 + c2}} = \frac{b}{'v'}$$

$$\bullet\ \text{porque g} = \frac{C}{\sqrt{2a2 + b2 + c2}} = \frac{C}{'v'} \qquad (5)$$

Los números cos a, cos b y cos g se llaman cosenos directores del vector v.

EJEMPLO 8 Encontrar los ángulos de dirección de un vector

Encuentra los ángulos directores de v = - 3i + 2j - 6k.

Solución

$$'v' = \sqrt{21 - 32^{2} + 22 + 1 - 62^{2}} = \sqrt{249} = 7$$

Usando las fórmulas de la ecuación (5), tenemos

$$\text{porque a} = \frac{- 3}{7} \qquad \text{porque b} \frac{2}{= 7} \qquad \text{porque g} = \frac{- 6}{7}$$

$$a \approx 115{,}4° \qquad \text{segundo} \approx 73{,}4° \qquad \approx 149{,}0°$$

Machine Translated by Google

TEOREMA Propiedad de los cosenos directores

Si a, b y g son los ángulos directores de un vector v distinto de cero en el espacio, entonces

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 1 \qquad (6)$$

La prueba es una consecuencia directa de las ecuaciones de (5).

Con base en la ecuación (6), cuando se conocen dos cosenos directores, el tercero se determina hasta su signo. Conocer dos cosenos directores no es suficiente para determinar de forma única la dirección de un vector en el espacio.

EJEMPLO 9 Encontrar un ángulo de dirección de un vector

El vector v forma un ángulo de $a = \frac{\pi}{4}$ con el eje x positivo, un ángulo de $b = \frac{\pi}{3}$ con el eje y positivo, y un ángulo agudo g con el eje z positivo. Encuentra g.

Solución Por la ecuación (6), tenemos

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 g = 1$$

$$\cos^2 g = \frac{1}{4}$$

$$\cos g = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{o} \quad \cos g = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g = \frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad g = \frac{3\pi}{4}$$

Como g debe ser agudo, $g = \frac{\pi}{4}$.

Los cosenos directores de un vector dan información únicamente sobre la dirección del vector; no proporcionan información sobre su magnitud. Por ejemplo, cualquier vector que sea paralelo al plano xy y forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje y tiene cosenos directores $\frac{\pi}{4}$ radianes con el eje x positivo

$$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos b = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos g = 0$$

Sin embargo, si se conocen los ángulos directores y la magnitud de un vector, el vector está determinado de forma única.

EJEMPLO 10 Escribir un vector en términos de su magnitud y cosenos directores

Demuestre que cualquier vector v distinto de cero en el espacio se puede escribir en términos de su magnitud y sus cosenos directores como

$$v = \|v\|\cos a\,i + \cos b\,j + \cos g\,k \qquad (7)$$

Solución Sea $v = ai + bj + ck$. De las ecuaciones en (5), tenga en cuenta que

$$a = \|v\|\cos a \qquad b = \|v\|\cos b \qquad c = \|v\|\cos g$$

Machine Translated by Google

La sustitución da

$$v = ai + bj + ck = 'v' 1\cos a2i + 'v' 1\cos b2j + 'v' 1\cos g2k$$

$$= 'v' 3\ 1\cos a2i + 1\cos b2j + 1\cos g2k4$$

Ahora problema de trabajo 5 9

El ejemplo 10 muestra que los cosenos directores de un vector v también son los componentes del vector unitario en la dirección de v.

9.6 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' La respuesta se da al final de estos ejercicios. Si obtiene la respuesta incorrecta, lea la página que aparece en rojo.

1. La distancia d de P1 = 1x1, y12 a P2 = 1x2, y22 es d = _____. (págs. 39 y 40)

Conceptos y vocabulario

2. Si v = ai + bj + ck es un vector en el espacio, los escalares a, b, c son de v. llamó al _____
3. Los cuadrados de los cosenos directores de un vector en el espacio suman hasta _____.
4. Verdadero o Falso En el espacio, el producto escalar de dos vectores es un número positivo.
5. Verdadero o Falso Un vector en el espacio se puede describir especificando su magnitud y sus ángulos directores.
6. Opción múltiple En el espacio, los puntos de la forma 1x, y, 02 se encuentran en: (a) el plano xy (c) el plano yz (b) el plano xz (d) ninguno de estos

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 14, describa el conjunto de puntos 1x, y, z2 definidos por la(s) ecuación(s).

7. x = 0
8. y = 0 12. x = - 4
9. z = 2
10. y = 3
11. z = - 3
13. x = 3 y z = 1
14. x = 1 y y = 2

En los problemas 15 a 20, encuentre la distancia de P1 a P2 .

15. P1 = 10, 0, 02 y P2 = 14, 1, 22 16. P1 = 10, 0, 02 y P2 = 11, - 2, 32
17. P1 = 1 - 2, 2, 32 y P2 = 14, 0, - 32 18. P1 = 1 - 1, 2, - 32 y P2 = 10, - 2, 12
19. P1 = 12, - 3, - 32 y P2 = 14, 1, - 12 20. P1 = 14, - 2, - 22 y P2 = 13, 2, 12

En los problemas 21 a 26, se dan los vértices opuestos de una caja rectangular cuyos bordes son paralelos a los ejes de coordenadas. Enumera las coordenadas de los otros seis vértices del cuadro.

21. 10, 0, 02; 14, 2, 22 24. 11, 2, 32; 13, 4, 52
22. 10, 0, 02; 12, 1, 32 25. 1 - 2, - 3, 02; 1 - 6, 7, 12 En los
23. 15, 6, 12; 13, 8, 22
26. 1 - 1, 0, 22; 14, 2, 52

problemas 27 a 32, el vector v tiene un punto inicial P y un punto terminal Q. Escriba v en la forma ai + bj + ck; es decir, encuentre su vector de posición.

27. P = 10, 0, 02; Q = 1 - 3, - 5, 42
28. P = 10, 0, 02; Q = 13, 4, - 12
29. P = 13, 2, - 12; Q = 15, 6, 02
30. P = 1 - 3, 2, 02; Q = 16, 5, - 12
31. P = 1 - 1, 4, - 22; Q = 16, 2, 22
32. P = 1 - 2, - 1, 42; Q = 16, - 2, 42

En los problemas 33 a 38, encuentre 'v'.

33. v = 3i - 6j - 2k
34. v = - 6i + 12j + 4k
35. v = - yo - j + k
36. v = i - j + k
37. v = 6i + 2j - 2k
38. v = - 2i + 3j - 3k

En los problemas 39 a 44, encuentre cada cantidad si v = 3i - 5j + 2k y w = - 2i + 3j - 2k.

39. 2v + 3w
40. 3v - 2w
41. 'v + w'
42. 'v - w'
43. 'v' + 'w' En
44. 'v' - 'w'

los problemas 45 a 50, encuentre el vector unitario en la misma dirección que v.

45. v = - 3j
46. v = 5i
47. v = 3i - 6j - 2k _
48. v = - 6i + 12j + 4k
49. v = yo + j + k
50. v = 2i - j + k

En los problemas 51 a 58, encuentre el producto escalar v ~ w y el ángulo entre v y w.

51. v = i - j, w = i + j + k
53. v = 2i + 2j - k, w = i + 2j + 3k
52. v = yo + j, w = - yo + j - k
54. v = 2i + j - 3k, w = i + 2j + 2k

Machine Translated by Google

55. v = i + 3j + 2k, w = i - j + k 57. v = 3i - 4j + k, w = 6i - 8j + 2k

56. v = 3i - j + 2k, w = i + j - k

58. v = 3i + 4j + k, w = 6i + 8j + 2k

En los problemas 59 a 66, encuentre los ángulos directores de cada vector. Escribe cada vector en forma de ecuación (7).

59. v = 3i - 6j - 2k 63. v = j + k

60. v = - 6i + 12j + 4k 64. v = i + j

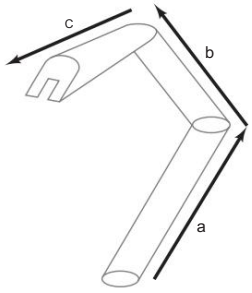
61. v = yo - j - k 65. v = 2i + 3j - 4k

62. v = yo + j + k

66.v = 3i - 5j + 2k

Aplicaciones y extensiones

67. Brazo robótico Considere el brazo robótico de doble articulación que se muestra en la figura. Sea el brazo inferior modelado por a = 83, 4, 19, el brazo medio modelado por b = 81, - 4, 49, y el brazo superior modelado por c = 83, - 5, 29, donde las unidades están en pies.

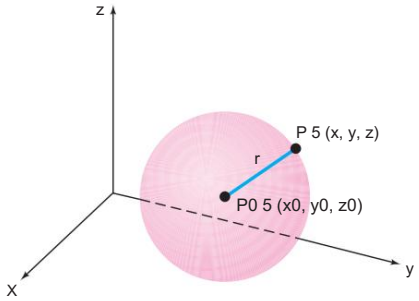


(a) Encuentre un vector d que represente la posición de la mano.
(b) Determine la distancia de la mano desde el origen.

68. La Esfera En el espacio, el conjunto de todos los puntos que están a la misma distancia de algún punto fijo se llama esfera . Vea la ilustración. La distancia constante se llama radio y el punto fijo es el centro de la esfera. Demuestre que una ecuación de una esfera con centro en 1x0, y0, z02 y radio r es

$$1x - x02\ ^2 + 1 \text{ año} - y02\ ^2 + 1z - z02\ ^2 = r\ ^2$$

[Sugerencia: utilice la fórmula de distancia (1).]



En los problemas 69 y 70, encuentre la ecuación de una esfera con radio r y centro P0 .

69.r = 2; P0 = 11, 2, 22

70.r = 4; P0 = 13, 2, 22

En los problemas 71 a 76, encuentre el radio y el centro de cada esfera.

[Pista: Completa el cuadrado en cada variable.]

71. x2 + y2 + z2 + 2x - 2z = - 1

72. x2 + y2 + z2 - 2x - 6y = 6

73. x2 + y2 + z2 + 18x = 0

74. x2 + y2 + z2 - 2x + 6y + 4z = - 5

75. 3x2 + 3y2 + 3z2 + 6x - 6y = 3

76. 2x2 + 2y2 + 2z2 - 16x - 12z = - 41

El trabajo W realizado por una fuerza constante F al mover un objeto desde un punto A en el espacio a un punto B en el espacio se define como $W = F \sim \overrightarrow{AB}$. Utilice esta definición en los problemas 77 a 79.

77. Trabajo Calcula el trabajo realizado por una fuerza de 1 newton que actúa en la dirección 2i + 2j + k al mover un objeto 3 metros desde 10, 0, 02 hasta 11, 2, 22.

78. Trabajo Calcula el trabajo realizado por una fuerza de 3 newtons que actúa en la dirección - 2i - 2j - k al mover un objeto 4 metros desde (0, 0, 0) a (0, 4, 0).

79. Trabajo Encuentra el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo de un vector u = - 3i + 5j - 4k si la fuerza aplicada es F = 3i - j - 2k.

Conserve su conocimiento

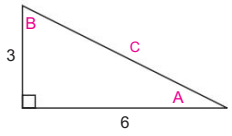
Los problemas 80 a 88 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

80. Resuelve: $\frac{3}{x - 2} \text{ Ú } 5$

81. Dados f1x2 = 2x - 3 y g1x2 = x2 + x - 1, encuentre 1f g2 1x2.

82. Encuentra el valor exacto de sen 80° cos 50° - cos 80° sen 50°.

83. Resuelve el triángulo.



84. Encuentra la distancia entre los puntos P1 = 1 - 1, - 22 y P2 = 19, 32.

85. Forme una función polinómica con coeficientes reales que tengan grado 4 y ceros - i y 1 - 3i.

86. La función f1x2 = $\frac{5}{x - 8}$ es uno a uno. Encuentra su inverso.

87. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = 3 tan12x2 de $-\frac{\text{pag}}{8}$ a $\frac{\text{pag}}{8}$.

88. Encuentra el área de la región encerrada por f1x2 = 236 - x2 y g1x2 = 6 - x.

'¿Estas preparado?' Respuesta

1. $\sqrt{21x2 - x12\ ^2 + 1y2 - y12\ ^2}$

Machine Translated by Google

9.7 El producto cruzado

OBJETIVOS 1 Calcular el producto cruzado de dos vectores (p. 677)
2 Conozca las propiedades algebraicas del producto cruz (p. 678)
3 Conozca las propiedades geométricas del producto cruz (p. 679)
4 Encuentre un vector ortogonal a dos vectores dados (p. 680)
5 Encuentra el área de un paralelogramo (p. 680)

1 Encuentre el producto cruzado de dos vectores

Para vectores en el espacio, y sólo para vectores en el espacio, se define un segundo producto de dos vectores, llamado producto vectorial. El producto cruzado de dos vectores en el espacio también es un vector que tiene aplicaciones tanto en geometría como en física.

DEFINICIÓN Producto cruzado

Si v = a1i + b1j + c1k y w = a2i + b2j + c2k son dos vectores en el espacio, el producto cruzado v * w se define como el vector

$$v * w = 1b1c2 - b2c12i - 1a1c2 - a2c12j + 1a1b2 - a2b12k \qquad (1)$$

Observe que el producto cruzado v * w de dos vectores es un vector. Por esta razón, a veces se le denomina producto vectorial.

EJEMPLO 1 Encontrar un producto cruzado usando la ecuación (1)

Si v = 2i + 3j + 5k y w = i + 2j + 3k, encuentre v * w.

Solución

v * w = 13 # 3 - 2 # 52i - 12 # 3 - 1 # 52j + 12 # 2 - 1 # 32k Ecuación (1)
= 19 - 102i - 16 - 52j + 14 - 32k
= - yo - j + k

Los determinantes* pueden usarse como ayuda para calcular productos cruzados. Un determinante de 2 por 2, simbolizado por

$$\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$$

tiene el valor a1b2 - a2b1; eso es,

$$\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1b2 - a2b1$$

Un determinante de 3 por 3 tiene el valor

$$\begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ 3 & B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b1 & c1 \\ b2 & c2 \end{vmatrix} A - \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} B + \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} C$$

*Los determinantes se analizan en detalle en la Sección 11.3.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Evaluación de determinantes

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \# 2 - 1 \# 3 = 4 - 3 = 1$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & B & C \\ 1 & 3 & 5 \\ 3A & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} B & C \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & C \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & B \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 19 - 102A - 16 - 52B + 14 - 32C$

$= -A - B + C$

Ahora trabaja el problema 7

El producto cruzado de los vectores $v = a1i + b1j + c1k$ y $w = a2i + b2j + c2k$, es decir,

$$v * w = 1b1c2 - b2c12i - 1a1c2 - a2c12j + 1a1b2 - a2b12k$$

puede escribirse simbólicamente usando determinantes como

$$v * w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} b1 & c1 \\ b2 & c2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 3 Uso de determinantes para encontrar productos cruzados

Si $v = 2i + 3j + 5k$ y $w = i + 2j + 3k$, encuentre:

(a) $v * w$ (b) $w * v$ (c) $v * v$ (d) $w * w$

Solución

(a) $v * w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} i - j + k$

(b) $w * v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} i + j - k$

(c) $v * v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} 0i - 0j + 0k = 0$

(d) $w * w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} 0i - 0j + 0k = 0$

Ahora resuelve el problema 15

2 Conozca las propiedades algebraicas del producto cruzado.

Observe en los ejemplos 3(a) y (b) que $v * w$ y $w * v$ son negativos entre sí.

A partir de los ejemplos 3(c) y (d), se podría conjeturar que el producto cruzado de un vector consigo mismo es el vector cero. Estas y otras propiedades algebraicas del producto vectorial se dan a continuación.

Machine Translated by Google

TEOREMA Propiedades algebraicas del producto cruz

Si u, v y w son vectores en el espacio y si a es un escalar, entonces

$$\bullet\ u * u = 0 \tag{2}$$

$$\bullet\ u * v = -\,v * u \qquad \bullet\ (au) * v = u * (av) \qquad \bullet\ u * (v + w) = u * v + u * w \tag{3}$$

$$(u + v) * w = u * w + v * w \tag{4}$$

$$u * (v \times w) = (u \times v) * w \tag{5}$$

Demostración Aquí demostraremos las propiedades (2) y (4) y dejaremos las propiedades (3) y (5) como ejercicios (véanse los problemas 60 y 61).

Para probar la propiedad (2), sea $u = a_1 i + b_1 j + c_1 k$. Entonces

$$u * u = (a_1 i + b_1 j + c_1 k) * (a_1 i + b_1 j + c_1 k) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} k$$

$$= 0i - 0j + 0k = 0$$

Para probar la propiedad (4), sea $u = a_1 i + b_1 j + c_1 k$ y $v = a_2 i + b_2 j + c_2 k$. Entonces

$$u * (v + w) = (a_3 + b_1)c_2 - b_2(c_1 + c_2)i - (a_1 + a_2)c_2 - a_2(c_1 + c_2)j + (a_1 + a_2)b_2 - a_2(b_1 + b_2)k$$

$$= a_1 b_1 c_2 - b_2 c_1 i - a_1 a_1 c_2 - a_2 c_1 j + a_1 a_1 b_2 - a_2 b_1 k \quad \text{Aplicar (1).}$$

$$= (a_1 b_1 c_2 - b_2 c_1 i - a_1 a_1 c_2 - a_2 c_1 j + a_1 a_1 b_2 - a_2 b_1 k) + (a_1 b_1 c_2 - b_2 c_1 i - a_1 a_1 c_2 - a_2 c_1 j + a_1 a_1 b_2 - a_2 b_1 k) \tag{6}$$

Como $(au) * v = (aa_1 i + ab_1 j + ac_1 k) * v$, tenemos

$$(au) * v = (ab_1 c_2 - b_2 ac_1 i - aa_1 c_2 - a_2 ac_1 j + aa_1 b_2 - a_2 ab_1 k)$$

$$= (a_1 b_1 c_2 - b_2 c_1 i - a_1 a_1 c_2 - a_2 c_1 j + a_1 a_1 b_2 - a_2 b_1 k) + (a_1 b_1 c_2 - b_2 c_1 i - a_1 a_1 c_2 - a_2 c_1 j + a_1 a_1 b_2 - a_2 b_1 k) \tag{7}$$

Con base en las ecuaciones (6) y (7), se sigue la primera parte de la propiedad (4). La segunda parte puede demostrarse de manera similar. ■

Ahora resuelve el problema 1 7

3 Conozca las propiedades geométricas del producto cruz

TEOREMA Propiedades geométricas del producto cruz

Sean u y v vectores en el espacio.

$$\bullet\ u * v \text{ es ortogonal a u y v.} \qquad \bullet\ \|u * v\| = \|u\|\,\|v\| \tag{8}$$

$$\|u\|\,\|v\| \operatorname{sen} u, \tag{9}$$

donde u es el ángulo entre u y v. $\bullet\ \|u * v\|$

es el área del paralelogramo

teniendo u · 0 y v · 0 como lados adyacentes. (10)

$$\bullet\ u * v = 0 \text{ si y sólo si u y v son paralelos.} \tag{11}$$

Machine Translated by Google

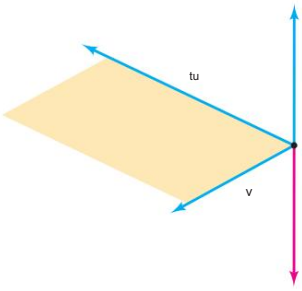


Figura 81

Prueba de propiedad (8) Sean u = a1i + b1j + c1k y v = a2i + b2j + c2k. Entonces

$$u * v = 1b1c2 - b2c12i - 1a1c2 - a2c12j + 1a1b2 - a2b12k$$

Ahora calcule el producto escalar u ~ 1u * v2.

$$u \sim 1u * v2 = 1a1i + b1j + c1k2 \# 3\ 1b1c2 - b2c12i - 1a1c2 - a2c12j + 1a1b2 - a2b12k4$$

$$= a1\ 1b1c2 - b2c12 - b1\ 1a1c2 - a2c12 + c1\ 1a1b2 - a2b12 = 0$$

Dado que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero, se deduce que u y u * v son ortogonales. De manera similar, v ~ 1u * v2 = 0, por lo que v y u * v son ortogonales. ■

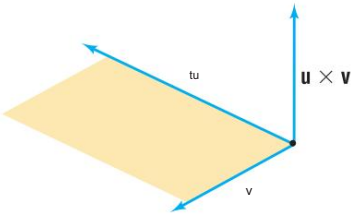


Figura 82

4 Encuentre un vector ortogonal a dos vectores dados

Mientras los vectores u y v no sean paralelos, formarán un plano en el espacio. Consulte la Figura 81. Según la propiedad (8), el vector u * v es normal a este plano. Como ilustra la Figura 81, existen esencialmente (sin tener en cuenta la magnitud) dos vectores normales al plano que contiene u y v. Se puede demostrar que el vector u * v es el determinado por el pulgar de la mano derecha cuando los otros dedos de la mano derecha están ahuecados de modo que apunten en una dirección de u a v. Consulte la Figura 82.*

EJEMPLO 4 Encontrar un vector ortogonal a dos vectores dados

Encuentre un vector que sea ortogonal a u = 3i - 2j + k y v = - i + 3j - k.

Solución Según la propiedad (8), dicho vector es u * v.

así

$$tu * v = 3\ \begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{matrix}\ 3 = 12 - 32i - 3 - 3 - 1 - 12\,4j + 19 - 22k = - i + 2j + 7k$$

El vector - i + 2j + 7k es ortogonal tanto a u como a v.

✓ Verificación: Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero.

$$u \sim 1 - i + 2j + 7k2 = 13i - 2j + k2 \sim 1 - i + 2j + 7k2 = - 3 - 4 + 7 = 0$$

$$v \sim 1 - i + 2j + 7k2 = 1 - i + 3j - k2 \sim 1 - i + 2j + 7k2 = 1 + 6 - 7 = 0$$

Ahora resuelve el problema 4 1

Se deja como ejercicio la prueba de propiedad (9). Véase el problema 62.

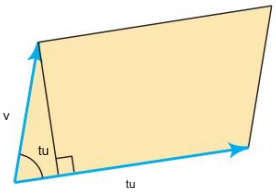


Figura 83

5 Encuentra el área de un paralelogramo

Prueba de propiedad (10) Suponga que u y v son lados adyacentes de un paralelogramo. Vea la Figura 83. Entonces las longitudes de estos lados son 7 u 7 y 7 v 7 . Si u es el ángulo entre u y v, entonces la altura del paralelogramo es 7 v 7 sen u y su área es

$$\text{Área del paralelogramo} = \text{Base} * \text{Altura} = 7\ u\ 7\ 3\ 7\ v\ 7\ \text{sen}\ u4 = \underset{c}{7\ u\ *\ v\ 7}$$

Propiedad (9) ■

EJEMPLO 5 Encontrar el área de un paralelogramo

Encuentra el área del paralelogramo cuyos vértices son P1 = 10, 0, 02, P2 = 13, - 2, 12, P3 = 1 - 1, 3, - 12 y P4 = 12, 1, 02.

*Esto es una consecuencia del uso de un sistema de coordenadas "diestro".

Machine Translated by Google

Solución Dos lados adyacentes de este paralelogramo son

$$u = \overrightarrow{P1P2} = 3i - 2j + k \quad y \quad v = \overrightarrow{P1P3} = - yo + 3j - k$$

ADVERTENCIA No todos los pares de vértices dan lugar a un lado. Por ejemplo, $\overrightarrow{P1P4}$ es una diagonal del paralelogramo ya que $\overrightarrow{P1P3} + \overrightarrow{P3P4} = \overrightarrow{P1P4}$. Además, $\overrightarrow{P2P4}$ y $\overrightarrow{P1P3}$ no son lados adyacentes; son lados paralelos.

Como u * v = - i + 2j + 7k (Ejemplo 4), el área del paralelogramo es

Área del paralelogramo = 7 u * v 7 = 21 + 4 + 49 = 254 = 326 unidades cuadradas

Ahora problema de trabajo 4 9

Prueba de propiedad (11) La prueba requiere dos partes. Si u y v son paralelos, entonces existe un escalar a tal que u = av. Entonces

$$u * v = 1av2 * v = a1v * v2 = 0$$

cc

Propiedad (4) Propiedad (2)

Si u * v = 0, entonces, por la propiedad (9), tenemos

$$7 u * v 7 = 7 u 7 7 v 7 \text{ sen } u = 0$$

Como u · 0 y v · 0, debemos tener sen u = 0, por lo que u = 0 o u = p. En cualquier caso, dado que u es el ángulo entre u y v, entonces u y v son paralelos. ■

9.7 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Verdadero o Falso Si u y v son vectores paralelos, entonces u * v = 0.
2. Verdadero o Falso Para cualquier vector v, v * v = 0.
3. Verdadero o Falso Si u y v son vectores, entonces u * v + v * u = 0.
4. Verdadero o Falso u * v es un vector paralelo a u y V.
5. Verdadero o Falso 7 u * v 7 = 7 u 7 7 v 7 cos u, donde u es el ángulo entre u y v.
6. Verdadero o Falso El área del paralelogramo que tiene u y v como lados adyacentes es la magnitud del producto vectorial de u y v.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 14, encuentre el valor de cada determinante.

7. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

En los problemas 15 a 22, encuentre (a) v * w, (b) w * v, (c) w * w y (d) v * v.

15. v = 2i - 3j + kw = 3i - 2j - k

16. v = - i + 3j + 2k w = 3i - 2j - k

17. v = i + jw = 2i + j + k

18. v = i - 4j + 2k w = 3i + 2j + k

19. v = 3i + j + 3k w = i - k

20. v = 2i - j + 2k w = j - k

21. v = 2i - 3j w = 3j - 2k

22. v = i - j - kw = 4i - 3k

En los problemas 23 a 44, utilice los vectores dados u, v y w para encontrar cada expresión.

$$u = 2i - 3j + kv = - 3i + 3j + 2k \quad w = i + j + 3k$$

23. v * w
24. u * v
25. w * v
26. v * u
27. w * w
28. v * v
29. v * 14w2
30. 13u2 * v
33. v ~ 1v * w2
31. 1 - 3v2 * w
34. u ~ 1u * v2
32. u * 12v2
35. 1u * v2 ~ w
36. u ~ 1v * w2
37. 1v * u2 ~ w
38. v ~ 1u * w2
39. 1w * w2 * v
40. u * 1v * v2

Machine Translated by Google

41. Encuentre un vector ortogonal a u y v.

42. Encuentre un vector ortogonal a u y w.

43. Encuentre un vector ortogonal a u y j + k.

44. Encuentra un vector ortogonal a u e i + j.

En los problemas 45 a 48, encuentre el área del paralelogramo con una esquina en P1 y lados adyacentes $\overrightarrow{P1P2}$ y $\overrightarrow{P1P3}$.

45. P1 = 10, 0, 02, P2 = 12, 3, 12, P3 = 1 - 2, 4, 12 46. P1 = 10, 0, 02, P2 = 11, 2, 32, P3 = 1 - 2 , 3, 02

47. P1 = 1 - 2, 0, 22, P2 = 12, 1, - 12, P3 = 12, - 1, 22 48. P1 = 11, 2, 02, P2 = 1 - 2, 3, 42, P3 = 10, - 2, 32

En los problemas 49 a 52, encuentre el área del paralelogramo con los vértices P1, P2, P3 y P4 .

49. P1 = 11, 1, 22, P2 = 11, 2, 32, P3 = 1 - 2, 3, 02,
P4 = 1 - 2, 4, 12

50. P1 = 12, 1, 12, P2 = 12, 3, 12, P3 = 1 - 2, 4, 12,
P4 = 1 - 2, 6, 12

51. P1 = 1 - 1, 1, 12, P2 = 1 - 1, 2, 22, P3 = 1 - 3, 4, - 52,
P4 = 1 - 3, 5, - 42

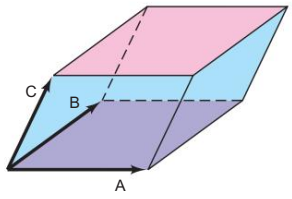
52. P1 = 11, 2, - 12, P2 = 14, 2, - 32, P3 = 16, - 5, 22,
P4 = 19,-5, 02

Aplicaciones y extensiones

53. Encuentre un vector unitario normal al plano que contenga u = i - 2j - k y v = - i + 3j - k.

54. Encuentre un vector unitario normal al plano que contenga v = 2i + 3j - k y w = - 2i - 4j - 3k.

55. Volumen de un paralelepípedo Un paralelepípedo es un prisma cuyas caras son todas paralelogramos. Sean A, B y C los vectores que definen el paralelepípedo que se muestra en la figura.
El volumen V del paralelepípedo viene dado por la fórmula V = 0 1A * B2 # C 0 .



Encuentre el volumen de un paralelepípedo si los vectores que lo definen son A = 3i - 2j + 4k, B = 2i + j - 2k y C = 3i - 6j - 2k.

56. Volumen de un paralelepípedo Consulte el problema 55. Encuentre el volumen de un paralelepípedo cuyos vectores definitorios son A = i + 6k, B = 2i + 3j - 8k y C = 8i - 5j + 6k.

57. Demuestre para los vectores u y v que

$$7\,u * v\,7^2 = 7\,u\,7^2\,7\,v\,7^2 - 1u \sim v2^2$$

[Sugerencia: Proceda como en la prueba de propiedad (4), calculando primero el lado izquierdo y luego el lado derecho.]

58. Demuestre que si u y v son ortogonales, entonces

$$7\,u * v\,7 = 7\,u\,7\,7\,v\,7$$

59. Demuestre que si u y v son vectores unitarios ortogonales, entonces u * v también es un vector unitario.

60. Probar la propiedad (3).

61. Probar la propiedad (5).

62. Probar la propiedad (9).

[Sugerencia: utilice el resultado del problema 57 y el hecho de que si u es el ángulo entre u y v, entonces u ~ v = 7 u 7 7 v 7 cos u.]

63. Problema de desafío Si v, w, u y a, b, c son vectores para los cuales

$$a \# v = b \# w = c \# u = 1$$

y

$$a \# w = a \# u = b \# v = b \# u = c \# v = c \# w = 0$$

muestra esa

$$un = \frac{w * u}{v \# 1w * u2} \qquad b = \frac{u * v}{w \# 1u * v2} \qquad c = \frac{v * w}{u \# 1v * w2}$$

64. Problema de desafío Demuestre que el vector 2v * 3w es ortogonal tanto a v como a w.

Discusión y escritura

65. Si u ~ v = 0 y u * v = 0, ¿qué puedes concluir, si es que hay algo, sobre u y v?

Conserve su conocimiento

Los problemas 66 a 75 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

66. Encuentra el valor exacto de cos-1 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b.

67. Encuentra dos pares de coordenadas polares 1r, u2, uno con r 7 0 y el otro con r 6 0, para el punto de coordenadas rectangulares 1 - 8, - 152. Exprese u en radianes.

68. Para f1x2 = 7x-1 + 5, encuentre f^{-1} 1x2.

69. Utilice propiedades de logaritmos para escribir $\log 4 \frac{2x}{z3}$ como un suma o diferencia de logaritmos. Expresar potencias como factores.

70. Encuentra el valor exacto de sec csen-1 a - $\frac{23}{2}$ hab.

Machine Translated by Google

71. Encuentra el dominio de f1x2 = $\frac{3x + 4}{x2 - 16.}$

72. Si cos u = - 8 $\frac{3}{}$, $\frac{pag}{2}$ 6 u 6 p, encuentra el valor exacto de sen 2 $\frac{tu}{}$.

73. Encuentra el área del triángulo para el cual a = 8, b = 9 y C = 60°.

74. Racionaliza el numerador: $\frac{\overline{2x - 4}}{x}$

75. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = csc-1 x de 1 a 2.

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Coordenadas polares (págs. 612 a 619)

Relación entre las coordenadas polares 1r, u2 y las coordenadas rectangulares 1x, y2 (págs. 614 y 618)	x = r cos u, y = r sen u $^{2\,r}$ = x2 + y2 , tan u = $\frac{y}{x}$, si x · 0 r = y, u = $\frac{pag}{2}$, si x = 0

Números complejos y teorema de De Moivre (págs. 636–642)

Forma polar de un número complejo (p. 637)	Si z = x + yi, entonces z = r1cos u + i sen u2, donde r Ú 0 y 0 … u 6 2p.
Forma exponencial de un número complejo (p. 638)	z = reiu , donde eiu = cos u + i sen u, u en radianes
Teorema de De Moivre (p. 640)	Si z = reiu , entonces zn = r^{ei1nu2} –, donde n Ú 1 es un número entero.
raíz enésima de un número complejo w = reiu , w · 0 (pág. 641)	zk = 1 norte $\overline{r}$ ei 11/n21u+2kp2 , k = 0,c, n - 1, donde n Ú 2 es un número entero

Vectores (págs. 645 y 655) — Una cantidad que tiene magnitud y dirección; equivalente a un segmento de línea dirigido $\overline{PQ>}$

Vector de posición (págs. 648 y 669)	Un vector cuyo punto inicial está en el origen.
Vector unitario (págs. 648, 651 y 671)	Un vector cuya magnitud es 1
Ángulo de dirección de un vector v (p. 652)	El ángulo a, 0°… a 6 360°, entre i y v
Producto escalar (págs. 660 y 671)	Si v = a1i + b1j y w = a2i + b2 j, entonces v ~ w = a1a2 + b1b2 .
Ángulo u entre dos vectores distintos de cero u y v (p. 661)	porque tu = $\frac{u \sim v}{7\,u\,7\,7\,v\,7}$, 0 … u … p
Trabajo (pág. 664)	Trabajo W = 1magnitud de la fuerza2 1distancia2 = 7 F7 7$\overline{AB>}$7 W = F # $\overline{AB>}$
Ángulos de dirección de un vector en el espacio (p. 673)	Si v = ai + bj + ck, entonces v = 7 v 7 3 1cos a2i + 1cos b2j + 1cos g2k4, donde cos a = $\frac{a}{7\ contra\ 7}$, porque b = $\frac{b}{7\ contra\ 7}$, y porque g = $\frac{C}{7\ contra\ 7}$.
Producto cruzado (p. 677)	Si v = a1i + b1j + c1k y w = a2i + b2j + c2k, entonces v * w = 3b1c2 - b2c1 4i - 3a1c2 - a2c1 4j + 3a1b2 - a2b1 4k.
Área de un paralelogramo (p. 680)	7 u * v 7 = 7 u 7 7 v 7 sen u, donde u es el ángulo entre los dos adyacentes lados u y v.

Objetivos

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
9.1	1 Trazar puntos usando coordenadas polares (p. 612)	1–3	1–3
	2 Convertir de coordenadas polares a coordenadas rectangulares (p. 614) 4 3 Convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares (p. 616) 5–7 4 Transformar ecuaciones entre formas polares y rectangulares (p. 618) 8, 9		1–3 4–6 7(a)–10(a)

Machine Translated by Google

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
9.2	1 Identificar y representar gráficamente ecuaciones polares convirtiéndolas a ecuaciones rectangulares (p. 622)	dieciséis	7(b)–10(b)
	2 Prueba de simetría de ecuaciones polares (p. 625)	7–10	11-13
	3 Graficar ecuaciones polares trazando puntos (p. 626)	7-13	11-13
9.3	1 Trazar puntos en el plano complejo (p. 636)	1	16-18
	2 Convertir un número complejo entre forma rectangular y polar forma o forma exponencial (p. 637)	2, 3	14-18
	3 Encuentra productos y cocientes de números complejos (p. 639)	4	19–21
	4 Utilice el teorema de De Moivre (p. 640)	5, 6	22-25
	5 Encuentra raíces complejas (p. 641)	7	26
9.4	1 Graficar vectores (p. 647)	1	27, 28
	2 Encuentra un vector de posición (p. 648)	2	29, 30
	3 Sumar y restar vectores algebraicamente (p. 650)	3	31
	4 Encuentra un múltiplo escalar y la magnitud de un vector (p. 650)	4	29, 30, 32–34
	5 Encuentra un vector unitario (p. 651)	5	35
	6 Encuentra un vector a partir de su dirección y magnitud (p. 652)	6	36, 37
	7 Modelo con vectores (p. 653)	8–10	59, 60
9.5	1 Encuentra el producto escalar de dos vectores (p. 660)	1	46, 47
	2 Encuentra el ángulo entre dos vectores (p. 661)	2	46, 47
	3 Determina si dos vectores son paralelos (p. 662)	3	50–52
	4 Determina si dos vectores son ortogonales (p. 662)	4	50–52
	5 Descomponer un vector en dos vectores ortogonales (p. 662)	5, 6	53, 54, 62
	6 Trabajo de cálculo (p. 664)	7	61
9.6	1 Encuentra la distancia entre dos puntos en el espacio (p. 668)	1	38
	2 Encuentra vectores de posición en el espacio (p. 669)	2	39
	3 Realizar operaciones con vectores (p. 670)	3–5	40–42
	4 Encuentra el producto escalar (p. 671)	6	48, 49
	5 Encuentra el ángulo entre dos vectores (p. 672)	7	48, 49
	6 Encuentra los ángulos directores de un vector (p. 673)	8–10	55
9.7	1 Encuentra el producto cruzado de dos vectores (p. 677)	1–3	43, 44
	2 Conocer las propiedades algebraicas del producto vectorial (p. 678)	pag. 679	57, 58
	3 Conocer las propiedades geométricas del producto cruz (p. 679)	pag. 679	56
	4 Encuentra un vector ortogonal a dos vectores dados (p. 680)	4	45
	5 Encuentra el área de un paralelogramo (p. 680)	5	56

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 a 3, trace cada punto dado en coordenadas polares y encuentre sus coordenadas rectangulares.

1. a3, pag/segundo 2. a - 2, 4p/3 segundo 3. a - 3, - pag/2 segundo

En los problemas 4 a 6 se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Encuentre dos pares de coordenadas polares 1r, u2 para cada punto, uno con r 7 0 y el otro con r 6 0. Exprese u en radianes.

4. 1 - 8, - 82 5. 1 - 23, 12 6. 1 - 5, 02

En los problemas 7 a 10, las variables r y u representan coordenadas polares. (a) Escriba cada ecuación polar como una ecuación en coordenadas rectangulares 1x, y2. (b) Identifique la ecuación y grafícela.

7. r = 2 sen u 8.r = 5 9. tu = pag/4 10.r _ 2 + 4r sen u - 8r porque u = 5

Machine Translated by Google

En los problemas 11 a 13, grafica cada ecuación polar. Asegúrese de probar la simetría.

11. r = 4 porque tu

12. r = 3 - 3 sen u

13. r = 4 - porque tu

En los problemas 14 y 15, escribe cada número complejo en forma polar y en forma exponencial.

14. - 6+ 4i

15. 4 - 3i

En los problemas 16 a 18, escribe cada número complejo en forma rectangular y traza cada uno en el plano complejo.

16. 2ei # 5p>6

17. 3acos 2p $\frac{}{3}$ + peco _ $\frac{2p}{}$ (3 segundo)

18. 0.1ei # 35p>18

En los problemas 19 a 21, encuentre zw y $\frac{z}{w}$. Escribe tus respuestas en forma polar y en forma exponencial.

19. z = cos + i pecado $\frac{4p}{9}$ $\frac{4p}{}$ / 9

w = porque $\frac{5p}{18}$ + peco $\frac{5p}{18}$

20. z = 3acos 5p $\frac{}{6}$ + peco _ $\frac{5p}{}$ (6 segundo)

w = 4acosp $\frac{}{6}$ + peco _ $\frac{pag}{}$ (6 segundo)

21. z = 5acosp $\frac{}{18}$ + peco $\frac{pag}{}$ (18 segundo)

w = porque $\frac{71p}{36}$ + peco _ $\frac{71p}{36}$

En los problemas 22 a 25, escribe cada expresión en forma rectangular x + yi y en forma exponencial reiu .

22. c 3acosp $\frac{}{9}$ + peco _ $\frac{pag}{}$ (9 dormitorios) ^{3}

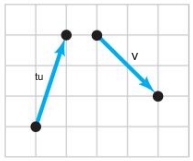
23. c 25 acos a 7p $\frac{}{12}$ b + yo peco a 7p $\frac{}{}$ (2 dormitorios) ^{3}

24. 11 + i2 8

25. 18 + 6i2 ^{4}

26. Encuentra todas las raíces quintas complejas de 32.

En los problemas 27 y 28, utilice la figura para representar gráficamente cada uno de los siguientes:



27. u + v

28. 2u + 3v

En los problemas 29 y 30, el vector v está representado por el segmento de línea dirigido PQ> . Escribe $\overline{v}$ en la forma ai + bj y encuentra 7 v 7 .

29. P = 11, - 22; Q = 13, - 62

30. P = 10, - 22; Q = 1 - 1, 12

En los problemas 31 a 35, utilice los vectores v = - 2i + j y w = 4i - 3j para encontrar:

31. v + w

32, 4v - 3w

33. 7v7 _ _

34. 7v7 + 7w7 _ _ _ _

35. Un vector unitario en la misma dirección que v.

36. Encuentre el vector v en el plano xy con magnitud 3 si el ángulo director de v es 60°.

37. Encuentra el ángulo de dirección a de v = - i + 23 j.

38. Encuentra la distancia desde P1 = 11, 3, - 22 a P2 = 14, - 2, 12.

39. Un vector v tiene un punto inicial P = 11, 3, - 22 y un punto terminal Q = 14, - 2, 12. Escribe v en la forma v = ai + bj + ck.

En los problemas 40 a 45, utilice los vectores v = 3i + j - 2k y w = - 3i + 2j - k para encontrar cada expresión.

40, 4v - 3w

41. 7 v - w 7 42. 7 v 7 - 7 w 7

43.v * w

44. v # 1v * w2 45. Encuentre un vector unitario ortogonal a v y w.

En los problemas 46 a 49, encuentre el producto escalar v ~ w y el ángulo entre v y w.

46. v = - 2i + j, w = 4i - 3j 48. v = i + j + k,

w = i - j + k

47. v = yo - 3j, w = - yo + j

49. v = 4i - j + 2k, w = yo - 2j - 3k

En los problemas 50 a 52, determine si v y w son paralelos, ortogonales o ninguno de los dos.

50. v = 2i + 3j; w = - 4i - 6j 51. v = - 2i + 2j; w = - 3i + 2j

52.v = 3i - 2j; w = 4i + 6j

En los problemas 53 y 54, descomponga v en dos vectores, uno paralelo a w y el otro ortogonal a w.

53. v = 2i + j; w = - 4i + 3j 55. Encuentra los ángulos directores del vector v = 3i - 4j + 2k.

54.v = 2i + 3j; w = 3i + j

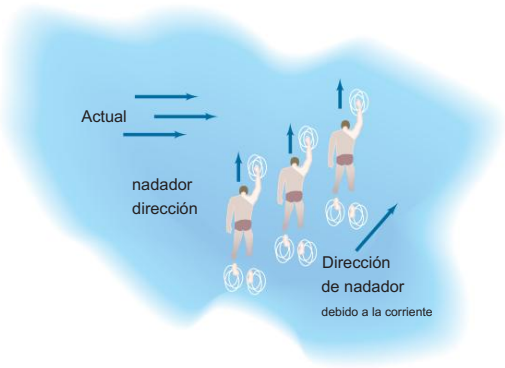
56. Encuentra el área del paralelogramo con vértices P1 = 11, 1, 12, P2 = 12, 3, 42, P3 = 16, 5, 22 y P4 = 17, 7, 52.

57. Si u * v = 2i - 3j + k, ¿qué es v * u?

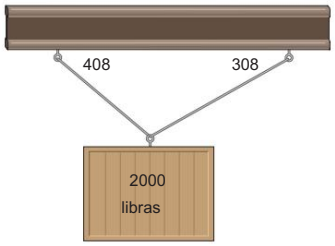
58. Supongamos que u = 3v. ¿Qué es u * v?

Machine Translated by Google

59. Velocidad y dirección reales de un nadador Un nadador puede mantener una velocidad constante de 5 millas por hora. Si el nadador cruza directamente un río cuya corriente se mueve a razón de 2 millas por hora, ¿cuál es la velocidad real del nadador? (Vea la figura.) Si el río tiene 1 milla de ancho, ¿a qué distancia río abajo llegará el nadador desde el punto directamente al otro lado del río desde el punto de partida?



60. Equilibrio estático Un peso de 2000 libras está suspendido de dos cables, como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las tensiones en los dos cables?



61. Calcular el trabajo Encuentre el trabajo realizado por una fuerza de 5 libras que actúa en la dirección de 60° con respecto a la horizontal al mover un objeto 20 pies desde 10, 02 hasta 120, 02.

62. Carga de frenado Una camioneta de mudanzas con un peso bruto de 8000 libras está estacionada en una calle con una pendiente de 5°. Encuentre la magnitud de la fuerza requerida para evitar que la camioneta ruede colina abajo. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza perpendicular a la colina?

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

En los problemas 1 a 3, trace cada punto dado en coordenadas polares.

1. a2, 3p 4 segundo
2. a3, - pag 6 segundo
3. a - 4, pag 3 segundo

4. Convierta 12, 2232 de coordenadas rectangulares a coordenadas polares 1r, u2, donde r 7 0 y 0 … u 6 2p.

En los problemas 5 a 7, convierta la ecuación polar en una ecuación rectangular. Grafica la ecuación.

5.r = 7
6. tan u = 3
7. r sen2 u + 8 sen u = r

En los problemas 8 y 9, pruebe la simetría de la ecuación polar con respecto al polo, el eje polar y la recta u = pag 2.

8.r _ 2 porque tu = 5
9. r = 5 sen u cos2 u

En los problemas 10 a 12, realice la operación dada, donde z = 2acos 17p 36 + peco _ 17p 36 b y w = 3acos 11p 90 + peco _ 11p 90 b.

Escribe la respuesta en forma polar y en forma exponencial.

10. z # w
11. w z
12. w5

13. Encuentra todas las raíces cúbicas complejas de - 8 + 813i. Luego trazarlos en el plano complejo.

En los problemas 14 a 18, P1 = 1312, 7122 y P2 = 1812, 2122.

14. Encuentre el vector de posición v igual a $\overrightarrow{P1P2}$.
15. Encuentra 7 contra 7 .
16. Encuentre el vector unitario en la dirección de v.
17. Encuentra el ángulo director de v.
18. Escribe el vector v en términos de su vertical y horizontal. componentes.

En los problemas 19 a 22, v1 = 4i + 6j, v2 = - 3i - 6j, v3 = - 8i + 4j, y v4 = 10i + 15j.

19. Encuentra el vector v1 + 2v2 - v3.
20. ¿Cuáles dos vectores son paralelos?
21. ¿Cuáles dos vectores son ortogonales?
22. Encuentra el ángulo entre los vectores v1 y v2 .

En los problemas 23 a 25, utilice los vectores u = 2i - 3j + k y v = - i + 3j + 2k.

23. Encuentra u * v.
24. Encuentra los ángulos directores de u.
25. Encuentra el área del paralelogramo que tiene u y v como lados adyacentes.

26. Se va a suspender una lámpara de araña de 1200 libras sobre un gran salón de baile; La lámpara de araña se colgará de dos cables de igual longitud cuyos extremos se sujetarán al techo, a 16 pies de distancia. La lámpara de araña colgará libremente de modo que los extremos del cable formen ángulos iguales con el techo. Si la parte superior de la lámpara debe estar a 16 pies del techo, ¿cuál es la tensión mínima que cada cable debe poder soportar?

Machine Translated by Google

Revisión acumulativa

1. Encuentra las soluciones reales, si las hay, de la ecuación.

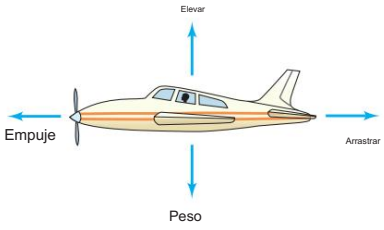
   ej2 - 9 = 1

2. Encuentra una ecuación para la recta que contiene el origen y que forma un ángulo de 30° con el eje x positivo.
3. Encuentra una ecuación para el círculo con centro en el punto 10, 12. y radio 3. Grafica este círculo.
4. ¿Cuál es el dominio de la función f1x2 = ln11 - 2x2?
5. Pruebe la simetría de la ecuación x2 + y3 = 2x4 con respecto al eje x, el eje y y el origen.
6. Grafica la función y = 0 ln x 0 .
7. Grafica la función y = 0sen x 0 .
8. Grafica la función y = sen 0 x 0 .
9. Encuentra el valor exacto de sen-1 a - $\frac{1}{2}$b.
10. Grafica las ecuaciones x = 3 e y = 4 en el mismo conjunto de coordenadas rectangulares.
11. Grafique las ecuaciones r = 2 y u = coordenadas $\frac{\text{pag}}{3}$ en el mismo conjunto de polares.
12. ¿Cuáles son la amplitud y el período de y = - 4 cos1px2?

Proyectos del Capítulo

I. Modelado del movimiento de una aeronave Cuatro fuerzas aerodinámicas actúan sobre un avión en vuelo: sustentación, peso, empuje y resistencia. Mientras un avión está en vuelo, estas cuatro fuerzas luchan continuamente entre sí. El peso se opone a la sustentación y la resistencia al empuje. Vea el diagrama a continuación. En vuelo equilibrado a velocidad constante, la sustentación y el peso son iguales, y el empuje y la resistencia son iguales.

1. ¿Qué le pasará a la aeronave si la sustentación se mantiene constante mientras se reduce el peso (por ejemplo, al quemar combustible)?
2. ¿ Qué le pasará al avión si se reduce la sustentación mientras el peso se mantiene constante?
3. ¿Qué pasará con el avión si se aumenta el empuje? mientras la resistencia se mantiene constante?
4. ¿ Qué pasará con el avión si aumenta la resistencia? mientras el empuje se mantiene constante?



En 1903 los hermanos Wright realizaron el primer vuelo controlado con motor. El peso de su avión era de aproximadamente 700 libras (lb). La Segunda Ley del Movimiento de Newton establece que fuerza = masa * aceleración 1F = ma2. Si la masa se mide en kilogramos (kg) y la aceleración en metros por segundo al cuadrado (m/s2), entonces la fuerza se medirá en newtons (N). 3Nota: 1 N = 1 kg # m/s2 .4

5. Si 1 kg = 2,205 lb, convierta el peso del Wright avión de los hermanos a kilogramos.
6. Si la aceleración debida a la gravedad es a = 9,80 m/s2 , determinar la fuerza debida al peso sobre el avión de los hermanos Wright.
7. ¿ Qué debe ser cierto acerca de la fuerza de sustentación del avión de los hermanos Wright para que despegue del suelo?
8. El peso de un Cessna 172P completamente cargado es 2400 lb. ¿Qué fuerza de sustentación se requiere para que este avión despegue del suelo?
9. El peso bruto máximo de un Boeing 787 es 560 000 lb. ¿Qué fuerza de sustentación se requiere para que este avión despegue del suelo?

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC):

II. Proyecto en Motorola La señal se desvanece debido a interferencias Se utilizan funciones trigonométricas complejas para garantizar que un teléfono celular tenga una recepción óptima mientras el usuario sube y baja por un ascensor.

III. Interés compuesto El efecto del interés compuesto continuo se analiza utilizando coordenadas polares.

IV. Ecuaciones complejas El análisis de ecuaciones complejas ilustra las conexiones entre ecuaciones complejas y reales. En ocasiones, utilizando Las ecuaciones complejas son más eficientes para demostrar teoremas matemáticos.

Machine Translated by Google

10 geometría analítica

La órbita del cometa Hale-Bopp

Las órbitas del cometa Hale-Bopp y la Tierra se pueden modelar utilizando elipses, el tema de la Sección 10.3. El proyecto basado en Internet al final de este capítulo explora la posibilidad de que el cometa Hale-Bopp colisione con la Tierra.

—Ver el Proyecto del Capítulo I basado en Internet—

Describir

10.1 Cónicas

10.2 La parábola

10.3 La elipse

10.4 La hipérbola

10.5 Rotación de Ejes; General forma de cónica

10.6 Ecuaciones polares de cónicas

10.7 Curvas Planas y Paramétricas Ecuaciones

Revisión del capítulo

Prueba de capítulo

Revisión acumulativa

Proyectos del Capítulo

Una mirada atras

En el Capítulo 1, introdujimos las coordenadas rectangulares y mostramos cómo los problemas de geometría se pueden resolver algebraicamente. Definimos un círculo geométricamente y luego usamos la fórmula de la distancia y las coordenadas rectangulares para obtener una ecuación para un círculo.

Una mirada hacia el futuro

En este capítulo, se dan definiciones geométricas para las cónicas y se utilizan la fórmula de distancia y las coordenadas rectangulares para obtener sus ecuaciones.

Históricamente, Apolonio (200 a. C.) fue uno de los primeros en estudiar las cónicas y descubrir algunas de sus interesantes propiedades. Hoy en día, las cónicas todavía se estudian debido a sus múltiples usos. Los paraboloides de revolución (parábolas que giran alrededor de sus ejes de simetría) se utilizan como colectores de señales (las antenas parabólicas que se utilizan con los radares y las antenas de televisión, por ejemplo), como colectores de energía solar y como reflectores (telescopios, proyección de luz, etc.) . Los planetas giran alrededor del Sol en órbitas aproximadamente elípticas . Las superficies elípticas se utilizan para reflejar señales como la luz y el sonido de un lugar a otro. Una tercera cónica, la hipérbola, se utiliza para determinar la ubicación de barcos o fuentes de sonido, como los rayos.

Los griegos utilizaron la geometría euclidiana para estudiar las cónicas. Sin embargo, utilizamos el más potente. métodos de geometría analítica, que utiliza tanto álgebra como geometría, para nuestro estudio de las cónicas.

En la sección 10.7, presentamos ecuaciones paramétricas, que nos permiten representar gráficas de curvas que no son la gráfica de una función, como un círculo.

Machine Translated by Google

10.1 Cónicas

OBJETIVO 1 Conocer los nombres de las cónicas (p. 689)

1 Conozca los nombres de las cónicas

La palabra cónica deriva de la palabra cono, que es una figura geométrica que se puede construir de la siguiente manera: Sean a y g dos rectas distintas que se cortan en un punto V. Mantenga fija la recta a . Ahora rota la línea g alrededor de a, manteniendo el mismo ángulo entre a y g. El conjunto de puntos barridos (generados) por la línea g se llama cono circular recto. Vea la Figura 1. La línea fija a se llama eje del cono; el punto V es su vértice; las rectas que pasan por V y forman el mismo ángulo con a que g son generadoras del cono. Cada generador es una línea que se encuentra completamente sobre el cono. El cono consta de dos partes, llamadas napas, que se cruzan en el vértice.

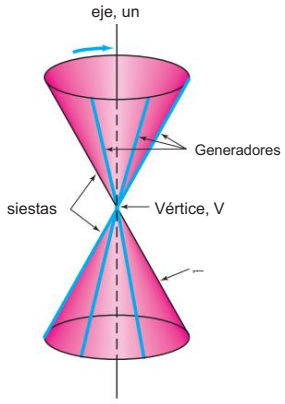


Figura 1 Cono circular recto

Las cónicas, abreviatura de secciones cónicas, son curvas que resultan de la intersección de un cono circular recto y un plano. Sólo analizamos las cónicas formadas donde el plano no contiene el vértice. Estas cónicas son círculos cuando el plano es perpendicular al eje del cono e intersecta a cada generador; elipses cuando el plano se inclina ligeramente de modo que interseca a cada generador, pero intersecta solo una nuca del cono; parábolas cuando el avión se inclina más de modo que sea paralelo a un (y solo uno) generador y cruce solo una nuca del cono; e hipérbolas cuando el plano intersecta ambas siestas. Ver Figura 2.

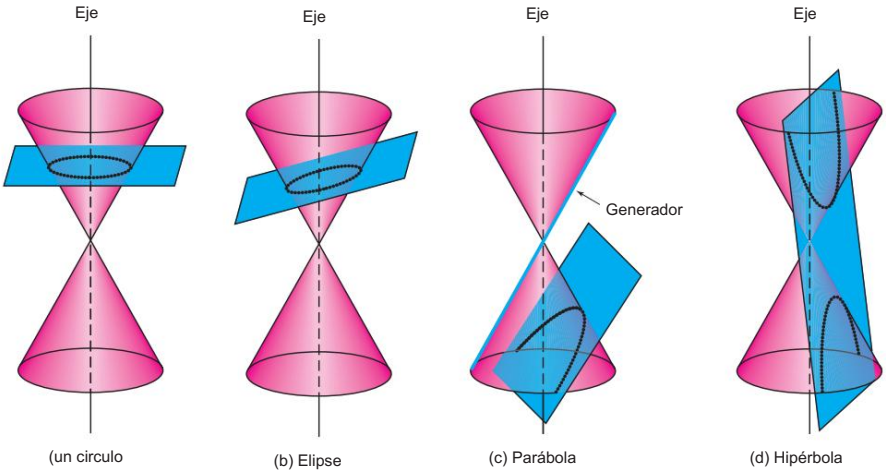


Figura 2

Si el plano contiene el vértice, la intersección del plano y el cono es una punto, una línea o un par de líneas que se cruzan. Éstas se llaman cónicas degeneradas.

Las secciones cónicas se utilizan para modelar muchas aplicaciones. Por ejemplo, las parábolas se utilizan para describir reflectores y telescopios (consulte las Figuras 14 y 15 en la página 695). Las elipses se utilizan para modelar las órbitas de los planetas y las cámaras susurrantes.
(ver páginas 705–706). Y las hipérbolas se utilizan para localizar rayos y modelar torres de enfriamiento nuclear (véanse los problemas 76 y 77 de la sección 10.4).

Machine Translated by Google

10.2 La parábola

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Fórmula de distancia (Sección 1.1, págs. 39 y 40)
- Simetría (Sección 1.2, págs. 49–53)
- Método de la raíz cuadrada (Sección A6, p. A48)
- Completar el cuadrado (Sección A.3, p. A29)
- Técnicas gráficas: transformaciones (Sección 2.5, págs. 134–143)
- Funciones cuadráticas y sus propiedades (Sección 3.3, págs. 179–188)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 696.

OBJETIVOS 1 Analizar parábolas con vértice en el origen (p. 690)

2 Analizar parábolas con vértice en (h, k) (p. 693)

3 Resolver problemas aplicados que involucran parábolas (p. 695)

En la sección 3.3 aprendimos que la gráfica de una función cuadrática es una parábola. En esta sección, damos una definición geométrica de parábola y la usamos para obtener una ecuación.

DEFINICIÓN Parábola

Una parábola es el conjunto de todos los puntos P en un plano que están a la misma distancia d de un punto fijo F que de una recta fija D. El punto F se llama foco de la parábola y la recta D es su directriz. . Como resultado, una parábola es el conjunto de puntos P para los cuales

$$d1F, P2 = d1P, D2 \qquad (1)$$

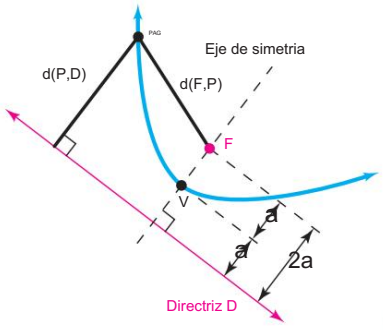


Figura 3 Parábola

La Figura 3 muestra una parábola (en azul). La recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz D es el eje de simetría de la parábola. El punto de intersección de la parábola con su eje de simetría es el vértice V.

Como el vértice V se encuentra en la parábola, debe satisfacer la ecuación (1): d1F, V2 = d1V, D2. El vértice está a medio camino entre el foco y la directriz. dejamos un
igual a la distancia d1F, V2 de F a V. Para derivar una ecuación para una parábola, usamos un sistema rectangular de coordenadas colocado de manera que el vértice V, el foco F y la directriz D de la parábola estén convenientemente ubicados.

1 Analizar parábolas con vértice en el origen

Si ubicamos el vértice V en el origen 10, 02, podemos ubicar convenientemente el foco F en el eje x o en el eje y. Primero, considere el caso donde el foco F está en el eje x positivo, como se muestra en la Figura 4. Debido a que la distancia de F a V es a, las coordenadas de F serán 1a, 02 con a 7 0. De manera similar, porque la distancia de V a la directriz D también es a, y como D es perpendicular al eje x (dado que el eje x es el eje de simetría), la ecuación de la directriz D es x = - a.

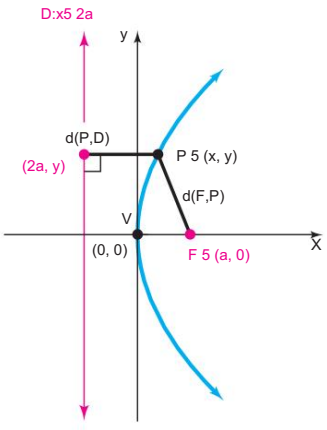


Figura 4

Ahora, si P = 1x, y2 es cualquier punto de la parábola, entonces P satisface la ecuación (1):

$$d1F, P2 = d1P, D2$$

Entonces tenemos

$$\sqrt{1x - a2^2 + 1 año - 02^2} = 0x + a 0 + \quad \text{Utilice la fórmula de distancia.}$$

$$1x - a2^2 + y2 = 1x + a2^2 \quad \text{Cuadrados de ambos lados.}$$

$$x2 - 2ax + a2 + y2 = x2 + 2ax + a2 \quad \text{Multiplicar.}$$

$$y2 = 4ax \quad \text{Simplificar.}$$

Machine Translated by Google

TEOREMA Ecuación de una parábola: Vértice en 10, 02, Foco en 1a, 02, a + 0

La ecuación de una parábola con vértice en 10, 02, foco en 1a, 02 y directriz x = - a, a 7 0, es

$$y2 = 4ax \qquad (2)$$

Recuerde que a es la distancia desde el vértice al foco de una parábola. Al graficar la parábola y2 = 4ax, es útil determinar la "apertura" encontrando los puntos que se encuentran directamente encima y debajo del foco 1a, 02. Haga esto sustituyendo x = a en y2 = 4ax, por lo que y2 = 4a # a = 4a2 , o y = {2a. El segmento de recta que une los dos puntos, 1a, 2a2 y 1a, - 2a2, se llama latus rectum; su longitud es 4a.

EJEMPLO 1 Encontrar la ecuación de una parábola y graficarla

Encuentra una ecuación de la parábola con vértice en 10, 02 y foco en 13, 02. Grafica la ecuación.

Solución

La distancia del vértice 10, 02 al foco 13, 02 es a = 3. Entonces, la ecuación de la parábola es

$$y2 = 4ax \quad \text{Ecuación (2)}$$

$$y2 = 12x \quad a \cdot 3$$

Para graficar la parábola, encuentre los dos puntos que determinan el latus recto sustituyendo x = 3. Luego

$$y2 = 12x = 12 \# 3 = 36 \quad x \cdot 3$$

$$y = \{6 \qquad \text{Resuelve para y.}$$

Los puntos 13, 62 y 13, - 62 determinan el lado recto. Estos puntos ayudan a graficar la parábola porque determinan la "apertura". Ver Figura 5.

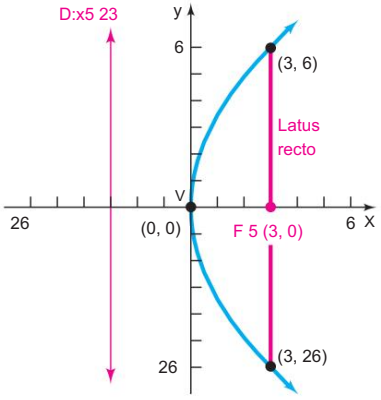


Figura 5 años^2 = 12x

Ahora resuelve el problema 2 1

COMENTARIO Para graficar la parábola y2 = 12x analizada en el ejemplo 1, grafica las dos funciones Y1 = 212x e Y2 = - 212x. Haga esto y compare lo que ve con la Figura 5.■

Al invertir los pasos utilizados para obtener la ecuación (2), se deduce que la gráfica de su foco es una ecuación de la forma y2 = 4ax es una parábola; su vértice está en 10, 02, en 1a, 02, su directriz es la recta x = - a y su eje de simetría es el eje x.

Durante el resto de esta sección, la dirección "Analizar la ecuación" significa encontrar el vértice, el foco y la directriz de la parábola y representarla gráficamente.

EJEMPLO 2 Analizando la ecuación de una parábola

Analiza la ecuación y2 = 8x.

Solución La ecuación y2 = 8x tiene la forma y2 = 4ax, donde 4a = 8, entonces a = 2. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es una parábola con vértice en 10, 02 y foco en el eje x positivo en 1a, 02 = 12, 02. La directriz es la línea vertical a = 2 unidades a la izquierda de la y- eje. Es decir, x = - 2. Los dos puntos que determinan el latus recto se obtienen sustituyendo x = 2 en la ecuación y2 = 8x. Entonces y2 = 16, entonces y = {4. Los puntos 12, - 42 y 12, 42 determinan el lado recto. Consulte la Figura 6 para ver el gráfico.

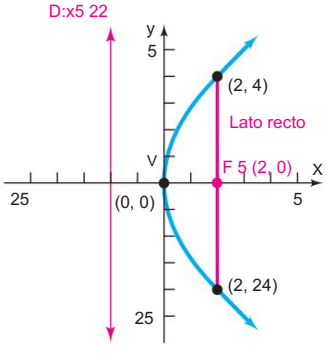


Figura 6 y 2 = 8x

Machine Translated by Google

Recuerde que obtuvimos la ecuación (2) después de colocar el foco en el eje x positivo. Colocar el foco en el eje x negativo, el eje y positivo o el eje y negativo da como resultado una forma diferente de la ecuación de la parábola. Las cuatro formas de la ecuación de una parábola con vértice en 10, 02 y foco en un eje de coordenadas a una distancia a de 10, 02 se dan en la Tabla 1, y sus gráficas se dan en la Figura 7. Observe que cada gráfica es simétrica con respecto de su eje de simetría.

tabla 1

Ecuaciones de una parábola: Vértice en 10, 02 ; Centrarse en un eje; un + 0

Vértice	Enfocar	Directora	Ecuación	Descripción
10, 02	1a, 02	x = -a	y2 = 4ax	El eje de simetría es el eje x, la parábola se abre hacia la derecha.
10, 02	1 -a, 02	x = a	y2 = -4ax	El eje de simetría es el eje x, la parábola se abre hacia la izquierda
10, 02	10, a2	y = -a	x2 = 4ay	El eje de simetría es el eje y, la parábola se abre (es cóncava hacia arriba)
10, 02	(0, -a)	y = un	x2 = -4ay	El eje de simetría es el eje y, la parábola se abre hacia abajo (es cóncava hacia abajo)

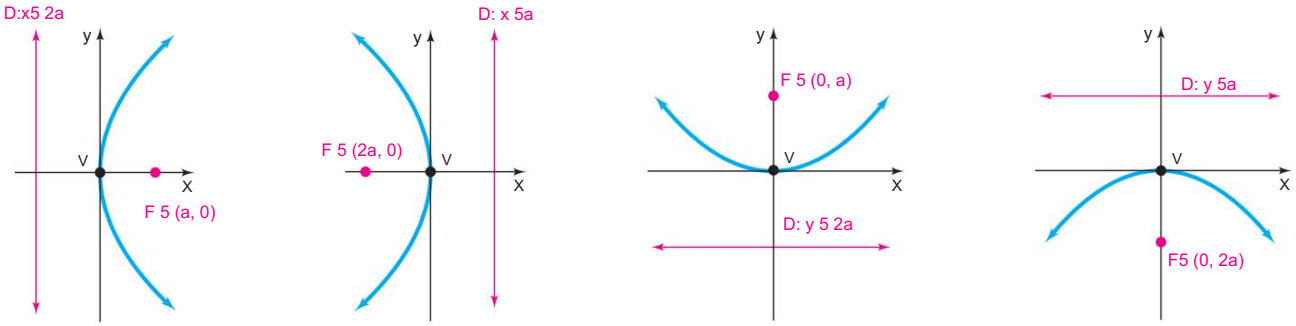


Figura 7 (a) y 2 5 4ax (por 2 5 24 hachas (c)x 2 5 4 días 2 (d) x 5 24 días

EJEMPLO 3

Analizando la ecuación de una parábola

Analiza la ecuación x2 = - 12y.

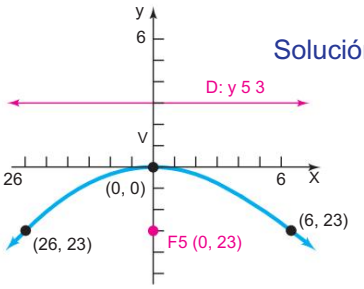


Figura 8 x 2 = -12 años

Solución

La ecuación x2 = - 12y es de la forma x2 = - 4ay, con a = 3. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es una parábola con vértice en 10, 02, foco en 10, - 32 y directriz la recta y = 3. La parábola se abre hacia abajo (es cóncava hacia abajo) y su eje de simetría es el eje y. Para obtener los puntos que definen el lado recto, sea y = - 3.
Entonces x2 = 36, entonces x = {6. Los puntos 1 - 6, -32 y 16, - 32 determinan el lado recto. Consulte la Figura 8 para ver el gráfico.

Ahora resuelve el problema 4 1

EJEMPLO 4

Encontrar la ecuación de una parábola

Encuentra la ecuación de la parábola con foco en 10, 42 y directriz la recta y = - 4. Grafica la ecuación.

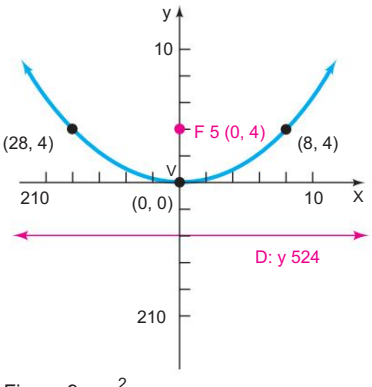


Figura 9 x 2 = 16 años

Solución Una parábola cuyo foco está en 10, 42 y cuya directriz es la recta horizontal y = - 4 tiene su vértice en 10, 02. (¿Ves por qué? El vértice está a medio camino entre el foco y la directriz.) Desde el foco está en el eje y positivo en 10, 42, la ecuación de la parábola es de la forma x2 = 4ay, con a = 4. Es decir,

$$x2 = 4ay = 4 \# 4y = 16y$$

c

un · 4

Sustituyendo y = 4 en la ecuación x2 = 16y se obtiene x2 = 64, por lo que x = {8. Los puntos 18, 42 y 1 - 8, 42 determinan el lado recto. La Figura 9 muestra la gráfica de x = 16y.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Encontrar la ecuación de una parábola

Encuentre la ecuación de una parábola con vértice en 10, 02 si su eje de simetría es el eje x y su gráfica contiene el punto a - $\frac{1}{2}$, 2b. Encuentre su foco y directriz, y grafica la ecuación.

Solución El vértice está en el origen, el eje de simetría es el eje x y la gráfica contiene un punto en el segundo cuadrante, por lo que la parábola se abre hacia la izquierda. De la Tabla 1, observe que la forma de la ecuación es

$$y2 = - 4ax$$

Porque el punto a - $\frac{1}{2}$, 2b está en la parábola, las coordenadas x = - $\frac{1}{2}$, y = 2 satisfacer y2 = - 4ax. Sustituyendo x = - $\frac{1}{2}$ y y = 2 en la ecuación conduce a

$$22 = - 4aa - 2\,\overline{b}\,x \cdot \cdot \quad \frac{1}{2}, y \cdot 2$$

$$un = 2 \qquad \text{Resuelve para a.}$$

La ecuación de la parábola es

$$y2 = - 4 \# 2x = - 8x$$

El foco es 1 - 2, 02 y la directriz es la recta x = 2. Sustituyendo x = - 2 en la ecuación y2 = - 8x da y = {4. Los puntos 1 - 2, 42 y 1 - 2, - 42 determinan el lado recto. Ver Figura 10.

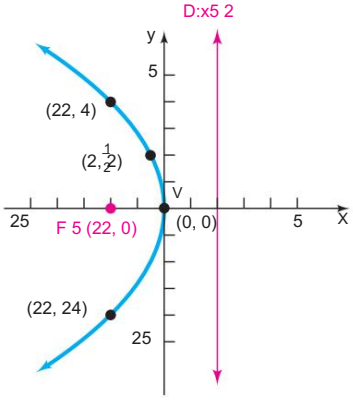


Figura 10 años2 = -8x

Ahora trabaja el problema 2 9

2 Analizar parábolas con vértice en (h, k)

Si una parábola con vértice en el origen y eje de simetría a lo largo de un eje de coordenadas se desplaza horizontalmente h unidades y luego verticalmente k unidades, el resultado es una parábola con vértice en 1h, k2 y eje de simetría paralelo a un eje de coordenadas. Las ecuaciones de tales parábolas tienen las mismas formas que las de la Tabla 1, pero con x reemplazada por x - h (el desplazamiento horizontal) y y reemplazado por y - k (el desplazamiento vertical). La Tabla 2 da las formas de las ecuaciones de tales parábolas. Las figuras 11(a) a (d) en la página 694 ilustran las gráficas para h 7 0, k 7 0.

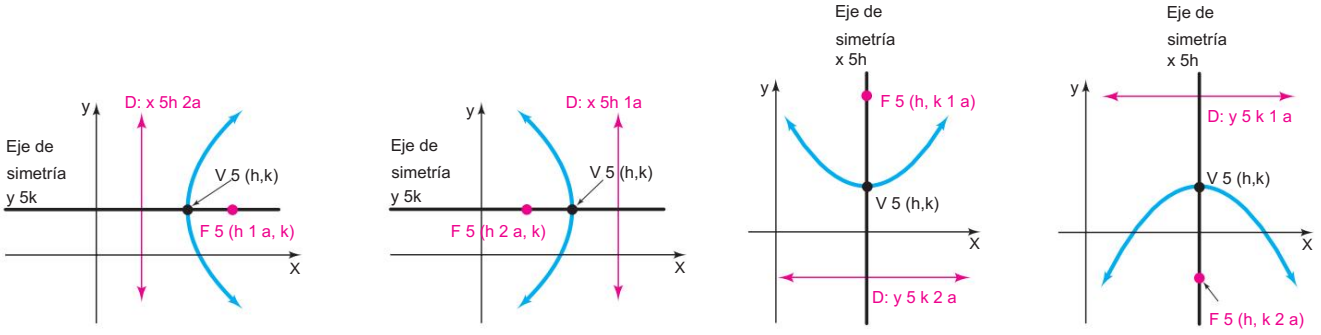
NOTA En lugar de memorizar la Tabla 2, utilice transformaciones (desplazamiento horizontal h unidades, vertical k unidades) y el hecho de que a es la distancia desde el vértice al foco para determinar la parábola. j

Tabla 2

Ecuaciones de una parábola: Vértice en 1h, k2 ; Eje de simetría paralelo a un eje de coordenadas; un + 0

Vértice	Enfocar	Directora	Ecuación	Descripción
1 hora, k2	1h + a, k2	x = h- a	1 año - k2 ^{2} = 4a1x - h2	El eje de simetría es paralelo al eje x, la parábola se abre hacia la derecha.
1 hora, k2	1h - a, k2	x = h + a	1 año - k2 ^{2} = -4a1x - h2	El eje de simetría es paralelo al eje x, la parábola se abre hacia la izquierda
1 hora, k2	1h,k+ a2	y = k- a	1x-h2 ^{2} = 4a1y - k2	El eje de simetría es paralelo al eje y, la parábola se abre (es cóncava hacia arriba)
1 hora, k2	1 h, k - a2	y = k + a	1x-h2 ^{2} = -4a1y - k2	El eje de simetría es paralelo al eje y, la parábola se abre hacia abajo (es cóncava hacia abajo)

Machine Translated by Google



(a) $(y - 2k)^2 = 4a(x - h)$ (b) $(y - 2k)^2 = -24a(x - h)$ (c) $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ (d) $(x - h)^2 = -24a(y - k)$

Figura 11

EJEMPLO 6 Encontrar la ecuación de una parábola cuyo vértice no está en el origen

Encuentra una ecuación de la parábola con vértice en 1 - 2, 32 y foco en 10, 32. Grafica la ecuación.

Solución

El vértice 1 - 2, 32 y el foco 10, 32 se encuentran ambos en la línea horizontal y = 3 (el eje de simetría). La distancia a desde el vértice 1 - 2, 32 hasta el foco 10, 32 es a = 2.
Como el foco está a la derecha del vértice, la parábola se abre hacia la derecha.
En consecuencia, la forma de la ecuación es

$$1 año - k2^2 = 4a1x - h2$$

donde 1h, k2 = 1 - 2, 32 y a = 2. Por lo tanto, la ecuación es

$$1 año - 32^2 = 4 \# 23x - 1 - 22\ 4$$

$$1 año - 32^2 = 81x + 22$$

Como el vértice está a medio camino entre el foco y la directriz, la recta x = - 4 es la directriz de la parábola. Para encontrar los puntos que definen el lado recto, sustituye x = 0 en la ecuación 1y - 32 = 81x + 22. Entonces y - 3 = {4, entonces y = ^{2} - 1
o y = 7. Los puntos 10, - 12 y 10, 72 determinan el lado recto. Ver Figura 12.

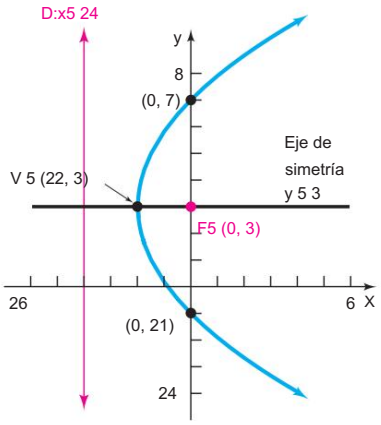


Figura 12 $1 año - 32^2 = 81x + 22$

Ahora resuelve el problema 3 1

Las ecuaciones polinomiales que involucran dos variables definen parábolas siempre que son cuadráticas en una variable y lineales en la otra.

EJEMPLO 7 Analizando la ecuación de una parábola

Analiza la ecuación x2 + 4x - 4y = 0.

Solución

Para analizar la ecuación x2 + 4x - 4y = 0, completa el cuadrado que involucra la variable x.

x2 + 4x - 4y = 0

x2 + 4x = 4y x2 Aísla los términos que involucran a x en el lado izquierdo.

+ 4x + 4 = 4y + 4 Completa el cuadrado del lado izquierdo.

$1x + 22^2 = 41$ años + 12 Factores.

La ecuación es de la forma $1x - h2^2 = 4a1y - k2$, con h = - 2, k = - 1 y a = 1. La gráfica es una parábola con vértice en 1h, k2 = 1 - 2, - 12 que se abre arriba (es cóncavo hacia arriba). El foco está en 1 - 2, 02 y la directriz es la línea y = - 2. Consulte la Figura 13.

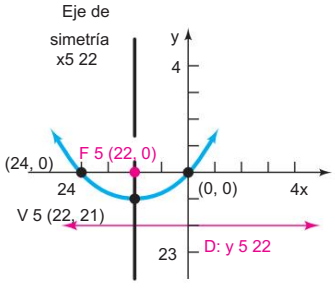


Figura 13 x2 + 4x - 4y = 0

Ahora problema de trabajo 4 9

Machine Translated by Google

3 Resolver problemas aplicados que involucran parábolas

Las parábolas ocurren en muchas aplicaciones. Por ejemplo, como se analizó en la Sección 3.4, los puentes colgantes tienen cables en forma de parábola. Las parábolas también tienen una propiedad reflectante que se utiliza en aplicaciones.

Una parábola que gira alrededor de su eje de simetría genera una superficie llamada paraboloide de revolución. Si se coloca una luz (o cualquier otra fuente emisora) en el foco de la parábola, todos los rayos que emanan de la luz se reflejarán en el paraboloide de revolución en líneas paralelas al eje de simetría de la parábola. Este principio se utiliza en el diseño de reflectores, linternas, ciertos faros de automóviles y otros dispositivos similares. Ver Figura 14.

Por el contrario, supongamos que los rayos de luz (u otras señales) emanan de una fuente distante de modo que son esencialmente paralelos. Cuando estos rayos inciden en la superficie de un espejo parabólico cuyo eje de simetría es paralelo a estos rayos, se reflejan hacia un solo punto en el foco. Este principio se utiliza en el diseño de algunos dispositivos de energía solar, antenas parabólicas y espejos utilizados en algunos tipos de telescopios.
Ver Figura 15.

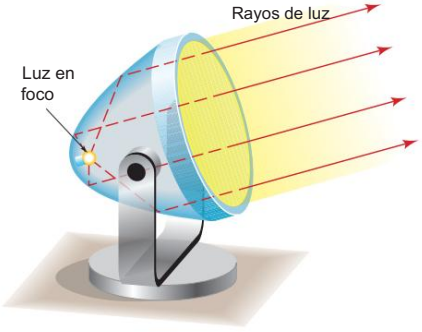


Figura 14 Reflector

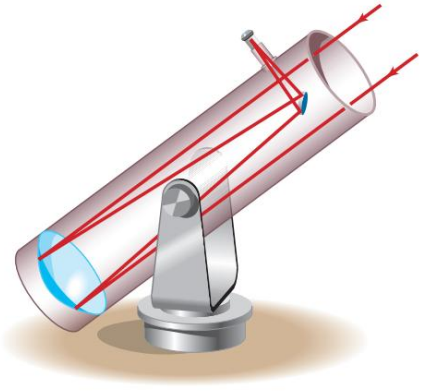
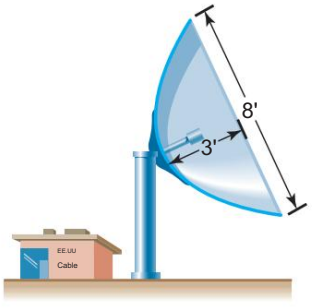


Figura 15 Telescopio

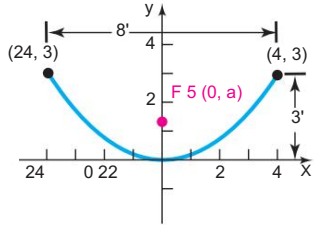
EJEMPLO 8 Antena parabólica

Una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. Las señales que emanan de un satélite inciden en la superficie del plato y se reflejan hasta un único punto, donde se encuentra el receptor. Si el plato tiene 8 pies de ancho en su abertura y 3 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición se debe colocar el receptor? Es decir, ¿dónde está el foco?

Solución La Figura 16(a) muestra la antena parabólica. En un sistema de coordenadas rectangular, dibuje la parábola utilizada para formar el plato de modo que el vértice de la parábola esté en el origen y su foco esté en el eje y positivo. Véase la Figura 16(b).



(a)



(b) Modelo de antena parabólica

Figura 16

La forma de la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4ay$$

(continuado)

Machine Translated by Google

y su foco está en 10, a2. Como 14, 32 es un punto en la gráfica, esto da

$$42 = 4a \# 3\ x2 \cdot 4ay;\ x \cdot 4,\ y \cdot 3$$

$$un = \frac{4}{3} \qquad \text{Resuelve para a.}$$

ubicarse a 3 $\frac{4}{}$ pies (1 pie, 4 pulgadas) de la base del plato. El receptor debe a lo largo de su eje de simetría.

Ahora problema de trabajo 6 9

10.2 Evalúe su comprensión

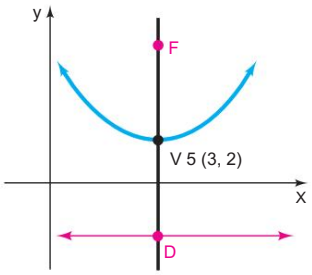
'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La fórmula para la distancia d de P1 = 1x1 , y12 a P2 = 1x2 , y22 es d = (págs. 39 y 40) _____.
2. Para completar el cuadrado de x2 - 4x, suma _____. (pág. A29)
3. Usa el método de la raíz cuadrada para encontrar las soluciones reales de $1x + 42^2 = 9$. (p. A48)
4. El punto que es simétrico con respecto al eje x al punto 1 - 2, 52 es. (págs. 49 a 53) _____
5. Para graficar $y = 1x - 32^2 + 1$, desplaza la gráfica de y = x2 a 1 unidades correctas y luego _____ unidad. (págs. 134-138)
6. La gráfica de y = 1x - 32 ejes 2 - 5 tiene vértice _____ y de simetría _____. (págs. 179-182)

Conceptos y vocabulario

7. A(n) es la colección de todos los puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto fijo que de una línea fija. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se llama línea de parábola. _____
8. Para la parábola y2 = 4ax, el segmento de recta que une los dos puntos 1a, 2a2 y 1a, - 2a2 se llama _____ _____.

Responda los problemas 9 a 12 usando la figura.

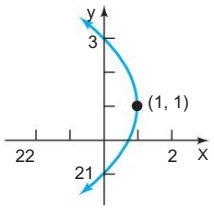


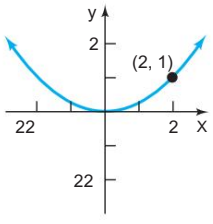
9. Opción múltiple Si a 7 0, la ecuación de la parábola es de la forma
   (a) $1y - k2^2 = 4a1x - h2$ (b) $1y - k2^2 = - 4a1x - h2$
   $1x - h2^2 = 4a1y - k2$ 10. (d) $1x - h2^2 = - 4a1y - k2$
   Las coordenadas del vértice son _____.
11. Opción múltiple Si a = 4, entonces las coordenadas del foco son . _____
    (a) 1 - 1, 22 (b) 13, - 22 (c) 17, 22 (d) 13, 62
12. Verdadero o Falso Si a = 4, entonces la ecuación de la directriz es x = 3.

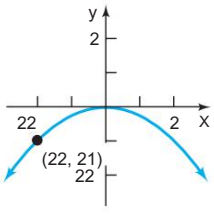
Desarrollo de habilidades

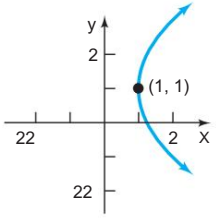
En los problemas 13 a 20 se da la gráfica de una parábola. Relaciona cada gráfica con su ecuación.

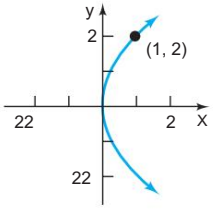
(A) y2 = 4x (C) y2 = - 4x (E) $1 año - 12^2 = 41x - 12$ (G) $1 año - 12^2 = - 41x - 12$
(B) x2 = 4y (D) x2 = - 4y (F) $1x + 12^2 = 41$ años + 12 (Al) $1x + 12^2 = - 41$ años + 12

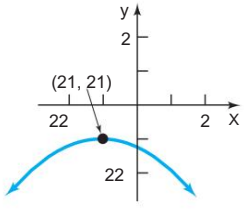
13.


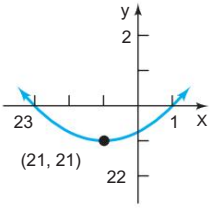
14.


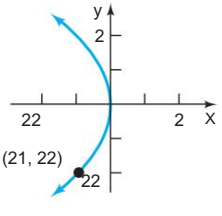
15.


dieciséis.


17.


18.


19.


20.


Machine Translated by Google

En los problemas 21 a 38, encuentre la ecuación de la parábola descrita. Encuentra los dos puntos que definen el lado recto y grafica la ecuación.

21. Foco en 14, 02 vértice en 10, 02 23.

22. Enfoque en 10, 22; vértice en 10, 02

Foco en 1 - 4, 02; vértice en 10, 02 25. Foco

24. Centrarse en 10, - 32; vértice en 10, 02

en 10, - 12; directriz de la recta y = 1

26. Centrarse en 1 - 2, 02; directriz de la recta x = 2

27. Directriz de la recta $x = -\frac{1}{2}$; vértice en 10, 02

28. Directriz de la recta $y = -\frac{1}{2}$; vértice en 10, 02

29. Vértice en 10, 02; eje de simetría el eje y; que contiene el punto 12, 32

30. Vértice en 10, 02; eje de simetría el eje x; que contiene el punto 12, 32

31. Vértice en 12, - 32; foco en 12, - 52 33.

32. Vértice en 14, - 22; centrarse en 16, - 22

Vértice en 13, 02; centrarse en 13, - 22 35.

34. Vértice en 1 - 1, - 22; centrarse en 10, - 22

centrarse en 12, 42; dirige la línea x = - 4 37. Enfócate

36. Centrarse en 1-3, 42; directriz de la recta y = 2

en 1 - 4, 42; directriz de la recta y = - 2

38. Centrarse en 1 - 3, - 22; directriz de la recta x = 1

En los problemas 39 a 56, encuentre el vértice, el foco y la directriz de cada parábola. Grafica la ecuación.

39. y2 = 8x 43.

40. x2 = 4y

41. y2 = - 16x 45.

42. x2 = - 4y

1x + 42 ^{2} = 161 años + 22

44. 1y - 22 ^{2} = 81x + 12

1y + 12 49. y2 ^{2} = - 41x - 22

46. 1x - 32 50. ^{2} = - 1 año + 12

47. 1x - 22 51. ^{2} = 41 años - 32

48. 1y + 32 52. ^{2} = 81x - 22

- 4y + 4x + 4 = 0 53. x2 - 4x = 2y

x2 + 6x - 4y + 1 = 0

y2 - 2y = 8x - 1 55. y2 +

x2 + 8x = 4y - 8

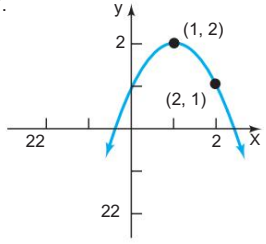
56. x2 - 4x = y + 4

54. y2 + 2y - x = 0

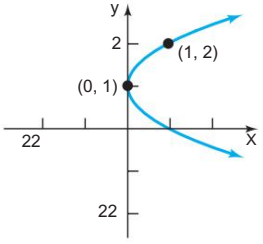
12y = - x + 1

En los problemas 57 a 64, escribe una ecuación para cada parábola.

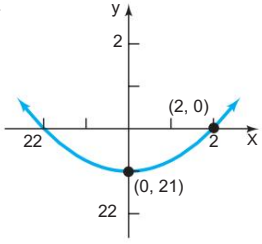
57.



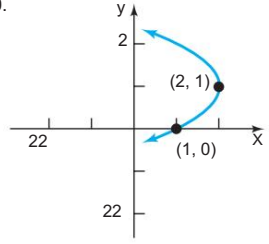
58.



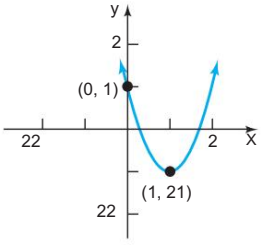
59.



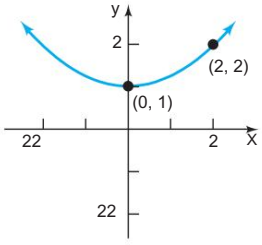
60.



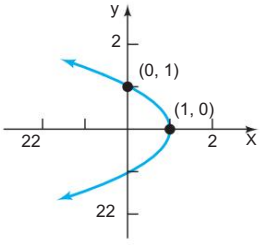
61.



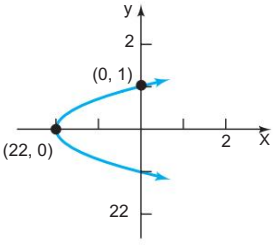
62.



63.



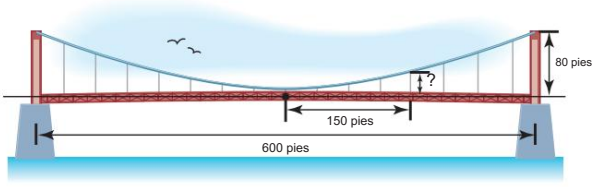
64.



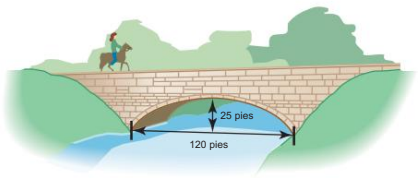
Aplicaciones y extensiones

65. Puente colgante Los cables de un puente colgante tienen forma de parábola. Las torres que sostienen el cable están a 400 pies de distancia y 100 pies de alto. Si los cables están a una altura de 10 pies a medio camino entre las torres, ¿cuál es la altura del cable en un punto a 50 pies del centro del puente?

66. Puente colgante Los cables de un puente colgante tienen forma de parábola, como se muestra en la figura. Las torres que sostienen el cable están separadas por 600 pies y tienen 80 pies de altura. Si los cables tocan la superficie del camino a mitad de camino entre las torres, ¿cuál es la altura del cable desde el camino en un punto a 150 pies del centro del puente?



67. Puente de arco parabólico Se construye un puente en forma de arco parabólico. El arco tiene una luz de 120 pies y una altura máxima de 25 pies sobre el agua. Ver la figura. Elija un sistema de coordenadas rectangular adecuado y encuentre la altura del arco a distancias de 10, 30 y 50 pies desde el centro.



68. Puente de arco parabólico Se construirá un puente en forma de arco parabólico y tendrá una luz de 100 pies. La altura del arco a una distancia de 40 pies del centro debe ser de 10 pies. Encuentra la altura del arco en su centro.

Machine Translated by Google

69. Antena parabólica Una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. Las señales que emanan de un satélite inciden en la superficie del plato y se reflejan hasta un único punto, donde se encuentra el receptor. Si el plato tiene 16 pies de ancho en su abertura y 5 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición se debe colocar el receptor?

70. Construcción de una antena parabólica Una antena parabólica de televisión por cable tiene la forma de un paraboloide de revolución. Encuentre la ubicación del receptor, que está colocado en el foco, si el plato tiene 6 pies de ancho en su abertura y 2 pies de profundidad.

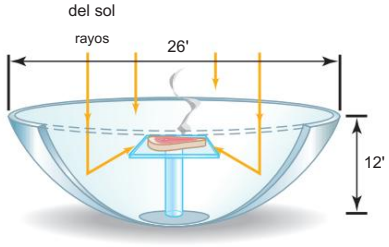
71. Construcción de una linterna El reflector de una linterna tiene la forma de un paraboloide de revolución. Su diámetro es de 4 pulgadas y su profundidad es de 1 pulgada. ¿A qué distancia del vértice se debe colocar la bombilla para que los rayos se reflejen paralelos al eje?

72. Construcción de un faro Un faro de haz sellado tiene la forma de un paraboloide de revolución. El bulbo, que se coloca en el foco, está a 1 pulgada del vértice. Si la profundidad debe ser de 2 pulgadas, ¿cuál es el diámetro del faro en su abertura?

73. Reflector Un reflector tiene forma de paraboloide de revolución. Si la fuente de luz está ubicada a 2 pies de la base a lo largo del eje de simetría y la profundidad del reflector es de 4 pies, ¿cuál debería ser el ancho de la abertura?

74. Reflector Un reflector tiene forma de paraboloide de revolución. Si la fuente de luz está ubicada a 2 pies de la base a lo largo del eje de simetría y la abertura tiene 10 pies de ancho, ¿qué profundidad debe tener el reflector?

75. Calor solar Un espejo tiene forma de paraboloide de revolución y se utilizará para concentrar los rayos del sol en su foco, creando una fuente de calor. (Vea la figura.) Si el espejo tiene 26 pies de ancho en su abertura y 12 pies de profundidad, ¿dónde se concentrará la fuente de calor?



76. Telescopio reflector Un telescopio reflector contiene un espejo con forma de paraboloide de revolución. Si el espejo tiene 4 pulgadas de ancho en su abertura y 3 pulgadas de profundidad, ¿dónde se concentrará la luz recolectada?

77. Arco de entrada A menudo se confunde un monumento en forma de arco con una forma parabólica. De hecho, es una catenaria, que tiene un Fórmula más complicada que una parábola. El arco tiene 475 pies de alto y 444 pies de ancho en su base. Complete las partes (a), (b) y (c).

(a) Encuentre la ecuación de una parábola con las mismas dimensiones. Sea x igual a la distancia horizontal desde el centro del arco.

(b) La tabla indica la altura del arco en distintos anchos; Encuentre las alturas correspondientes para la parábola encontrada en (a).

Ancho (pies)	Altura en pies)
417	100
354	237,5
248	375

(c) ¿Los datos apoyan la idea de que el arco tiene forma de parábola?

78. Demuestre que una ecuación de la forma

$$Ax2 + Ey = 0 \; A \cdot 0, E \cdot 0$$

es la ecuación de una parábola con vértice en 10, 02 y eje de simetría el eje y. Encuentre su foco y directriz.

79. Demuestre que una ecuación de la forma

$$Cy2 + Dx = 0 \; C \cdot 0, D \cdot 0$$

es la ecuación de una parábola con vértice en 10, 02 y eje de simetría el eje x. Encuentre su foco y directriz.

80. Problema de desafío Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax2 + Dx + Ey + F = 0 \; A \cdot 0$$

(a) Es una parábola si E · 0.
(b) Es una línea vertical si E = 0 y D2 - 4AF = 0.
(c) Son dos líneas verticales si E = 0 y D2 - 4AF 7 0.
(d) No contiene puntos si E = 0 y D2 - 4AF 6 0.

81. Problema de desafío Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Cy2 + Dx + Ey + F = 0 \; C \cdot 0$$

(a) Es una parábola si D · 0.
(b) Es una línea horizontal si D = 0 y E2 - 4CF = 0.
(c) Son dos líneas horizontales si D = 0 y E2 - 4CF 7 0.
(d) No contiene puntos si D = 0 y E2 - 4CF 6 0.

82. Problema de desafío Sea A cualquiera de los extremos del latus recto de la parábola y2 - 2y - 8x + 1 = 0, y sea V el vértice. Encuentra la distancia exacta de A a V. †

†Cortesía del Departamento de Matemáticas de Joliet Junior College

Conserve su conocimiento

Los problemas 83 a 92 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

83. Para x = 9y2 - 36, enumera las intersecciones y prueba la simetría.

84. Resuelve: 4x+1 = 8x-1

85. Dado tan u = - 8 $\frac{5}{-}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 u 6 p, encuentra el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas restantes.

Machine Translated by Google

86. Encuentra el valor exacto: tan c cos-1 a - 3/7 bd

87. Encuentra la distancia exacta entre los puntos a - 3, 2 b y - 5b. 1

88. Encuentra la forma estándar de la ecuación de un círculo con radio 26 y centro 1 - 12, 72.

89. En 1978, el Congreso creó un impuesto a los vehículos que consumen mucha gasolina y cuyo consumo de combustible es inferior a 22,5 millas por galón (mpg). Hoy en día, un automóvil que rinde 20 mpg tiene un impuesto de $1700 y un automóvil que rinde 15 mpg tiene un impuesto de $4500. Si el impuesto disminuye exponencialmente a medida que aumenta la economía de combustible, determine el impuesto sobre un vehículo que rinde 13 mpg a la centena de dólares más cercana.

90. Dado f1x2 = ln1x + 32, encuentre la tasa de cambio promedio de f de 1 a 5.

91. Expresa A 1 + cos 34° como una única función trigonométrica.

92. Resuelve: · x2 - 5x· - 2 = 4

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 21x2 - x1 2 2 + 1y2 - y1 2 2 2. 4 3. 5 - 7, - 16 4. 1 - 2, - 52 5.3 ; arriba 6. 13, - 52; x = 3

10.3 La elipse

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Fórmula de distancia (Sección 1.1, págs. 39 y 40)
- Completar el cuadrado (Sección A.3, p. A29)
- Intercepciones (Sección 1.2, págs. 48–49)
- Simetría (Sección 1.2, págs. 49–53)
- Círculos (Sección 1.4, págs. 72–75)
- Técnicas gráficas: transformaciones (Sección 2.5, págs. 134–143)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 706.

OBJETIVOS 1 Analizar elipses con centro en el origen (p. 699)

2 Analizar elipses con centro en (h, k) (p. 703)

3 Resolver problemas aplicados que involucran elipses (p. 705)

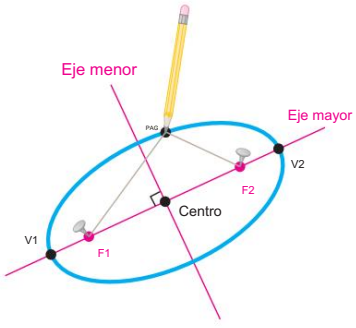


Figura 17 Elipse

DEFINICIÓN Elipse

Una elipse es el conjunto de todos los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos , es constante.

La definición contiene un medio físico para dibujar una elipse. Encuentre un trozo de cuerda (la longitud de la cuerda es la constante a la que se hace referencia en la definición). Luego toma dos chinchetas (los focos) y pégalas en un trozo de cartón de modo que la distancia entre ellas sea menor que la longitud de la cuerda. Ahora une los extremos de la cuerda a las chinchetas y, usando la punta de un lápiz, tira de la cuerda para tensarla. Vea la Figura 17. Manteniendo la cuerda tensa, gire el lápiz alrededor de las dos chinchetas. El lápiz traza una elipse, como se muestra en la Figura 17.

En la Figura 17, los focos están etiquetados como F1 y F2 . La línea que contiene los focos se llama eje mayor. El punto medio del segmento de recta que une los focos es el centro de la elipse. La línea que pasa por el centro y perpendicular al eje mayor es el eje menor.

Los dos puntos de intersección de la elipse y el eje mayor son los vértices, V1 y V2 , de la elipse. La distancia de un vértice al otro es la longitud del eje mayor. La elipse es simétrica con respecto a su eje mayor, con respecto a su eje menor y con respecto a su centro.

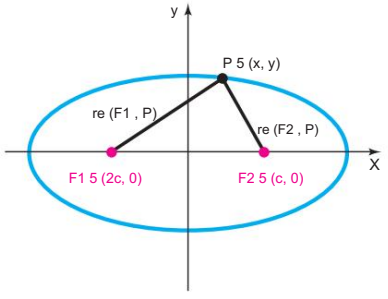


Figura 18

1 Analizar elipses con centro en el origen

Con estas ideas en mente, estamos listos para encontrar la ecuación de una elipse en un sistema de coordenadas rectangular. Primero, coloca el centro de la elipse en el origen.
En segundo lugar, coloque la elipse de modo que su eje mayor coincida con un eje de coordenadas, digamos el eje x, como se muestra en la Figura 18. Si c es la distancia desde el centro a un foco, un foco estará en F1 = 1 - c , 02 y el otro en F2 = 1c, 02.

Machine Translated by Google

Como veremos, es conveniente que 2a denote la distancia constante referida a en la definición. Entonces, si P = 1x, y2 es cualquier punto de la elipse,

$$d1F1 , P2 + d1F2 , P2 = 2a$$ La suma de las distancias desde P a los focos es igual a una constante, 2a.

$$\sqrt{1x + c2^2 + y2} + \sqrt{1x - c2^2 + y2} = 2a$$ Utilice la fórmula de distancia.

$$\sqrt{1x - c2^2 + y2} = 2a - \sqrt{1x + c2^2 + y2}$$ Aislar un radical.

$$1x - c2^2 + y2 = 4a2 - 4a21x + c2^2 + y2 + 1x + c2^2$$ Cuadre ambos lados.

$$x2 - 2cx + c2 + y2 = 4a2 - 4a21x + c2^2 + y2 + x2 + 2cx + c2 + y2$$ Multiplicar.

$$4cx - 4a2 = -4a21x + c2^2 + y2$$ Simplificar; aislar el radical.

$$cx - a2 = -a21x + c2^2 + y2$$ Divide ambos lados por 4.

$$1cx - a22^2 = a2\,3\,1x + c2^2 + y2\,4$$ Cuadre ambos lados nuevamente.

$$c2\,x2 - 2a2\,cx + a4 = a2\,1x2 + 2cx + c2 + y22$$ Multiplicar.

$$1c2 - a22x2 - a2\,y2 = a2\,c2 - a4$$ Reordena los términos.

$$1a2 - c22x2 + a2\,y2 = a2\,1a2 - c22$$ Multiplica ambos lados por ·1; factoriza a2 en el lado derecho. (1)

Para obtener puntos de la elipse que no estén en el eje mayor, debemos tener un 7 c. Para ver por qué, mire nuevamente la Figura 18. Luego

$$d1F1 , P2 + d1F2 , P2 \,7\, d1F1 , F22$$ La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

$$2a \,7\, 2c$$ d1F1, P 2 · d1F2, P 2 · 2a; d1F1, F22 · 2c

un 7c _

Porque a 7 c 7 0, esto significa $a2 \,7\, c2$, entonces a2 - c2 7 0. Sea $b2 = a2 - c2$, b 7 0. Entonces a 7 b y la ecuación (1) se pueden escribir como

$$b2\,x2 + a2\,y2 = a2b2$$

$$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2} = 1$$ Divide ambos lados por a2b2.

La gráfica de la ecuación tiene simetría con respecto al eje x, el eje y y el origen.

Como el eje mayor es el eje x, los vértices se encuentran en el eje x. Entonces los vértices satisfacen la ecuación $\frac{x2}{a2} = 1$, cuyas soluciones son x = {a. En consecuencia, los vértices de la elipse son V1 = 1 - a, 02 y V2 = 1a, 02. Las intersecciones y de la elipse, encontradas sustituyendo x = 0 en la ecuación, tienen coordenadas 10, - b2 y 10, b2. Las cuatro intersecciones, 1a, 02, 1 - a, 02, 10, b2 y 10, - b2, se utilizan para representar gráficamente la elipse.

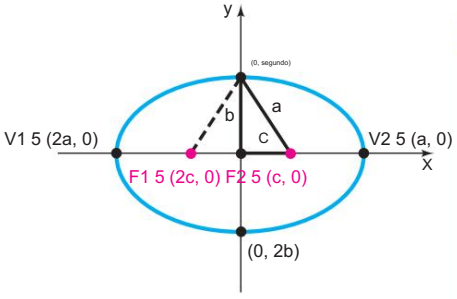


Figura 19 $\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2} = 1$, a 7 b 7 0

TEOREMA Ecuación de una elipse: Centro en 10, 02 ; Eje mayor a lo largo del eje x

Una ecuación de la elipse con centro en 10, 02, focos en 1 - c, 02 y 1c, 02, y vértices en 1 - a, 02 y 1a, 02 es

$$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2} = 1 \quad \text{donde } a \,7\, b \,7\, 0 \text{ y } b2 = a2 - c2 \qquad (2)$$

El eje mayor es el eje x. Ver Figura 19.

Machine Translated by Google

Observe en la Figura 19 los puntos 10, 02, 1c, 02 y 10, b2 forman un triángulo rectángulo. Debido a que b2 = a2 - c2 1 o b2 + c2 = a22, la distancia desde el foco en 1c, 02 hasta el punto 10, b2 es a.

Esto se puede ver de otra manera. Mira los dos triángulos rectángulos en la Figura 19. Son congruentes. ¿Ves por qué? Como la suma de las distancias desde los focos hasta un punto de la elipse es 2a, se deduce que la distancia desde 1c, 02 a 10, b2 es a.

EJEMPLO 1 Encontrar una ecuación de una elipse

Encuentre una ecuación de la elipse con centro en el origen, un foco en 13, 02 y un vértice en 1 - 4, 02. Grafique la ecuación.

Solución

La elipse tiene su centro en el origen y, dado que el foco y el vértice dados se encuentran en el eje x, el eje mayor es el eje x. La distancia desde el centro, 10, 02, a uno de los focos, 13, 02, es c = 3. La distancia desde el centro, 10, 02, a uno de los vértices, 1 - 4, 02, es a = 4. De la ecuación (2), se deduce que

$$b2 = a2 - c2 = 16 - 9 = 7$$

entonces una ecuación de la elipse es

$$\frac{x2}{\text{dieciséis}} + \frac{y2}{7} = 1$$

La figura 20 muestra el gráfico.

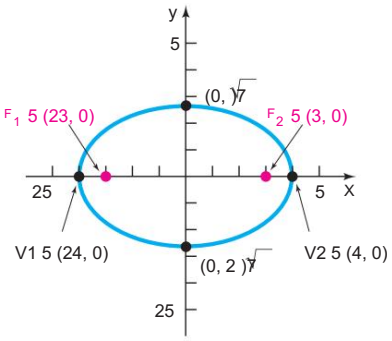


Figura 20 $\frac{x2}{\text{dieciséis}} + \frac{y2}{7} = 1$

En la Figura 20, las intersecciones de la ecuación se utilizan para representar gráficamente la elipse. Siguiente esta práctica facilita la obtención de una gráfica precisa de una elipse.

Ahora resuelve el problema 2 7

COMENTARIO Las intersecciones de la elipse también proporcionan información sobre cómo configurar el rectángulo de visualización para graficar una elipse. Para graficar la elipse

$$\frac{x2}{16} + \frac{y2}{7} = 1$$

establezca el rectángulo de visualización usando una pantalla cuadrada que incluya las intersecciones, tal vez - 4,8 … x … 4,8, - 3 … y … 3. Luego resuelva la ecuación para y:

$$\frac{x2}{\text{dieciséis}} + \frac{y2}{7} = 1$$

$$\frac{y2}{7} = 1 - \frac{x2}{\text{dieciséis}}$$ Resta de ambos lados.

$$y2 = 7\text{¢}1 - 16 \le y = \frac{x2}{\text{dieciséis}}$$ Multiplica ambos lados por 7.

{B7¢1 - 16 ≤ Utilice el método de la raíz cuadrada.

Ahora grafica las dos funciones.

$$Y1 = C7\text{¢}1 - 16 \le y\ Y2 = - C7\text{¢}1 - 16 \le$$

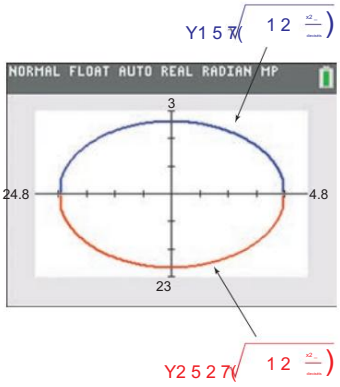


Figura 21

La Figura 21 muestra el resultado en una TI-84 Plus C.

Machine Translated by Google

Durante el resto de esta sección, la instrucción “Analizar la ecuación” significa encuentre el centro, el eje mayor, los focos y los vértices de la elipse y grafíelos.

EJEMPLO 2 Analizando la ecuación de una elipse

Analiza la ecuación 25 $\frac{x2}{}$ + $\frac{y2}{9}$ = 1.

Solución

La ecuación tiene la forma de ecuación (2), con a2 = 25 y b2 = 9. La ecuación es la de una elipse con centro en 10, 02 y eje mayor a lo largo del eje x. Los vértices están en 1 {a, 02 = 1 {5, 02. Porque b2 = a2 - c2 , esto significa

$$c2 = a2 - b2 = 25 - 9 = 16$$

Los focos están en 1 {c, 02 = 1 {4, 02. Las intersecciones en y son 10, {b2 = 10, {32. La figura 22 muestra el gráfico.

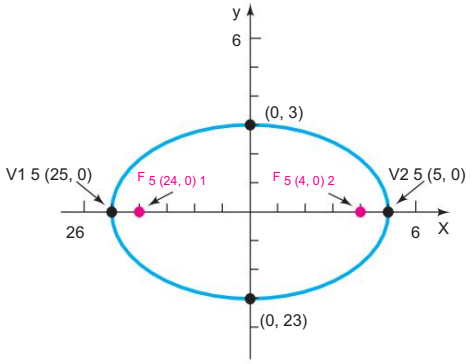


Figura 22 $\frac{x2}{25}$ + $\frac{y2}{9}$ = 1

Ahora resuelve el problema 1 7

Si el eje mayor de una elipse con centro en 10, 02 se encuentra en el eje y, los focos están en 10, -c2 y 10, c2. Siguiendo los mismos pasos que antes, la definición de una elipse conduce al siguiente resultado.

TEOREMA Ecuación de una elipse: Centro en (0, 0); Eje mayor a lo largo del eje y

Una ecuación de la elipse con centro en 10, 02, focos en 10, - c2 y 10, c2, y vértices en 10, - a2 y 10, a2 es

$$\frac{x2}{b2} + \frac{y2}{a2} = 1 \text{ donde } a \neq b \neq 0 \text{ y } b2 = a2 - c2 \qquad (3)$$

El eje mayor es el eje y.

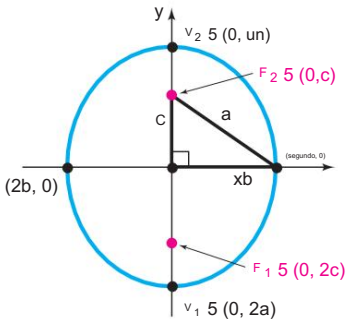


Figura 23 $\frac{x2}{b2}$ + $\frac{y2}{a2}$ = 1, a 7 b 7 0

La Figura 23 ilustra la gráfica de dicha elipse. Nuevamente, observe el triángulo rectángulo formado por los puntos en 10, 02, 1b, 02 y 10, c2, de modo que a2 = b2 + c2 1 o b2 = a2 - c22.

Mire de cerca las ecuaciones (2) y (3). Aunque se parezcan, ¡hay una diferencia! En la ecuación (2), el número mayor, a2 , está en el denominador del término @x2 , por lo que el eje mayor de la elipse está a lo largo del eje x. En la ecuación (3), el número mayor, a2 , está en el denominador del término @y2 , por lo que el eje mayor está a lo largo del eje y.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3

Analizando la ecuación de una elipse

Analiza la ecuación 9x2 + y2 = 9.

Solución

Para poner la ecuación en la forma adecuada, divide ambos lados por 9.

$$x2 + \frac{y2}{9} = 1$$

El denominador mayor, 9, está en el término y2 , por lo que, según la ecuación (3), esta es la ecuación de una elipse con centro en el origen y eje mayor a lo largo del eje y. Además, a2 = 9, b2 = 1 y c2 = a2 - b2 = 9 - 1 = 8. Los vértices están en 10, {a2 = 10, {32, y los focos están en 10, {c2 = 10, { 2122. Las intersecciones con el eje x están en 1{b, 02 = 1{1, 02. La Figura 24 muestra la gráfica.

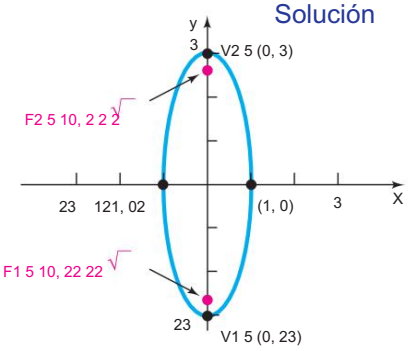


Figura 24 9x2 + y2 = 9

Ahora resuelve el problema 2 1

EJEMPLO 4

Encontrar una ecuación de una elipse

Encuentre una ecuación de la elipse que tenga un foco en 10, 22 y vértices en 10, - 32 y 10, 32. Grafique la ecuación.

Solución

Traza el foco y los vértices dados y observa que el eje mayor es el eje y. Como los vértices están en 10, - 32 y 10, 32, el centro de la elipse está en su punto medio, el origen. La distancia desde el centro, 10, 02, hasta el foco dado, 10, 22, es c = 2.

La distancia desde el centro, 10, 02, hasta uno de los vértices, 10, 32, entonces b2 = a2 - c2 = 9 - 4 = 5. La forma de la ecuación de la elipse viene dada por la ecuación (3). es a = 3.

$$\frac{x2}{b2} + \frac{y2}{a2} = 1$$

$$\frac{x2}{5} + \frac{y2}{9} = 1$$

La figura 25 muestra el gráfico.

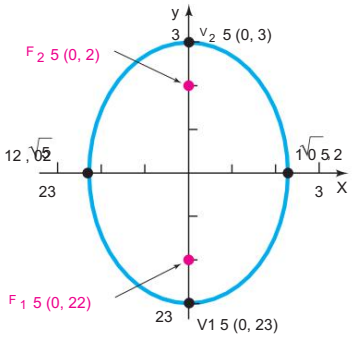


Figura 25 $\frac{x2}{5} + \frac{y2}{9} = 1$

Ahora trabaja el problema 2 9

Un círculo puede considerarse un tipo especial de elipse. Para ver por qué, sea a = b en la ecuación (2) o (3). Entonces

$$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{a2} = 1$$

$$x2 + y2 = a2$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio a. El valor de c es

$$c2 = a2 - b2 = 0$$

$$c$$

$$a \cdot b$$

Esto indica que cuanto más cerca del centro estén los dos focos de una elipse, más se parecerá la elipse a un círculo.

2 Analizar Elipses con Centro en 1h, k2

Si una elipse con centro en el origen y eje mayor coincidente con un eje de coordenadas se desplaza horizontalmente h unidades y luego verticalmente k unidades, el resultado es una elipse con centro en 1h, k2 y eje mayor paralelo a un eje de coordenadas. Las ecuaciones de tales elipses tienen las mismas formas que las dadas en las ecuaciones (2) y (3), excepto que x se reemplaza por x - h (el desplazamiento horizontal) y y se reemplaza por y - k (el desplazamiento vertical). La Tabla 3 (en la página siguiente) muestra las formas de las ecuaciones de tales elipses, y la Figura 26 muestra sus gráficas.

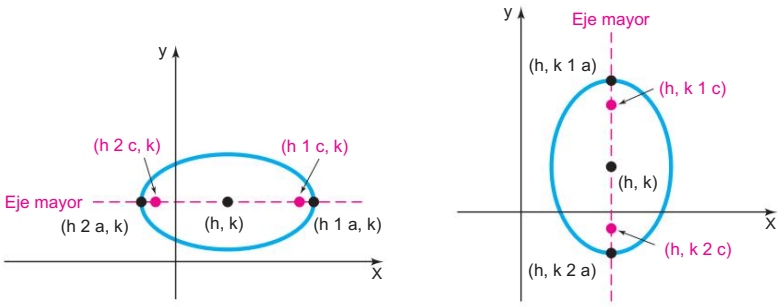
Machine Translated by Google

Tabla 3

Ecuaciones de una Elipse: Centro en 1h, k2; Eje mayor paralelo a un eje de coordenadas

Centro	Eje mayor	Focos	Vértices	Ecuación
1 hora, k2	Paralelo al eje x	1h + c, k2	1h + a, k2 1h - c, k2	$\frac{1x-h2\ a2^2}{} + \frac{1y-k2\ ^2}{b2} = 1$ 1h - a, k2 a 7 b 7 0 y b2 = a2 - c2
1 hora, k2	Paralelo al eje y	1h, k + c2	1h, k + a2 1h, k - c2	$\frac{1x-h2\ b2^2}{} + \frac{1y-k2\ ^2}{a2} = 1$ 1h, k - a2 a 7 b 7 0 y b2 = a2 - c2

NOTA En lugar de memorizar la Tabla 3, utilice transformaciones (desplazamiento horizontal h unidades, vertical k unidades), junto con el hecho de que a representa la distancia desde el centro a los vértices, c representa la distancia desde el centro a los focos y b2 = a2 - c2 (o c2 = a2 - b2). j



(a) $\frac{(x\ 2h)^2}{a2} 1 \frac{(y\ 2k)^2}{b2} 5 1$ (b) $\frac{(x\ 2h)^2}{b^2} 1 \frac{(y\ 2k)^2}{a2} 5 1$

Figura 26

EJEMPLO 5 Encontrar una ecuación de una elipse, cuyo centro no está en el origen

Encuentra una ecuación de la elipse con centro en 12, - 32, un foco en 13, - 32 y un vértice en 15, - 32. Grafica la ecuación.

Solución

El centro está en 1h, k2 = 12, - 32, por lo que h = 2 y k = - 3. Tenga en cuenta que el centro, el foco y el vértice se encuentran en la recta y = - 3. Por lo tanto, el eje mayor es paralelo a el eje x. La distancia desde el centro 12, -32 hasta un foco 13, -32 es c = 1; la distancia desde el centro 12, - 32 hasta un vértice 15, - 32 es a = 3. Entonces b2 = a2 - c2 = 9 - 1 = 8. La forma de la ecuación es

$$\frac{1x - h2\ ^2}{a2} + \frac{1y - k2\ ^2}{b2} = 1$$

$$\frac{1x - 22\ ^2}{9} + \frac{1\text{ año} + 32\ ^2}{8} = 1 \text{ h} \cdot 2, \text{ k} \cdot -3, \text{ a2} \cdot 9, \text{ b2} \cdot 8$$

El eje mayor es paralelo al eje x, por lo que los vértices están a = 3 unidades a la izquierda y derecha del centro 12, - 32. Por lo tanto, los vértices son

V1 = 12 - 3, - 32 = 1 - 1, - 32 y V2 = 12 + 3, - 32 = 15, - 32

Tenga en cuenta que el vértice 15, - 32 concuerda con la información dada en el problema.

Como c = 1 y el eje mayor es paralelo al eje x, los focos están 1 unidad a la izquierda y derecha del centro. Por tanto, los focos son

F1 = 12 - 1, - 32 = 11, - 32 y F2 = 12 + 1, - 32 = 13, - 32

Finalmente, usa el valor de b = 212 para encontrar los dos puntos arriba y debajo del centro.

$$12, - 3 - 2\sqrt{22} \text{ y } 12, - 3 + 2\sqrt{22}$$

Usa estos dos puntos y los vértices para obtener la gráfica. Ver Figura 27.

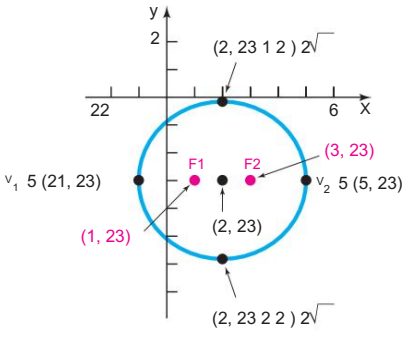


Figura 27 $\frac{1x - 22\ 9^2}{} + \frac{1\text{ año} - 32\ ^2}{8} = 1$

Ahora resuelve el problema 5 5

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 Analizando la ecuación de una elipse

Solución

Analiza la ecuación 4x2 + y2 - 8x + 4y + 4 = 0.

Completa los cuadrados en x y en y.

$$4x2 + y2 - 8x + 4y + 4 = 0$$

$$4x2 - 8x + y2 + 4y = - 4$$ Variables similares a grupos; Coloque la constante en el lado derecho.

$$41x2 - 2x2 + 1y2 + 4y2 = - 4$$ Factoriza 4 del primero dos términos.

$$41x2 - 2x + 12 + 1y2 + 4y + 42 = - 4 + 4 + 4$$ Completa cada cuadrado.

$$41x - 12 \quad ^{2} + 1 \text{ año} + 22 \quad ^{2} = 4$$ Factor.

$$1x - 12 \quad ^{2} + \frac{1 \text{ año} + 22}{4} \quad ^{2} = 1$$ Divide ambos lados por 4.

Esta es la ecuación de una elipse con centro en 11, - 22 y eje mayor paralelo al eje y. Como a2 = 4 y b2 = 1, tenemos c2 = a2 - b2 = 4 - 1 = 3. Los vértices están en 1h, k { a2 = 11, - 2 { 22, o 11, - 42 y 11, 02. Los focos están en 1h, k { c2 = 11, - 2 { 132, o 11, - 2 - 132 y 11, - 2 + 132. La Figura 28 muestra el gráfico.

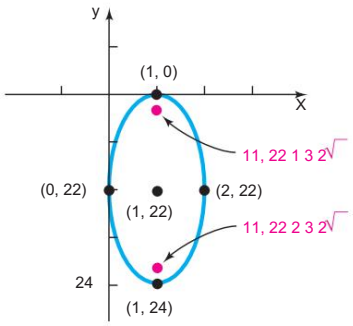


Figura 28
4x2 + y2 - 8x + 4y + 4 = 0

Ahora problema de trabajo 4 7

3 Resolver problemas aplicados que involucran elipses

Las elipses se encuentran en muchas aplicaciones en ciencia e ingeniería. Por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas, con la posición del Sol en un foco.
Ver Figura 29.

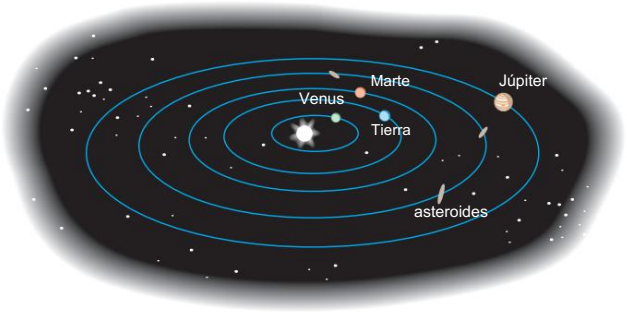


Figura 29 Órbitas elípticas

Los puentes de piedra y hormigón suelen tener forma de arcos semielípticos. Elíptico
Los engranajes se utilizan en maquinaria cuando se requiere una velocidad de movimiento variable.

Las elipses también tienen una interesante propiedad de reflexión. Si se coloca una fuente de luz (o sonido) en un foco, las ondas transmitidas por la fuente se reflejarán en la elipse y se concentrarán en el otro foco. Este es el principio detrás de las galerías susurrantes, que son habitaciones diseñadas con techos elípticos. Una persona parada en un foco de la elipse puede susurrar y ser escuchada por una persona parada en el otro foco, porque todas las ondas sonoras que llegan al techo se reflejan hacia la otra persona.

EJEMPLO 7 Una galería susurrante

La galería de susurros del Museo de Ciencia e Industria de Chicago se puede modelar mediante la mitad superior de una elipse tridimensional, llamada elipsoide .
La galería tiene 47,3 pies de largo. La distancia desde el centro de la habitación hasta los focos es de 20,3 pies. Encuentra una ecuación que describa la forma de la habitación. ¿Qué altura tiene la habitación en su centro?

Fuente: Sitio web del Museo de Ciencia e Industria de Chicago; www.msichicago.org

Machine Translated by Google

Solución

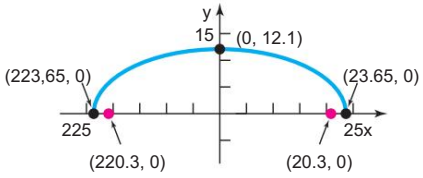


Figura 30 Modelo de galería susurrante

Configure un sistema de coordenadas rectangular de modo que el centro de la elipse esté en el origen y el eje mayor esté a lo largo del eje x. La ecuación de la elipse es

$$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2} = 1$$

Como la longitud de la habitación es 47,3 pies, la distancia desde el centro de la habitación hasta 47,3

cada vértice (el final del cuarto) será = 23.65 pies; entonces a = 23,65 pies. El

La distancia desde el centro de la habitación a cada foco es c = 20,3 pies. Ver Figura 30.
Porque b2 = a2 - c2 , esto significa que b2 = 23,652 - 20,32 = 147,2325. Un

La ecuación que describe la forma de la habitación está dada por

$$\frac{x2}{23.652} + \frac{y2}{147.2325} = 1$$

La altura de la habitación en su centro es b = 1147,2325 ≈ 12,1 pies.

Ahora problema de trabajo 7 1

10.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La distancia d desde P1 = 12, - 52 a P2 = 14, - 22 es.
re = _____ (págs. 39 y 40)

2. Para completar el cuadrado de x2 - 3x, _____ . (pág. A29)
suma 3. Encuentra las intersecciones de la ecuación y2 = 16 - 4x2 .
(págs. 48 y 49)

4. El punto simétrico con respecto al eje y al punto . (págs. 49 a 53)
1 - 2, 52 es _____

5. Para graficar y = 1x + 12 2 - 4, desplaza la gráfica de y = x2 a
el _____ _____ unidad(es) y luego _____ _____ unidades).
(izquierda derecha) (arriba/abajo)
(págs. 134-138)

6. La ecuación estándar de un círculo con centro en 12, - 32 y .
radio 1 es _____(págs. 72–75)

Conceptos y vocabulario

7. A(n) es el conjunto de todos los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.

8. Opción múltiple Para una elipse, los focos se encuentran en una línea llamada el _____ .
(a) eje menor (c) (b) eje mayor
la directriz (d) lado recto

9. Para la elipse $\frac{x2}{4} + \frac{y2}{25} = 1$, los vértices son los puntos
_____ y _____ .

10. Para la elipse 25 $\frac{x2}{} + \frac{y2}{} = 1$, el valor de a es 9 _____ , el
el valor de b es _____ , y el eje mayor es el _____ -eje.

11. Si el centro de una elipse es 12, - 32, el eje mayor es paralelo al eje x y la distancia desde el centro de la elipse a un vértice es a = 4 unidades, entonces las coordenadas de los vértices son _____ y _____ .

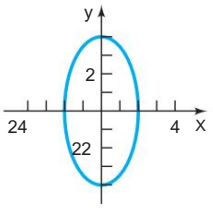
12. Opción múltiple Si los focos de una elipse son 1 - 4, 42 y 16, 42, entonces las coordenadas del centro de la elipse son (a) 11, _____.
42 (c) 11, (b) 14, 12
02 (d) 15, 42

Desarrollo de habilidades

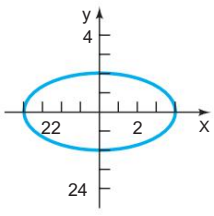
En los problemas 13 a 16 se da la gráfica de una elipse. Relaciona cada gráfica con su ecuación.

(A) $\frac{x2}{4} + y2 = 1$ (B) x2 + 4 $\frac{y2}{} = 1$ (C) $\frac{x2}{} + \frac{y2}{4} = 1$ (D) $\frac{x2}{4} + \frac{y2}{} = 1$

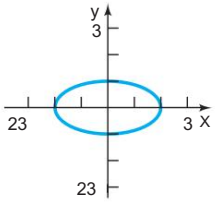
13.

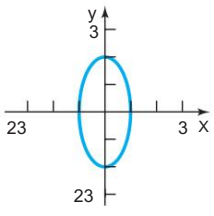


14.



15.





Machine Translated by Google

En los problemas 17 a 26, analice cada ecuación. Es decir, encuentra el centro, los vértices y los focos de cada elipse y grafica.

17. $\frac{x2}{25} + \frac{y2}{4} = 1$ 18. $\frac{x2}{9} + \frac{y2}{4} = 1$ 19. $x2 + \frac{y2}{16} = 1$ 20. $\frac{x2}{9} + \frac{y2}{25} = 1$ 21. $4x2 + y2 = 16$

22. $x2 + 9y2 = 18$ 23. $4y2 + 9x2 = 36$ 24. $4y2 + x2 = 8$ En 25. $x2 + y2 = 4$ 26. $x2 + y2 = 16$

los problemas 27 a 38, encuentre una ecuación para cada elipse. Grafica la ecuación.

27. Centro a las 10, 02; centrarse en el 13, 02; vértice en 15, 02

28. Centro a las 10, 02; centrarse en 1 - 1, 02; vértice en 13, 02

29. Centro en 10, 02; centrarse en 10, - 42; vértice en 10, 52 31. Focos en 10, {22; la longitud del eje mayor es 8 33. Enfoque en 10, - 42; vértices en 10, {82 35. Vértices en 1 {4, 02; Las intersecciones en el eje y son {1 37. Los vértices en 1 {5, 02; c = 2 En los

30. Centro a las 10, 02; centrarse en 10, 12; vértice en 10, - 22

32. Focos en 1 {2, 02; La longitud del eje mayor es 6.

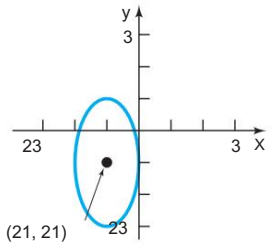
34. Centrarse en 1 - 4, 02; vértices en 1 {5, 02

36. Focos en 10, {32; las intersecciones x son {2

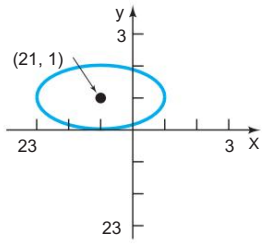
38. Centro a las 10, 02; vértice en 10, 42; segundo = 1

problemas 39 a 42, encuentre una ecuación para cada elipse.

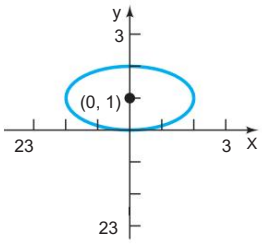
39.



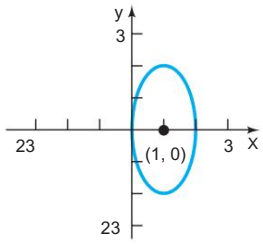
40.



41.



42.



En los problemas 43 a 54, analice cada ecuación; es decir, encuentre el centro, focos y vértices de cada elipse. Grafica cada ecuación.

43. $\frac{1x + 42\ 9^2}{} + \frac{1\text{ año} + 22\ ^2}{4} = 1$ 44. $\frac{1x - 32\ 4^2}{} + \frac{1\text{ año} + 12\ ^2}{9} = 1$ 45. $91x - 32\ ^2 + 1\text{ año} + 22\ ^{2 = 18}$

46. $1x + 52 + 41y - 42$ 49. $4x2\ ^{2 = 16}$ + 3y2 + 8x - 6y = 5 52. 9x2 + 4y2 - 18x + 16y - 11 = 0

47. $x2 + 4x + 4y2 - 8y + 4 = 0$ 50. $2x2 +$ 3y2 - 8x + 6y + 5 = 0 53. 9x2 + y2 - 18x = 0

48. $x2 + 3y2 - 12y + 9 = 0$ 51. $x2 + 9y2 + 6x - 18y + 9 = 0$ 54. $4x2 + y2 + 4y = 0$

En los problemas 55 a 64, encuentre una ecuación para cada elipse. Grafica la ecuación.

55. Centro a las 12, - 22; vértice en 17, - 22; foco en 14, - 22 56. Centro en 1 - 3, 12; vértice en 1 - 3, 32; centrarse en 1 - 3, 02

57. Focos en 11, 22 y 1 - 3, 22; vértice en 1 - 4, 22 58. Vértices en 14, 32 y 14, 92; centrarse en 14, 82

59. Vértices en 12, 52 y 12, - 12; c = 2 60. Focos en 15, 12 y 1 - 1, 12; la longitud del eje mayor es 8 61. Centro en 11, 22; centrarse en las 11, 42; contiene el punto 12, 22 62. Centro en 11, 22; centrarse en 14, 22; contiene el punto 11, 32

63. Centro en 11, 22; vértice en 11, 42; contiene el punto 11 + 23, 32 64. Centro en 11, 22; vértice en 14, 22; contiene el punto 11, 52

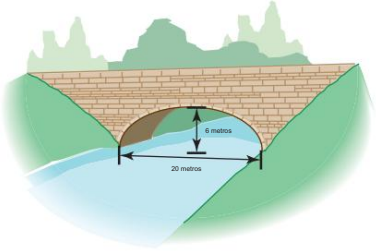
En los problemas 65 a 68, grafique cada función. Asegúrate de etiquetar todas las intersecciones. [Sugerencia: observe que cada función es media elipse.]

65. $f1x2 = 29 - 9x2$ 66. $f1x2 = 216 - 4x2$ 67. $f1x2 = - 24 - 4x2$ 68. $f1x2 = - 264 - 16x2$

Aplicaciones y Extensiones

69. Puente de arco semielíptico El arco de un puente es una semielipse con un eje mayor horizontal. El tramo es de 30 pies y la parte superior del arco está a 10 pies por encima del eje mayor. El camino es horizontal y está a 2 pies por encima de la parte superior del arco. Encuentre la distancia vertical desde la calzada hasta el arco a intervalos de 5 pies a lo largo de la calzada.

70. Puente de arco semielíptico Un arco con la forma de la mitad superior de una elipse se utiliza para sostener un puente que atravesará un río 36 metros.



ancho. El centro de el arco está a 9 metros sobre el centro del río. (Vea la figura.) Escriba una ecuación para la elipse en la que El eje x coincide con el nivel del agua y el eje y pasa por el centro del arco.

71. Galería de los susurros Se diseñará una sala de 100 pies de largo como una galería de los susurros. Si los focos están ubicados a 30 pies del centro, ¿qué altura tendrá el techo en el centro?

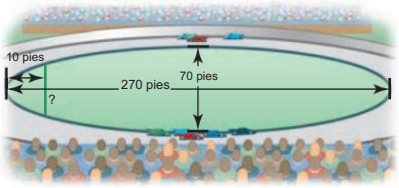
72. Galería de susurros Jim, parado en un foco de una galería de susurros, está a 6 pies de la pared más cercana. Su amigo está parado en el otro foco, a 100 pies de distancia. ¿Cuál es la longitud de esta galería de susurros? ¿Qué altura tiene su techo elíptico en el centro?

73. Puente de arco semielíptico Se construirá un puente en forma de arco semielíptico y tendrá una luz de 100 pies. La altura del arco, a una distancia de 40 pies del centro, será de 10 pies. Encuentre la altura del arco en su centro.

Machine Translated by Google

74. Puente de arco semielíptico Un puente se construye en forma de arco semielíptico. El puente tiene una luz de 160 pies y una altura máxima de 20 pies. Elija un sistema de coordenadas rectangular adecuado y encuentre la altura del arco a una distancia de 40 pies del centro.

75. Diseño de Hipódromos Consultar figura. Una pista de carreras tiene forma de elipse y mide 270 pies de largo y 70 pies de ancho. ¿Cuál es el ancho a 10 pies de un vértice?



76. Puente de arco semielíptico El arco de un puente sobre una carretera tiene la forma de media elipse. La parte superior del arco está a 20 pies sobre el nivel del suelo (el eje mayor). La carretera tiene cuatro carriles, cada uno de 12 pies de ancho; una franja de seguridad central de 8 pies de ancho; y dos franjas laterales, cada una de 4 pies de ancho. ¿Cuál debería ser la luz del arco (la longitud de su eje mayor) si la altura a 28 pies desde el centro debe ser de 13 pies?

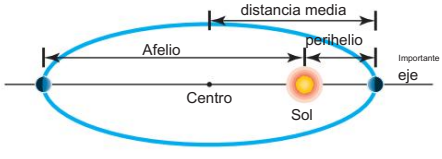
77. Instalación de un tubo de ventilación Un propietario está instalando una chimenea que tiene un tubo de ventilación de 4 pulgadas de radio. Necesita hacer un agujero elíptico en su techo para acomodar la tubería. Si la inclinación de su techo $\frac{5}{4}$ (un aumento de 5, una carrera de 4), ¿cuáles son las dimensiones del agujero?

Fuente: www.doe.virginia.gov

78. Volumen de una pelota de fútbol Una pelota de fútbol tiene la forma de un esferoide alargado, que es simplemente un sólido que se obtiene al girar elipse una $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con respecto a su eje mayor. Una NFL inflada El fútbol tiene un promedio de 11,125 pulgadas de largo y 28,25 pulgadas de circunferencia central. Si el volumen de un esferoide alargado es $\frac{4}{3}\pi ab^2$, ¿Cuánto aire contiene la pelota de fútbol? (Descuido espesor del material.)

Fuente: nfl.com

En los problemas 79 a 83, utilice el hecho de que la órbita de un planeta alrededor del Sol es una elipse, con el Sol en uno de sus focos. El afelio de un planeta es su mayor distancia al Sol y el perihelio es su distancia más corta. La distancia media de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica. Ver la figura.



79. Órbita elíptica La distancia media de un planeta a su estrella es de 73 millones de millas. Si la apoapsis del planeta mide 75,5 millones de millas, ¿cuál es la periapsis? Escribe una ecuación para la órbita del planeta alrededor de la estrella.

80. Marte La distancia media entre Marte y el Sol es de 142 millones de millas. Si el perihelio de Marte mide 128,5 millones de millas, ¿cuál es el afelio? Encuentre una ecuación para la órbita de Marte alrededor del Sol.

81. Órbita elíptica La apoapsis de un planeta mide 484 millones de millas. Si la estrella está a 30,6 millones de millas del centro de la órbita, ¿cuál es el periapsis? ¿Cuál es la distancia media? Escribe una ecuación para la órbita del planeta alrededor de la estrella.

82. Plutón El perihelio de Plutón es de 4551 millones de millas y la distancia desde el centro de su órbita elíptica al Sol es de 897,5 millones de millas. Encuentra el afelio de Plutón. ¿Cuál es la distancia media de Plutón al Sol? Encuentre una ecuación para la órbita de Plutón alrededor del Sol.

83. Órbita elíptica Un planeta orbita una estrella en una órbita elíptica con la estrella ubicada en un foco. El perihelio del planeta es de 7 millones de millas. La excentricidad e de una sección cónica es $e = \frac{c}{a}$.

Si la excentricidad de la órbita es 0,65, encuentre el afelio del planeta.

84. Un rectángulo está inscrito en una elipse con un eje mayor de 14 metros de longitud y un eje menor de 4 metros de longitud. Encuentra el área máxima de un rectángulo inscrito en la elipse. Redondea tu respuesta a dos cifras decimales.†

85. Litotricia La litotricia extracorpórea por ondas de choque es un procedimiento que utiliza ondas de choque para fragmentar cálculos renales sin necesidad de cirugía. Usando un reflector elíptico, se coloca un generador de ondas de choque en un foco y el cálculo renal en el otro foco. Las ondas de choque atraviesan una columna de agua y desintegran el cálculo, permitiendo que salga del cuerpo de forma natural. Si la ecuación de la

la elipse formada por el reflector es $324\frac{x^2}{\quad} + \frac{y^2}{100?} = 1$, ¿a qué distancia de

¿Para el cálculo renal es necesario colocar el generador de ondas de choque? (Las unidades están en centímetros).

86. Entrenador elíptico Los pedales de una máquina de ejercicios elíptica recorren una trayectoria elíptica mientras el usuario hace ejercicio. Si la longitud de la zancada (longitud del eje mayor) de una máquina es de 20 pulgadas y el desplazamiento vertical máximo del pedal (longitud del eje menor) es de 9 pulgadas, encuentre la ecuación de la trayectoria del pedal, suponiendo que está centrada en el origen.

87 Problema de desafío Considere el círculo $1x - 22^2 + y2 = 1$ y la elipse con vértices en 12, 02 y 16, 02 y un foco en 14 + 23, 02.

Encuentra los puntos de intersección del círculo y la elipse.†

88. Problema de desafío Para la elipse, x2 + 5y2 = 20, sea V el vértice con la coordenada x más pequeña y sea B el punto final en el eje menor con la coordenada y más grande. Encuentra la coordenada y del punto M que está en la recta x + 5 = 0
y es equidistante de V y B.

89. Problema de desafío Demuestre que una ecuación de la forma

$$Ax2 + Cy2 + F = 0 \; A \cdot 0, C \cdot 0, F \cdot 0$$

donde A y C son del mismo signo y F es de signo opuesto,
(a) es la ecuación de una elipse con centro en 10, 02 si A · C.

(b) es la ecuación de un círculo con centro 10, 02 si A = C.

90. Problema de desafío Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax2 + Cy2 + Dx + Ey + F = 0 \; A \cdot 0, C \cdot 0$$

donde A y C son del mismo signo,
(a) es una elipse si $-F$ tiene el mismo signo que $\frac{D2}{4A} + \frac{E2}{4C}$ A.

(b) es un punto si $\frac{D2}{4A} + \frac{E2}{4C} - F = 0$.

(c) no contiene puntos si $\frac{D2}{4A} + \frac{E2}{4C} - F$ es de signo opuesto a a.

†Cortesía del Departamento de Matemáticas de Joliet Junior College

Machine Translated by Google

Discusión y escritura

91. La excentricidad e de una elipse se define como el número $\frac{c}{a}$, donde a es la distancia de un vértice al centro y c es la distancia de un foco desde el centro. Como a 7 c, se deduce que e 6 1. Escribe un breve párrafo sobre la forma general de cada una de las siguientes elipses. Asegúrese de justificar sus conclusiones.

(a) Excentricidad cercana a 0 (b) Excentricidad = 0,5 (c) Excentricidad cercana a 1

Conserve su conocimiento

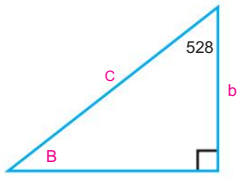
Los problemas 92 a 101 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

92. Encuentra los ceros de la función cuadrática f1x2 = 1x - 52 2 - 12.
¿Cuáles son las intersecciones con el eje x, si las hay, de la gráfica de la función?

93. Encuentra el dominio de la función racional $f1x2 = \frac{2x - 3}{x - 5}$.
Encuentre asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

94. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza de 80 libras que actúa en la dirección de 50° con respecto a la horizontal al mover un objeto 12 pies desde 10, 02 hasta 112, 02. Redondee a un decimal.

95. Resuelve el triángulo rectángulo que se muestra.



96. Resuelve $\overline{223}\tan 15x2 + 7 = 9$ para $0 \ldots x \frac{pag}{2}$.

97. ¿ A qué valor se aproxima $R1x2 = \frac{3x2 + 14x + 8}{x2 + x - 12}$ cuando xS - 4?

98. Resuelve e-2x+1 = 8 redondeado a cuatro decimales.

99. Encuentre el cociente de diferencias de f1x2 = 2x2 - 7x cuando h S 0.

100. Resuelve : $\log 3 \overline{ax} - 1b = 4$

101. Resuelve: 1x + 322 = 20

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. $\overline{213}$ 2. $\frac{9}{4}$ 3. 1 - 2, 02, 12, 02, 10, - 42, 10, 42 4. 12, 52 Faltan 5 ; 1; abajo; 4 6. 1x - 22 ^{2} + 1 año + 32 ^{2} = 1

10.4 La hipérbola

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Fórmula de distancia (Sección 1.1, págs. 39 y 40)
- Completar el cuadrado (Sección A.3, p. A29)
- Intercepciones (Sección 1.2, págs. 48–49)
- Simetría (Sección 1.2, págs. 49–53)
- Asíntotas (Sección 4.3, págs. 237–241)
- Técnicas gráficas: transformaciones (Sección 2.5, págs. 134–143)
- Método de la raíz cuadrada (Sección A6, p. A48)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 719.

OBJETIVOS 1 Analizar hipérbolas con centro en el origen (p. 710)
2 Encuentra las asíntotas de una hipérbola (p. 714)
3 Analizar hipérbolas con centro en (h, k) (p. 716)
4 Resolver problemas aplicados que involucran hipérbolas (p. 717)

DEFINICIÓN

Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos , es constante.

Machine Translated by Google

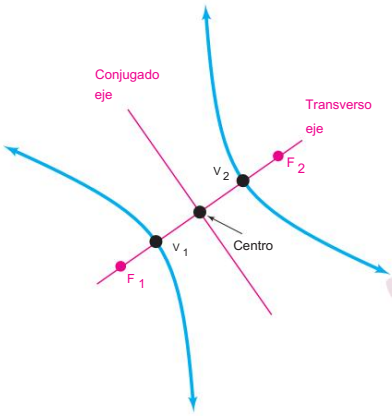


Figura 31 Hipérbola

La Figura 31 ilustra una hipérbola con focos F1 y F2 . La línea que contiene los focos se llama eje transversal. El punto medio del segmento de recta que une los focos es el centro de la hipérbola. La recta que pasa por el centro y perpendicular al eje transversal es el eje conjugado. La hipérbola consta de dos curvas separadas, llamadas ramas, que son simétricas con respecto al eje transversal, al eje conjugado y al centro. Los dos puntos de intersección de la hipérbola y el eje transversal son los vértices, V1 y V2 , de la hipérbola.

1 Analizar hipérbolas con centro en el origen

Con estas ideas en mente, ahora estamos listos para encontrar la ecuación de una hipérbola en el sistema de coordenadas rectangular. Primero, coloca el centro en el origen. A continuación, coloque la hipérbola de modo que su eje transversal coincida con un eje de coordenadas. Supongamos que el eje transversal coincide con el eje x, como se muestra en la Figura 32.

Si c es la distancia del centro a un foco, un foco estará en F1 = 1 - c, 02 y el otro en F2 = 1c, 02. Ahora denotamos la diferencia constante de las distancias desde cualquier punto P = 1x, y2 en la hipérbola a los focos F1 y F2 por {2a, donde a 7 0. (Si P está en la rama derecha, se usa el signo +; si P está en la rama izquierda, se usa el signo -.) Las coordenadas de P deben satisfacer la ecuación

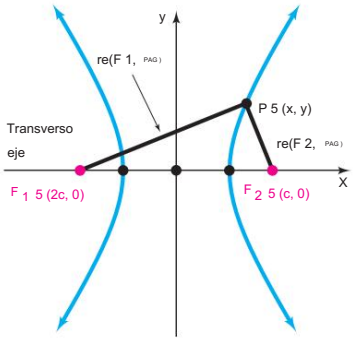


Figura 32
d1F1, P2 - d1F2, P2 = {2a

$$d1F1 , P2 - d1F2 , P2 = \{2a$$ La diferencia de distancias de P a los focos es igual a t2a.

$$\sqrt{1x + c2^2 + y2} - \sqrt{1x - c2^2 + y2} = \{2a$$ Utilice la fórmula de distancia.

$$\sqrt{1x + c2^2 + y2} = \{2a + \sqrt{1x - c2^2 + y2}$$ Aislar un radical.

$$1x + c2^2 4a2 \{ 4a21x - c2^2 + y2 + 1x - c2^2 \sqrt{1x - c2^2 + y2}$$ Cuadre ambos lados.

$$x2 + 2cx + c2 + y2 = 4a2 \{ 4a21x - c2^2 + y2 + x2 - 2cx + c2 + y2 \sqrt{1x - c2^2 + y2}$$ Multiplicar.

$$4cx - 4a2 = \{4a21x - c2 \sqrt{cx - a2^2 + y2}$$ Simplificar; aislar el radical.

$$= \{a21x - c2 \sqrt{1x - c2^2 + y2}$$ Divide ambos lados por 4.

$$1cx - a22^2 = a2 3 1x - c2^2 + y2 4$$ Cuadre ambos lados.

$$c2 x2 - 2ca2x + a4 = a2 1x2 - 2cx + c2 + y22$$ Multiplicar.

$$c2x2 + a4 = a2x2 + a2c2 + a2y2$$ Distribuir y simplificar.

$$1c2 - a22x2 - a2y2 = a2 c2 - a4$$ Reordenar términos.

$$1c2 - a22x2 - a2y2 = a2 1c2 - a22$$ Factoriza a2 en el lado derecho. (1)

Para obtener puntos en la hipérbola fuera del eje x, debemos tener un 6 c. Para ver por qué, mire nuevamente la Figura 32.

$$d1F1 , P2 6 d1F2 , P2 + d1F1 , F22$$ Utilice el triángulo F1PF2.

$$d1F1 , P2 - d1F2 , P2 6 d1F1 , F22$$ P está en la rama derecha, entonces d1F1, P 2 · d1F2, P 2 · 2a; d1F1, F22 · 2c.

$$2a 6 2c$$

un 6c _

Como a 6 c, también tenemos a2 6 c2 , entonces c2 - a2 7 0. Sea b2 = c2 - a2, b 7 0. Entonces la ecuación (1) se puede escribir como

$$b2x2 - a2y2 = a2b2$$

$$\frac{x2}{a2} - \frac{y2}{b2} = 1$$ Divide ambos lados por a2b2.

Para encontrar los vértices de la hipérbola, sustituye y = 0 en la ecuación. Los vértices satisfacen la ecuación $\frac{x2}{a2} = 1$, cuyas soluciones son x = {a. En consecuencia, el a2

Machine Translated by Google

Los vértices de la hipérbola son V1 = 1 - a, 02 y V2 = 1a, 02. Observe que la distancia desde el centro 10, 02 a cualquiera de los vértices es a.

TEOREMA Ecuación de una Hipérbola: Centro en 10, 02 ; Eje transversal a lo largo del eje x

Una ecuación de la hipérbola con centro en 10, 02, focos en 1 - c, 02 y 1c, 02, y vértices en 1 - a, 02 y 1a, 02 es

$$\frac{x2}{a2} - \frac{y2}{b2} = 1 \qquad \text{donde } b2 = c2 - a2 \qquad (2)$$

El eje transversal es el eje x.

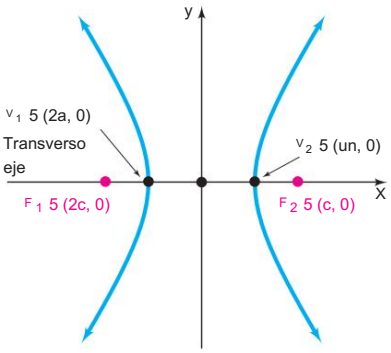


Figura 33

$\frac{x2}{un^2} - \frac{y2}{}$ = 1, b $b2^{222}$ = c - a

Consulte la Figura 33. La hipérbola definida por la ecuación (2) es simétrica con respecto al eje x, el eje y y el origen. Para encontrar las intersecciones con el eje y, si las hay, sea x = 0 en la ecuación (2). Esto da como resultado la ecuación $\frac{y2}{}$ = - 1, que no tiene solución real, por lo que la hipérbola b2 y2

definido por la ecuación (2) no tiene intersecciones en el eje y. De hecho, como - 1 = Ú 0, es a2 b2 $\frac{x2}{}$

se sigue que $\frac{}{a2}$ Ú 1. No hay puntos en la gráfica para - a 6 x 6 a.

EJEMPLO 1 Encontrar y graficar una ecuación de una hipérbola

Encuentra una ecuación de la hipérbola con centro en el origen, un foco en 13, 02 y un vértice en 1 - 2, 02. Grafica la ecuación.

Solución

La hipérbola tiene su centro en el origen. Traza el centro, el foco y el vértice. Como todos se encuentran en el eje x, el eje transversal coincide con el eje x. Un foco está en 1c, 02 = 13, 02, entonces c = 3. Un vértice está en 1 - a, 02 = 1 - 2, 02, entonces a = 2.
De la ecuación (2), se deduce que b2 = c2 - a2 = 9 - 4 = 5, por lo que una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x2}{4} - \frac{y2}{5} = 1$$

Para graficar una hipérbola, es útil ubicar y trazar otros puntos en la gráfica. Por ejemplo, para encontrar los puntos encima y debajo de los focos, sea x = {3. Entonces

$$\frac{x2}{4} - \frac{y2}{5} = 1$$

$$\frac{1\ \{32\ 4^2}{} - \frac{y2}{5} = 1 \qquad x \cdot t3$$

$$\frac{9}{4} - \frac{y2}{5} = 1$$

$$\frac{y2}{5} = \frac{5}{4}$$

$$y2 = \frac{25}{4}$$

$$y = \{2\ \frac{5}{}$$

$$\frac{5}{} \qquad \frac{5}{}$$

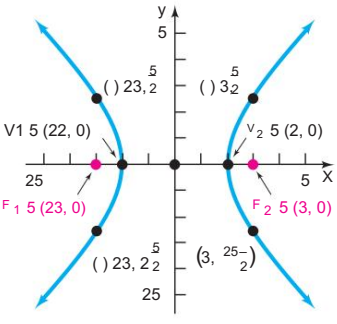


Figura 34 $\frac{x2}{4} - \frac{y}{5}^2 = 1$

Los puntos encima y debajo de los focos son a {3, 2 b y a {3, - 2 b. Estos puntos

Determine la "apertura" de la hipérbola. Ver Figura 34.

Machine Translated by Google

COMENTARIO Para graficar la hipérbola $\frac{x^2}{} - \frac{y^2}{5} = 1$, grafica las dos funciones $Y1 = 25\sqrt{x^2 - \frac{}{4}} - 1$ y $Y2 = -25\sqrt{x^2 - \frac{}{4}} - 1$. Haga esto y compare el resultado con la Figura 34.

Ahora problema de trabajo 19

Para los dos ejemplos siguientes, la dirección "Analizar la ecuación" significa encontrar el centro, el eje transversal, los vértices y los focos de la hipérbola y grafiquelo.

EJEMPLO 2 Analizando la ecuación de una hipérbola

Analiza la ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Solución

La ecuación tiene la forma de ecuación (2), con $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$. La gráfica de la ecuación es una hipérbola con centro en (0, 0) y eje transversal a lo largo del eje x.

Además, $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$. Los vértices están en $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$, y los focos están en $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{20}, 0)$.

Para ubicar los puntos en el gráfico encima y debajo de los focos, sea $x = \pm\sqrt{20}$ en la ecuación. Entonces

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{\pm\sqrt{20}^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x = \pm\sqrt{20}$$

$$\frac{20}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{5}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm 1$$

Los puntos encima y debajo de los focos son $(\pm\sqrt{20}, 1)$ y $(\pm\sqrt{20}, -1)$. Consulte la Figura 35.

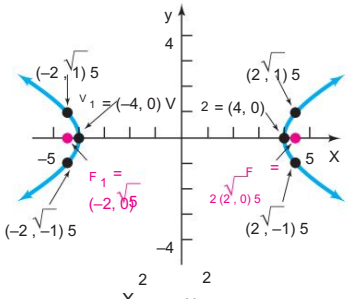


Figura 35 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

TEOREMA Ecuación de una Hipérbola: Centro en (0, 0); Eje transversal a lo largo del eje y

Una ecuación de la hipérbola con centro en (0, 0), focos en $(0, \pm c)$ y $(0, c)$, y vértices en $(0, \pm a)$ y $(0, a)$ es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = \qquad \text{donde } b^2 = c^2 - a^2 \qquad (3)$$

El eje transversal es el eje y.

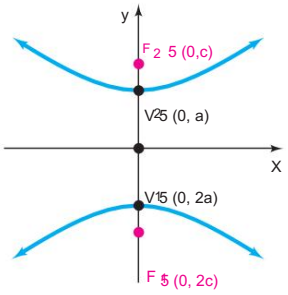


Figura 36 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, $b^2 = c^2 - a^2$

La Figura 36 muestra la gráfica de una hipérbola típica definida por la ecuación (3). Comparemos las ecuaciones (2) y (3).

Una ecuación de la forma de la ecuación (2), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen, focos en el eje x en $(\pm c, 0)$ y $(c, 0)$, donde $b^2 = c^2 - a^2$, y eje transversal a lo largo del eje x.

Machine Translated by Google

Una ecuación de la forma de la ecuación (3), $\frac{y2}{a2} - \frac{x2}{\quad} = 1$, es la ecuación de a b2

hipérbola con centro en el origen, focos en el eje y en 10, - c2 y 10, c2, donde b2 = c2 - a2

, y eje transversal a lo largo del eje y.

Observe la diferencia en las formas de las ecuaciones (2) y (3). Cuando el @term y2 se resta del @term x2 , el eje transversal está a lo largo del eje x. Cuando el @term x2 se resta del término y2 @, el eje transversal está a lo largo del eje y.

EJEMPLO 3 Analizando la ecuación de una hipérbola

Analiza la ecuación 4y2 - x2 = 4.

Solución

Para poner la ecuación en la forma adecuada, divide ambos lados por 4:

$$y2 - = 1\frac{x2}{4}$$

Dado que el @término x2 se resta del @término y2 , la ecuación es la de una hipérbola con centro en el origen y eje transversal a lo largo del eje y. Además, al comparar la ecuación con la ecuación (3), observe que a2 = 1, b2 = 4 y c2 = a2 + b2 = 5. Los vértices están en 10, {a2 = 10, {12 y los focos están en 10 , {c2 = 10, { 152.

Para ubicar puntos en el gráfico a la izquierda y a la derecha de los focos, sea y = { 15 en la ecuación. Entonces

$$4y2 - x2 = 4$$

$$41 \{ 252\ 2 - x2 = 4 \qquad y \cdot t!5$$

$$20 - x2 = 4$$

$$x2 = 16$$

$$x = \{4$$

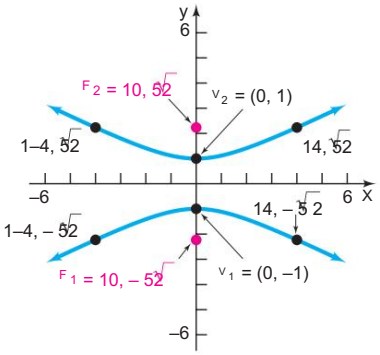


Figura 37 4y2 - x2 = 4

Otros cuatro puntos en el gráfico son 1 {4, 152 y 1 {4, - 152. Consulte la Figura 37.

EJEMPLO 4 Encontrar una ecuación de una hipérbola

Encuentre una ecuación de la hipérbola que tenga un vértice en 10, 22 y focos en 10, - 32. y 10, 32. Grafica la ecuación.

Solución

Como los focos están en 10, - 32 y 10, 32, el centro de la hipérbola, que está en su punto medio, es el origen. Además, el eje transversal está a lo largo del eje y. Esta información nos dice que c = 3, a = 2 y b2 = c2 - a2 = 9 - 4 = 5. La forma de la ecuación de la hipérbola viene dada por la ecuación (3):

$$\frac{y2}{a2} - \frac{x2}{b2} = 1$$

$$\frac{y2}{4} - \frac{x2}{5} = 1$$

Sea y = {3 para obtener puntos en la gráfica a cada lado de cada foco. Ver Figura 38.

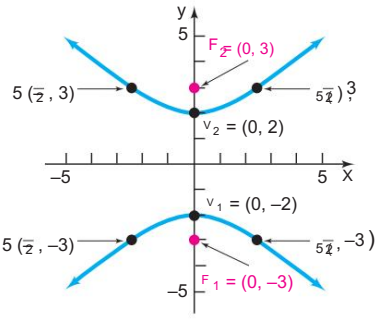


Figura 38 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

Ahora resuelve los problemas 1 5 y 2 1

Machine Translated by Google

Observe las ecuaciones de las hipérbolas en los ejemplos 2 y 4. Para la hipérbola del ejemplo 2, a2 = 16 y b2 = 4, entonces a 7 b; para la hipérbola del ejemplo 4, a2 = 4 y b2 = 5, entonces a 6 b. Esto indica que para las hipérbolas, no existen requisitos que impliquen los tamaños relativos de a y b. Compare esta situación con el caso de una elipse, en la que los tamaños relativos de a y b dictan qué eje es el eje mayor. Las hipérbolas tienen otra característica que las distingue de las elipses y parábolas: las hipérbolas tienen asíntotas.

2 Encuentra las asíntotas de una hipérbola

Recuerde de la sección 4.3 que una asíntota horizontal u oblicua de una gráfica es una recta con la propiedad de que la distancia desde la recta a los puntos de la gráfica tiende a 0 cuando x S - q o cuando x S q. Las asíntotas proporcionan información sobre el comportamiento final de la gráfica de una hipérbola.

TEOREMA Asíntotas de una hipérbola; Eje transversal a lo largo del eje x

La hipérbola $\frac{x2}{a2} - \frac{y2}{b2} = 1$ tiene las dos asíntotas oblicuas

$$\frac{b}{a}x \text{ e } y = -\ y = \frac{b}{a}x \qquad (4)$$

Prueba Comience resolviendo y en la ecuación de la hipérbola.

$$\frac{x2}{a2} - \frac{y2}{b2} = 1$$

$$\frac{y2}{b2} = \frac{x2}{a2} - 1$$

$$y2 = b2 \cdot x2 \cdot \frac{a2}{x2} - 1$$

Como x · 0, el lado derecho se puede factorizar y reescribir como

$$y2 = \frac{b2x2}{a2} \cdot 1 - \frac{a2}{x2}$$

$$y = \pm \frac{bx}{a} \sqrt{1 - \frac{a2}{x2}}$$

Ahora, cuando x S - q o cuando x S q, el término $\frac{a2}{x2}$ tiende a 0, por lo que la expresión bajo el radical se acerca a 1. Entonces, cuando x S - q o cuando x S q, el valor de y se acerca a $\pm \frac{bx}{a}$; es decir, la gráfica de la hipérbola se acerca a las rectas

$$y = -\frac{b}{a}x \text{ e } y = \frac{b}{a}x$$

Estas líneas son asíntotas oblicuas de la hipérbola. ■

Las asíntotas de una hipérbola no forman parte de la hipérbola, pero sirven como guía para graficar la hipérbola. Por ejemplo, supongamos que queremos graficar la ecuación

$$\frac{x2}{a2} - \frac{y2}{b2} = 1$$

Machine Translated by Google

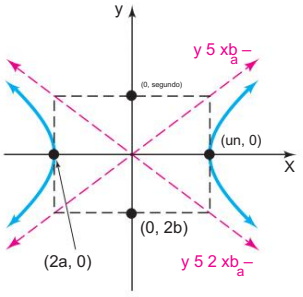


Figura 39 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Comience trazando los vértices 1 - a, 02 y 1a, 02. Luego traza los puntos 10, - b2 y 10, b2 y use estos cuatro puntos para construir un rectángulo, como se muestra en la Figura 39. Las diagonales de este rectángulo tienen pendientes y $-\frac{b}{a}$ $\frac{b}{a}$, y sus extensiones son las asíntotas de la hipérbola, y = x e y = - x. Si graficamos las asíntotas, $-\frac{b}{a}$ $\frac{b}{a}$ podemos usarlos para establecer la “apertura” de la hipérbola y evitar trazar otros puntos.

TEOREMA Asíntotas de una hipérbola; Eje transversal a lo largo del eje y

La hipérbola a2 $\frac{y2}{}$ - $\frac{x2}{b2}$ = 1 tiene las dos asíntotas oblicuas

$$\frac{a}{} \text{ x e y = - y = bb} \quad \frac{a}{} \text{ X} \qquad (5)$$

Se le pide que demuestre este resultado en el problema 86.

Durante el resto de esta sección, la dirección “Analizar la ecuación” significa encontrar el centro, el eje transversal, los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola y representarla gráficamente.

EJEMPLO 5 Analizando la ecuación de una hipérbola

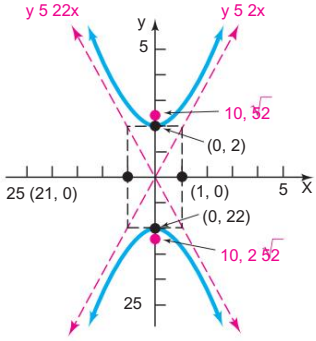


Figura 40 $\frac{y^2}{4} - X^2 = 1$

Analiza la ecuación 4 $\frac{y2}{}$ - x2 = 1.

Solución Dado que el @término x2 se resta del @término y2 , la ecuación tiene la forma de la ecuación (3) y es una hipérbola con centro en el origen y eje transversal a lo largo del eje y. Comparando la ecuación con la ecuación (3), observe que a2 = 4, b2 = 1 y c2 = a2 + b2 = 5. Los vértices están en 10, {a2 = 10, {22, y los focos están en 10, { c2 = 10, { 152. Usando la ecuación (5) con a = 2 y b = 1, las asíntotas son las rectas y = $\frac{a}{}$ x = 2x y y = - bb $\frac{a}{}$ x = - 2x. Forme el rectángulo que contiene los puntos 10, {a2 = 10, {22 y 1 {b, 02 = 1 {1, 02. Las extensiones de las diagonales del rectángulo son las asíntotas. Ahora grafica las asíntotas y la hipérbola. Ver Figura 40.

EJEMPLO 6 Analizando la ecuación de una hipérbola

Analiza la ecuación 9x2 - 4y2 = 36.

Solución

Divide ambos lados de la ecuación entre 36 para poner la ecuación en la forma adecuada.

$$\frac{x2}{4} - \frac{y2}{9} = 1$$

El centro de la hipérbola es el origen. Dado que el @término y2 se resta del @término x2 , el eje transversal está a lo largo del eje x, y los vértices y focos estarán en el eje x. Usando la ecuación (2), observe que a2 = 4, b2 = 9 y c2 = a2 + b2 = 13. Los vértices están a = 2 unidades a la izquierda y a la derecha del centro en 1 {a, 02 = 1 {2, 02 , los focos (continuación)

Machine Translated by Google

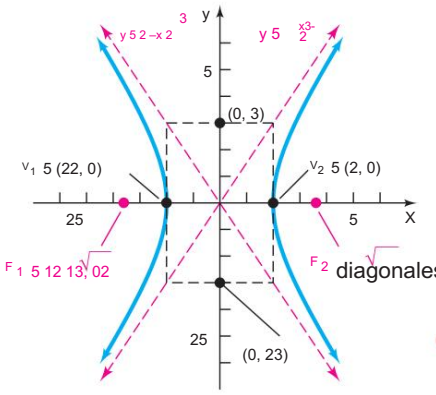


Figura 41 9x2 - 4y2 = 36

son c = 113 unidades a izquierda y derecha del centro en 1 {c, 02 = 1 { 113, 02, y las asíntotas tienen las ecuaciones

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{2}x \quad e \quad y = -2 \qquad \frac{b}{a}x = -\frac{3}{2}x$$

Para graficar la hipérbola, forma el rectángulo que contiene los puntos 1 {a, 02 y 10, {b2, es decir, 1 - 2, 02, 12, 02, 10, - 32 y 10, 32. Las extensiones de las 5 1 13, 02 diagonales del rectángulo son las asíntotas. Consulte la Figura 41 para ver el gráfico.

Ahora resuelve el problema 3 1

3 Analizar hipérbolas con centro en (h, k)

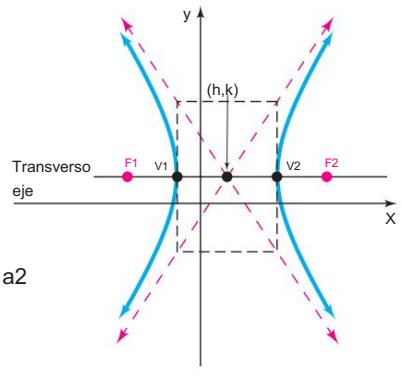
Si una hipérbola con centro en el origen y eje transversal coincidente con un eje de coordenadas se desplaza horizontalmente h unidades y luego verticalmente k unidades, el resultado es una hipérbola con centro en 1h, k2 y eje transversal paralelo a un eje de coordenadas.
Las ecuaciones de tales hipérbolas tienen las mismas formas que las dadas en las ecuaciones (2) y (3), excepto que x se reemplaza por x - h (el desplazamiento horizontal) y y se reemplaza por y - k (el desplazamiento vertical). La Tabla 4 da las formas de las ecuaciones de tales hipérbolas. Consulte la Figura 42 para ver gráficos típicos.

Tabla 4

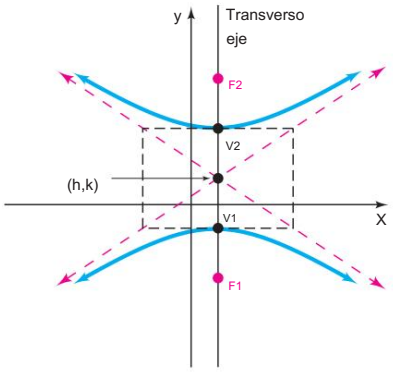
Ecuaciones de una Hipérbola: Centro en 1h, k2; Eje transversal paralelo a un eje de coordenadas

Centro	Transverso Eje	Focos	Vértices	Ecuación	Asíntotas
1 hora, k2	Paralelo a el eje x	1h { c, k2 1h { a, k2		$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,\ b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \{\frac{b}{a}(x-h)$
1 hora, k2	Paralelo al eje y	1h, k { c2 1h, k { a2		$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,\ b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \{\frac{a}{b}(x-h)$

NOTA En lugar de memorizar Tabla 4, use transformaciones (desplazamiento horizontal h unidades, vertical k unidades), junto con el hecho de que a representa la distancia del centro a los vértices, c representa la distancia del centro a los focos y b2 = c2 - a2.



(a) $\frac{(x-2h)^2}{a2} - \frac{(y-2k)^2}{b2} = 51$



(b) $\frac{(y-2k)^2}{a2} - \frac{(x-2h)^2}{b2} = 51$

Figura 42

EJEMPLO 7 Encontrar una ecuación de una hipérbola, cuyo centro no está en el origen

Encuentra una ecuación para la hipérbola con centro en 11, - 22, un foco en 14, - 22 y un vértice en 13, - 22. Grafica la ecuación.

Solución

El centro está en 1h, k2 = 11, - 22, por lo que h = 1 y k = - 2. Dado que el centro, el foco y el vértice se encuentran en la recta y = - 2, el eje transversal es paralelo a la x- eje. La distancia desde el centro 11, -22 al foco 14, -22 es c = 3; la distancia del centro 11, - 22 al vértice 13, - 22 es a = 2. Entonces b2 = c2 - a2 = 9 - 4 = 5.

Machine Translated by Google

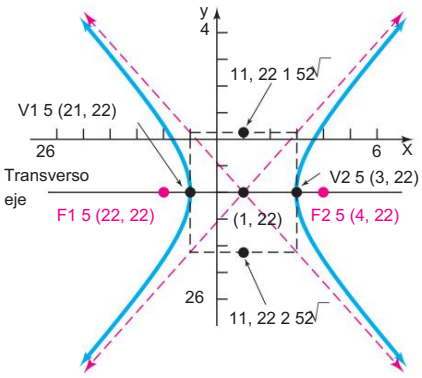


Figura 43 $\frac{1x - 12}{4}^2 - \frac{1 \text{ año} + 22}{5}^2 = 1$

La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{1x - h2}{a2}^2 - \frac{1y - k2}{b2}^2 = 1$$

$$\frac{1x - 12}{4}^2 - \frac{1 \text{ año} + 22}{5}^2 = 1$$

Forma el rectángulo que contiene los vértices: 1 - 1, - 22, 13, - 22, y los puntos 1h, k { b2: 11, - 2 - 252, 11, - 2 + 252. Extiende las diagonales del rectángulo para obtener las asíntotas. Ver Figura 43.

Ahora resuelve el problema 4 1

EJEMPLO 8 Analizando la ecuación de una hipérbola

Analiza la ecuación - x2 + 4y2 - 2x - 16y + 11 = 0.

Solución

Completa los cuadrados en x y en y.

$$- x2 + 4y2 - 2x - 16y + 11 = 0$$

$$- 1x2 + 2x2 + 41y2 - 4y2 = - 11 \quad \text{Términos de grupo.}$$

$$- 1x2 + 2x + 12 + 41y2 - 4y + 42 = - 11 - 1 + 16 \quad \text{Completa cada cuadrado.}$$

$$- 1x + 12 \quad ^2 + 41 \text{ años} - 22^2 = 4 \quad \text{Factor.}$$

$$1 \text{ año} - 22^2 - \frac{1x + 12}{4}^2 = 1 \quad \text{Divide ambos lados por 4.}$$

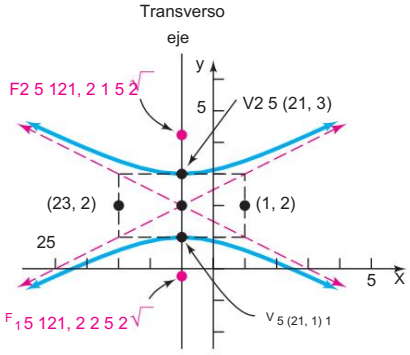


Figura 44

$2 - x \quad ^2 + 4 \text{ años} - 2x - 16y + 11 = 0$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en 1 - 1, 22 y eje transversal paralelo al eje y. Además, a2 = 1 y b2 = 4, entonces c2 = a2 + b2 = 5. Dado que el eje transversal es paralelo al eje y, los vértices y focos están ubicados unidades a y c por encima y por debajo del centro, respectivamente. Los vértices están en 1h, k { a2 = 1 - 1, 2 { 12, o 1 - 1, 12 y 1 - 1, 32. Los focos están en 1h, k { c2 = 1 - 1, 2 { 252. Los asíntotas son $y - 2 = 2 \quad \frac{1}{-} \quad 1x + 12$ y $y - 2 = - 2 \quad \frac{1}{-} \quad 1x + 12$. La Figura 44 muestra la gráfica.

Ahora resuelve el problema 5 5

4 Resolver problemas aplicados que involucran hipérbolas

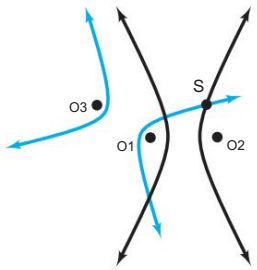


Figura 45

Mire la Figura 45. Suponga que hay tres micrófonos ubicados en los puntos O1 , O2 , y O3 (los focos de las dos hipérbolas). Además, supongamos que se dispara un arma a S y el micrófono de O1 registra el disparo 1 segundo después que el micrófono de O2 . Como el sonido viaja aproximadamente a 1100 pies por segundo, concluimos que el micrófono en O1 está 1100 pies más lejos del disparo que en O2 . Esta situación se modela colocando S en una rama de una hipérbola con focos en O1 y O2 . (¿Ves por qué? La diferencia de las distancias de S a O1 y de S a O2 es la constante 1100). Si el tercer micrófono en O3 registra el disparo 2 segundos después de O1 , entonces S se encuentra en una rama de una segunda hipérbola. con focos en O1 y O3 . En este caso, la diferencia constante será 2200. La intersección de las dos hipérbolas identifica la ubicación de S.

EJEMPLO 9 La caída de rayos

Supongamos que dos personas que se encuentran a 1 milla de distancia ven un relámpago. Después de un período de tiempo, la persona que está parada en el punto A escucha el trueno. Un segundo después, la persona que está parada en el punto B escucha el trueno. Si la persona en B está al oeste de la persona en A y se sabe que el rayo ocurrió al norte de la persona que se encuentra en A, ¿dónde ocurrió el rayo?

Machine Translated by Google

Solución Consulte la Figura 46, donde el punto 1x, y2 representa la ubicación del rayo. El sonido viaja a 1100 pies por segundo, por lo que la persona en el punto A está 1100 pies más cerca del rayo que la persona en el punto B. Dado que la diferencia entre la distancia de 1x, y2 a B y la distancia de 1x, y2 a A es la constante 1100, el punto 1x, y2 se encuentra en una hipérbola cuyos focos están en A y B.

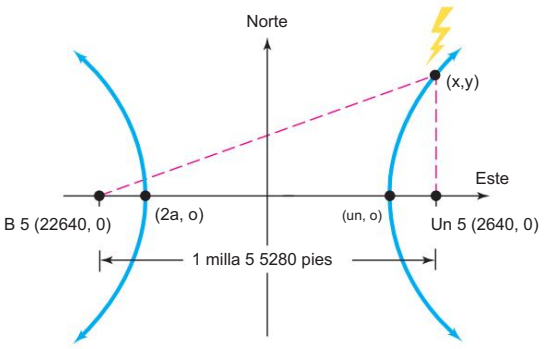


Figura 46 Modelo de impacto de rayo

Una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x2}{a2} - \frac{y2}{b2} = 1$$

donde 2a = 1100, o a = 550.

Debido a que la distancia entre las dos personas es 1 milla (5280 pies) y cada una persona está en un foco de la hipérbola, entonces

$$2c = 5280$$
$$c = \frac{5280}{2} = 2640$$

Dado que b2 = c2 - a2 = 26402 - 5502 = 6.667.100, la ecuación de la hipérbola que describe la ubicación del rayo es

$$\frac{x2}{5502} - \frac{y2}{6.667.100} = 1$$

Consulte la Figura 46. Dado que el rayo ocurrió hacia el norte del individuo en el punto A = 12640, 02, sea x = 2640 y resuelva la ecuación resultante.

$$\frac{26402}{5502} - \frac{y2}{6.667.100} = 1 \qquad x \cdot 2640$$

$$- \frac{\text{años2}}{6,\ 667,100} = -22.04 \qquad \text{Resta de ambos lados.}$$

$$y2 = 146,942,884 \qquad \text{Multiplica ambos lados por } \cdot 6,667,100.$$

$$y = 12,122 \qquad y + 0 \text{ desde que ocurrió el rayo en el cuadrante I.}$$

El rayo ocurrió a 12,122 pies al norte de la persona que se encontraba en el punto A.

✓ Verificar: La diferencia entre la distancia de 12640, 121222 a la persona en el punto B = 1 - 2640, 02 y la distancia de 12640, 121222 a la persona en el punto A = 12640, 02 debe ser 1100. Usando la fórmula de la distancia, la diferencia de las distancias es

$$\sqrt{232640 - 1 - 26402\ 4\ \text{según}^2 + 112,122 - 02^2} - \sqrt{212640 - 26402^2 + 112,122 - 02^2} = 1100$$

sea necesario.

Ahora problema de trabajo 7 5

Machine Translated by Google

10.4 Evalúe su comprensión

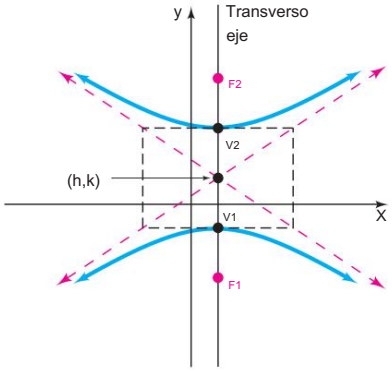
'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La distancia d desde P1 = 13, - 42 a P2 = 1 - 2, 12 es. re = _____ (págs. 111 y 112)
2. Para completar el cuadrado de x2 + 5x, _____ . (pág. A29)
3. Encuentra las intersecciones de la ecuación y2 = 9 + 4x2 . (págs. 120 y 121)
4. Verdadero o Falso La ecuación y2 = 9 + x2 es simétrica con respecto al eje x, el eje y y el origen. (págs. 121-125)
5. Para graficar y = 1x - 52 ^{3} - 4, desplaza la gráfica de y = x3 a el _____ (izquierda/derecha) _____ unidad(es) y luego a ~~unidad(es). (arriba~~ ~~abajo)~~ (págs. 134-138)
6. Encuentra las asíntotas verticales, si las hay, y las horizontales o x2 - 9 asíntota oblicua, si la hay, de y = . (págs. 237-241) x2 - 4

Conceptos y vocabulario

7. A(n) es el conjunto de puntos en un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante.
8. Para una hipérbola, los focos se encuentran en una línea llamada _____ _____ .

Responda los problemas 9 a 11 usando la figura de la derecha.



9. Opción múltiple La ecuación de la hipérbola tiene la forma

(a) $\frac{1x - h2^{2}}{} - \frac{1y - k2^{2}}{} = 1$ (b) $\frac{1y - k2^{2}}{} - \frac{1x - h2^{2}}{} = 1$

(C) $\frac{a2\ 1x - ^{2}}{h2\ a2} + \frac{b2\ 1y - ^{2}}{k2\ b2} = 1$ (d) $\frac{a2\ 1x - ^{2}}{h2\ b2} + \frac{b2\ 1y - ^{2}}{k2\ a2} = 1$

10. Si el centro de la hipérbola es 12, 12 y a = 3, entonces y las coordenadas de los vértices son _____ _____ .
11. Si el centro de la hipérbola es 12, 12 y c = 5, entonces las coordenadas de los focos son _____ y _____ .
12. Opción múltiple En una hipérbola, si a = 3 y c = 5, entonces segundo = _____ .

(un) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 8

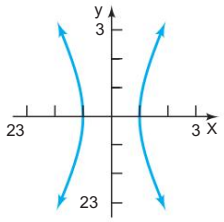
13. Para la hipérbola $\frac{x2}{4} - \frac{y2}{9} = 1$, el valor de a es _____ , el valor de b es _____ , eje transversal es el _____ -eje.
14. Para la hipérbola $\frac{y2}{} - \frac{x2}{} = 1$, las ~~asíntotas~~ son 16 81 _____ y _____ .

Desarrollo de habilidades

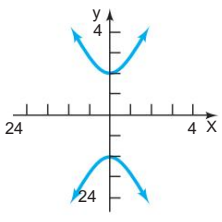
En los problemas 15 a 18 se da la gráfica de una hipérbola. Relaciona cada gráfica con su ecuación.

(A) $\frac{x2}{4} - y2 = 1$ (B) $x2 - - x2 = \frac{y2}{4} = 1$ (C) $\frac{y2}{4}$ (D) $y2 - = 1\ \frac{x2}{4}$

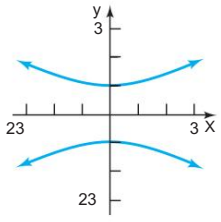
15.



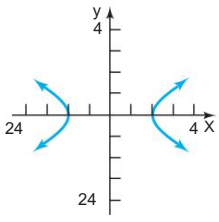
dieciséis.



17.



18.



En los problemas 19 a 28, encuentre una ecuación para la hipérbola descrita. Grafica la ecuación.

19. Centro a las 10, 02; centrarse en el 13, 02; vértice en 11, 02
20. Centro a las 10, 02; centrarse en 10, 52; vértice en 10, 32
21. Centro en 10, 02; centrarse en 10, - 62; vértice en 10, 42
22. Centro a las 10, 02; centrarse en 1 - 3, 02; vértice en 12, 02
23. Foco en 10, 62; vértices en 10, - 22 y 10, 22
24. Focos en 1 - 5, 02 y 15, 02; vértice en 13, 02
25. Vértices en 1 - 4, 02 y 14, 02; asíntota de la recta y = 2x
26. Vértices en 10, - 62 y 10, 62; asíntota de la recta y = 2x
27. Focos en 10, - 22 y 10, 22; asíntota de la recta y = - x
28. Focos en 1 - 4, 02 y 14, 02; asíntota de la recta y = - x

Machine Translated by Google

En los problemas 29 a 36, encuentre el centro, el eje transversal, los vértices, los focos y las asíntotas. Grafica cada ecuación.

29. $\frac{y2}{\text{diecisés}} - \frac{x2}{4} = 1$

30. $\frac{x2}{25} - \frac{y2}{9} = 1$

31. 4x2 - y2 = 16

32. 4y2 - x2 = 16

33. x2 - y2 = 4

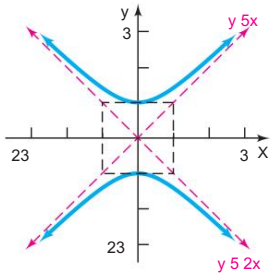
34. y2 - 9x2 = 9

35. 2x2 - y2 = 4

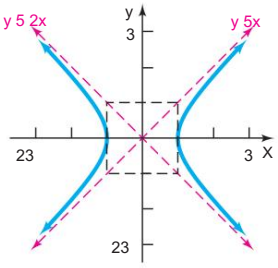
36. y2 - x2 = 25

En los problemas 37 a 40, encuentre una ecuación para cada hipérbola.

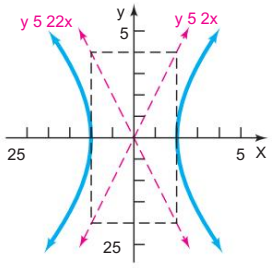
37.



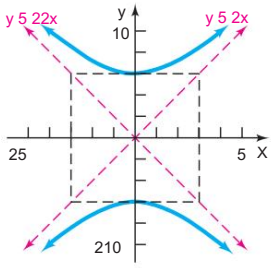
38.



39.



40.



En los problemas 41 a 48, encuentre una ecuación para la hipérbola descrita. Grafica la ecuación.

41. Centro a las 14, - 12; centrarse en 17, - 12; vértice en 16, - 12 43. Centro en 11, 42; centrarse en 1 - 2, 42; vértice en 10, 42 45. Foco en 1 - 4, 02; vértices en 1 - 4, 42 y 1 - 4, 22 47. Vértices en 11, - 32 y 11, 12; 3 asíntota de la recta y + 1 = $\frac{}{2}$ 1x - 12

42. Centro en 1 - 3, 12; centrarse en 1 - 3, 62; vértice en 1 - 3, 42

44. Centro en 1 - 3, - 42; centrarse en 1 - 3, - 82; vértice en 1 - 3, - 22

46. Focos en 13, 72 y 17, 72; vértice en 16, 72

48. Vértices en 1 - 1, - 12 y 13, - 12; asíntota de la recta y + 1 = $\frac{3}{2}$ 1x - 12

En los problemas 49 a 62, encuentre el centro, el eje transversal, los vértices, los focos y las asíntotas. Grafica cada ecuación.

49. $\frac{1 \text{ año} + 32^2}{4} - \frac{1x - 22\ 9^2}{} = 1$

50. $\frac{1x - 22\ 4^2}{} - \frac{1 \text{ año} + 32^2}{9} = 1$

51. $1x + 42^2 - 91 \text{ años} - 32^{2 = 9}$

52. $1y - 22^2 - 41x + 22^{2 = 4}$

53. $1y - 32^2 - 1x + 22^{2 = 4}$

54. $1x + 12 - 1y^2 + 22$ 57. $2x2^{2 = 4}$

55. x2 - y2 - 2x - 2y - 1 = 0 58. y2 - 4x2 - 4y - 8x - 4 = 0 61. x2 - 3y2 + 8x - 6y + 4 = 0

56. y2 - x2 - 4y + 4x - 1 = 0 59. 2y2 - x2 + 2x + 8y + 3 = 0 62. y2 - 4x2 - 16x - 2y - 19 = 0

- y2 + 4x + 4y - 4 = 0

60. 4x2 - y2 - 24x - 4y + 16 = 0

En los problemas 63 a 66, grafique cada función. Asegúrese de etiquetar cualquier intercepción. [Pista: observe que cada función es media hipérbola.]

63. f1x2 = - 29 + 9x2

64. f1x2 = 216 + 4x2

65. f1x2 = 2- 1 + x2

66. f1x2 = - 2- 25 + x2

Práctica mixta En los problemas 67 a 74, analice cada ecuación.

67. $\frac{1 \text{ año} + 22^2}{\text{diecisés}} - \frac{1x - 22^2}{4} = 1$

68. $\frac{1x - 32^2}{4} - \frac{y2}{25} = 1$

69. y2 = - 121x + 12

70. x2 = 161y - 32 73. 9x2 - y2 - 18x - 8y - 88 = 0

71. x2 + 36y2 - 2x + 288y + 541 = 0 74. x2 - 6x - 8y - 31 = 0

72. 25x2 + 9y2 - 250x + 400 = 0

Aplicaciones y extensiones

75. Exhibición de fuegos artificiales Supongamos que dos personas paradas a 2 millas de distancia ven la explosión de un espectáculo de fuegos artificiales. Después de un tiempo, la primera persona, parada en el punto A, oye el estallido. Un segundo después, la segunda persona, parada en el punto B, oye el estallido. Si la persona en el punto B está al oeste de la persona en el punto A, y si se sabe que el espectáculo ocurre al norte de la persona en el punto A, ¿dónde ocurrió el espectáculo de fuegos artificiales?

76. Caídas de rayos Supongamos que dos personas paradas a 1 milla de distancia ven un relámpago. Después de un tiempo, la primera persona, parada en el punto A, escucha el trueno.
Dos segundos más tarde, la segunda persona, parada en el punto B, escucha el trueno. Si la persona en el punto B está al oeste de la persona en el punto A, y si se sabe que el rayo ocurrió al norte de la persona que se encuentra en el punto A, ¿dónde ocurrió el rayo?

77. Planta de energía nuclear Algunas plantas de energía nuclear utilizan torres de enfriamiento de “tiro natural” en forma de hiperboloide, un sólido que se obtiene al girar una hipérbola alrededor de su eje conjugado. Supongamos que dicha torre de enfriamiento tiene un diámetro de base de 400 pies y el diámetro en su punto más estrecho, a 360 pies sobre el suelo, es de 200 pies. Si el diámetro en la parte superior de la torre es de 300 pies, ¿qué altura tiene la torre?

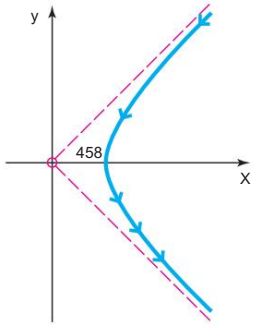
Fuente: Distrito de Gestión de la Calidad del Aire del Área de la Bahía

Machine Translated by Google

78. Una explosión Dos dispositivos de grabación se colocan a 2400 pies de distancia, con el dispositivo en el punto A al oeste del dispositivo en el punto B. En un punto entre los dispositivos a 300 pies del punto B, se detona una pequeña cantidad de explosivo. Los dispositivos de grabación registran el tiempo hasta que el sonido llega a cada uno.

¿A qué distancia directamente al norte del punto B se debe realizar una segunda explosión para que la diferencia de tiempo medida registrada por los dispositivos sea la misma que la de la primera detonación?

79. El experimento de Rutherford En un artículo, había una descripción sobre el movimiento de las partículas alfa cuando se disparan contra un trozo de lámina de oro de 0,00004 cm de espesor. La figura muestra un diagrama del artículo del científico que indica que las partículas alfa desviadas siguen la trayectoria de una rama de una hipérbola.



(a) Encuentre una ecuación de las asíntotas en este escenario.

(b) Si el vértice de la trayectoria de las partículas alfa está a 4 cm del centro de la hipérbola, encuentre un modelo que describa la trayectoria de la partícula.

80. Espejos hiperbólicos Las hipérbolas tienen interesantes propiedades reflectantes que las hacen útiles para lentes y espejos. Por ejemplo, si un rayo de luz incide en un espejo hiperbólico convexo en una línea que (teóricamente) pasaría por su foco trasero, se refleja a través del foco frontal. Esta propiedad, y la de la parábola, se utilizaron para desarrollar el telescopio Cassegrain en 1672. El foco del espejo parabólico y el foco trasero del espejo hiperbólico son el mismo punto. Los rayos son recogidos por el espejo parabólico, luego reflejados hacia el foco (común) y, por lo tanto, son reflejados por el espejo hiperbólico a través de la abertura de su foco frontal, donde se encuentra el ocular. Si la ecuación de y2

la hipérbola es 9 — - x2 — = 1 y la distancia focal (distancia 16

desde el vértice hasta el foco) de la parábola es 6, encuentra la ecuación de la parábola.

Fuente: www.enchantedlearning.com

81. Sombra de lámpara La luz de una lámpara crea una sombra en una pared con un borde hiperbólico. Encuentra la ecuación de la frontera si la distancia entre los vértices es de 18 pulgadas y los focos están a 4 pulgadas de los vértices. Suponga el centro de la La hipérbola está en el origen.

82. Sonic Boom Los aviones, como los aviones de combate, habitualmente se vuelven supersónicos (más rápidos que la velocidad del sonido). Un avión que se mueve más rápido que la velocidad del sonido produce una onda de choque en forma de cono que "retumba" mientras sigue al vehículo. La onda corta el suelo en forma de la mitad de una hipérbola y el área sobre la cual se escucha el "boom" se llama "alfombra del boom". Si un avión crea una onda de choque que cruza el eje y2

terreno en forma de hipérbola 484 $\frac{x2}{\quad} - \frac{\quad}{100} = 1$ (unidades

en millas), ¿qué ancho tiene la “alfombra del auge” a 32 millas detrás del avión?

83. La excentricidad e de una hipérbola se define como el número $\frac{c}{a}$, donde a es la distancia de un vértice al centro y c es la distancia de un foco al centro. Como c 7 a, se deduce que e 7 1. Describe la forma general de una hipérbola cuya excentricidad es cercana a 1. ¿Cuál es la forma si e es muy grande?

84. Una hipérbola en la que a = b se llama hipérbola equilátera. Encuentre la excentricidad e de una hipérbola equilátera.

[Nota: La excentricidad de una hipérbola se define en el problema 83.]

85. Dos hipérbolas que tienen el mismo conjunto de asíntotas se llaman conjugadas. Demuestre que las hipérbolas

$$\frac{x2}{4} - y2 = 1 \quad y \quad y2 - \frac{x2}{4} = 1$$

son conjugados. Grafique cada hipérbola en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

86. Demuestra que la hipérbola

$$\frac{y2}{a2} - \frac{x2}{b2} = 1$$

tiene las dos asíntotas oblicuas

$$y = \frac{a}{b}x \quad e \quad y = -b \qquad \frac{a}{\quad}X$$

87. Problema de desafío Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax2 + Cy2 + F = 0 \; A \cdot 0, C \cdot 0, F \cdot 0$$

donde A y C tienen signos opuestos, es una hipérbola con centro en 10, 02.

88. Problema de desafío Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax2 + Cy2 + Dx + Ey + F = 0 \; A \cdot 0, C \cdot 0$$

donde A y C tienen signos opuestos,

(a) es una hipérbola si $\frac{D2}{4A} + \frac{E2}{4C} - F \cdot 0.$

(b) son dos líneas que se cruzan si $\frac{D2}{4A} + \frac{E2}{4C} - F = 0.$

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 89 a 97 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

89. Para f1x2 = - 2 sen13x + p2 + 5, encuentra la amplitud, período, cambio de fase y cambio vertical.

90. Resuelve el triángulo descrito: a = 7, b = 10 y C = 100°

91. Encuentra las coordenadas rectangulares del punto con la polar. coordenadas a12, - 3b.

92. Transforma la ecuación polar r = 6 sen u en una ecuación en coordenadas rectangulares. Luego identifica y grafica la ecuación.

93. ¿ Cuál es la función inversa para f1x2 = 3ex-1 + 4?

94. Encuentra el área de la región encerrada por las gráficas de y = 29 - x2 e y = x + 3.

95. Resuelve 12x + 32 2 + x2 = 5x12 + x2 + 1.

96. Encuentra el punto medio del segmento de línea que conecta el puntos 13, - 82 y 1 - 2, 52.

97. Evaluar cos asin-1 a x 4 b b.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 522 2. 25/4 3. 10, - 32, 10, 32 4. Verdadero 5. correcto; 5; abajo; 4 6. Verticales: x = - 2, x = 2; horizontal: y = 1

10.5 Rotación de Ejes; Forma general de una cónica

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Fórmulas de suma para seno y coseno (Sección 7.5, págs. 523 y 526)
- Fórmulas de semiángulo para seno y coseno (Sección 7.6, p. 540)
- Fórmulas de doble ángulo para seno y coseno (Sección 7.6, p. 537)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 728.

OBJETIVOS 1 Identificar una cónica (p. 722)
2 Utilice una rotación de ejes para transformar ecuaciones (p. 723)
3 Analizar una ecuación usando una rotación de ejes (p. 726)
4 Identificar cónicas sin rotar los ejes (p. 728)

En esta sección, mostramos que la gráfica de una ecuación polinómica general de segundo grado que contiene dos variables x e y, es decir, una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

donde A, B y C no son todos 0, es una cónica. No nos interesan los casos degenerados de la ecuación (1), como x2 + y2 = 0, cuya gráfica es un único punto 10, 02; o x2 + 3y2 + 3 = 0, cuya gráfica no contiene puntos; o x2 - 4y2 = 0, cuya gráfica son dos rectas, x - 2y = 0 y x + 2y = 0.

Comenzamos con el caso donde B = 0. En este caso, el término que contiene xy no es presente, por lo que la ecuación (1) tiene la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)$$

donde A · 0 o C · 0.

1 Identificar una cónica

Ya hemos discutido cómo identificar la gráfica de una ecuación de esta forma. Completamos los cuadrados de las expresiones cuadráticas en x o y, o en ambos. Entonces la cónica se puede identificar comparándola con una de las formas estudiadas en las secciones 10.2 a 10.4.

Pero la cónica se puede identificar directamente a partir de su ecuación sin completar los cuadrados.

Machine Translated by Google

TEOREMA Identificar cónicas sin completar los cuadrados

Excluyendo los casos degenerados, la ecuación

$$Ax2 + Cy2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C no son ambos iguales a cero:

- Define una parábola si AC = 0.
- Define una elipse (o un círculo) si AC 7 0.
- Define una hipérbola si AC 6 0.

Prueba

- Si AC = 0, entonces A = 0 o C = 0, pero no ambos, entonces la forma de la ecuación (2) es cualquiera

$$Ax2 + Dx + Ey + F = 0 \; A \cdot 0$$

o

$$Cy2 + Dx + Ey + F = 0 \; C \cdot 0$$

Utilizando los resultados de los problemas 80 y 81 al final de la sección 10.2, se deduce que, excepto en los casos degenerados, la ecuación es una parábola.

- Si AC 7 0, entonces A y C tienen el mismo signo. Usando los resultados del problema 90 al final de la sección 10.3, excepto en los casos degenerados, la ecuación es una elipse.
- Si AC 6 0, entonces A y C tienen signos opuestos. Usando los resultados del problema 88 al final de la sección 10.4, excepto en los casos degenerados, la ecuación es una hipérbola.

■

Aunque no estamos estudiando los casos degenerados de la ecuación (2), en la práctica, debes estar alerta a la posibilidad de degeneración.

EJEMPLO 1 Identificar una cónica sin completar los cuadrados

Identifica la gráfica de cada ecuación sin completar los cuadrados.

(a) 3x2 + 6y2 + 6x - 12y = 0 (b) 2x2 - 3y2 + 6y + 4 = 0

(c) y2 - 2x + 4 = 0

Solución

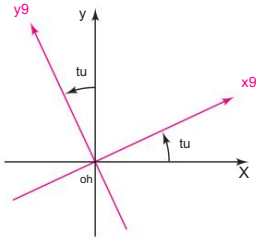
(a) Tenga en cuenta que A = 3 y C = 6. Como AC = 18 7 0, la ecuación define un elipse.

(b) Aquí A = 2 y C = - 3, entonces AC = - 6 6 0. La ecuación define una hipérbola.

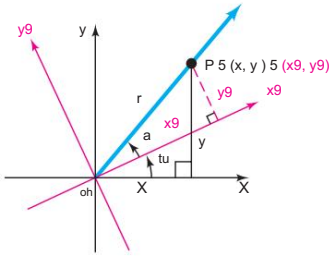
(c) Aquí A = 0 y C = 1, entonces AC = 0. La ecuación define una parábola.

Ahora problema de trabajo 1 1

Aunque ahora podemos identificar el tipo de cónica representada por cualquier ecuación general de segundo grado de la forma (2) sin completar los cuadrados, aún necesitamos completar los cuadrados si deseamos información adicional sobre la cónica, como su gráfica. .



(a)



(b)

Figura 47 Rotación de ejes

2 Utilice una rotación de ejes para transformar ecuaciones

Ahora supongamos que B · 0. Para discutir este caso, introducimos un nuevo procedimiento: la rotación de ejes.

En una rotación de ejes, el origen permanece fijo mientras que los ejes x e y giran un ángulo u hasta una nueva posición; las nuevas posiciones del eje x y del eje y se denotan por x′ e y′, respectivamente, como se muestra en la Figura 47(a).

Ahora mire la Figura 47(b). Allí, el punto P tiene las coordenadas 1x, y2 con respecto al plano xy, mientras que el mismo punto P tiene las coordenadas 1x′, y′2 con respecto al plano x′y′@. Necesitamos relaciones que nos permitan expresar xey en términos de x ′, y ′ y u.

Machine Translated by Google

Como muestra la Figura 47(b), r denota la distancia desde el origen O hasta el punto P, y a denota el ángulo entre el eje x′@ positivo y el rayo de O a P.
Luego, usando las definiciones de seno y coseno, tenemos

$$x' = r \cos a \qquad y' = r \operatorname{sen} a \tag{3}$$

$$x = r \cos(u + a2) \qquad y = r \operatorname{sen}(u + a2) \tag{4}$$

Ahora

$$\begin{aligned} x &= r \cos(u + a2) \\ &= r(\cos u \cos a - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} a2) && \text{Usa la fórmula de la suma para el coseno.} \\ &= (r \cos a) \# \cos u - (r \operatorname{sen} a) \# \operatorname{sen} u \\ &= x' \cos u - y' \operatorname{sen} u && \text{Por la ecuación (3)} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} y &= r \operatorname{sen}(u + a2) \\ &= r(\operatorname{sen} u \cos a + \cos u \operatorname{sen} a2) && \text{Usa la fórmula de la suma para el seno.} \\ &= x' \operatorname{sen} u + y' \cos u && \text{Por la ecuación (3)} \end{aligned}$$

Fórmulas de rotación del TEOREMA

Si los ejes x e y se giran en un ángulo u, las coordenadas (x, y2 de un punto P con respecto al plano xy y las coordenadas (x′, y′2 del mismo punto con respecto al nuevo x′@ y los ejes y′@ están relacionados por las fórmulas

$$x = x' \cos u - y' \operatorname{sen} u \quad y = x' \operatorname{sen} u + y' \cos u \tag{5}$$

EJEMPLO 2 Ejes giratorios

Exprese la ecuación xy = 1 en términos de nuevas coordenadas x′y′@ girando los ejes en un ángulo de 45°. Discuta la nueva ecuación.

Solución Sea u = 45° en las fórmulas (5). Entonces

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Sustituyendo estas expresiones por x e y en xy = 1 se obtiene

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right) = 1$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = 1$$

$$\frac{X'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

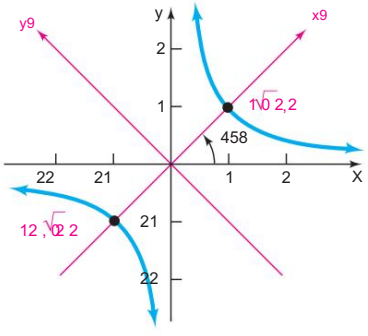


Figura 48 xy = 1

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0) y eje transversal a lo largo del eje x′@. Los vértices están en (±1, 0) en el eje x′@; las asíntotas son y′ = x′ y y′ = - x′ (que corresponden a los ejes x e y originales).

Consulte la Figura 48 para ver la gráfica de xy = 1.

Machine Translated by Google

Como ilustra el Ejemplo 2, una rotación de ejes en un ángulo apropiado puede transformar una ecuación de segundo grado en xey que contiene un término xy en una en x ′ e y′ en la que no aparece ningún término x′y′@ . De hecho, una rotación de ejes en un ángulo apropiado transformará cualquier ecuación de la forma (1) en una ecuación en x′ e y′ sin un término x′y′@.

Para encontrar la fórmula para elegir un ángulo u apropiado para rotar los ejes, comience con la ecuación (1),

$$Ax2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0 \quad B \cdot 0$$

Ahora gire los ejes x e y en un ángulo u usando las fórmulas de rotación (5).

$$\begin{aligned} A1x' \text{ porque } u - y' \text{ sen } u2^{2} &+ B1x' \text{ porque } u - y' \text{ sen } u2\ 1x' \text{ sen } u + y' \cos u2 \\ &+ C1x' \text{ sen } u + y' \cos u2^{2} + D1x' \text{ porque } u - y' \text{ sen } u2 \\ &+ E1x' \text{ sen } u + y' \cos u2 + F = 0 \end{aligned}$$

Expandir y recopilar términos semejantes da

$$\begin{aligned} 1A \cos2\ u + B \text{ sen } u \cos u + C \text{ sen2 } u2x'^{2} &+ 3B1\cos2\ u - \text{sen2 } u2 + 21C - A2\ 1\text{sen } u \cos u2\ 4x'y' \\ &+ 1A \text{ sen2 } u - B \text{ sen } u \cos u + C \cos2\ u2y'^{2} \\ &+ 1D \text{ porque } u + E \text{ sen } u2x' \\ &+ 1 - D \text{ sen } u + E \cos u2y' + F = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

En la ecuación (6), el coeficiente de x′y′ es

$$B1\cos2\ u - \text{sen2 } u2 + 21C - A2\ 1\text{sen } u \cos u2$$

Para eliminar el término x′y′@, seleccione un ángulo u para que este coeficiente sea 0.

$$B1\cos2\ u - \text{sen2 } u2 + 21C - A2\ 1\text{sen } u \cos u2 = 0$$

$$B \cos12u2 + 1C - A2 \text{ sen12u2} = 0 \qquad \text{Fórmulas de doble ángulo}$$

$$B \cos12u2 = 1A - C2 \text{ sen12u2}$$

$$\text{cuna12u2} = \frac{A - C}{B} \qquad B \cdot 0$$

TEOREMA Ángulo de transformación

Para transformar la ecuación

$$Ax2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0 \quad B \cdot 0$$

en una ecuación en x′ e y′ sin un término x′y′@, rotar los ejes un ángulo u que satisfaga la ecuación

$$\text{cuna12u2} = \frac{A - C}{B} \qquad (7)$$

ADVERTENCIA Tenga cuidado si utiliza una calculadora para resolver la ecuación (7).

- Si cot12u2 = 0, entonces 2u = 90° y u = 45°.
- Si cot12u2 · 0, primero encuentre cos12u2. Luego use la(s) tecla(s) de función coseno inverso para obtener 2u, 0° 6 2u 6 180°. Finalmente, divide por 2 para obtener el ángulo agudo correcto u.

La ecuación (7) tiene un número infinito de soluciones para u. Seguimos la convención. de elegir el ángulo agudo u que satisfaga (7). Hay dos posibilidades:

Si cot12u2 Ú 0, entonces 0° 6 2u… 90°, entonces 0° 6 u… 45°.

Si cot12u2 6 0, entonces 90° 6 2u 6 180°, entonces 45° 6 u 6 90°.

Cada uno de estos da como resultado una rotación de los ejes en sentido contrario a las agujas del reloj a través de un ángulo agudo u.*

*Cualquier rotación a través de un ángulo u que satisfaga $\text{cot12u2} = \frac{A - C}{B}$ eliminará el término x′y′.

Sin embargo, la forma final de la ecuación transformada puede ser diferente (pero equivalente), dependiendo del ángulo elegido.

Machine Translated by Google

3 Analizar una ecuación usando una rotación de ejes

Durante el resto de esta sección, la dirección “Analizar la ecuación” significa transformar la ecuación dada para que no contenga ningún término xy y graficar la ecuación.

EJEMPLO 3 Analizar una ecuación usando una rotación de ejes

Analiza la ecuación $x^2 + 23\,xy + 2y^2 - 10 = 0$.

Solución

Dado que hay un término xy, gire los ejes. Usando A = 1, B = 13 y C = 2 en la ecuación (7), el ángulo agudo u de rotación satisface la ecuación

$$\text{cuna}12u2 = \frac{A - C}{B} = \frac{-1}{13} = -\frac{13}{3} \qquad 0° \text{ 6 } 2u \text{ 6 } 180°$$

Dado que $\cot 12u2 = -\frac{13}{3}$, esto significa 2u = 120°, entonces u = 60°. Usando fórmulas (5),

$$x = x'\cos 60° - y'\operatorname{sen} 60° = x' - y' = 2\,2\,\frac{1}{}\qquad \frac{23}{2}\qquad \frac{1}{}\,1x' - 23\,y'2$$

$$y = x'\operatorname{sen} 60° + y'\cos 60° = x' + \qquad \frac{23}{2}\qquad \frac{1}{2}\,y' = 2\,\frac{1}{}\,1\,23\,x' + y'2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación original y simplificando se obtiene

$$x2 + 23\,xy + 2y2 - 10 = 0$$

$$\frac{1}{4}\,1x' - 23\,y'2\qquad ^2 + 23\,\#\qquad c2\,1x' - 23\,y'2\,d\,\#\,c\,1\qquad 2\,1\,23\,x' + y'2\,d + 2\,\#\,c\,1\qquad 4\,1\,23\,x' + y'2\,2\,d = 10$$

Multiplica ambos lados por 4 y expande para obtener

$$X'^2 - 223\,x'y' + 3y'\qquad ^2 + 23\,1\,23\,x'\qquad ^2 - 2x'y' - 23\,y'\qquad 2\,2 + 213x'\,2\,2 + 2 = 40x'y' + y'$$

$$10x'^2 + 2y'^2 = 40$$

$$\frac{X'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1$$

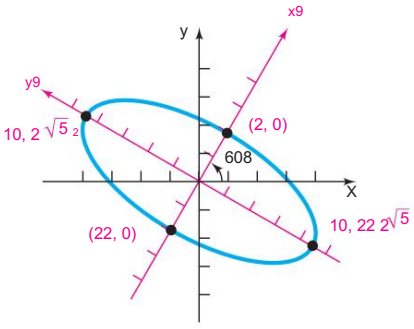


Figura 49 $\frac{X'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1$

Esta es la ecuación de una elipse con centro en 10, 02 y eje mayor a lo largo del eje y'@. Los vértices están en 10, {2152 en el eje y'@. Consulte la Figura 49 para ver el gráfico.

Ahora resuelve los problemas 2 1 y 3 1

En el ejemplo 3, el ángulo agudo u de rotación fue fácil de encontrar debido a que A - C

$\frac{}{B}$ no tiene una solución tan “agradable”. Como muestra el siguiente ejemplo, aún podemos encontrar las fórmulas de rotación apropiadas sin una aproximación de calculadora usando fórmulas de medio ángulo.

números utilizados en la ecuación dada. En general, la ecuación cot12u2 =

EJEMPLO 4 Analizar una ecuación usando una rotación de ejes

Analiza la ecuación $4x^2 - 4xy + y^2 + 525\,x + 5 = 0$.

Machine Translated by Google

Solución Suponiendo que A = 4, B = - 4 y C = 1 en la ecuación (7), el ángulo agudo u para girar el los ejes satisfacen

$$\text{cuna12u2} = \frac{A - C}{B} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Para utilizar las fórmulas de rotación (5), necesitamos conocer los valores de sen u y cos u. Como el ángulo u es agudo, sabemos que sen u 7 0 y cos u 7 0. Utilice las fórmulas del medio ángulo en la forma

$$\text{seno u} = \text{B } \frac{1 - \cos 12u2}{2} \qquad \text{porque tu} = \text{B } \frac{1 + \cos 12u2}{2}$$

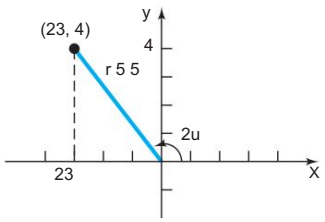


Figura 50 $\cos 12u2 = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5}$

Vea la Figura 50. Porque $\cot 12u2 = -\frac{3}{4}$, entonces 90° 6 2u 6 180°, entonces $\cos 12u2 = -\frac{3}{5}$. Entonces

$$\text{seno u} = \text{B } \frac{1 - \cos 12u2}{2} = \text{R } \frac{1 - \text{un } -\frac{3}{5}\text{ segundo}}{2} = \text{B } \frac{4}{5} = \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{porque tu} = \text{B } \frac{1 + \cos 12u2}{2} = \text{R } \frac{1 + \text{un } -\frac{3}{5}\text{ segundo}}{2} = \text{B } \frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Con estos valores, las fórmulas de rotación (5) son

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}x' - y' = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - 2y'2 \qquad \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' + \frac{\sqrt{5}}{5}y' = 12x' + y'2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación original y simplificando se obtiene

$$4x2 - 4xy + y2 + 525x + \sqrt{5} = 0$$

$$4c\sqrt{5}\,1x' - 2y'2\,d + \qquad - 4c\,\sqrt{5}\,1x' - 2y'2\,pa\,\sqrt{5}\,12x' + y'2\,d$$

$$c\,\sqrt{5}\,12x' + y'2\,d \qquad + 525c\,\sqrt{5}\,1x' - 2y'2\,d = -5$$

Multiplica ambos lados por 5 y expande para obtener

$$41x'^2 - 4x'y' + 4y'22 - 412x' \qquad ^2 - 3x'y' - 2y'22$$

$$+ 4x'^2 + 4x'y' + y' \qquad ^2 + 251x' - 2y'2 = -25$$

$$25y'^2 - 50y' + 25x' = -25 \qquad \text{Combina términos semejantes.}$$

$$y'^2 - 2y' + x' = -1 \qquad \text{Divide ambos lados por 25.}$$

$$y'^2 - 2y' + 1 = -x' \qquad \text{Completa el cuadrado en y'.}$$

$$1y' - 12^2 = -x'$$

Esta es la ecuación de una parábola con vértice en 10, 12 en el plano x'y'@. El eje de simetría es paralelo al eje x'@. Usa una calculadora para resolver sen u = $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, y encuentra que u ≈ 63,4°. Consulte la Figura 51 para ver el gráfico.

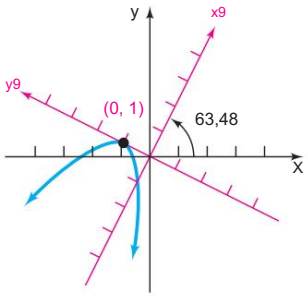


Figura 51 1y' - 122 = - x'

Ahora resuelve el problema 3 7

Machine Translated by Google

4 Identificar cónicas sin rotar los ejes

Supongamos que sólo se nos pide que identifiquemos (en lugar de analizar) la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0 \quad B \cdot 0 \tag{8}$$

Al aplicar las fórmulas de rotación (5) a esta ecuación se obtiene una ecuación de la forma

$$\text{Hacha}'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{9}$$

donde A′, B′, C′, D′, E′ y F′ se pueden expresar en términos de A, B, C, D, E, F y el ángulo u de rotación (ver Problema 55). Se puede demostrar que el valor de B2 - 4AC en la ecuación (8) y el valor de $B'^2 - 4A'C'$ en la ecuación (9) son iguales sin importar el ángulo u de rotación que se elija (ver Problema 57). En particular, si el ángulo u de rotación satisface la ecuación (7), entonces B′ = 0 en la ecuación (9), y B2 - 4AC = - 4A′C′. Dado que la ecuación (9) tiene la forma de la ecuación (2),

$$\text{Hacha}'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Podemos identificar su gráfica sin completar los cuadrados, como hicimos al principio de esta sección. De hecho, ahora podemos identificar la cónica descrita por cualquier ecuación de la forma (8) sin rotar los ejes.

TEOREMA Identificación de cónicas sin girar los ejes

Excepto en casos degenerados, la ecuación

$$Ax2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{10}$$

- Define una parábola si B2 - 4AC = 0.
- Define una elipse (o un círculo) si B2 - 4AC 6 0.
- Define una hipérbola si B2 - 4AC 7 0.

Se le pide que demuestre este teorema en el problema 58. Debido al teorema anterior, la ecuación (10) se llama ecuación general de una cónica.

EJEMPLO 5 Identificar una cónica sin rotar los ejes

Identifica la gráfica de la ecuación 8x2 - 12xy + 17y2 - 425x - 225y - 15 = 0.

Solución Aquí A = 8, B = - 12 y C = 17, entonces B2 - 4AC = - 400. Como B2 - 4AC 6 0, la ecuación define una elipse.

Ahora resuelve el problema 4 3

10.5 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La fórmula de suma para la función seno es sin1A + B2 = . (pág. 526) _____

2. La fórmula del doble ángulo para la función seno es sin12u2 = . (pág. 537) _____

3. Si u es agudo, la fórmula del medio ángulo para la función seno $\text{es pecado}\frac{tu}{2}$ = _____. (pág. 540)

4. Si u es agudo, la fórmula del medio ángulo para la función coseno $\text{es porque}\frac{tu}{2}$ = _____. (pág. 540)

Machine Translated by Google

Conceptos y vocabulario

5. Transformar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $B \cdot 0$ en uno en x' e y' sin un término $x'y'$, gire los ejes un ángulo agudo u que satisfaga la ecuación. _____

6. Opción múltiple Excepto en casos degenerados, la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ define un(n) si $B^2 - 4AC = 0$.
(a) círculo (b) elipse (c) hipérbola (d) parábola

7. Excepto en casos degenerados, la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ define una elipse si _____.

8. Opción múltiple La ecuación $ax^2 + 6y^2 + 12y = 0$ define una elipse si._____
(a) a 6 0 (b) a = 0 (c) a 7 0 (d) a es cualquier número real

9. Verdadero o Falso La ecuación $3x^2 + Bxy + 12y^2 = 10$ define una parábola si B = - 12.

10. Verdadero o Falso Para eliminar el término xy de la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 3y + 5 = 0$, rota los ejes un ángulo u, donde $\cot u = B^2 - 4AC$.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 20, identifica la gráfica de cada ecuación sin completar los cuadrados.

11. $x^2 + 4x + y + 3 = 0$ 12. $2y^2 - 3y + 3x = 0$
13. $2x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$ 14. $6x^2 + 3y^2 - 12x + 6y = 0$
15. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$ 16. $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4 = 0$
17. $y^2 - 8x^2 - 2x - y = 0$ 18. $2y^2 - x^2 - y + x = 0$
19. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 8y = 0$ 20. $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$

En los problemas 21 a 30, determine las fórmulas de rotación apropiadas a utilizar para que la nueva ecuación no contenga ningún término xy.

21. $x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0$ 22. $x^2 - 4xy + y^2 - 3 = 0$
23. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 32 = 0$ 24. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$
25. $11x^2 + 1023xy + y^2 - 4 = 0$ 26. $13x^2 - 623xy + 7y^2 - 16 = 0$
27. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 525y + 5 = 0$ 28. $4x^2 - 4xy + y^2 - 825x - 1625y = 0$
29. $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$ 30. $25x^2 - 36xy + 40y^2 - 12213x - 8213y = 0$

En los problemas 31 a 42, gire los ejes de modo que la nueva ecuación no contenga ningún término xy. Analiza y grafica la nueva ecuación. Consulte los problemas 21 a 30 para conocer los problemas 31 a 40.

31. $x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0$ 32. $x^2 - 4xy + y^2 - 3 = 0$
33. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 32 = 0$ 34. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$
35. $11x^2 + 1023xy + y^2 - 4 = 0$ 36. $13x^2 - 623xy + 7y^2 - 16 = 0$
37. $4x^2 - 4xy + y^2 - 825x - 1625y = 0$ 38. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 525y + 5 = 0$
39. $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$ 40. $25x^2 - 36xy + 40y^2 - 12213x - 8213y = 0$
41. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 60x + 80y = 0$ 42. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 130x + 90y = 0$

En los problemas 43 a 52, identifique la gráfica de cada ecuación sin aplicar una rotación de ejes.

43. $x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + 2y + 5 = 0$ 44. $2x^2 - 3xy + 4y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$
45. $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2 = 0$ 46. $x^2 - 7xy + 3y^2 - y - 10 = 0$
47. $10x^2 + 12xy + 4y^2 - x - y + 10 = 0$ 48. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - x - y = 0$
49. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - x - y = 0$ 50. $10x^2 - 12xy + 4y^2 - x - y - 10 = 0$
51. $3x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y + 10 = 0$ 52. $3x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$

Aplicaciones y extensiones

53. Receptor de satélite Un receptor de satélite parabólico se coloca inicialmente de modo que su eje de simetría sea paralelo al eje x. Un motor permite que el receptor gire y rastree la señal del satélite. Si el receptor girado tiene la ecuación

$$4x^2 - 4\sqrt{21}xy - x + 21y^2 - \frac{221}{2}\sqrt{21}y + 324 = 0$$

¿Qué ángulo agudo giró el receptor, redondeado a la décima de grado más cercana?

54. Entrenador elíptico Un corredor en un entrenador elíptico inclina la máquina para aumentar la dificultad de su entrenamiento. Si la trayectoria elíptica inicial de los pedales tuviera un eje mayor horizontal, y la trayectoria inclinada tiene la ecuación

$$20x^2 - 10xy - x + \frac{89}{2}y^2 - 89y + \frac{19}{2}\sqrt{48} = 0$$

5 ¿En qué ángulo agudo el corredor inclinó la máquina, al décimo de grado más cercano?

Machine Translated by Google

En los problemas 55 a 58, aplique las fórmulas de rotación (5) para

$$Ax2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0$$

para obtener la ecuación

$$\text{Hacha}'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

55. Exprese A′, B′, C′, D′, E′ y F′ en términos de A, B, C, D, E, F y el ángulo u de rotación. [Sugerencia: consulte la ecuación (6).]

56. Demuestre que A + C = A′ + C′, lo que demuestra que A + C es invariante; es decir, su valor no cambia bajo una rotación de ejes.

57. Consulte el problema 56. Demuestre que B2 - 4AC es invariante.

58. Demuestre que, excepto en casos degenerados, la ecuación

$$Ax2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0$$

(a) Define una parábola si B2 - 4AC = 0.
(b) Define una elipse (o un círculo) si B2 - 4AC 6 0.
(c) Define una hipérbola si B2 - 4AC 7 0.

59. Problema de desafío Demuestra que la gráfica de la ecuación a 7 0, es $x1>2 + y1>2 = a1>2$, parte de la gráfica de una parábola.

60. Problema de desafío Utilice las fórmulas de rotación (5) para demostrar que la distancia es invariante bajo una rotación de ejes. Es decir, demuestre que la distancia de P1 = 1x1 , y12 a P2 = 1x2 , y22 en el plano xy es igual a la distancia desde P1 = 1x= 1 , y= 12 a P2 = 1x= 2 , y= 22 en el plano x′y′@.

Explicar conceptos: discusión y escritura

61. Formule una estrategia para analizar y representar gráficamente una ecuación de la forma

$$Ax2 + Cy2 + Dx + Ey + F = 0$$

62. Explique cómo cambia su estrategia presentada en el problema 61 si la ecuación es de la forma

$$Ax2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0$$

Conserve su conocimiento

Los problemas 63 a 71 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

63. Resuelve el triángulo: a = 7, b = 9 y c = 11

64. Encuentra el área del triángulo: a = 14, b = 11, C = 30°

65. Transforma la ecuación xy = 1 de rectangular coordenadas a coordenadas polares.

66. Escribe el número complejo 2 - 5i en forma polar.

67. Simplificar

$$\frac{14x2 - 12^{8} \# 312x + 32^{2} \# 2 - 12x + 32^{3} \# 814x2-12 _^{7} \# 8x}{3\ 14x - 12^{8}{}_{4}{}^{2}}$$

68. Encuentra la asíntota horizontal para la gráfica de f 1x2 = 4ex+1 - 5

69. Resuelve la ecuación log5 x + log5 1x - 42 = 1.

70. La gráfica de $f\ 1x2 = 2x2 + 25 + \frac{1}{2}\sqrt{18 - x2}$ tiene un ¿Mínimo absoluto cuando el $\frac{x}{\text{valor mínimo}} - \frac{1}{} = 0$. ¿Cuál es el 2? 2x2 + 25 se redondea a dos decimales?

71. Si g1x2 = 2x - 7 + 2, encuentre g-1 132.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. sen A cos B + cos A sen B
2. 2 pecado u porque u
3. $B\ 1 - \text{porque tú}^2$
4. $B\ 1 + \text{porque tu}^2$

10.6 Ecuaciones polares de cónicas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Coordenadas polares (Sección 9.1, págs. 612–619)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 735.

OBJETIVOS 1 Analizar y representar gráficamente ecuaciones polares de cónicas (p. 730)

2 Convierta la ecuación polar de una cónica en una ecuación rectangular (p. 734)

1 Analizar y graficar ecuaciones polares de cónicas

En las secciones 10.2 a 10.4, dimos definiciones individuales para parábola, elipse e hipérbola basadas en propiedades geométricas y la fórmula de la distancia. Esta sección presenta una definición alternativa que define simultáneamente todas estas cónicas y se adapta bien a la representación de coordenadas polares. (Consulte la Sección 9.1.)

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Cónica

Sea D una línea fija llamada directriz; sea F un punto fijo llamado foco, que no está en D; y sea e un número positivo fijo llamado excentricidad. Una cónica es el conjunto de puntos P en un plano para el cual la relación entre la distancia de F a P y la distancia de D a P es igual a e. Es decir, una cónica es el conjunto de puntos P para los cuales

$$\frac{d1F, P2}{d1D, P2} = mi \qquad (1)$$

- Si e = 1, la cónica es una parábola.
- Si e 6 1, la cónica es una elipse.
- Si e 7 1, la cónica es una hipérbola.

Observe que si e = 1, la definición de parábola en la ecuación (1) es exactamente la misma que la definición utilizada anteriormente en la Sección 10.2.

En el caso de una elipse, el eje mayor es una línea que pasa por el foco perpendicular a la directriz. En el caso de una hipérbola, el eje transversal es una línea que pasa por el foco perpendicular a la directriz. Tanto para una elipse como para una hipérbola, la excentricidad e satisface

$$mi = \frac{C}{a} \qquad (2)$$

donde c es la distancia del centro al foco y a es la distancia del centro a un vértice.

Tal como hicimos antes usando coordenadas rectangulares, derivamos ecuaciones para las cónicas en coordenadas polares eligiendo una posición conveniente para el foco F y la directriz D. El foco F está ubicado en el polo y la directriz D es paralela o perpendicular. al eje polar.

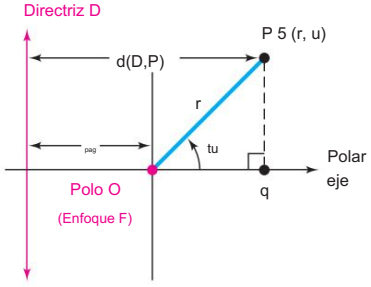


Figura 52

Supongamos que comenzamos con la directriz D perpendicular al eje polar en un distancia p unidades a la izquierda del polo (el foco F). Ver Figura 52.

Si P = 1r, u2 es cualquier punto de la cónica, entonces, según la ecuación (1),

$$\frac{d1F, P2}{} = e \text{ o } d1F, P2 = e \# d1D, P2 \; d1D, P2 \qquad (3)$$

Ahora use el punto Q obtenido al dejar caer la perpendicular de P al eje polar para calcular d1D, P2.

$$d1D, P2 = p + d1O, Q2 = p + r \text{ porque } u \qquad (4)$$

Como el foco F está en el polo (origen), se deduce que

$$d1F, P2 = d1O, P2 = r \qquad (5)$$

Utilice los resultados de las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (3).

Entonces

$$d1F, P2 = e \# d1D, P2$$

Ecuación (3)

$$r = e1p + r \text{ porque } u2$$

d1F, P2· r; d1D, P2 · p · r porque u

$$r = ep + er \text{ porque } u$$

$$r - er \text{ porque } u = ep$$

$$r11 - e \text{ porque } u2 = ep$$

$$r = \frac{\text{episodio}}{1 - e \text{ porque } u}$$

Machine Translated by Google

TEOREMA Ecuación polar de una cónica; Centrarse en el polo; Directora Perpendicular al eje polar una distancia p a la izquierda del polo

La ecuación polar de una cónica con foco en el polo y directriz perpendicular al eje polar a una distancia p a la izquierda del polo es

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos u} \qquad (6)$$

donde e es la excentricidad de la cónica.

EJEMPLO 1 Analizar y representar gráficamente la ecuación polar de una cónica

Analiza y grafica la ecuación $r = \dfrac{4}{2 - \cos u}$.

Solución

La ecuación no tiene la forma de la ecuación (6), ya que el primer término en el denominador es 2 en lugar de 1. Divide el numerador y el denominador entre 2 para obtener

$$r = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}\cos u} \quad \text{o} \quad r = \frac{ep}{1 - e\cos u}$$

Esta ecuación tiene la forma de ecuación (6), con

$$e = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad ep = 2$$

Entonces

$$\frac{1}{2}p = 2, \text{ entonces } p = 4$$

Dado que $e = \frac{1}{2} < 1$, la cónica es una elipse. Un foco está en el polo y la directriz es perpendicular al eje polar, p = 4 unidades a la izquierda del polo. El eje mayor está a lo largo del eje polar. Para encontrar los vértices, sean u = 0 y u = p. los vértices de la elipse son $\left(2, 0\right)$ y un $\left(4\sqrt{3}, p\right)$. El centro de la elipse es el punto medio de los vértices, es decir, un $\left(\sqrt{3}, 0\right)$. [¿Ves por qué? Los vértices $\left(2, 0\right)$ y $\left(4\sqrt{3}, p\right)$ en coordenadas polares son $\left(2, 0\right)$ y $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, 0\right)$ en coordenadas rectangulares. El punto medio en coordenadas rectangulares es un $\left(\sqrt{3}, 0\right)$, que también es un $\left(4\sqrt{3}, 0\right)$ en coordenadas polares.] Entonces a = distancia del centro a un vértice $= \frac{8}{3}$. Usando $a = \frac{8}{3}$ y $e = \frac{1}{2}$ en la ecuación (2), $e = \frac{c}{a}$, produce $c = ae = \frac{4}{3}$. Finalmente, usando $a = \frac{8}{3}$ y $c = \frac{4}{3}$ en $b^2 = a^2 - c^2$ produce

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9}$$

$$b = \sqrt{\frac{48}{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

La Figura 53 muestra el gráfico.

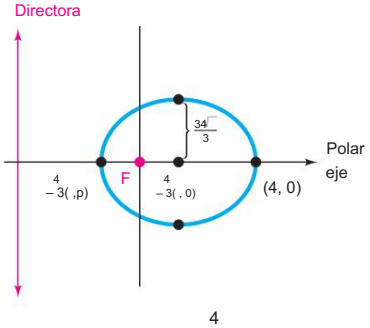


Figura 53 $r = \dfrac{4}{2 - \cos u}$

Ahora problema de trabajo 11

Machine Translated by Google

Exploración

Gráfica r1 = $\frac{4}{2 + \text{porque tú}}$ y compare el resultado con la Figura 53. ¿A qué conclusión llega? Limpiar el pantalla y gráfico r1 = $\frac{4}{2 - \text{pecado u}}$ y luego r1 = $\frac{4}{+ \text{sen u}}$. Compara cada una de estas gráficas con 2 Figura 53. ¿A qué conclusión llega?

La ecuación (6) supone que la directriz es perpendicular al eje polar a una distancia p unidades a la izquierda del polo. Si la directriz es perpendicular al eje polar a una distancia p unidades a la derecha del polo, entonces

$$r = \frac{\text{episodio}}{1 + e \text{ porque u}}$$

Véase el problema 43.

En los problemas 44 y 45, se le pide derivar las ecuaciones polares de cónicas con foco en el polo y directriz paralela al eje polar. La Tabla 5 resume las ecuaciones polares de las cónicas.

Tabla 5

Ecuaciones polares de cónicas (foco en el polo, excentricidad e)

Ecuación	Descripción
$r = \frac{\text{episodio}}{1 - e \text{ porque u}}$	La directriz es perpendicular al eje polar a una distancia p unidades a la izquierda del polo.
$r = \frac{\text{episodio}}{1 + e \text{ porque u}}$	La directriz es perpendicular al eje polar a una distancia p unidades a la derecha del polo.
$r = \frac{\text{episodio}}{1 + e \text{ sen u}}$	La directriz es paralela al eje polar a una distancia p unidades por encima del polo.
$r = \frac{\text{episodio}}{1 - e \text{ pecado u}}$	La directriz es paralela al eje polar a una distancia p unidades por debajo del polo.
Excentricidad	
• Si e = 1, la cónica es una parábola; el eje de simetría es perpendicular a la directriz.	
• Si e 6 1, la cónica es una elipse; el eje mayor es perpendicular a la directriz.	
• Si e 7 1, la cónica es una hipérbola; el eje transversal es perpendicular a la directriz.	

EJEMPLO 2 Analizar y representar gráficamente la ecuación polar de una cónica

Analiza y grafica la ecuación $r = \frac{6}{3 + 3 \text{ sen u}}$.

Solución Para poner la ecuación en la forma adecuada, divide el numerador y el denominador entre 3.

$$r = \frac{2}{1 + \text{pecado u}}$$

Consulte la Tabla 5. Esta cónica tiene su directriz paralela al eje polar, una distancia p unidades por encima del polo.

$$e = 1 \text{ y } ep = 2$$

$$p = 2 \text{ mi} \cdot 1$$

Como e = 1, la cónica es una parábola con foco en el polo. La directriz es paralela al eje polar 2 unidades por encima del polo; el eje de simetría es perpendicular al eje polar.

El vértice de la parábola está en a1, p $\overline{\quad}$ 2b. (¿Ves por qué?) Consulta la Figura 54 para ver el gráfico. Observe que se trazan dos puntos adicionales, 12, 02 y 12, p2, para ayudar en la gráfica.

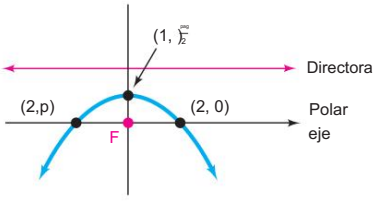


Figura 54 r = $\frac{6}{3 + 3 \text{ sen u}}$

Ahora resuelve el problema 1 3

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Analizar y representar gráficamente la ecuación polar de una cónica

Analiza y grafica la ecuación $r = \dfrac{3}{1 + 3\cos u}$.

Solución

La cónica tiene su directriz perpendicular al eje polar, una distancia p unidades a la derecha del polo. Ver Tabla 5.

$$e = 3 \text{ y } ep = 3$$

$$p = 1 \text{ mi} \cdot 3$$

Como e = 3 7 1, la cónica es una hipérbola con foco en el polo. La directriz es perpendicular al eje polar, 1 unidad a la derecha del polo. El eje transversal es

a lo largo del eje polar. Para encontrar los vértices, sean u = 0 y u = p. Los vértices son un $\frac{3}{4}$, 0b y a $-\frac{3}{2}$, pb, es decir, un $\frac{3}{2}$, pb. El centro, que está en el punto medio de un $\frac{3}{4}$, 0b y a $-\frac{3}{2}$, 0b, es un $\frac{9}{8}$, 0b. Entonces c = distancia del centro a un foco = $\frac{9}{8}$. Usando la ecuación (2), obtenemos

$$3 = \frac{\frac{9}{8}}{a} \text{ o un } = \frac{3}{8} \text{ mi} \cdot \frac{c}{a}$$

Entonces,

$$b2 = c2 - a2 = 64 \quad \frac{81}{} - \frac{9}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{3}{\text{segundo} = 212} = \frac{312}{4}$$

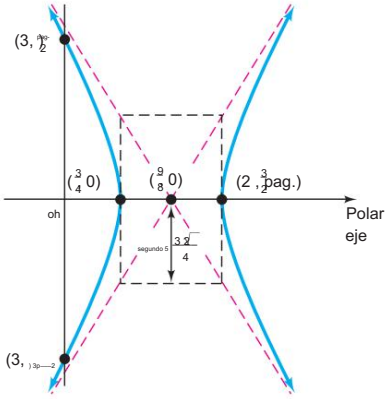


Figura 55 $r = \dfrac{3}{1 + 3 \text{ porque tú}}$

La Figura 55 muestra el gráfico. Observe dos puntos adicionales, a3, p $\frac{}{2b}$ y a3, 3p $\frac{}{2b}$, son Se traza en la rama izquierda y se utiliza la simetría para obtener la rama derecha. Las asíntotas de la hipérbola se encontraron construyendo el rectángulo que se muestra.

Ahora resuelve el problema 1 7

2 Convertir la ecuación polar de una cónica en una ecuación rectangular

EJEMPLO 4 Convertir una ecuación polar en una ecuación rectangular

Convertir la ecuación polar

$$r = \frac{1}{3 - 3 \text{ porque tú}}$$

a una ecuación rectangular.

Solución

La estrategia aquí es reorganizar la ecuación y elevar al cuadrado ambos lados antes de convertir la ecuación en coordenadas polares a una ecuación en coordenadas rectangulares.

$$r = \frac{1}{3 - 3 \text{ porque tú}}$$

$$3r - 3r \text{ porque u} = 1$$

$$3r = 1 + 3r \text{ porque tu} \qquad \text{Reordena la ecuación.}$$

$$2\ 9r = 11 + 3r \text{ porque u2}^{\,2} \qquad \text{Cuadre ambos lados.}$$

$$91x2 + y22 = 11 + 3x2\ 9x2^{\,2} \qquad x2 \cdot y2 \cdot r2;\ x \cdot r \text{ porque U}$$

$$+ 9y2 = 9x2 + 6x + 1$$

$$9y2 = 6x + 1$$

Esta es la ecuación de una parábola en coordenadas rectangulares.

Ahora resuelve el problema 2 5

Machine Translated by Google

10.6 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Si 1x, y2 son las coordenadas rectangulares de un punto P y 1r, u2 son sus coordenadas polares, entonces x = e y = (págs. 612 a 619) ____ .

2. Transforma la ecuación r = 6 cos u desde coordenadas polares a coordenadas rectangulares. (págs. 612–619)

Conceptos y vocabulario

3. A es el conjunto de puntos P en un plano para el cual la relación entre la distancia desde un punto fijo F, llamado a P , y la distancia desde una línea fija D, llamada a P, es igual a una constante e. _____ ,

4. Una cónica tiene excentricidad e. Si e = 1, la cónica es a(n) _____ Si e 6 1, la cónica es a(n) _____ Si e 7 1, la cónica es a(n) _____ .

5. Opción múltiple Si 1r, u2 son coordenadas polares, la ecuación $r = \frac{2}{2 + 3 \text{ sen } u}$ define un(a) _____.

(a) parábola (b) hipérbola (c) elipse (d) círculo

6. Verdadero o Falso La excentricidad e de una elipse es $\frac{c}{a}$, donde está _ la distancia de un vértice al centro y c es la distancia de un foco al centro.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 12, identifique la cónica definida por cada ecuación polar. También indique la posición de la directriz.

7. $r = \frac{3}{1 - \text{pecado } u}$

8. $r = \frac{1}{1 + \text{porque tú}}$

9. $r = \frac{2}{1 + 2 \text{ porque tú}}$

10. $r = \frac{4}{2 - 3 \text{ pecado } u}$

11. $r = \frac{3}{4 - 2 \text{ porque tú}}$

12. $r = \frac{6}{8 + 2 \text{ sen } u}$

En los problemas 13 a 24, analice cada ecuación y grafíela.

13. $r = \frac{1}{1 + \text{porque tú}}$

14. $r = \frac{3}{1 - \text{pecado } u}$

15. $r = 5\ \frac{10}{+ 4 \text{ porque tu}}$

16. $r = \frac{8}{4 + 3 \text{ sen } u}$

17. $r = \frac{9}{3 - 6 \text{ porque tú}}$

18. $r = \frac{12}{4 + 8 \text{ sen } u}$

19. $r = 2\ \frac{8}{+ 4 \text{ porque u}}$

20. $r = \frac{8}{2 - \text{pecado } u}$

21. r12 - porque u2 = 2

22. r13 - 2 sen u2 = 6

23. $r = \frac{3 \csc u}{\csc u - 1}$

24. $r = \frac{6 \text{ segundos}}{2 \text{ segundos } u - 1}$

En los problemas 25 a 36, convierta cada ecuación polar en una ecuación rectangular.

25. $r = \frac{1}{1 + \text{porque tú}}$

26. $r = \frac{3}{1 - \text{pecado } u}$

27. $r = 5\ \frac{10}{+ 4 \text{ porque tu}}$

28. $r = \frac{8}{4 + 3 \text{ sen } u}$

29. $r = \frac{12}{4 + 8 \text{ sen } u}$

30. $r = \frac{9}{3 - 6 \text{ porque tú}}$

31. $r = 2\ \frac{8}{+ 4 \text{ porque tu}}$

32. $r = \frac{8}{2 - \text{pecado } u}$

33. r12 - porque u2 = 2

34. r13 - 2 sen u2 = 6

35. $r = \frac{3 \csc u}{\csc u - 1}$

36. $r = \frac{6 \text{ segundos}}{2 \text{ segundos } u - 1}$

En los problemas 37 a 42, encuentre una ecuación polar para cada cónica. Para cada uno, un foco está en el polo.

37. mi = 1; la directriz es paralela al eje polar, 2 unidades por debajo del polo.

38. e = 1; directriz es paralela al eje polar, 1 unidad arriba El polo.

39. mi = $\frac{2}{3}$; directriz es paralela al eje polar, 3 unidades por encima de 3 El polo.

40. mi = $\frac{4}{5}$; directriz es perpendicular al eje polar, 3 unidades a 5 la izquierda del polo.

41. mi = 5; La directriz es perpendicular al eje polar, 5 unidades a la derecha del polo.

42. mi = 6; directriz es paralela al eje polar, 2 unidades por debajo El polo.

Aplicaciones y extensiones

43. Deducir $r = \frac{\text{episodio}}{+ e \cos u}$ de la Tabla 5. 1

44. Deducir $r = \frac{\text{episodio}}{+ e \text{ sen } u}$ de la Tabla 5. 1

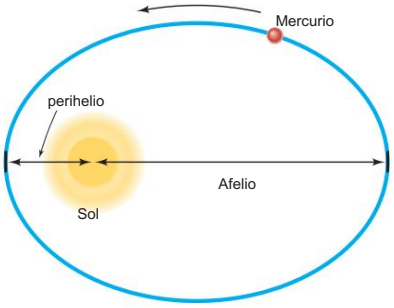
45. Deducir $r = \frac{\text{episodio}}{1 - e \text{ pecado } u}$ de la Tabla 5.

Machine Translated by Google

46. Órbita de Mercurio El planeta Mercurio viaja alrededor del Sol en una órbita elíptica dada aproximadamente por

$$r = \frac{3.442 * 107}{1 - 0.206 \text{ porque } u}$$

donde r se mide en millas y el Sol está en el polo. Encuentre la distancia de Mercurio al Sol en el afelio (la mayor distancia del Sol) y en el perihelio (la menor distancia del Sol). Ver la figura. Utilice el afelio y el perihelio para representar gráficamente la órbita de Mercurio utilizando una utilidad gráfica.



47. El cometa Halley El cometa Halley viaja alrededor del Sol en una órbita elíptica dada aproximadamente por

$$r = \frac{1.155}{1 - 0.967 \text{ porque } u}$$

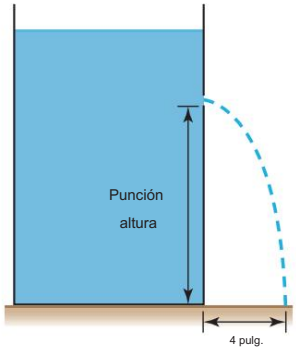
donde el Sol está en el polo y r se mide en AU (unidades astronómicas). Encuentre la distancia del cometa Halley al Sol en el afelio y en el perihelio. Utilice el afelio y el perihelio para representar gráficamente la órbita del cometa Halley utilizando una utilidad gráfica.

48. Desafío Problema Fuga de agua Un tanque se perfora en un costado y el agua comienza a salir en una trayectoria parabólica. Si el camino del agua está dado por

$$r = \frac{0,8}{1 + \text{pecado } u}$$

y el agua golpea el suelo a 4 pulgadas de la base del tanque, ¿cuál es la altura del pinchazo desde la base del tanque?

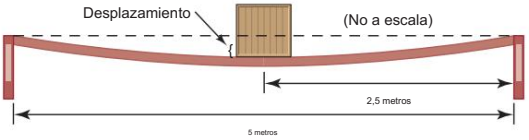
Supongamos que el foco está en El polo.



49. Desafío Problema Deflexión del tablero Se coloca una caja en el centro de un tablero de 5 metros que se apoya solo en sus extremos. El peso de la caja provoca una desviación del tablero en su centro. Si la forma de la tabla desviada es una parábola dada por

$$r = \frac{250}{1 - \text{pecado } u}$$

determine la cantidad de deflexión en el centro suponiendo que el foco está en el polo.



50. Problema de desafío Supongamos que una cónica tiene una ecuación de la forma $r = \frac{\text{episodio}}{1 - e \text{ pecado } u}$. Si las coordenadas polares de dos los puntos en el gráfico son aM, p2 by am, 3p 2b, muestra que

$$\text{mi} = \frac{m - m}{m + m} \quad \text{yp} = _ \quad \frac{2 \text{ mm}}{m - m}$$

51. Desafío Problema Velocidad de escape Desde la física, la ecuación para la trayectoria de vuelo libre de un satélite lanzado a una distancia r0 del centro de la Tierra viene dada por la ecuación polar

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r0} \text{ a1 - } \frac{GMe}{r0v2\ 0} \text{ porque tu + } \frac{GMe}{r_{\ 2\ 0v2\ 0}}$$

donde Me es la masa de la Tierra, G es la constante gravitacional y v0 es la velocidad inicial del satélite. Si la velocidad inicial es igual a la velocidad de escape (la velocidad necesaria para superar la atracción gravitacional de la Tierra), entonces la trayectoria resultante sigue una trayectoria parabólica. ¿Cuál es la velocidad de escape?

Conserve su conocimiento

Los problemas 52 a 61 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

52. Encuentra el área del triángulo descrito: a = 7, b = 8 y c = 10. Redondea a dos decimales.

53. Sin representar gráficamente, determine la amplitud y el período.

de y = 4 cosa 1 5xb .

54. Resuelve: 2 cos2 x + cos x - 1 = 0, 0 … x 6 2p

55. Para v = 10i - 24j, encuentre 7 v 7 .

56. Si una longitud de arco de 14 pies subtiende un ángulo central de 105°, ¿Cual es el radio del circulo?

57. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 15 años. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que quede el 40% de la muestra?

58. Determina dónde está la función.

f1x2 = e x + x3 si 12i… x 6 - 1 x Ú - 1

es creciente, decreciente y constante.

59. Encuentra k para que y = sin1kx2 tenga un período de $\frac{5p}{6}$.

60. Escribe la forma de vértice de la función cuadrática cuya gráfica tiene los vértices 1 - 3, 82 y el intercepto en y 5.

61. Encuentra el área de la región delimitada por la gráfica de

f1x2 = x + 3, el eje x y las líneas verticales x = 0 2 y x = 8.

Machine Translated by Google

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. r porque tu; r pecado u 2. x2 + y2 = 6x o 1x - 32 2 + y2 = 9

10.7 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Amplitud y período de gráficas sinusoidales (sección 6.4, págs. 446 a 448)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problema en la página 746.

OBJETIVOS 1 Graficar ecuaciones paramétricas (p. 737)

2 Encuentre una ecuación rectangular para una curva plana definida paramétricamente (pág. 738)

3 Utilice el tiempo como parámetro en ecuaciones paramétricas (p. 740)

4 Encuentre ecuaciones paramétricas para curvas planas definidas por ecuaciones rectangulares (p. 743)

Las ecuaciones de la forma y = f1x2, donde f es una función, tienen gráficas que son intersecadas no más de una vez por cualquier línea vertical. Las gráficas de muchas de las cónicas y algunas otras más complicadas no tienen esta característica. Sin embargo, cada gráfica, como la gráfica de una función, es una colección de puntos 1x, y2 en el plano xy; es decir, cada una es una curva plana. Esta sección analiza otra forma de representar dichos gráficos.

DEFINICIÓN Ecuaciones Paramétricas y Curvas Planas

Supongamos que x = x1t2 e y = y1t2 son dos funciones de una tercera variable t, llamada parámetro, que se definen en el mismo intervalo I. Entonces las ecuaciones

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

donde t está en I, se llaman ecuaciones paramétricas, y la gráfica de los puntos definidos por

$$(x, y) = (x(t), y(t))$$

se llama curva plana.

1 Graficar ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas son particularmente útiles para describir el movimiento a lo largo de una curva plana. Supongamos que una curva plana está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \le t \le b$$

donde cada función se define en el intervalo a … t … b. Para un valor dado de t, los valores de x = x1t2 e y = y1t2 determinan un punto 1x, y2 en la curva. De hecho, como t varía en el intervalo de t = a a t = b, los valores sucesivos de t determinan la dirección del movimiento a lo largo de la curva. Es decir, la curva se traza en una determinada dirección mediante la correspondiente sucesión de puntos 1x, y2. Consulte la Figura 56. Las flechas muestran la dirección u orientación a lo largo de la curva cuando t varía de a a b.

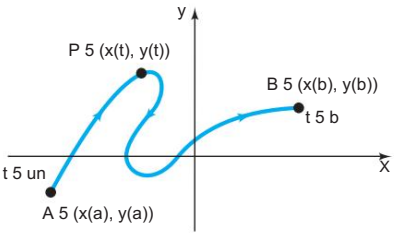


Figura 56 Curva plana

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1

Graficar una curva plana

Grafique la curva plana definida por las ecuaciones paramétricas.

$$x1t2 = 3t^2 \qquad y1t2 = 2t - 2 \ldots t \ldots 2 \qquad (1)$$

Solución

A cada número t, - 2 … t … 2, le corresponde un número x y un número y.
Por ejemplo, cuando t = - 2, entonces x = 31 - 22 = 12 e y = 21 - 22 = - 4. Cuando t = 0, entonces x = 0 e y = 0. Prepare una tabla que enumere varias opciones de parámetro t y los valores correspondientes para x e y, como se muestra en la Tabla 6. Trace estos puntos y conéctelos con una curva suave, como se muestra en la Figura 57. Las flechas en la Figura 57 indican la orientación.

COMENTARIO La mayoría de las utilidades gráficas tienen la capacidad de representar gráficamente ecuaciones paramétricas. Consulte la Sección B.9. ■

Tabla 6

t	x1t2 _	y 1t2	(x,y)
-2	12	-4	(12, -4)
-1	3	-2	(3, -2)
0	0	0	(0, 0)
1	3	2	(3, 2)
2	12	4	(12, 4)

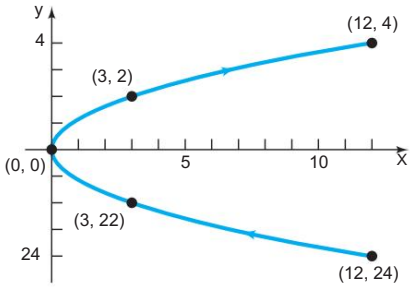


Figura 57
x(t) = 3t 2, y(t) = 2t, -2 … t … 2

Exploración

Grafique las siguientes ecuaciones paramétricas utilizando una utilidad gráfica con Xmin = 0, Xmax = 15, Ymin = - 5, Ymax = 5 y Tstep = 0,1.

1. $x1t2 = \frac{3t^2}{4}$, y1t2 = t, - 4 … t … 4
2. $x1t2 = 3t^2 + 12t + 12$, $y1t2 = 2t + 4$, - 4 … t … 0
3. $x1t2 = 3t^{\frac{2}{3}}$, $y1t2 = 223\,t$, - 8 … t … 8

Compare estos gráficos con la Figura 57. Concluya que las ecuaciones paramétricas que definen una curva plana no son únicas; es decir, diferentes ecuaciones paramétricas pueden representar la misma gráfica.

2 Encuentre una ecuación rectangular para una curva plana definida paramétricamente

La curva plana dada en el ejemplo 1 debería resultarle familiar. Para identificarlo con precisión, encuentre la ecuación rectangular correspondiente eliminando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas dadas en el Ejemplo 1:

$$x1t2 = 3t^2 \qquad y1t2 = 2t - 2 \ldots t \ldots 2$$

Resuelva para t en y = 2t, obteniendo $t = \frac{y}{2}$, y sustituir esta expresión en la otra ecuación para obtener

$$2x = 3t^2 = 3a\,y_{\text{segundo}}^{2} = \frac{3y2}{4}$$

$$t \cdot \frac{y}{2}$$

Esta ecuación, $x = \frac{3y2}{4}$, es la ecuación de una parábola con vértice en 10, 02 y eje de simetría a lo largo del eje x. Nos referimos a esta ecuación como ecuación rectangular.
de la curva para distinguirla de las ecuaciones paramétricas.

Machine Translated by Google

Exploración

Gráfico

$x = \frac{3y2}{4}$ ay1 = A 4x3 y y2 = - A 4x 3 segundo

usando una utilidad gráfica con Xmin = 0, Xmáx = 15, Ymín = - 5, Ymáx = 5.

Compare el gráfico con la Figura 57.

¿Por qué difieren los gráficos?

Tenga en cuenta que la curva plana definida por la ecuación (1) y que se muestra en la Figura 57 es solo una parte de la parábola $x = \frac{3y2}{4}$. La gráfica de la ecuación rectangular obtenida por

La eliminación del parámetro contendrá, en general, más puntos que la curva plana original. Por lo tanto, se debe tener cuidado al graficar una curva plana después de eliminar el parámetro. Aun así, eliminar el parámetro t de las ecuaciones paramétricas para identificar con precisión una curva plana es a veces un mejor enfoque que trazar puntos.

EJEMPLO 2

Encontrar la ecuación rectangular de una curva plana Definido paramétricamente

Encuentre la ecuación rectangular de la curva plana cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x1t2 = a \cos t \qquad y1t2 = a \operatorname{sen} t \quad - q \ 6 \ t \ 6 \ q$$

donde a 7 0 es una constante. Grafique la curva plana e indique su orientación.

Solución

La presencia de senos y cosenos en las ecuaciones paramétricas sugiere utilizar una identidad pitagórica. De hecho, desde

$$\text{porque } t = \frac{x}{a} \qquad y \qquad \text{pecado } t = \frac{y}{a}$$

esto significa que

$$\frac{2}{\text{una. x segundo}} + \frac{2}{a \text{ y segundo}} = 1 \quad \cos 2\, t \cdot \operatorname{sen} 2\, t \cdot 1$$

$$x2 + y2 = a2$$

La curva plana es un círculo con centro en 10, 02 y radio a. Como parámetro t aumenta, digamos desde t = 0 3 el punto 1a, 02 4 a $t = \frac{\text{pag}}{2}$ 3 el punto 10, a2 4 a t = p

2 3 el punto 1 - a, 02 4 , los puntos correspondientes se trazan en sentido antihorario alrededor del círculo. La orientación es la indicada en la Figura 58.

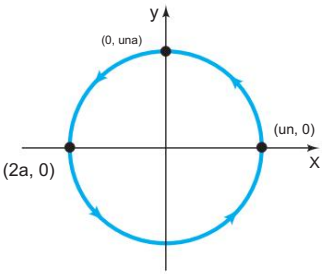


Figura 58
x1t2 = a cos t, y1t2 = a sen t

Ahora resuelve los problemas 7 y 1 9.

Analicemos más a fondo la curva plana del ejemplo 2. El dominio de cada ecuación paramétrica es - q 6 t 6 q. Entonces, la gráfica de la Figura 58 se repite cada vez que t aumenta en 2p.

Si quisiéramos que la curva consistiera exactamente en 1 revolución en el sentido antihorario, podríamos escribir

$$x1t2 = a \cos t \qquad y1t2 = a \operatorname{sen} t \quad 0 \ldots t \ldots 2p$$

Esta curva comienza en t = 0 [el punto 1a, 02, continúa en sentido antihorario alrededor del círculo y termina en t = 2p [también el punto 1a, 02].

Si quisiéramos que la curva conste exactamente de tres revoluciones en el sentido contrario a las agujas del reloj, podríamos escribir

$$x1t2 = a \cos t \qquad y1t2 = a \operatorname{sen} t \quad - 2p \ldots t \ldots 4p$$

o

$$x1t2 = a \cos t \qquad y1t2 = un \operatorname{sen} t \qquad 0 \ldots t \ldots 6p$$

o

$$x1t2 = a \cos t \qquad y1t2 = un \operatorname{sen} t \qquad 2p \ldots t \ldots 8p$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Describir ecuaciones paramétricas

Encuentre ecuaciones rectangulares para las siguientes curvas planas definidas por ecuaciones paramétricas. Grafique cada curva.

(a) x1t2 = a cos t y1t2 = a sen t (b) x1t2 = - a sen t y1t2 = - a cos t 0 … t … p a 7 0 0 … t … p a 7 0

Solución

(a) Elimine el parámetro t usando una identidad pitagórica.

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

La curva plana definida por estas ecuaciones paramétricas se encuentra en un círculo con radio a y centro en 10, 02. La curva comienza en el punto 1a, 02, cuando t = 0; pasa por el punto 10, a2, cuando t = cuando t = p. Las ecuaciones paramétricas $\frac{\text{pag}}{}$; y termina en el punto 1 - a, 02, 2 definen el semicírculo superior de un círculo de radio a con orientación antihoraria. Ver Figura 59.

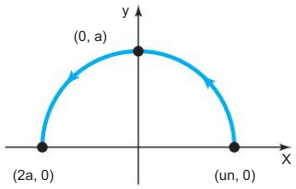


Figura 59
x1t2 = a cos t y1t2 = a sen t 0 … t … p a 7 0

La ecuación rectangular es

$$y = \sqrt{2a^2 - x^2} - a \ldots x \ldots a$$

(b) Elimine el parámetro t usando una identidad pitagórica.

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

La curva plana definida por las ecuaciones paramétricas se encuentra en un círculo con radio a y centro en 10, 02. La curva comienza en el punto 10, - a2, cuando t = 0; pasa por el punto 1 - a, 02, cuando t = $\frac{\text{pag}}{}$; y termina en el punto 10, a2, 2 cuando t = p. Las ecuaciones paramétricas definen el semicírculo izquierdo de un círculo de radio a con orientación en el sentido de las agujas del reloj. Ver Figura 60.

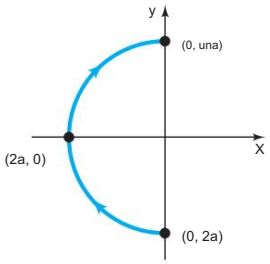


Figura 60
x1t2 = - a sen t y1t2 = - a cos t 0 … t … p a 7 0

La ecuación rectangular es

$$x = -\sqrt{2a^2 - y^2} - a \ldots y \ldots a$$

El ejemplo 3 ilustra la versatilidad de las ecuaciones paramétricas para reemplazar ecuaciones rectangulares complicadas, al tiempo que proporciona información adicional sobre la orientación. Estas características hacen que las ecuaciones paramétricas sean muy útiles en aplicaciones como el movimiento de proyectiles.

3 Utilice el tiempo como parámetro en ecuaciones paramétricas

Si pensamos en el parámetro t como tiempo, entonces las ecuaciones paramétricas x = x1t2 e y = y1t2 especifican cómo las coordenadas xey de un punto en movimiento varían con el tiempo .

Por ejemplo, podemos usar ecuaciones paramétricas para modelar el movimiento de un objeto, a veces denominado movimiento curvilíneo. Usando ecuaciones paramétricas, podemos especificar no sólo adónde viaja el objeto (es decir, su ubicación 1x, y2), sino también cuándo llega allí (es decir, el tiempo t).

Cuando un objeto es impulsado hacia arriba con una inclinación u con respecto a la horizontal con velocidad inicial v0 , el movimiento resultante se llama movimiento de proyectil.

Machine Translated by Google

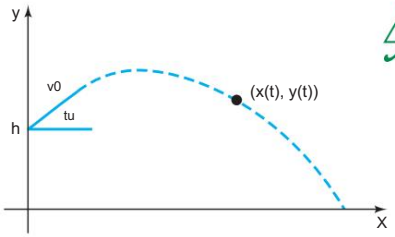


Figura 61 Movimiento del proyectil

En cálculo se demuestra el siguiente resultado.

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un proyectil disparado con una inclinación u con respecto a la horizontal, con una velocidad inicial v0 , desde una altura h sobre la horizontal, son

$$x1t2 = 1v0 \text{ porque } u2t \qquad y1t2 = -\frac{1}{2}gt2 + 1v0 \text{ sen } u2t + h \qquad (2)$$

donde t es el tiempo y g es la aceleración constante debida a la gravedad (aproximadamente 32 pies/seg2 , o 9,8 m/seg2).

Ver Figura 61.

EJEMPLO 4

Movimiento de proyectiles

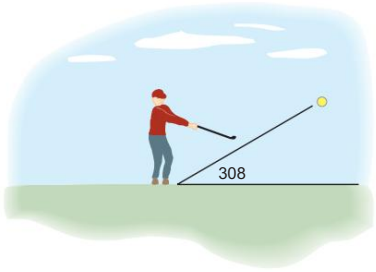


Figura 62

Supongamos que Jim golpea una pelota de golf con una velocidad inicial de 150 pies por segundo en un ángulo de 30° con la horizontal. Ver Figura 62.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que describan la posición de la pelota como una función de tiempo.

(b) ¿Cuánto tiempo estuvo la pelota de golf en el aire?

(c) ¿Cuándo estuvo la pelota a su altura máxima? Encuentra la altura máxima de la pelota.

(d) Encuentre la distancia que recorrió la pelota.

Solución (a) Tenemos v0 = 150 pies/seg, u = 30°, h = 0 pies (la pelota está en el suelo) y g = 32 pies/seg2 (ya que las unidades están en pies y segundos). Sustituya estos valores en las ecuaciones (2) para obtener

$$x1t2 = 1v0 \text{ porque } u2t = 1150 \text{ porque } 30°2t = 7523\,t$$

$$y1t2 = -\frac{1}{2}gt2 + 1v0 \text{ sen } u2t + h = -\frac{1}{2}\,2\#32\#t^2 + 1150 \text{ sen } 30°2t + 0 = -16t^2 + 75 \text{ toneladas}$$

(b) Para encontrar el tiempo que la pelota estuvo en el aire, resuelva la ecuación y1t2 = 0.

$$-16 \text{ toneladas}^2 + 75t = 0$$

$$t1 - 16t + 752 = 0$$

$$t = 0 \text{ segundos o } t = \frac{75}{\text{dieciséis}} = 4{,}6875 \text{ segundos}$$

La pelota cayó al suelo después de 4,6875 segundos.

¿Necesita revisar?
El vértice de una función cuadrática $y = f1x2 = ax2 + bx + c$ es el punto $a - \frac{b}{2a}, f\,a - \frac{b}{2a}\,bb$
Consulte la Sección 3.3, págs. 186–188.

(c) Observe que la altura y de la pelota es una función cuadrática de t, por lo que el máximo + 75t.
La altura de la pelota se puede encontrar determinando el vértice de $y1t2 = -16t^2$.
El valor de t en el vértice es

$$t = \frac{-75}{-32} = 2{,}34375 \text{ segundos}$$

La pelota alcanzó su altura máxima después de 2,34375 segundos. La altura máxima de la pelota se encuentra evaluando la función y1t2 en t = 2,34375 segundos.

$$\text{Altura máxima} = -16\,\#\,12.343752^2 + 75\,\#\,2{,}34375 \approx 87{,}89 \text{ pies}$$

(d) Dado que la pelota estuvo en el aire durante 4,6875 segundos, la distancia horizontal que recorre la pelota la bola recorrida es

$$x = 7523\,\#\,4{,}6875 \approx 608{,}92 \text{ pies}$$

Ahora resuelve el problema 5 3

Machine Translated by Google

Exploración

Simule el movimiento de una pelota lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 100 pies por segundo desde una altura de 5 pies sobre el suelo. Utilice el modo PARAMÉTRICO en una TI-84 Plus C con Tmin = 0, Tmax = 6,5, Tstep = 0,1, Xmin = 0, Xmax = 5, Ymin = 0 e Ymax = 180. ¿Qué pasa con la velocidad con la que se representa el gráfico? ¿Se dibuja cuando la pelota sube y luego vuelve a bajar? ¿Cómo interpretas esto físicamente? Repita el experimento usando otros valores para Tstep. ¿Cómo afecta esto al experimento?

[Sugerencia: en las ecuaciones de movimiento del proyectil, sean u = 90°, v0 = 100, h = 5 y g = 32. Utilice x = 3 en lugar de x = 0 para ver mejor el movimiento vertical.]

Resultado En la Figura 63(a), la pelota sube. En la Figura 63(b), la pelota está cerca de su punto más alto. Finalmente, en la Figura 63(c), la pelota vuelve a bajar.

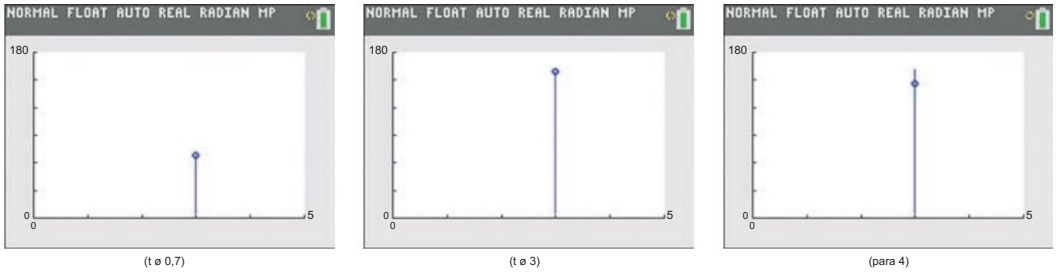


Figura 63 (a) (b) (C)

Observa que a medida que la pelota sube, su velocidad disminuye, hasta que en el punto más alto es cero. Entonces la velocidad aumenta a medida que la pelota vuelve a bajar.

Ahora problema de trabajo 4 9

También se puede utilizar una utilidad gráfica para simular otros tipos de movimiento. Trabajemos el Ejemplo 5 de la Sección A.8 usando ecuaciones paramétricas.

EJEMPLO 5

Simulación de movimiento

Tanya, que es corredora de largas distancias, corre a una velocidad promedio de 8 millas por hora. Dos horas después de que Tanya salga de tu casa, sales en tu Honda y sigues la misma ruta. Vea la Figura 64. Si la velocidad promedio del Honda es 40 millas por hora, ¿cuánto tiempo pasa antes de que alcance a Tanya? Utilice una simulación de los dos movimientos para verificar la respuesta.

Figura 64

Solución Comience con dos conjuntos de ecuaciones paramétricas: uno para describir el movimiento de Tanya y el otro para describir el movimiento del Honda. Elegimos el tiempo t = 0 cuando Tanya sale de la casa. Si elegimos y1 = 2 como camino de Tanya, entonces podemos usar y2 = 4 como el camino paralelo del Honda. Las distancias horizontales recorridas en el tiempo t 1Distancia = Tarifa * Tiempo2 son

Tanya: x1 1t2 = 8t Honda: x2 1t2 = 401t - 22

Machine Translated by Google

Alcanzas a Tanya cuando x1 = x2 .

$$8t = 401t - 22$$

$$8t = 40t - 80$$

$$-32t = -80$$

$$t = \frac{-80}{32} = 2{,}5$$

Alcanzas a Tanya 2,5 horas después de que Tanya sale de la casa.

En modo PARAMÉTRICO con Tstep = 0.01, grafica simultáneamente a Tanya:

x1 1t2 = 8t Honda: x2 1t2 = 401t - 22

y1 1t2 = 2 y2 1t2 = 4

para 0... t ... 3.

La Figura 65 muestra las posiciones relativas de Tanya y Honda para t = 0, t = 2, t = 2,25, t = 2,5 y t = 2,75 en una TI-84 Plus C.

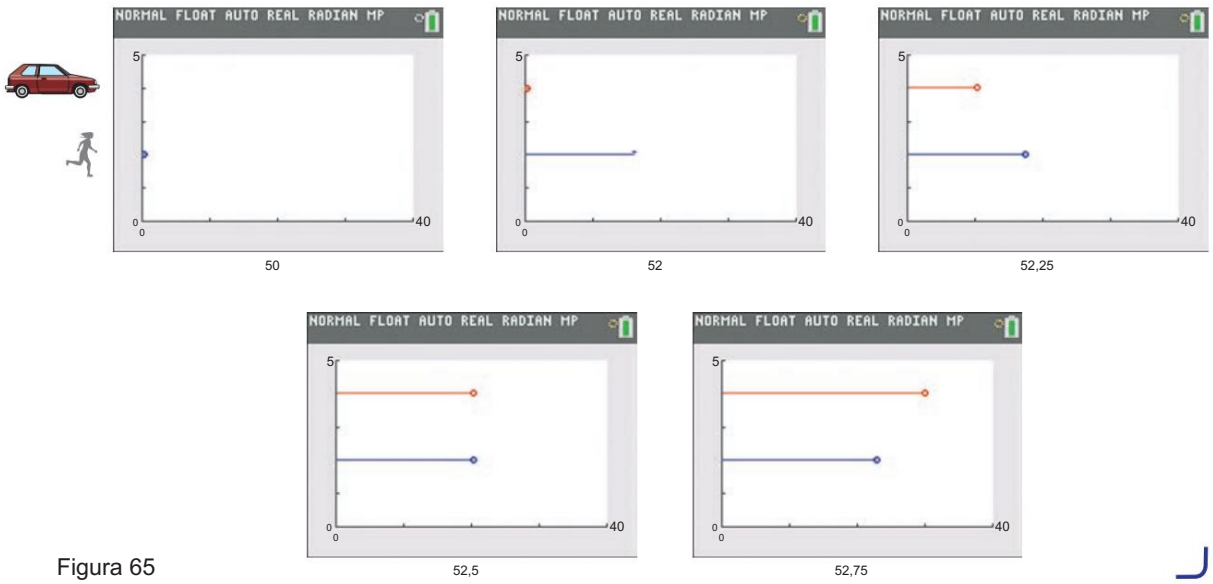


Figura 65

4 Encuentre ecuaciones paramétricas para curvas planas definidas por ecuaciones rectangulares Si una curva plana está definida por la función y = f1x2, una forma de encontrar ecuaciones paramétricas es dejar x = t. Entonces y = f1t2, y

x1t2 = t y1t2 = f1t2 t en el dominio de f

son ecuaciones paramétricas de la curva plana.

EJEMPLO 6

Encontrar ecuaciones paramétricas para una curva plana definida por una ecuación rectangular Encuentre dos pares diferentes de ecuaciones paramétricas para la función y = x2 - 4.

Solución

Para el primer par de ecuaciones paramétricas, sea x = t. Entonces las ecuaciones paramétricas son

x1t2 = t y1t2 = t 2 - 4 - q 6 t 6 q

Se encuentra un segundo par de ecuaciones paramétricas dejando que x = t 3 . Entonces el ecuaciones paramétricas se convierten en

x1t2 = t 3 y1t2 = t 6 - 4 - q 6 t 6 q

Machine Translated by Google

Se debe tener cuidado al utilizar el segundo enfoque del ejemplo 6. La sustitución de x debe ser una función que permita a x tomar todos los valores en el dominio de f. Por ejemplo, si x1t2 = t
2 de modo que y1t2 = t 4 - 4 no da como resultado
ecuaciones paramétricas equivalentes para y = x2 - 4, ya que solo se obtienen puntos para los cuales x Ú 0
son obtenidas; sin embargo, el dominio de y = x2 - 4 es 5x 0 x es cualquier número real6.

Ahora resuelve el problema 3 3

EJEMPLO 7 Encontrar ecuaciones paramétricas para un objeto en movimiento

Encuentra ecuaciones paramétricas para la elipse.

$$x2 + \frac{y2}{9} = 1$$

donde el parámetro t es el tiempo (en segundos) y

(a) El movimiento alrededor de la elipse es en el sentido de las agujas del reloj, comienza en el punto 10, 32 y requiere 1 segundo para una revolución completa.

(b) El movimiento alrededor de la elipse es en sentido antihorario, comienza en el punto 11, 02 y requiere 2 segundos para una revolución completa.

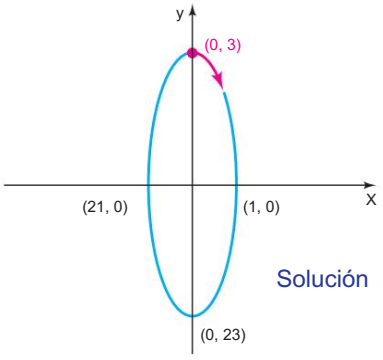


Figura 66 $x2 + \frac{y2}{9} = 1$ con orientación en el sentido de las agujas del reloj

Solución

(a) La figura 66 muestra la gráfica de la elipse. Dado que el movimiento comienza en el punto 10, 32, queremos x = 0 e y = 3 cuando t = 0. Sea

$$x1t2 = sen1vt2 \text{ y } y1t2 = 3\cos1vt2$$

para alguna constante v. Estas ecuaciones paramétricas satisfacen la ecuación de la elipse. También satisfacen el requisito de que cuando t = 0, entonces x = 0 e y = 3.

Para que el movimiento sea en el sentido de las agujas del reloj, el movimiento tiene que comenzar con el valor de x aumenta y el valor de y disminuye a medida que t aumenta. Esto requiere que v 7 0. [¿Sabes por qué? Si v 7 0, entonces x1t2 = sin1vt2 aumenta cuando t Ú 0 está cerca de cero, y y1t2 = 3 cos1vt2 disminuye cuando t Ú 0 está cerca de cero.] Vea la parte roja del gráfico en la Figura 66.

Finalmente, como 1 revolución toma 1 segundo, el período = 1, entonces $\frac{2p}{v}$ = 2p.

Las ecuaciones paramétricas que satisfacen las condiciones estipuladas son

$$x1t2 = sen12pt2 \qquad y1t2 = 3\cos12pt2 \qquad 0... t ... 1 \qquad (3)$$

> **¿Necesita revisar?**
> El período de una gráfica sinusoidal se analiza en la sección 6.4, págs. 446—448.

(b) Vea la Figura 67. Dado que el movimiento comienza en el punto 11, 02, queremos x = 1 e y = 0 cuando t = 0. La ecuación es una elipse, así que comience dejando

$$x1t2 = \cos1vt2 \text{ y } y1t2 = 3\,sen1vt2$$

para alguna constante v. Estas ecuaciones paramétricas satisfacen la ecuación de la elipse. Además, con esta elección, cuando t = 0 tenemos x = 1 e y = 0.

Para que el movimiento sea en sentido antihorario, el movimiento tiene que comenzar con el valor de x disminuyendo y el valor de y aumentando a medida que t aumenta. Esto requiere que v 7 0. (¿Sabes por qué?) Finalmente, dado que 1 revolución requiere 2 segundos, el periodo es $\frac{2p}{v}$ = 2, entonces v = p. Las ecuaciones paramétricas que satisfacen la las condiciones estipuladas son

$$x1t2 = \cos1pt2 \qquad y1t2 = 3\,sen1pt2 \qquad 0... t ... 2 \qquad (4)$$

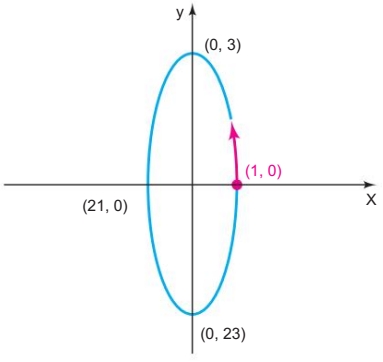


Figura 67 $x2 + = 1$ con 9 orientación en sentido antihorario

Tanto las ecuaciones (3) como las (4) pueden servir como ecuaciones paramétricas para y2. la elipse x2 + = 1. La dirección del movimiento, el punto inicial y 9 el tiempo de 1 revolución da una representación paramétrica particular.

Ahora resuelve el problema 3 9

Machine Translated by Google

La cicloide

Supongamos que un círculo de radio a rueda a lo largo de una línea horizontal sin deslizarse. A medida que el círculo avanza a lo largo de la línea, un punto P en el círculo trazará una curva llamada cicloide (ver Figura 68). Deducir la ecuación de una cicloide en coordenadas rectangulares es difícil, pero la tarea es relativamente sencilla utilizando ecuaciones paramétricas.

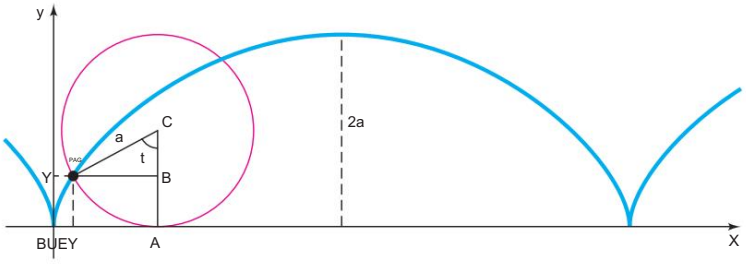


Figura 68 Cicloide

Comience con un círculo de radio a y tome la línea fija sobre la que rueda el círculo como eje x. Sea el origen uno de los puntos en los que el punto P entra en contacto con el eje x. La Figura 68 muestra la posición de este punto P después de que el círculo haya rodado un poco. El ángulo t (en radianes) mide el ángulo que ha recorrido el círculo.

Como no requerimos ningún deslizamiento, se deduce que

$$\text{Arco AP} = d1O, A2$$

La longitud del arco AP viene dada por s = ru, donde r = a y u = t radianes. Entonces

$$at = d1O, A2 \; s \cdot r \; U, \text{ donde } r \cdot a \text{ y } U \cdot t$$

La coordenada x del punto P es

$$d1O, X2 = d1O, A2 - d1X, A2 = at - a \sin t = a1t - \text{sin } t2$$

La coordenada y del punto P es

$$d1O, Y2 = d1A, C2 - d1B, C2 = a - a \cos t = a11 - \cos t2$$

Exploración

Grafique x1t2 = t - sen t, y1t2 = 1 - cos t, 0 … t … 3p, usando tu utilidad gráfica con Tstep = y una pantalla cuadrada. 36 Compare sus resultados con la Figura 68.

TEOREMA Ecuaciones paramétricas de una cicloide

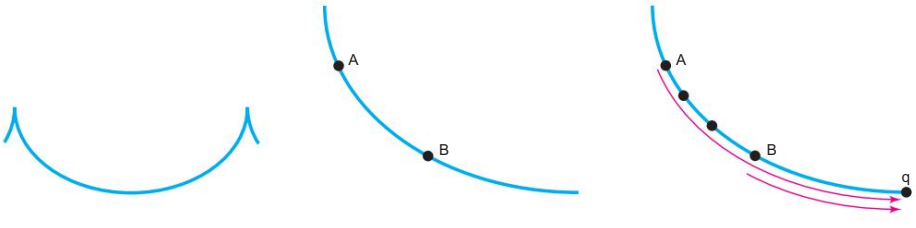
Las ecuaciones paramétricas de una cicloide son

$$x1t2 = a1t - \text{sen } t2 \qquad y1t2 = a11 - \cos t2 \qquad (5)$$

Aplicaciones a la Mecánica

Si a 6 0 en la ecuación (5), obtenemos una cicloide invertida, como se muestra en la Figura 69(a). La cicloide invertida surge como resultado de algunas aplicaciones notables en el campo de la mecánica. Mencionamos dos de ellos: la braquistocrona y la tautocrona.

NOTA En griego, braquistocrona significa “el tiempo más corto” y tautocrona “igual tiempo”.



(a) Cicloide invertida (b) Curva de descenso más rápido (c) Todos llegan a Q en al mismo tiempo

Figura 69

La braquistócrona es la curva de descenso más rápido. Si una partícula se ve obligada a seguir una trayectoria desde un punto A hasta un punto inferior B (no en la misma línea vertical) y sobre ella actúa únicamente la gravedad, el tiempo necesario para realizar el descenso es menor si

Machine Translated by Google

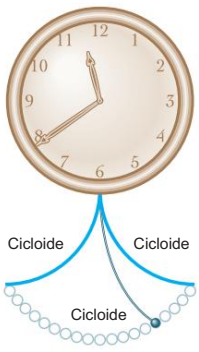


Figura 70

El camino es una cicloide invertida. Véase la Figura 69(b). Por ejemplo, para deslizar paquetes desde un muelle de carga a un camión, se podría utilizar una rampa en forma de cicloide invertida, para que los paquetes lleguen al camión en el menor tiempo. Este notable descubrimiento, que se ha atribuido a muchos matemáticos famosos (incluidos Johann Bernoulli y Blaise Pascal), fue un paso significativo en la creación de la rama de las matemáticas conocida como cálculo de variaciones.

Para definir la tautocrona, sea Q el punto más bajo de una cicloide invertida. Si varias partículas colocadas en varias posiciones sobre una cicloide invertida simultáneamente comienzan a deslizarse hacia abajo por la cicloide, alcanzarán el punto Q al mismo tiempo, como se indica en la Figura 69(c). La propiedad tautocrona de la cicloide fue utilizada por Christiaan Huygens (1629–1695), el matemático, físico y astrónomo holandés, para construir un reloj de péndulo con una masa que oscila a lo largo de una cicloide (consulte la Figura 70). En el reloj de Huygens, la pesa se hacía oscilar a lo largo de una cicloide suspendiendo la pesa en un alambre delgado sujeto por dos placas con forma de cicloides. En un reloj de este diseño, el período del péndulo es independiente de su amplitud.

10.7 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La función f1x2 = 3 sen14x2 tiene amplitud _____ y punto _____. (págs. 446–448)

Conceptos y vocabulario

2. Supongamos que x = x1t2 e y = y1t2 son dos funciones de una tercera variable t que están definidas en el mismo intervalo I. La gráfica del conjunto de puntos definido por 1x, y2 = 1x1t2, y1t2 2 se llama a1n2 . La variable t se llama a1n2 _____.

3. Opción múltiple Las ecuaciones paramétricas
x1t2 = 2 sen t y1t2 = 3 cos t
define a1n2 _____.
(a) círculo (b) elipse (c) hipérbola (d) parábola

4. Opción múltiple Si un círculo rueda a lo largo de una línea horizontal sin deslizarse, un punto fijo P en el círculo trazará una curva llamada(n) (a) _____.
cicloide (b) epitrocoide
(c) hiprocoide (d) péndulo

5. Verdadero o Falso Las ecuaciones paramétricas que definen una curva son único.

6. Curvas planas verdaderas o falsas definidas mediante parámetros las ecuaciones tienen una orientación.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 26, represente gráficamente la curva plana cuyas ecuaciones paramétricas se dan y muestre su orientación. Encuentra la ecuación rectangular de cada curva.

7. x1t2 = 3t + 2, y1t2 = t + 1; 0 … t … 4 8. x1t2 = t - 3, y1t2 = 2t + 4; 0... t ... 2
9. x1t2 = 22t, y1t2 = 4t; t Ú 0 10. x1t2 = t + 2, y1t2 = 1t; t Ú 0
11. x1t2 = 1t + 4, y1t2 = 1t - 4; t Ú 0 12. x1t2 = t 2 + 4, y1t2 = t 2 - 4; - q 6 t 6 q
13. x1t2 = 2t - 4, y1t2 = 4t 2; - q 6 t 6 q 14. x1t2 = 3t 2, y1t2 = t + 1; - q 6 t 6 q
15. x1t2 = y , y1t2 = et ; t Ú 0 16. x1t2 = 2et , y1t2 = 1 + et ; t Ú 0
3>2 + 1, y1t2 = 1t; t Ú 0 17. x1t2 = t 18. x1t2 = 1t, y1t2 = t3 >2; t Ú 0
19. x1t2 = 2 cos t, y1t2 = 3 sen t; 0… t … 2p 20. x1t2 = 2 cos t, y1t2 = 3 sen t; 0… t …p
21. x1t2 = 2 cos t, y1t2 = sen t; 0... t ... pag/2 22. x1t2 = 2 cos t, y1t2 = 3 sen t; - p… t … 0
23. x1t2 = csc t, y1t2 = cot t; pag/4 … t … pag/2 24. x1t2 = sec t, y1t2 = tan t; 0... t ... pag/4
25. x1t2 = t 2, y1t2 = ln t; t 7 0 26. x1t2 = sen2 t, y1t2 = cos2 t; 0… t … 2p

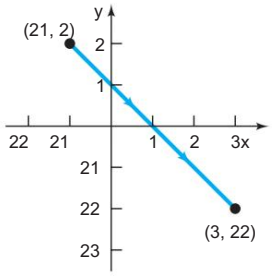
En los problemas 27 a 34, encuentre dos pares diferentes de ecuaciones paramétricas para cada ecuación rectangular.

27. y = - 8x + 3 28. y = 4x - 1 29. y = - 2x2 + 1 30. y = x2 + 1
31. y = x4 + 1 32. y = x3 33. x = y3>2 34. x = 1y

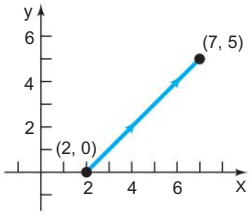
Machine Translated by Google

En los problemas 35 a 38, encuentre ecuaciones paramétricas que definan la curva plana que se muestra.

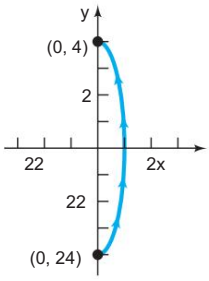
35.



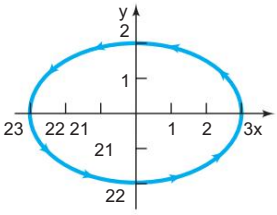
36.



37.



38.



En los problemas 39 a 42, encuentre ecuaciones paramétricas para un objeto que se mueve a lo largo de la elipse $\frac{x2}{4} + \frac{y2}{9} = 1$ con el movimiento descrito.

39. El movimiento comienza en 12, 02, es en el sentido de las agujas del reloj y requiere 2 segundos para una revolución completa.

40. El movimiento comienza en 10, 32, es en sentido antihorario y requiere 1 segundo para una revolución completa.

41. El movimiento comienza en 12, 02, es en sentido antihorario y requiere 3 segundos para una revolución completa.

42. El movimiento comienza en 10, 32, es en el sentido de las agujas del reloj y requiere 1 segundo para una revolución completa.

En los problemas 43 y 44 se dan ecuaciones paramétricas de cuatro curvas planas. Grafica cada uno de ellos, indicando la orientación.

43. C1 : x1t2 = t, y1t2 = 21 - t ^{2}; - 1... t ... 1

C2 : x1t2 = sen t, y1t2 = cos t; 0… t … 2p

C3 : x1t2 = cos t, y1t2 = sen t; 0… t … 2p

C4 : x1t2 = 21 -t ^{2}, y1t2 = t; - 1... t ... 1

44. C1 : x1t2 = t, y1t2 = t ^{2}; - 4… t … 4

C2 : x1t2 = cos t, y1t2 = 1 - sen2 t; 0… t …p

C3 : x1t2 = y , y1t2 = e2t ; 0… t ... en 4

C4 : x1t2 = 1t, y1t2 = t; 0... t ... 16

En los problemas 45 a 48, utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente la curva plana definida por las ecuaciones paramétricas dadas.

45. x1t2 = sen t + cos t, y = sen t - cos t

47. x1t2 = 4 sen t + 2 sen12t2

y1t2 = 4 cos t + 2 cos12t2

46. x1t2 = t sen t, y1t2 = t cos t,

48. x1t2 = t 7 0

4 sen t - 2 sen12t2

y1t2 = 4 cos t - 2 cos12t2

Aplicaciones y extensiones

49. Movimiento de proyectil Bob lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 50 pies por segundo desde una altura de 6 pies.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen el movimiento de la pelota en función del tiempo.

(b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

(c) ¿Cuándo está la pelota a su altura máxima? Determina el altura máxima de la pelota.

(d) Simule el movimiento de la pelota graficando el ecuaciones encontradas en la parte (a).

50. Movimiento de proyectil Alicia lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 40 pies por segundo desde una altura de 5 pies.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen el movimiento de la pelota en función del tiempo.

(b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

(c) ¿Cuándo está la pelota a su altura máxima? Determina el altura máxima de la pelota.

(d) Simule el movimiento de la pelota graficando el ecuaciones encontradas en la parte (a).

51. Tomar un tren El tren de Bill sale a las 8:06 am y acelera a razón de 2 metros por segundo por segundo. Bill, que puede correr 5 metros por segundo, llega a la estación de tren 5 segundos después de que el tren haya salido y corre hacia el tren.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen los movimientos del tren y de Bill en función del tiempo.

[Pista: La posición s en el tiempo t de un objeto que tiene la aceleración a es $s = 2\ ^{1}_{\text{a las 2 .]}}$

(b) Determine algebraicamente si Bill atrapará el tren. ¿Si es así cuando?

(c) Simule el movimiento del tren y de Bill graficando simultáneamente las ecuaciones encontradas en el inciso (a).

52. Tomar un autobús El autobús de Jodi sale a las 5:30 pm y acelera a razón de 3 metros por segundo por segundo. Jodi, que puede correr 5 metros por segundo, llega a la estación de autobuses 2 segundos después de que el autobús se ha ido y corre hacia él.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen los movimientos de el autobús y Jodi en función del tiempo.

[Pista: La posición s en el tiempo t de un objeto que tiene la aceleración a es $s = 2\ ^{1}_{\text{a las 2 .]}}$

(b) Determine algebraicamente si Jodi tomará el autobús. ¿Si es así cuando?

(c) Simule el movimiento del autobús y de Jodi graficando simultáneamente las ecuaciones encontradas en el inciso (a).

53. Movimiento de proyectil Sean lanza una pelota de béisbol con una rapidez inicial de 145 pies por segundo en un ángulo de 20° con la horizontal. El balón sale de la mano de Sean a una altura de 5 pies.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen la posición de la pelota en función del tiempo.

(b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

(c) Determine la distancia horizontal que recorre la pelota.

(d) ¿Cuándo está la pelota a su altura máxima? Determina el altura máxima de la pelota.

(e) Utilizando una herramienta gráfica, grafique simultáneamente el ecuaciones encontradas en la parte (a).

Machine Translated by Google

54. Movimiento de proyectil Billy golpeó una pelota de béisbol con una rapidez inicial de 125 pies por segundo en un ángulo de 40° con la horizontal. La pelota fue golpeada a una altura de 3 pies sobre el suelo.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen la posición de la pelota en función del tiempo.

(b) ¿Cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire?

(c) Determine la distancia horizontal que recorrió la pelota.

(d) ¿Cuándo estuvo la pelota a su altura máxima? Determinar la altura máxima de la pelota.

(e) Utilizando una herramienta gráfica, grafique simultáneamente el ecuaciones encontradas en la parte (a).

55. Movimiento de proyectil Supongamos que Karla golpea una pelota de golf desde un acantilado de 300 metros de altura con una velocidad inicial de 40 metros por segundo en un ángulo de 45° con la horizontal de la Luna (la gravedad en la Luna es una sexta parte de la de la Luna). Tierra).

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen la posición de la pelota en función del tiempo.

(b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

(c) Determine la distancia horizontal que recorre la pelota.

(d) ¿Cuándo está la pelota a su altura máxima? Determina el altura máxima de la pelota.

(e) Utilizando una herramienta gráfica, represente simultáneamente las ecuaciones encontradas en el inciso (a).

56. Movimiento de proyectil Supongamos que Adam golpea una pelota de golf desde un acantilado de 300 metros de altura con una velocidad inicial de 40 metros por segundo en un ángulo de 45° con la horizontal.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen la posición de la pelota en función del tiempo.

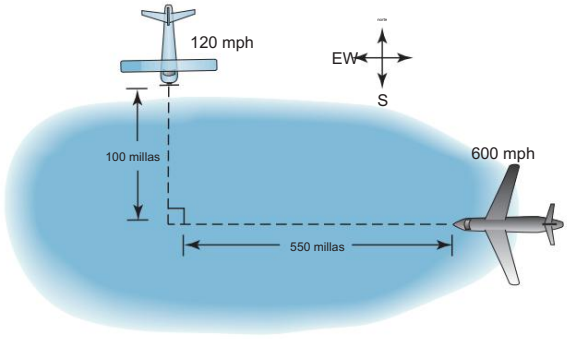
(b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

(c) Determine la distancia horizontal que recorre la pelota.

(d) ¿Cuándo está la pelota a su altura máxima? Determina el altura máxima de la pelota.

(e) Utilizando una herramienta gráfica, grafique simultáneamente el ecuaciones encontradas en la parte (a).

57. Movimiento uniforme Un Cessna (en dirección sur a 120 mph) y un Boeing 737 (en dirección oeste a 600 mph) vuelan hacia el mismo punto a la misma altitud. El Cessna está a 100 millas del punto donde se cruzan los patrones de vuelo, y el 737 está a 550 millas de este punto de intersección. Ver la figura.



(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen el movimiento del Cessna y el 737.

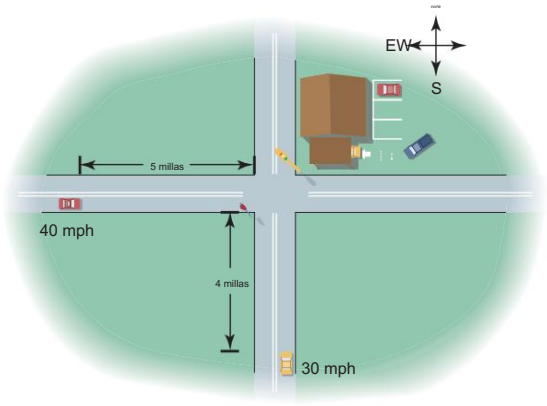
(b) Encuentre una fórmula para la distancia entre los planos como función del tiempo.

(c) Grafique la función del inciso (b) usando una herramienta gráfica.

(d) ¿Cuál es la distancia mínima entre los aviones? ¿Cuándo están los aviones más cerca?

(e) Simule el movimiento de los planos graficando simultáneamente las ecuaciones encontradas en el inciso (a).

58. Movimiento uniforme Un Toyota Camry (que viaja hacia el este a 40 mph) y un Chevy Impala (que viaja hacia el norte a 30 mph) se dirigen hacia la misma intersección. El Camry está a 5 millas de la intersección cuando el Impala está a 4 millas de la intersección. Ver la figura.



(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen el movimiento del Camry y el Impala.

(b) Encuentre una fórmula para la distancia entre los autos como función del tiempo.

(c) Grafique la función del inciso (b) usando una herramienta gráfica.

(d) ¿Cuál es la distancia mínima entre los autos? ¿Cuándo están los coches más cerca?

(e) Simule el movimiento de los automóviles graficando simultáneamente las ecuaciones encontradas en el inciso (a).

59. El monstruo verde La pared del jardín izquierdo de un parque de béisbol es 310 pies por la línea de la tercera base desde el plato de home; el muro en sí tiene 38 pies de altura. Una bola bateada debe pasar la pared para ser un jonrón. Supongamos que una pelota sale del bate, a 3 pies del suelo, en un ángulo de 45°. Utilice g = 32 pies/seg2 como aceleración debida a la gravedad e ignore cualquier resistencia del aire. Complete las partes (a) a (d).

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen la posición de la pelota en función del tiempo.

(b) ¿Cuál es la altura máxima de la pelota si sale del bate con una velocidad de 120 millas por hora? Da tu respuesta en pies.

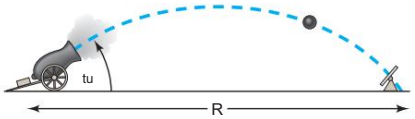
(c) ¿Cuál es la distancia horizontal de la pelota desde el plato de home en su altura máxima? Da tu respuesta en pies.

(d) Si la pelota es golpeada directamente hacia la línea de la tercera base, ¿pasará la pared? Si es así, ¿a cuántos pies se aleja de la pared?

60. Movimiento del proyectil La posición de un proyectil disparado con una velocidad inicial v0 pies por segundo y en un ángulo u con la horizontal al final de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

x1t2 = 1v0 porque u2t y1t2 = 1v0 sen u2t - 16t 2

Ver la figura.



(a) Obtenga una ecuación rectangular de la trayectoria, y identificar la curva.

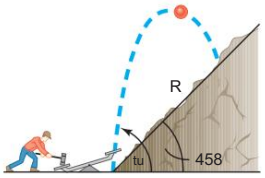
(b) Demuestre que el proyectil golpea el suelo 1y = 02 1

cuando t = —— v0 pecado u.
dieciséis

Machine Translated by Google

(c) ¿Qué distancia ha recorrido el proyectil (horizontalmente) cuando impacta el suelo? En otras palabras, encuentre el rango R.

(d) Encuentre el tiempo t cuando x = y. Luego encuentre la distancia horizontal x y la distancia vertical y recorrida por el proyectil en este tiempo. Luego calcula 2x2 + y2 . Ésta es la distancia R, el alcance, que recorre el proyectil en un plano inclinado a 45° con respecto a la horizontal 1x = y2. Vea la siguiente figura. (Véase también el Problema 105 de la Sección 7.6.)



61. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para una recta que pasa por los puntos 1x1 , y12 y 1x2 , y22 son

x1t2 = 1x2 - x12t + x1

y1t2 = 1y2 - y12t + y1 - q 6 t 6 q

¿Cuál es la orientación de esta línea?

62. Hipocicloide La hipocicloide es una curva plana definida por las ecuaciones paramétricas.

x1t2 = cos3 t y1t2 = sen3 t 0 … t … 2p

(a) Grafique la hipocicloide utilizando una herramienta gráfica.
(b) Encuentre una ecuación rectangular del hipocicloide.

63. Problema de desafío Encuentra ecuaciones paramétricas para la parábola y = x2 , utilizando como parámetro la pendiente m de la recta que une el punto 11, 12 con un punto general P = 1x, y2 de la parábola.

64. Problema de desafío Encuentra ecuaciones paramétricas para el círculo x2 + y2 = R2 , usando como parámetro la pendiente m de la recta que pasa por el punto 1 - R, 02 y un punto general P = 1x, y2 en el círculo.

Explicar conceptos: discusión y escritura

65. En el problema 62, graficamos la hipocicloide. Ahora grafica las ecuaciones rectangulares del hipocicloide. ¿Obtuviste un gráfico completo? Si no, experimenta hasta que lo hagas.

66. Curvas del plano de investigación llamadas hipocicloide y epicicloide. Escribe un informe sobre lo que encuentres. Compáralos y contrastalos con una cicloide.

Conserve su conocimiento

Los problemas 67 a 75 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

67. Grafica la ecuación 3x - 4y = 8 en el plano xy.

68. Grafica y = 2 cos12x2 + sena x 2 b en el plano xy.

69. La Estación Espacial Internacional (ISS) orbita la Tierra a una altura de aproximadamente 248 millas sobre la superficie. ¿Cuál es la distancia, en millas, sobre la superficie de la Tierra que se puede observar desde la ISS? Supongamos que el radio de la Tierra es 3960 millas.

Fuente: nasa.gov

70. El desplazamiento d (en metros) de un objeto en el tiempo t (en segundos) viene dado por d1t2 = 2 cos14t2.
(a) Describe el movimiento del objeto.
(b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo del objeto desde ¿Su posición de reposo?
(c) ¿Cuál es el tiempo necesario para 1 oscilación?
(d) ¿Cuál es la frecuencia?

71. Encuentra la asíntota oblicua de $R1x2 = \frac{4x2 - 9x + 7}{2x + 1}$

72. Encuentra el cociente de diferencias de $f\,1x2 = x\,\frac{1}{+\,3}$ como h S 0.

73. Encuentra el valor exacto de cos 285°.

74. Resuelva log5 17 - x2 + log5 13x + 52 = log5 124x2.

f1x2 = $\frac{1}{4}$x3 + 1 y g1x2 = 75. Si $\frac{3}{4}$x2, encuentre todos los números c en el intervalo 30, 24 donde g1c2 es igual a la tasa de cambio promedio de f durante el intervalo.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 3; $\frac{\text{pag}}{2}$

Machine Translated by Google

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Ecuaciones

Parábola (págs. 690–694)	Véanse los cuadros 1 y 2 (págs. 692 y 693).
Elipse (págs. 699–705)	Ver Tabla 3 (pág. 704).
Hipérbola (págs. 709–717)	Véase la Tabla 4 (pág. 716).
Ecuación general de una cónica (p. 728)	Ax2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0 Parábola si B2 - 4AC = 0 Elipse (o círculo) si B2 - 4AC 6 0 Hipérbola si B2 - 4AC 7 0
Ecuaciones polares de una cónica con foco en el polo (págs. 730 a 734)	Ver Tabla 5 (pág. 733).
Ecuaciones paramétricas de una curva plana (p. 737)	x = x1t2, y = y1t2, t es el parámetro

Definiciones

Parábola (pág. 690)	Conjunto de puntos P en un plano para el cual d1F, P2 = d1P, D2, donde F es el foco y D es la directriz
Elipse (pág. 699)	Conjunto de puntos P en un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante
Hipérbola (pág. 709)	Conjunto de puntos P en un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante
Cónica en coordenadas polares (p. 731)	La colección de puntos P para d1F, cual $\frac{P2.}{d1D, P2} = mi$ Parábola si e = 1 Elipse si e 6 1 Hipérbola si e 7 1

Fórmulas

Fórmulas de rotación (p. 724)	x = x′ porque u - y′ sen u y = x′ sen u + y′ porque u
Ángulo u de rotación que elimina el término x'y'@ (p. 725)	cuna12u2 = $\frac{A - C}{B}$ 0° 6 u 6 90°

Objetivos

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
10.1	1 Conoce los nombres de las cónicas (p. 689)		1–16
10.2	1 Analizar parábolas con vértice en el origen (p. 690)	1–5	1, 11
	2 Analizar parábolas con vértice en 1h, k2 (p. 693)	6, 7	4, 6, 9, 14
	3 Resolver problemas aplicados que involucran parábolas (p. 695)	8	39
10.3	1 Analizar elipses con centro en el origen (p. 699)	1–4	3, 13
	2 Analizar elipses con centro en 1h, k2 (p. 703)	5, 6	8, 10, 16, 38
	3 Resolver problemas aplicados que involucran elipses (p. 705)	7	40
10.4	1 Analiza hipérbolas con centro en el origen (p. 710)	1–4	2, 5, 12, 37
	2 Encuentra las asíntotas de una hipérbola (p. 714)	5, 6	2, 5, 7
	3 Analiza hipérbolas con centro en 1h, k2 (p. 716)	7, 8	7, 15, 17, 18
	4 Resolver problemas aplicados que involucran hipérbolas (p. 717)	9	41
10.5	1 Identificar una cónica (p. 722)	1	19, 20
	2 Usa una rotación de ejes para transformar ecuaciones (p. 723)	2	24–26
	3 Analizar una ecuación usando una rotación de ejes (p. 726)	3, 4	24–26, 44
	4 Identificar cónicas sin rotar los ejes (p. 728)	5	21-23

Machine Translated by Google

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
10.6	1 Analiza y grafica ecuaciones polares de cónicas (p. 730)	1–3	27–29
	2 Convierte la ecuación polar de una cónica a una ecuación rectangular (p. 734)	4	30, 31
10.7	1 Graficar ecuaciones paramétricas (p. 737)	1	32–34
	2 Encuentre una ecuación rectangular para una curva plana definida paramétricamente (p. 738)	2,	32–34
	5 3 Use el tiempo como parámetro en ecuaciones paramétricas (p. 740)	3 4,	42, 43
	4 Encuentre ecuaciones paramétricas para curvas planas definidas por ecuaciones rectangulares (p. 743)	6, 7	35, 36

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 a 10, identifique cada ecuación. Si es una parábola, indique su vértice, foco y directriz; si es una elipse, indique su centro, vértices y focos; si es una hipérbola, indique su centro, vértices, focos y asíntotas.

1. x2 = 12y

2. $\frac{x2}{9} - \frac{y2}{\text{diecséis}} = 1$

3. $\frac{x2}{36} + \frac{y2}{9} = 1$

4. 1y - 12 7. ^{2} - 8x + 24 = 0

5. 4x2 - y2 = 8 8.

6. 4x2 + 12x + 8y - 15 = 0

9x2 + 18x - 16y2 + 32y = 151 10. 9x2 +

6x2 - 12x + 5y2 + 30y - 9 = 0

9. 9y2 - 36x + 18y + 27 = 0

4y2 - 18x + 8y = 23

En los problemas 11 a 18, encuentre una ecuación de la cónica descrita. Grafica la ecuación.

11. Parábola; centrarse en 1 - 2, 02; directriz de la recta x = 2 13.

12. Hipérbola; centro a las 10, 02; centrarse en 10, 42; vértice en 10, - 22

Elipse; focos en 1 - 3, 02 y 13, 02; vértice en 14, 02 15. Hipérbola;

14. Parábola; vértice en 12, - 32; centrarse en 12, - 42

centro en 1 - 2, - 32; centrarse en 1 - 4, - 32; vértice en 1 - 3, - 32

16. Elipse; focos en 1 - 4, 22 y 1 - 4, 82; vértice en 1 - 4, 102

17. Centro en 1 - 1, 22; a = 3; c = 4; eje transversal paralelo a el eje x

18. Vértices en 10, 12 y 16, 12; asíntota de la recta 3y + 2x = 9

En los problemas 19 a 23, identifique cada cónica sin completar los cuadrados y sin aplicar una rotación de ejes.

19. y2 + 4x + 3y - 8 = 0 21. 9x2 -

20. x2 + 2y2 + 4x - 8y + 2 = 0

12xy + 4y2 + 8x + 12y = 0 23. x2 - 2xy + 3y2 +

22. 4x2 + 10xy + 4y2 - 9 = 0

2x + 4y - 1 = 0

En los problemas 24 a 26, gire los ejes de modo que la nueva ecuación no contenga ningún término xy. Analiza y grafica la nueva ecuación.

24. 2x2 + 5xy + 2y2 - = 0 $\frac{9}{2}$

25. 6x2 + 4xy + 9y2 - 20 = 0

26. 4x2 - 12xy + 9y2 + 12x + 8y = 0

En los problemas 27 a 29, identifica la cónica que representa cada ecuación polar y graficala.

27.r = _ $\frac{4}{1 - \text{porque tú}}$

28.r = _ $\frac{6}{2 - \text{pecado u}}$

29.r = _ $\frac{8}{4 + 8 \text{ porque tú}}$

En los problemas 30 y 31, convierta cada ecuación polar en una ecuación rectangular.

30.r = _ $\frac{2}{1 - \text{pecado u}}$

31.r = _ $\frac{8}{4 + 8 \text{ porque tú}}$

En los problemas 32 a 34, represente gráficamente la curva plana cuyas ecuaciones paramétricas se dan y muestre su orientación. Encuentra una ecuación rectangular de cada curva.

32. x1t2 = 4t - 2, y1t2 = 1 - t; - q 6 t 6 q

33. x1t2 = 3 sin t, y1t2 = 4 porque t + 2; 0… t … 2p

34. x1t2 = sec2 t, y1t2 = tan2 t; 0... t ... $\frac{\text{pag}}{4}$

Machine Translated by Google

35. Encuentra dos pares diferentes de ecuaciones paramétricas para y = - 2x + 4.

36. Encuentre ecuaciones paramétricas para un objeto que se mueve a lo largo de la elipse $\frac{x2}{\text{dieciséis}} + \frac{y2}{\text{dieciséis}} = 1$, donde el movimiento comienza en 14, 02, es 9 en sentido antihorario y requiere 4 segundos para una revolución completa.

---

37. Encuentra una ecuación de la hipérbola cuyos focos son los vértices de la elipse 4x2 + 9y2 = 36 y cuyos vértices son los focos de esta elipse.

38. Describe el conjunto de puntos en un plano de modo que la distancia de cada punto al punto 13, 02 sea tres cuartos.

de su distancia desde la recta x = $\frac{\text{dieciséis}}{3}$.

39. Reflector Un reflector tiene forma de paraboloide de revolución. Si una fuente de luz está ubicada a 1 pie del vértice a lo largo del eje de simetría y la abertura tiene 2 pies de ancho, ¿qué profundidad debe tener el espejo para reflejar los rayos de luz paralelos al eje de simetría?

40. Puente de arco semielíptico Un puente se construye en forma de arco semielíptico. El puente tiene una luz de 60 pies y una altura máxima de 20 pies. Encuentre la altura del arco a distancias de 5, 10 y 20 pies desde el centro.

41. Calibración de instrumentos En una prueba de sus dispositivos de registro, un equipo de sismólogos colocó dos dispositivos a 2000 pies de distancia, con el dispositivo en el punto A al oeste del dispositivo en el punto B. En un punto entre los dispositivos y a 200 pies del punto B, se detonó una pequeña cantidad de explosivo y se tomó nota del momento en que el sonido llegó a cada dispositivo. Se llevará a cabo una segunda explosión en un punto directamente al norte del punto B. ¿A qué distancia al norte se debe elegir el lugar de la segunda explosión para que la diferencia de tiempo medida registrada por los dispositivos para la segunda detonación sea la misma que la registrada para ¿La primera detonación?

42. Movimiento uniforme El tren de María sale a las 7:15 am y acelera a razón de 3 metros por segundo por segundo.
María, que puede correr 6 metros por segundo, llega a la estación de tren 2 segundos después de que el tren haya partido.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen el movimiento del tren y de María en función del tiempo.
[Pista: La posición s en el tiempo t de un objeto que tiene la aceleración a es s = $\frac{1}{2}$ a las 2 .]

(b) Determine algebraicamente si Mary atrapará el tren. ¿Si es así cuando?

(c) Simule los movimientos del tren y de María graficando simultáneamente las ecuaciones encontradas en el inciso (a).

43. Movimiento de proyectil Nick Foles lanza una pelota de fútbol con una velocidad inicial de 80 pies por segundo en un ángulo de 35° con la horizontal. La pelota sale de su mano a una altura de 6 pies.

(a) Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen la posición de la pelota en función del tiempo.

(b) ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

(c) ¿Cuándo está la pelota a su altura máxima? Determina el altura máxima de la pelota.

(d) Determine la distancia horizontal que recorre la pelota.

(e) Utilizando una herramienta gráfica, represente simultáneamente las ecuaciones encontradas en el inciso (a).

44. Formule una estrategia para discutir y graficar una ecuación de la forma

$$Ax2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0$$

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

En los problemas 1 a 3, identifique cada ecuación. Si es una parábola, indique su vértice, foco y directriz; si es una elipse, indique su centro, vértices y focos; si es una hipérbola, indique su centro, vértices, focos y asíntotas.

1. $\frac{1x + 12\,4^{2}}{} - \frac{y2}{9} = 1$

2. 8y = 1x - 12 2 - 4

3. 2x2 + 3y2 + 4x - 6y = 13

En los problemas 4 a 6, encuentre una ecuación de la cónica descrita; grafica la ecuación.

4. Parábola: foco 1 - 1, 4,52, vértice 1 - 1, 32

5. Elipse: centro 10, 02, vértice 10, - 42, foco 10, 32

6. Hipérbola: centro 12, 22, vértice 12, 42, contiene el punto 12 + 210, 52

En los problemas 7 a 9, identifique cada cónica sin completar el cuadrado o los ejes de rotación.

7. 2x2 + 5xy + 3y2 + 3x - 7 = 0 8. 3x2 - xy + 2y2 + 3y + 1 = 0 9. x2 - 6xy + 9y2 + 2x - 3y - 2 = 0

10. Dada la ecuación 41x2 - 24xy + 34y2 - 25 = 0, rota los ejes para que no haya ningún término xy. Analiza y grafica la nueva ecuación.

11. Identifica la cónica representada por la ecuación polar r = $\frac{3}{1 - 2 \text{ porque tu}}$. Encuentra la ecuación rectangular.

12. Grafique la curva plana cuyas ecuaciones paramétricas se dan y muestre su orientación. Encuentra la ecuación rectangular para la curva plana.

x1t2 = 3t - 2 y1t2 = 1 - 2t 0 … t … 9

13. Los equipos de televisión utilizan un reflector parabólico (paraboloide de revolución) en los partidos de fútbol para captar los anuncios del árbitro, las señales del mariscal de campo, etc. Se coloca un micrófono en el foco de la parábola. Si cierto reflector tiene 4 pies de ancho y 1,5 pies de profundidad, ¿dónde se debe colocar el micrófono?

Machine Translated by Google

Revisión acumulativa

1. Para f1x2 = - 3x2 + 5x - 2, encuentre

$$\frac{f1x + h2 - f1x2}{h} \qquad h \cdot 0$$

2. En el sistema de números complejos, resuelve la ecuación.

$$9x4 + 33x3 - 71x2 - 57x - 10 = 0$$

3. ¿Para qué números x es 6 - x Ú x2 ?

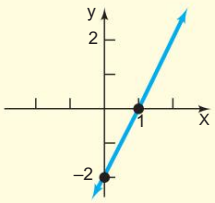
4. (a) Encuentre el dominio y rango de y = 3x + 2.
   (b) Encuentre la inversa de y = 3x + 2 e indique su dominio y rango.

5. f1x2 = log4 1x - 22
   (a) Resuelva f1x2 = 2.
   (b) Resuelva f1x2 … 2.

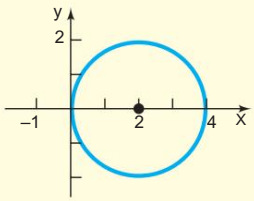
---

6. Encuentra una ecuación para cada una de las siguientes gráficas.

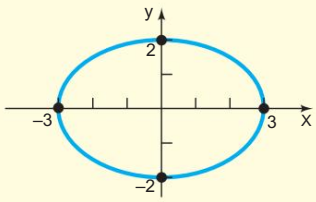
(a) Línea:



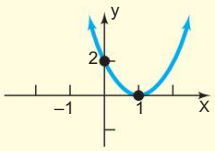
(b) Círculo:



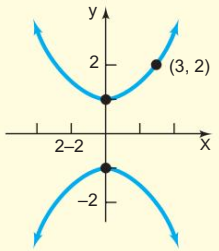
(c) Elipse:



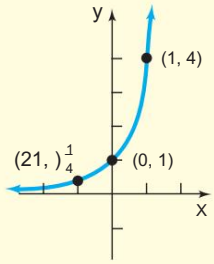
(d) Parábola:



(e) Hipérbola:



(f) Exponencial:



---

7. Encuentra todas las soluciones de la ecuación sin12u2 = 0,5.

8. Encuentra una ecuación polar para la recta que contiene el origen y que forma un ángulo de 30° con el eje x positivo.

9. Encuentra una ecuación polar para el círculo con centro en el punto 10, 42 y radio 4. Grafica este círculo.

10. ¿Cuál es el dominio de la función f1x2 = ?

$$\frac{3}{\text{pecado x + porque x}}$$

11. Resuelve la ecuación cot12u2 = 1, donde 0° 6 u 6 90°.

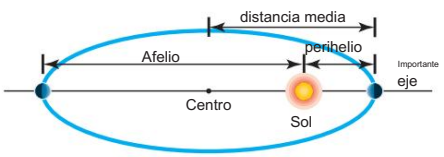
12. Encuentra la ecuación rectangular de la curva plana.

$$x1t2 = 5\tan t \qquad y1t2 = 5\,\text{seg}2\,t - \qquad \frac{\text{pag}}{2} \quad 6\ t\ 6 \quad \frac{\text{pag}}{2}$$

Proyectos del Capítulo

Proyecto basado en Internet

I. Cometa Hale-Bopp Las órbitas de los planetas y de algunos cometas alrededor del Sol son elipses, con el Sol en uno de sus focos. El afelio de un planeta es su mayor distancia al Sol y el perihelio es su distancia más corta. La distancia media de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica. Ver la figura.



Machine Translated by Google

1. Investiga la historia del cometa Hale-Bopp en Internet.
   En particular, determine el afelio y el perihelio.
   A menudo estos valores se dan en términos de unidades astronómicas.
   ¿Qué es una unidad astronómica? ¿A qué equivale en millas? ¿En kilómetros? ¿Cuál es el período orbital del cometa Hale-Bopp? ¿Cuándo será la próxima vez visible desde la Tierra? ¿Qué tan cerca se acerca a la Tierra?
2. Encuentra un modelo para la órbita del cometa Hale-Bopp alrededor del Sol. Utilice el eje x como eje mayor.
3. El cometa Hale-Bopp tiene una órbita aproximadamente perpendicular a la de la Tierra. Encuentre un modelo para la órbita de la Tierra usando el eje y como eje mayor.

4. Utilice una utilidad gráfica o alguna otra tecnología gráfica para representar gráficamente las trayectorias de las órbitas. Según los gráficos, ¿se cruzan las trayectorias de las órbitas? ¿Significa esto que el cometa Hale-Bopp chocará con la Tierra?

Los siguientes proyectos se pueden encontrar en el Centro de recursos para instructores (IRC):

II. Las órbitas de Neptuno y Plutón El cuerpo astronómico conocido como Plutón y el planeta Neptuno viajan alrededor del Sol en órbitas elípticas. Plutón, en ocasiones, se acerca más al Sol que Neptuno, el planeta más externo. Este proyecto examina y analiza las dos órbitas.

III. Proyecto en Motorola Antenas reflectoras espaciales desplegables distorsionadas Un ingeniero diseña una antena que se desplegará en el espacio para recoger la luz del sol.

IV. Construcción de un puente sobre el East River El tamaño de los barcos que utilizan un río y las fluctuaciones en la altura del agua debido a mareas o inundaciones Se debe considerar al diseñar un puente que cruzará una vía fluvial importante.

V. Sistemas de ecuaciones paramétricas El método a utilizar para resolver un sistema de ecuaciones depende de la forma del sistema. y sobre los dominios de las ecuaciones.

Machine Translated by Google

Sistemas de ecuaciones y desigualdades

11

Resultados económicos

Ganancias anuales de los adultos jóvenes

Tanto para hombres como para mujeres, los ingresos aumentan con la educación: los trabajadores de tiempo completo con al menos una licenciatura tienen ingresos medios más altos que aquellos con menos educación. Los hombres y mujeres que abandonaron la escuela secundaria ganaron un 19% y un 25% menos, respectivamente, que los hombres y mujeres que terminaron la escuela secundaria.

Los ingresos medios de los adultos jóvenes que tenían al menos una licenciatura disminuyeron en la década de 1970 en relación con sus contrapartes que terminaron la escuela secundaria, antes de aumentar entre 1980 y 2016. Los hombres con una licenciatura o más tenían ingresos un 19% más altos que los hombres con una escuela secundaria. terminaron en 1980 y tuvieron ingresos un 83% más altos en 2016. Entre las mujeres, aquellas con al menos una licenciatura tuvieron ingresos un 34% más altos que las mujeres que terminaron la escuela secundaria en 1980, en comparación con ingresos un 111% más altos en 2016.

Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

—Ver Capítulo Proyecto I—

Una mirada atras

En el Apéndice A y los Capítulos 3, 4, 5 y 7, resolvimos varios tipos de ecuaciones y desigualdades que involucran una sola variable.

Una mirada hacia el futuro

En este capítulo abordamos el problema de resolver ecuaciones y desigualdades que contienen dos o más variables. Hay varias formas de resolver estos problemas.

El método de sustitución para la resolución de ecuaciones de varias variables se remonta a la antigüedad.

El método de eliminación, aunque existía desde hacía siglos, se puso en práctica sistemáticamente.
orden de Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y Camille Jordan (1838-1922).

La teoría de las matrices fue desarrollada en 1857 por Arthur Cayley (1821-1895), aunque sólo más tarde se utilizaron las matrices como las usamos en este capítulo. Las matrices son útiles en casi todas las áreas de las matemáticas.

El método de los determinantes fue inventado por Takakazu Seki Kôwa (1642-1708) en 1683.
en Japón y por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) en 1693 en Alemania. La regla de Cramer lleva el nombre de Gabriel Cramer (1704-1752) de Suiza, quien popularizó el uso de determinantes para resolver sistemas lineales.

La sección 11.5, sobre descomposición en fracciones parciales, es una aplicación de sistemas de ecuaciones y se utiliza en cálculo integral.

La sección 11.8 presenta la programación lineal, una aplicación moderna de desigualdades lineales. Este tema es particularmente útil para estudiantes interesados en la investigación de operaciones.

Describir

11.1 Sistemas de ecuaciones lineales: Sustitución y Eliminación

11.2 Sistemas de ecuaciones lineales: matrices

11.3 Sistemas de ecuaciones lineales: Determinantes

11.4 Álgebra matricial

11.5 Descomposición en fracciones parciales

11.6 Sistemas de ecuaciones no lineales

11.7 Sistemas de desigualdades

11.8 Programación lineal

Revisión del capítulo

Prueba de capítulo

Revisión acumulativa

Proyectos del Capítulo

Machine Translated by Google

11.1 Sistemas de ecuaciones lineales: sustitución y eliminación

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Ecuaciones lineales (Sección A.6, págs. A44–A45)
- Líneas (Sección 1.3, págs. 56–67)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 766.

OBJETIVOS 1 Resolver sistemas de ecuaciones por sustitución (p. 759)
2 Resolver sistemas de ecuaciones por eliminación (p. 759)
3 Identificar sistemas inconsistentes de ecuaciones que contienen dos variables (p. 761)
4 Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes que contiene Dos variables (p. 761)
5 Resolver sistemas de tres ecuaciones que contienen tres variables (p. 762)
6 Identificar sistemas inconsistentes de ecuaciones que contienen tres variables (p. 764)
7 Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes que contiene Tres variables (p. 764)

EJEMPLO 1 Venta de entradas de cine

Un cine vende entradas a $10,00 cada una, y las personas mayores reciben un descuento de $2,00. Una noche, el teatro obtuvo $4630 en ingresos. Si x representa la cantidad de boletos vendidos a $10,00 e y la cantidad de boletos vendidos al precio con descuento de $8,00, escribe una ecuación que relacione estas variables.

Solución Cada boleto sin descuento cuesta $10,00, por lo que x boletos generan 10x dólares. Del mismo modo, las entradas con descuento generan 8y dólares. Como el ingreso total es de $4630, debemos tener

$$10x + 8y = 4630$$

En el ejemplo 1, supongamos que también sabemos que esa noche se vendieron 525 entradas. Luego tenemos otra ecuación que relaciona las variables x e y:

$$x + y = 525$$

las dos ecuaciones

$$\begin{cases} 10x + 8y = 4630 \\ x + y = 525 \end{cases}$$

formar un sistema de ecuaciones.

En general, un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones, cada una de las cuales contiene una o más variables. El ejemplo 2 ofrece algunas ilustraciones de sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 2 Ejemplos de sistemas de ecuaciones

(a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$ (1) Dos ecuaciones que contienen dos variables, x e y (2)

(b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ (1) Dos ecuaciones que contienen dos variables, x e y (2)

Machine Translated by Google

(c) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 9 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ (1) Tres ecuaciones que contienen tres variables, x, y y z (2) (3)

(d) $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \end{cases}$ (1) Dos ecuaciones que contienen tres variables, x, y y z (2)

(mi) $\begin{cases} 2x + 2z = 4 \\ y + z = 2 \\ x + y + z = 6 \\ x = 4 \end{cases}$ (1) Cuatro ecuaciones que contienen tres variables, x, y y z (2) (3) (4)

Usamos una llave para recordarnos que estamos tratando con un sistema de ecuaciones, y numeramos cada ecuación en el sistema para una referencia conveniente.

Una solución de un sistema de ecuaciones consta de valores de las variables que son soluciones de cada ecuación del sistema. Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar todas las soluciones del sistema .

Por ejemplo, x = 2, y = 1 es una solución del sistema del ejemplo 2(a), porque

$$\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad \text{segundo} \quad \begin{matrix} 4 \# 2 + 6 \# 1 = 8 + 6 = 14 \\ 2 \# 2 + 1 = 4 + 1 = 5 \end{matrix}$$

Esta solución también se puede escribir como el par ordenado (2, 1).

Una solución del sistema del ejemplo 2(b) es x = 1, y = 2, porque

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad \text{segundo} \quad \begin{matrix} 2 \# 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \\ 1 + 2 \# 2 = 1 + 4 = 5 \end{matrix}$$

Otra solución del sistema del ejemplo 2(b) es $x = \frac{11}{3}, y = -\frac{4}{3}$, que puedes compruébalo tú mismo.

Una solución del sistema en el Ejemplo 2(c) es x = 3, y = 2, z = 1, porque

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 9 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \# 3 - 2 \# 2 + 4 \# 1 = 9 - 4 + 4 = 9 \\ 3 + 2 + 1 = 6 \end{matrix}$$

Esta solución también puede escribirse como el triplete ordenado (3, 2, 1).

Tenga en cuenta que x = 3, y = 3, z = 0 no es una solución del sistema del ejemplo 2(c).

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 9 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \# 3 - 2 \# 3 + 4 \# 0 = 3 \cdot 9 \\ 3 + 3 + 0 = 6 \end{matrix}$$

Aunque x = 3, y = 3 y z = 0 satisfacen las ecuaciones (1) y (3), no satisfacen la ecuación (2). Cualquier solución del sistema debe satisfacer cada ecuación del sistema.

Ahora problema de trabajo 1 1

Cuando un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución, se dice que es consistente. Cuando un sistema de ecuaciones no tiene solución se le llama inconsistente.

Una ecuación en n variables se dice lineal si es equivalente a una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n variables distintas, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ son constantes y al menos una de las a no es 0.

Machine Translated by Google

Algunos ejemplos de ecuaciones lineales son

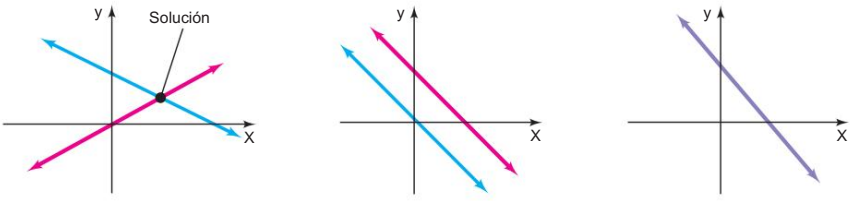
$$2x + 3y = 2 \quad 5x - 2y + 3z = 10 \quad 8x + 8y - 2z + 5w = 0$$

Si cada ecuación en un sistema de ecuaciones es lineal, tenemos un sistema de ecuaciones lineales. Los sistemas de los Ejemplos 2(a), (c), (d) y (e) son lineales, pero el sistema del Ejemplo 2(b) no es lineal. En este capítulo resolvemos sistemas lineales en las Secciones 11.1 a 11.3. Los sistemas no lineales se analizan en la Sección 11.6.

Comenzamos analizando un sistema de dos ecuaciones lineales que contienen dos variables. El problema de resolver un sistema de este tipo puede verse como un problema de geometría. La gráfica de cada ecuación en dicho sistema es una recta. Entonces, un sistema de dos ecuaciones lineales que contienen dos variables representa un par de rectas. Las líneas pueden cruzarse, ser paralelas o coincidir (es decir, idénticas).

- Si las rectas se cruzan, el sistema de ecuaciones tiene una solución, dada por el punto de intersección. El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes. Ver Figura 1(a).
- Si las rectas son paralelas, el sistema de ecuaciones no tiene solución, porque las rectas nunca se cruzan. El sistema es inconsistente. Véase la Figura 1(b).
- Si las rectas son coincidentes (las rectas están una encima de la otra), el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, representadas por todos los puntos de la recta. El sistema es consistente y las ecuaciones son dependientes. Ver Figura 1(c).

Consistente e Independiente Inconsistente Consistente y dependiente



(a) Líneas secantes; sistema tiene una solución

(b) Lineas paralelas; sistema no tiene solución

(C) Líneas coincidentes; sistema tiene infinitas soluciones

Figura 1

EJEMPLO 3 Graficar un sistema de ecuaciones lineales

Grafique el sistema de ecuaciones lineales: b 2x4x y+=6y 1= 42 (1) (2)

Solución

Primero, resuelve cada ecuación para y. Es decir, escribe cada ecuación en forma pendiente-intersección. La ecuación (1) en forma pendiente-intersección es y = - 2x - 1, que tiene pendiente - 2 2

e intersección con el eje y - 1. La ecuación (2) en forma pendiente-intersección es y = x + 7, que tiene 3

pendiente e intersección con el eje y 7. La Figura 2 muestra sus gráficas.

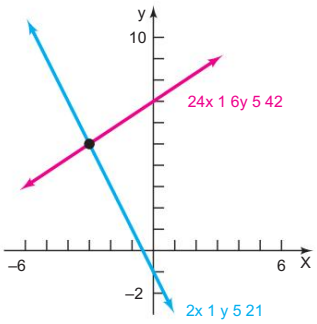


Figura 2

En el gráfico de la Figura 2, vemos que las líneas se cruzan, por lo que el sistema dado en el Ejemplo 3 es consistente. La gráfica también se puede utilizar para aproximar la solución. Para este sistema, la solución parece ser el punto 1 - 3, 52.

La mayoría de las veces utilizamos métodos algebraicos para obtener soluciones exactas. Hay varios métodos disponibles para resolver sistemas de ecuaciones lineales algebraicamente. En esta sección, presentamos dos métodos: sustitución y eliminación. Ilustramos el método de sustitución resolviendo el sistema dado en el Ejemplo 3.

Machine Translated by Google

1 Resolver sistemas de ecuaciones por sustitución

EJEMPLO 4 Resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución

Resuelva: $-42x + 6y = 42$ (1)
$2x + y = -1$ (2)

Solución paso-a-paso

Paso 1: Elija una de las ecuaciones y resuelva una variable en términos de las variables restantes.

Resuelva la ecuación (1) para y.

$2x + y = -1$ Ecuación (1)

$y = -2x - 1$

Paso 2: Sustituya el resultado en las ecuaciones restantes.

Sustituye $-2x - 1$ por y en la ecuación (2). El resultado es una ecuación que contiene solo la variable x, que podemos resolver.

$-4x + 6y = 42 - 4x$ Ecuación (2)

$+61 - 2x - 12 = 42$ Sustituye $\cdot 2x \cdot 1$ por y en (2).

Paso 3: Si resulta una ecuación en una variable, resuelve esta ecuación. De lo contrario, repita los pasos 1 y 2 hasta que quede una sola ecuación con una variable.

$-4x - 12x - 6 = 42$ Distribuir.

$-16x - 6 = 42$ Combina términos semejantes.

$-16x = 48$ Suma 6 a ambos lados.

$x = -3$ Solución para x.

Paso 4: Encuentre los valores de las variables restantes mediante sustitución inversa.

Como sabemos que $x = -3$, podemos encontrar el valor de y mediante sustitución inversa, es decir, sustituyendo -3 por x en una de las ecuaciones originales. Parece más fácil trabajar con la ecuación (1), por lo que la sustituiremos hacia atrás en la ecuación (1).

$2x + y = -1$ Ecuación (1)

$21 - 32 + y = -1$ Sustituye $\cdot 3$ por x.

$-6 + y = -1$ Simplificar.

$y = 5$ Resuelve para y.

Paso 5: Verifique la solución encontrada. Tenemos $x = -3$ e $y = 5$. Verifique que ambas ecuaciones se cumplan (verdadero) para estos valores.

$21 - 32 + 5 = -6 + 5 = -1$

segundo $-41 - 32 + 6 \# 5 = 12 + 30 = 42$

La solución del sistema es $x = -3$ e $y = 5$. La solución también se puede escribir como el par ordenado $1 - 3, 52$.

Ahora use la sustitución para resolver el problema 2 1

2 Resolver sistemas de ecuaciones por eliminación

Un segundo método para resolver un sistema de ecuaciones lineales es el método de eliminación. Generalmente se prefiere este método a la sustitución si la sustitución conduce a fracciones o si el sistema contiene más de dos variables. La eliminación también proporciona la motivación para resolver sistemas usando matrices (el tema de la Sección 11.2).

Machine Translated by Google

En palabras
Cuando utilice la eliminación, obtenga que el coeficiente de una variable sea opuesto al de la otra.

La idea detrás del método de eliminación es reemplazar el sistema de ecuaciones original por un sistema equivalente de modo que la suma de dos de las ecuaciones elimine una variable. Las reglas para obtener ecuaciones equivalentes son las mismas que las estudiadas anteriormente. También podemos intercambiar dos ecuaciones cualesquiera del sistema y/o reemplazar cualquier ecuación del sistema por la suma (o diferencia) de esa ecuación y un múltiplo distinto de cero de cualquier otra ecuación del sistema.

Reglas para obtener un sistema de ecuaciones equivalente

- Intercambiar dos ecuaciones cualesquiera del sistema.
- Multiplicar (o dividir) ambos lados de una ecuación por el mismo valor distinto de cero constante.
- Reemplazar cualquier ecuación del sistema por la suma (o diferencia) de esa ecuación y un múltiplo distinto de cero de cualquier otra ecuación del sistema.

Un ejemplo te dará la idea. A medida que avanza en el ejemplo, preste especial atención al patrón que se sigue.

EJEMPLO 5 Resolver un sistema de ecuaciones lineales por eliminación

Resuelva: (1)
(2)

Solución paso-a-paso

Paso 1: multiplica ambos lados de una o ambas ecuaciones por una constante distinta de cero de modo que los coeficientes de una de las variables sean inversos aditivos.

Multiplique la ecuación (2) por 2 de modo que los coeficientes de x en las dos ecuaciones sean inversos aditivos.

(1)
(2)

(1)
(2) Multiplicar por 2.

(1)
(2)

Paso 2: Suma las ecuaciones para eliminar la variable. Resuelve la ecuación resultante.

(1)
(2)

Sume las ecuaciones (1) y (2).

Resuelve para y.

Paso 3: Sustituya hacia atrás el valor de la variable encontrada en el Paso 2 en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la variable restante.

Sustituya hacia atrás y = - 1 en la ecuación (1) y resuelva para x.

2x + 3y = 1 Ecuación (1)

2x + 31 - 12 = 1 Sustituye y · ·1.

2x - 3 = 1 Simplifica.

2x = 4 Suma 3 a ambos lados.

x = 2 Resuelve para x.

Paso 4: Verifique la solución encontrada.

El cheque te lo dejamos a ti.

La solución del sistema es x = 2 e y = - 1. La solución también se puede escribir como el par ordenado 12, - 12.

Ahora use la eliminación para resolver el problema 2 1

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 Venta de entradas de cine

Un cine vende entradas a $10,00 cada una, y las personas mayores reciben un descuento de $2,00. Una noche, el teatro vendió 525 entradas y obtuvo unos ingresos de 4630 dólares. ¿Cuántos billetes de cada tipo se vendieron?

Solución Si x representa el número de boletos vendidos a $10,00 e y el número de boletos vendidos al precio descontado de $8,00, entonces la información dada da como resultado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 525 & (1) \\ 10x + 8y = 4630 & (2) \end{cases}$$

Usando el método de eliminación, primero multiplica la ecuación (2) por - 8 y luego suma las ecuaciones.

$$\begin{array}{rll} -8x - 8y = -4200 & & \text{Multiplica la ecuación (2) por } \cdot 8. \\ \hline 2x = 430 & & \text{Suma las ecuaciones.} \\ x = 215 & & \end{array}$$

Como x + y = 525, entonces y = 525 - x = 525 - 215 = 310. Entonces se vendieron 215 boletos sin descuento y 310 boletos con descuento para personas mayores.

3 Identificar sistemas inconsistentes de ecuaciones que contienen Dos variables

Los ejemplos anteriores trataban de sistemas consistentes de ecuaciones que tenían una única solución. Los dos ejemplos siguientes tratan de otras dos posibilidades que pueden ocurrir; la primera es un sistema que no tiene solución.

EJEMPLO 7 Identificar un sistema inconsistente de ecuaciones lineales

Resuelve: $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 4x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$

Solución Elegimos utilizar el método de sustitución y resolver la ecuación (1) para y.

$$\begin{array}{rll} 2x + y = 5 & (1) & \\ y = -2x + 5 & & \text{Resta } 2x \text{ de ambos lados.} \end{array}$$

Ahora sustituya $-2x + 5$ por y en la ecuación (2) y resuelva para x.

$$\begin{array}{rll} 4x + 2y = 8 & (2) & \\ 4x + 2(-2x + 5) = 8 & & \text{Sustituye } y \cdot -2x \cdot 5. \\ 4x - 4x + 10 = 8 & & \text{Multiplicar.} \\ 10 = 8 & & \text{Simplificar.} \end{array}$$

Esta afirmación es falsa. Concluimos que el sistema no tiene solución y es inconsistente.

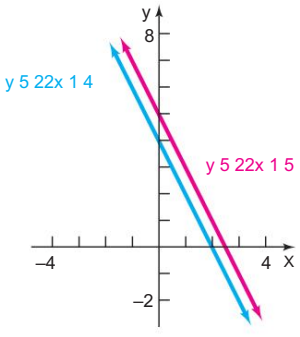


figura 3

La Figura 3 ilustra el par de rectas cuyas ecuaciones forman el sistema del Ejemplo 7. Observe que las gráficas de las dos ecuaciones son rectas, cada una con pendiente - 2; uno tiene una intersección en y de 5, el otro una intersección en y de 4. Las líneas son paralelas y no tienen punto de intersección. Este enunciado geométrico es equivalente al enunciado algebraico de que el sistema no tiene solución.

4 Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes Que contiene dos variables

EJEMPLO 8 Resolver un sistema de ecuaciones dependientes

Resuelve: $\begin{cases} 6x - 3y = 12 & (1) \\ -2x + y = -4 & (2) \end{cases}$

Machine Translated by Google

Solución Elegimos utilizar el método de eliminación.

(1)

segunda 2x + y = 4 (2)

(1) Multiplica la ecuación (1) por 3.

mi 6x + 3y = 12 (2)

0 = 0 Sume las ecuaciones (1) y (2).

La afirmación 0 = 0 significa que el sistema original es equivalente a un sistema que contiene una ecuación, 2x + y = 4. Entonces las ecuaciones del sistema son dependientes. Además, cualquier valor de xey que satisfaga 2x + y = 4 es solución.

Por ejemplo, x = 2, y = 0; x = 0, y = 4; x = - 1, y = 6; x = 4, y = - 4 son soluciones. De hecho, hay infinitos valores de x e y para los cuales 2x + y = 4, entonces el sistema original tiene infinitas soluciones. Escribimos la solución del sistema original como

y = - 2x + 4, donde x puede ser cualquier número real

o como

x = - 2 $\frac{1}{}$y + 2, donde y puede ser cualquier número real

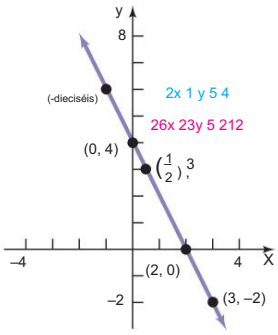


Figura 4 y = -2x + 4

La solución también se puede expresar usando notación de conjuntos:

5 1x, y2· y = - 2x + 4, x cualquier número real6 o

e1x, y2 ` x = - $\frac{1}{2}$y + 2, y cualquier número real f.

La Figura 4 ilustra el sistema dado en el Ejemplo 8. Observe que las gráficas de las dos ecuaciones son líneas, cada una con pendiente - 2 y cada una con intersección en y 4. Las líneas son coincidentes y las soluciones del sistema, como 1 - 1, 62, 10, 42 y 12, 02, son puntos de la recta. Observe también que la ecuación (2) en el sistema original es - 3 veces la ecuación (1), lo que indica que las dos ecuaciones son dependientes.

Ahora resuelve los problemas 2 7 y 3 1

5 Resuelve sistemas de tres ecuaciones que contienen Tres variables

Al igual que un sistema de dos ecuaciones lineales que contienen dos variables, un sistema de tres ecuaciones lineales que contiene tres variables tiene

- Exactamente una solución (un sistema consistente con ecuaciones independientes)
- Ninguna solución (un sistema inconsistente)
- Infinitas soluciones (un sistema consistente con ecuaciones dependientes)

El problema de resolver un sistema de tres ecuaciones lineales que contienen tres variables puede verse como un problema de geometría. La gráfica de cada ecuación en dicho sistema es un plano en el espacio. Un sistema de tres ecuaciones lineales que contienen tres variables representa tres planos en el espacio. La Figura 5 ilustra algunas de las posibilidades.

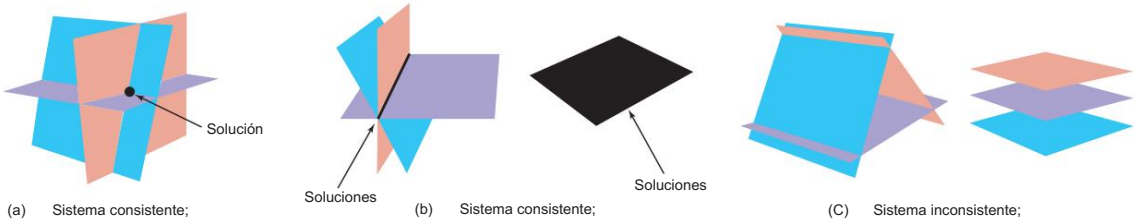


Figura 5 (a) Sistema consistente; una solución (b) Sistema consistente; numero infinito de soluciones (C) Sistema inconsistente; sin solución

Machine Translated by Google

Recuerde que una solución a un sistema de ecuaciones consta de valores de las variables que son soluciones de cada ecuación del sistema.

Por ejemplo, x = 3, y = -1, z = -5 es una solución al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= -21 \quad (1) \quad 3 + 1 - 12 + 1 - 52 = -3 \\ c\,x + 3xy + 5z &= -3 \quad (2) \quad 2 \# 3 - 31 - 12 + 61 - 52 = 6 + 3 - 30 = -21 \\ & \quad = -14 \quad (3) \quad -3 \# 3 + 51 - 12 = -9 - 5 = -14 \end{aligned}$$

porque estos valores de las variables son soluciones de cada ecuación.

Normalmente, al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales que contienen tres variables, utilizamos el método de eliminación. Recuerde que la idea detrás del método de eliminación es formar ecuaciones equivalentes de modo que la suma de dos de las ecuaciones elimine una variable.

EJEMPLO 9 Resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables

Utiliza el método de eliminación para resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 2z &= 16 \quad (1) \\ c\,2x + y - 3z &= 5 \quad (2) \\ & \quad (3) \end{aligned}$$

Solución

Para un sistema de tres ecuaciones, intente eliminar una variable a la vez, usando pares de ecuaciones, hasta que quede una ecuación con una sola variable. Nuestra estrategia para resolver este sistema será utilizar la ecuación (1) para eliminar la variable x de las ecuaciones (2) y (3). Entonces podemos tratar las nuevas ecuaciones (2) y (3) como un sistema con dos variables. Alternativamente, podríamos usar la ecuación (1) para eliminar y o z de las ecuaciones (2) y (3). Pruebe uno de estos enfoques usted mismo.

Comenzamos multiplicando ambos lados de la ecuación (1) por - 4 y sumando el resultado a la ecuación (2). (¿Ves por qué? Los coeficientes de x ahora son opuestos entre sí.) También multiplicamos la ecuación (1) por - 2 y sumamos el resultado a la ecuación (3). Observe que estos dos procedimientos dan como resultado la eliminación de la variable x de las ecuaciones (2) y (3).

(1) Multiplicar por ·4.

segundo x + 2z = 16 (1)
segundo - 3y = - 1 (2)

mi -4x - 3y + 2z = 16 (2)

- 7y + 6z = 20 Sumar.

(1) Multiplicar por ·2.

segundo x + 2z = 16 (1)
segundo + 2y - 3z = 5 (3)

mi -2x - 2y - 6z = 52 (3)

- 4y - z = 7 Sumar.

$$\begin{aligned} & \quad (1) \\ - 7y + 6z &= 20 \quad (2) \\ c\,x + 4 \text{ años} - z &= 7 \quad (3) \end{aligned}$$

Ahora concéntrese en las nuevas ecuaciones (2) y (3), tratándolas como un sistema de dos ecuaciones que contienen dos variables. Es más fácil eliminar z. Multiplique la ecuación (3) por 6 y sume las ecuaciones (2) y (3).

- 7y + 6z = 20 (2)
- 4 años - z = 7 (3) Multiplicar por 6.

- 7y + 6z = 20 (2)
- 24y - 6z = 42 (3) - 31y =

62 Sumar.

$$\begin{aligned} & \quad (1) \\ - 7y + 6z &= 20 \quad (2) \\ c\,x + y - z &= - 1 = 62 \quad (3) \end{aligned}$$

Ahora resuelve la nueva ecuación (3) para y dividiendo ambos lados de la ecuación por - 31.

$$\begin{aligned} & \quad - 1 \quad (1) \\ - 7y + 6z &= 20 \quad (2) \\ c\,x + y - z &= = - 2 \quad (3) \end{aligned}$$

Sustituya hacia atrás y = - 2 en la ecuación (2) y resuelva para z.

$$\begin{aligned} - 7y + 6z &= 20 \quad (2) \\ - 71 - 22 + 6z &= 20 \quad \text{Sustituye y} \cdot \cdot 2. \\ 6z &= 6 \quad \text{Resta 14 de ambos lados de la ecuación.} \\ z &= 1 \quad \text{Resuelve para z.} \end{aligned}$$

(continuado)

Machine Translated by Google

Finalmente, sustituya hacia atrás y = - 2 y z = 1 en la ecuación (1) y resuelva para x.

x + y - z = - 1 (1) x +
1 - 22 - 1 = - 1 Sustituye y · ·2 y z · 1. x - 3 = - 1
Simplifica.
x = 2 Solución para x.

La solución del sistema original es x = 2, y = - 2, z = 1 o, usando un triplete ordenado, 1 2, - 2, 12. Debes verificar esta solución.

Vuelve a repasar la solución del ejemplo 9. Observa el patrón de eliminar una de las variables de dos de las ecuaciones y luego resolver el sistema resultante de dos ecuaciones y dos variables. Aunque las variables a eliminar son tu elección, el método es el mismo para todos los sistemas.

Ahora resuelve el problema 4 5

6 Identificar sistemas de ecuaciones inconsistentes Que contiene tres variables

EJEMPLO 10 Identificar un sistema inconsistente de ecuaciones lineales

Resuelva: x + 2y - z = - 9 (1)
c 2x + y - z = - 2 (2)
x - 2y + z = 1 (3)

Solución Nuestra estrategia es la misma que en el ejemplo 9. Sin embargo, en este sistema, parece más fácil eliminar primero la variable z . ¿Ves por qué?

Multiplica la ecuación (1) por - 1 y suma el resultado a la ecuación (2). Además, sume las ecuaciones (2) y (3).

2x + y - z = - 2x + 2y - z = - 9 (1) Multiplicar por ·1. (2)

- 2x - y + z = 2 (1) x +
2y - z = - 9 (2)
- x + y = - 7 Sumar.

x + 2y - z = - 9 (2) x - 4y + z = 1 (3) 2x - 2y = - 8 Sumar.

(1) - x + y = - 7
(2) c 2x + y - z = - 2
(3) x - 2y + z = 1

Ahora concéntrese en las nuevas ecuaciones (2) y (3), tratándolas como un sistema de dos ecuaciones que contienen dos variables. Multiplica la ecuación (2) por 2 y suma el resultado a la ecuación (3).

- x + y = - 7 (2) Multiplicar por 2.
2x - 2y = - 8 (3)

- 2x + 2y = - 14 (2)
2x - 2y = - 8 (3)
0 = - 22 Sumar.

(1) - x + y = - 7
(2) c 2x + y - z = - 2
(3) 0 = - 22

La ecuación (3) no tiene solución, por lo que el sistema es inconsistente.

7 Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes. Que contiene tres variables

EJEMPLO 11 Resolver un sistema de ecuaciones dependientes

Resuelva: 2x - 3y + z = 23 (1)
4x - 5y + 2z = 58 (2)
c x - y + z = 13 (3)

Machine Translated by Google

Solución Nuestro plan es eliminar x de las ecuaciones (2) y (3). Multiplica la ecuación (1) por - 2, y suma el resultado a la ecuación (2). Además, multiplique la ecuación (1) por - 4 y sume el resultado a la ecuación (3).

x - 2y - z = 8 (1) Multiplicar por ·2. - 2x + 4y + 2z = - 16 (1)
2x - 3y + z = 23 (2) 2x - 3y + z = 23 (2)
y + 3z = 7 Sumar.

x - 2y - z = 8 (1) Multiplicar por ·4. - 4x + 8y + 4z = - 32 (1)
4x - 5y + 5z = 53 (3) 4x - 5y + 5z = 53 (3)
3y + 9z = 21 Sumar.

y + 3z = 7 (1)
c x - 2y - z = 8 3y + 9z = 21 (2)
(3)

Trate las ecuaciones (2) y (3) como un sistema de dos ecuaciones que contienen dos variables y elimine la variable y multiplicando la ecuación (2) por - 3 y sumando el resultado a la ecuación (3).

y + 3z = 7 (2) Multiplicar por ·3. - 3 años - 9z = - 21 (1)
3y + 9z = 21 (3) 3y + 9z = 21 Sumar. y + 3z = 7 (2)
0 = 0 c x - 2y - z = 8 0 = 0 (3)

El sistema original es equivalente a un sistema que contiene dos ecuaciones, por lo que las ecuaciones son dependientes y el sistema tiene infinitas soluciones. Si resolvemos y en la ecuación (2), podemos expresar y en términos de z como y = - 3z + 7. Sustituye esta expresión en la ecuación (1) para determinar x en términos de z.

x - 2y - z = 8 x - 21 Ecuación (1)
- 3z + 72 - z = 8 x + 6z - 14 - z Sustituye y · ·3z · 7.
= 8 Multiplicar.
x + 5z = 22 Combina términos semejantes.
x = - 5z + 22 Resuelve para x.

Escribiremos la solución al sistema como

e y x = - 5z + 7 22 donde z puede ser cualquier número real.

Esta forma de escribir la solución facilita la búsqueda de soluciones específicas. Para encontrar soluciones específicas, elija cualquier valor de z y use las ecuaciones x = - 5z + 22 e y = - 3z + 7 para determinar x e y. Por ejemplo, si z = 0, entonces x = 22 e y = 7, y si z = 1, entonces x = 17 e y = 4.

Usando tripletas ordenadas, la solución es

51x, y, z2 · x = - 5z + 22, y = - 3z + 7, z cualquier número real6

Ahora problema de trabajo 4 7

Dos puntos distintos en el plano cartesiano determinan una única recta. Dados tres puntos no colineales, podemos encontrar la única función cuadrática cuya gráfica contiene estos tres puntos.

EJEMPLO 12 Ajuste de curvas

Encuentre los números reales a, byc de modo que la gráfica de la función cuadrática y = ax2 + bx + c contenga los puntos 1 - 1, - 42, 11, 62 y 13, 02 .

Solución Los tres puntos deben satisfacer la ecuación y = ax2 + bx + c.

Para el punto 1 - 1, - 42 tenemos: - 4 = a1 - 12 2 + b1 - 12 + c - 4 = a - b + c
Para el punto 11, 62 tenemos: 2 6 = un # 1 + segundo # 1 + c 6 = a + segundo + c
Para el punto 13, 02 tenemos: 0 = a # 32 + b # 3 + c 0 = 9a + 3b + c

(continuado)

Machine Translated by Google

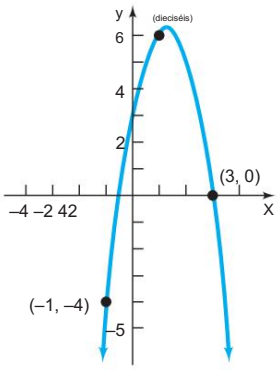


Figura 6 y = -2x2 + 5x + 3

Determine a, b y c de manera que se satisfaga cada ecuación. Es decir, resuelve el sistema de tres ecuaciones que contienen tres variables:

$$a + b + c = 6 \quad (1)$$
$$9a + 3b + c = 0 \quad (2)$$
$$a - b + c = 4 \quad (3)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos a = - 2, b = 5 y c = 3. Entonces la función cuadrática cuya gráfica contiene los puntos 1 - 1, - 42, 11, 62 y 13, 02 es y = - 2x2 + 5x + 3 y · ax2 · bx · c, a · ·2, b · 5, c · 3

La figura 6 muestra la gráfica de la función, junto con los tres puntos.

Ahora problema de trabajo 7 3

11.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Resuelve la ecuación: 3x + 4 = 8 - x. (págs. A44–A45)

2. (a) Grafique la recta: 3x + 4y = 12. (b) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela a esta recta? (págs. 56 y 67)

Conceptos y vocabulario

3. Verdadero o Falso Si un sistema de ecuaciones no tiene solución, es se dice que es dependiente.

4. Si un sistema de ecuaciones tiene una solución, el sistema es _____ y las ecuaciones son _____.

5. Si la única solución de un sistema de dos ecuaciones lineales que contiene dos variables es x = 3, y = - 2, entonces las gráficas de las rectas del sistema se cruzan en el punto _____.

6. Si las rectas que forman un sistema de dos ecuaciones lineales y la son coincidentes, entonces el sistema de ecuaciones es _____.

7. Opción múltiple Si un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables es inconsistente, entonces las gráficas de las rectas en el sistema _____.
son (a) se cruzan (b) paralelo
(c) coincidentes (d) perpendicular

8. Opción múltiple si un sistema de ecuaciones dependientes que contiene tres variables tiene la solución general 5 1x, y, z2 · x = - z + 4, y = - 2z + 5, z es cualquier número real6 entonces es una de las infinitas soluciones de la sistema.
(a) 11, - 1, 32 (b) 10, 4, 52 (c) 14, - 3, 02 (d) 1 - 1, 5, 72

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 18, verifique que los valores de las variables enumeradas sean soluciones del sistema de ecuaciones.

9. b 3x + 2y = 230
x = - 2, y = 4; 1 - 2, 42

10. mi 5x + 2y = 58
x = 2, y = - 1; 12, - 12

11.c 3x - 4y = 4
x = 2, y = 1/2; a2, 1/2 b

12. 1/2 año = 0
3x - 4y = 19/2
re 2x + 1/2 y = 1/2
x = - 1/2, y = 2; a - 1/2, 2b

13. e x + 3y = 1
x = - 2, y = - 5; 1 - 2, - 52

14. • x + y = 3
x - y = 3
x = 4, y = 1; 14, 12

15.c 4x - z = 6
- z = 7 8x
+ 5y - z = 0 - x - y +
x = 2, y = - 3, z = 1;
12, - 3, 12

16.c 3x + 3y + 2z = 4
x - y - z = 0
2x - 2y + 3z = - 8
x = 1, y = - 1, z = 2;
11, - 1, 22

17. c 4x - 5z = 6 5y - z
= 24 x = 4, y = - 3, z =
= - 17 - x - 6y +
2; 14, - 3, 22

18.c 3x - 3y - 2z = 8
x - 3y + z = 10
5x - 3y - 3z = 4 x =
2, y = - 2, z = 2; 12, - 2, 22

Machine Translated by Google

En los problemas 19 a 56, resuelva cada sistema de ecuaciones. Si el sistema no tiene solución, indique que es inconsistente. Para los problemas 19 a 30, grafique las líneas del sistema.

19. b $x + 2y = -3$

20. b $x + y = 4$

21. b $2x + 3y = -12$

22. b $2x + 3y = -8$

23. b $4x + 3y = -8$

24. b $3x + 2y = 0$

25. c $2x + 4y = -10$

26. b $5x + 4y = 1$

27. b $4x + 2y = 3$

28. b $x - 3y = 2$

29. c $3x + 3y = -1$

30. b $2x + 2y = 12$

31. b $2x + 4y = 8$

32. b $3x - 3y = 21$

33. b $5x + 10y = 4$

34. b $10x + 3y = 11$

35. c $\frac{1}{2}x + y = -2$
$x - 2y = 8$

36. c $x - y = 2$
$2x + 3y = 6$

37. $\frac{1}{3}x - \frac{3}{4} = 2$
$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = 11$

38. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$
$\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = -1$

39. c $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$2x - y = -1$

40. $3x - 2y = 7$
$5x - 2y = 5$

41. $\frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 0$
$\frac{6}{x} + \frac{3}{y} = 2$

42. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8$
$\frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 0$

c Pista: Sea $u = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{1}{y}$, y resuelve para u y v. Entonces $x = \frac{1}{u}$ y $y = \frac{1}{v}$. d

43. c $2x + y - 2z = -11$
$3x + y - 2z = -4$
$-2y + 4z = 0$

44. c $x + y + 2z = 7$
$2x - z = 13$
$3y + 2z = 9$

45. c $x - 2y + 2z = 17$
$2x + y + z = 4$
$-3y + 2z = -10$

46. c $2x + 3y - 4z = -3$
$-2x + 2y + z = -7$

47. c $2x - y + 3z = 1$
$-x + 2y + z = 5$

48. c $2x + 3y + z = 2$
$-z = 13$

49. c $2x - 4y - 3z = 6$
$3x + 2y + 2z = 2$

50. c $3x - 2y - 4z = 0$
$x + y - z = 0$

51. c $3x - 2y + 2z = 6$
$x + 4y - 3z = 2$

52. c $2x - 2y - 3z = 6$
$x + 2y - z = -3$

55.
$3y - z = 1$
$5x + 3y + 2z = 2$
$x + 2y - 3z = -4$

56.
$4x - 3y + 2z = 0$
$-2x + 3y - 7z = 1$
$2x - 3y + 4z = -15$
$5x + y - 2z = 12$

Aplicaciones y extensiones

57. El perímetro de un piso rectangular es de 200 pies. Encuentra las dimensiones del piso si el largo es tres veces el ancho.

58. La longitud de la valla necesaria para encerrar un campo rectangular es de 3000 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre su largo y su ancho es de 50 metros?

59. Lanzamientos orbitales Un año hubo un total de 69 lanzamientos orbitales comerciales y no comerciales en todo el mundo.

Además, el número de lanzamientos orbitales no comerciales fue uno más que tres veces el número de lanzamientos orbitales comerciales. Determinar el número de lanzamientos orbitales comerciales y no comerciales.

60. Boletos para el cine Un cine cobra $9.00 para adultos y $7.00 para personas mayores. En un día en que 325 personas pagaron la entrada, los ingresos totales fueron de $2495. ¿Cuántos de los que pagaron eran adultos? ¿Cuántos eran personas mayores?

61. Mezclar nueces Una tienda vende anacardos a $4,00 la libra y maní a $1,50 la libra. El gerente decide mezclar 20 libras de maní con algunos anacardos y vender la mezcla a $2,00 la libra. ¿Cuántas libras de anacardos se deben mezclar con maní para que la mezcla produzca los mismos ingresos que si se vendieran las nueces por separado?

Machine Translated by Google

62. Mezclar una solución Un químico quiere preparar 14 litros de una solución ácida al 40%. Tiene soluciones que son 30% ácidas y 65% ácidas. ¿Cuánto de cada uno debe mezclar?

63. Pedido de preventa El dueño de una tienda de servicios inalámbricos toma pedidos de preventa para un nuevo teléfono inteligente y una tableta. Tiene 330 pedidos anticipados para el teléfono inteligente y 160 pedidos para la tableta. La venta combinada de los pedidos anticipados es de 304.000 dólares. Si el precio de un teléfono inteligente y una tableta juntos es $1135, encuentre el costo de un teléfono inteligente y el costo de una tableta.

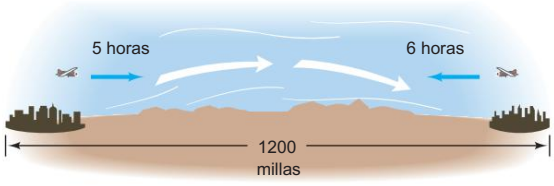
64. Planificación financiera Una pareja recientemente jubilada necesita $12 000 por año para complementar su Seguridad Social. Tienen $300,000 para invertir para obtener este ingreso. Se han decidido por dos opciones de inversión: bonos AA con un rendimiento del 5% anual y un certificado bancario con un rendimiento del 2,5%.

(a) ¿Cuánto debería invertirse en cada uno para obtener exactamente ¿12.000 dólares?

(b) Si, después de 2 años, la pareja necesita $14 000 por año en ingresos, ¿cómo deberían reasignar su inversión para lograr la nueva cantidad?

65. Calcular la velocidad del viento La velocidad aérea promedio de un avión monomotor es de 150 millas por hora. Si el avión voló la misma distancia en 2 horas con el viento que en 3 horas en contra del viento, ¿cuál era la velocidad del viento?

66. Calcular la velocidad del viento Con viento de cola, un avión pequeño puede volar 1200 millas en 5 horas. Contra este mismo viento, el avión puede recorrer la misma distancia en 6 horas. Encuentre la velocidad promedio del viento y la velocidad promedio del avión.



67. Administración de un restaurante El gerente de un restaurante quiere comprar 200 juegos de platos. Un diseño cuesta $10 por juego, mientras que otro cuesta $45 por juego. Si quiere utilizar todo su presupuesto de $4100, ¿cuántos de cada diseño debe pedir?

68. Costo de la comida rápida Un grupo de personas compró 10 hot dogs y 5 refrescos a un costo de $35,00. Un segundo compró 7 hot dogs y 4 refrescos a un costo de $25.25. ¿Cuál es el costo de un solo hot dog? ¿Un solo refresco?

Pagamos $35.00.
¿Cuánto cuesta un hot dog?
¿Cuánto cuesta un refresco?

Pagamos $25,25.
¿Cuánto cuesta un hot dog?
¿Cuánto cuesta un refresco?

69. Calcular un reembolso La tienda de comestibles que utilizamos no marca los precios de sus productos. Mi esposa fue a esta tienda, compró cuatro paquetes de tocino y cinco cartones de huevos y pagó un total de $21,41. Sin saber que ella fue a la tienda, yo también fui a la misma tienda, compré cinco paquetes de tocino y cuatro cartones de huevos y pagué un total de $23,41. Ahora queremos devolver cuatro paquetes de tocino y cuatro cartones de huevos. ¿Cuánto se reembolsará?

70. Encontrar la corriente de un arroyo Pamela necesita 3 horas para nadar 15 millas río abajo en el río Illinois. El viaje de regreso río arriba dura 5 horas. Calcula la velocidad promedio de Pamela en aguas tranquilas. ¿Qué tan rápida es la corriente? (Suponga que la velocidad de Pamela es la misma en cada dirección).

71. Farmacia La receta de un médico requiere la creación de píldoras que contienen 12 unidades de vitamina B12 y 12 unidades de vitamina E. Su farmacia tiene dos polvos que se pueden usar para hacer estas píldoras: uno contiene 20% de vitamina B12 . y 30% de vitamina E, el otro 40% de vitamina B12 y 20% de vitamina E. ¿Cuántas unidades de cada polvo se deben mezclar en cada pastilla?

72. Farmacia La prescripción médica indica una ingesta diaria que contiene 30 mg de vitamina C y 20 mg de vitamina D. Su farmacia tiene dos compuestos que se pueden usar: uno contiene 50% de vitamina C y 50% de vitamina D, el otro 40% de vitamina C y 20% de vitamina D. ¿Cuántos miligramos de cada compuesto se deben mezclar para surtir la receta?

73. Ajuste de curvas Encuentra los números reales a, byc de modo que la gráfica de la función y = ax2 + bx + c contenga los puntos 1 - 1, 52, 13, 82 y 10, 22 .

74. Ajuste de curvas Encuentra los números reales a, byc de modo que la gráfica de la función y = ax2 + bx + c contenga los puntos 1- 1, - 22, 11, - 42 y 12, 42 .

75. Modelo IS-LM en economía En economía, la curva IS es una ecuación lineal que representa todas las combinaciones de ingreso Y y tasas de interés r que mantienen un equilibrio en el mercado de bienes de la economía. La curva LM es una ecuación lineal que representa todas las combinaciones de ingreso Y y tasas de interés r que mantienen un equilibrio en el mercado de dinero en la economía. En una economía, supongamos que el nivel de equilibrio del ingreso (en millones de dólares) y las tasas de interés satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0.05Y + 800r = 100 \\ 0.05Y - 1000r = 10 \end{cases}$$

Encuentre el nivel de equilibrio de ingresos y tasas de interés.

76. Modelo IS-LM en economía En economía, la curva IS es una ecuación lineal que representa todas las combinaciones de ingreso Y y tasas de interés r que mantienen un equilibrio en el mercado de bienes de la economía. La curva LM es una ecuación lineal que representa todas las combinaciones de ingreso Y y tasas de interés r que mantienen un equilibrio en el mercado de dinero en la economía. En una economía, supongamos que el nivel de equilibrio del ingreso (en millones de dólares) y las tasas de interés satisfacen el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 0.06Y + 7000r = 900 \\ 0.06Y - 6000r = 120 \end{cases}$$

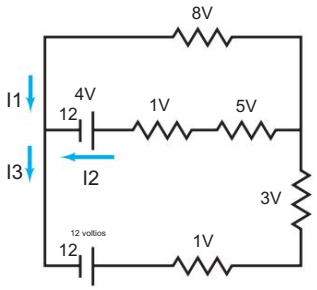
Encuentre el nivel de equilibrio de ingresos y tasas de interés.

Machine Translated by Google

77. Electricidad: Reglas de Kirchhoff Una aplicación de las Reglas de Kirchhoff al circuito que se muestra a continuación da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$8 = 4I3 + 6I2$$
$$I1 = I4 + I2$$

Encuentre las corrientes I1 , I2 e I3 .

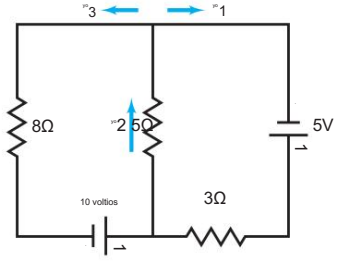


Fuente: Física para científicos e ingenieros, 9ª ed., por Serway. © 2013 Cengage Aprendizaje.

78. Electricidad: Reglas de Kirchhoff Una aplicación de las Reglas de Kirchhoff al circuito mostrado da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones.

$$I2 = I1 + I3$$
$$5 - 3I1 - 5I2 = 0$$
$$10 - 5I2 - 8I3 = 0$$

Encuentre las corrientes I1 , I2 , I3 .



Fuente: Física para científicos e ingenieros, 9ª ed., por Serway. © 2013 Cengage Aprendizaje.

79. Ingresos del cine Una sala de cine cobra $11,00 para adultos, $6,50 para niños y $9,00 para personas mayores. Un día, el teatro vendió 405 entradas y recaudó $3315 en ingresos. Se vendieron el doble de entradas para niños que para adultos. ¿Cuántos adultos, niños y personas mayores fueron al teatro ese día?

80. Ingresos del teatro Un teatro de Broadway tiene 800 asientos, divididos en asientos de orquesta, principales y de balcón. Los asientos de la orquesta se venden por $50, los asientos principales por $40 y los asientos del balcón por $25. Si se venden todos los asientos, los ingresos brutos del teatro son de $30,150. Si se venden todos los asientos principales y de balcón, pero solo la mitad de los asientos de la orquesta, el ingreso bruto es de $26,150. ¿Cuántos hay de cada tipo de asiento?

81. Nutrición Un dietista desea que un paciente tenga una comida que tenga 82 gramos de proteína, 125,5 gramos de carbohidratos y 690 miligramos de calcio. El servicio de alimentación del hospital le dice al dietista que la cena de hoy es pollo, maíz y leche. Cada porción de pollo tiene 40 gramos de proteína, 45 gramos de carbohidratos y 100 miligramos de calcio. Cada porción de maíz tiene 3 gramos de proteína, 16 gramos de carbohidratos y 10 miligramos de calcio. Cada vaso de leche tiene 8 gramos de proteína, 13 gramos de carbohidratos y 260 miligramos de calcio. ¿Cuántas porciones de cada alimento debe proporcionar el dietista al paciente?

82. Inversiones Kelly tiene $20 000 para invertir. Como su planificador financiero, le recomienda que diversifique en tres inversiones: letras del Tesoro que rinden un 5% de interés simple, bonos del Tesoro que rinden un 7% de interés simple y bonos corporativos que rinden un 10% de interés simple. Kelly desea ganar $1390 por año en ingresos. Además, Kelly quiere que su inversión en letras del Tesoro sea $3000 más que su inversión en bonos corporativos. ¿Cuánto dinero debería colocar Kelly en cada inversión?

83. Precios de la comida rápida Un grupo de clientes compró 8 hamburguesas de lujo, 6 pedidos de papas fritas grandes y 6 refrescos de cola grandes por $26,10. Un segundo grupo pidió 10 hamburguesas de lujo, 6 papas fritas grandes y 8 refrescos de cola grandes y pagó $31,60. ¿Existe suficiente información para determinar el precio de cada alimento? En caso contrario, construya una tabla que muestre las diversas posibilidades. Supongamos que las hamburguesas cuestan entre $1,75 y $2,25, las papas fritas entre $0,75 y $1,00 y las bebidas de cola entre $0,60 y $0,90.

84. Precios de la comida rápida Utilice la información dada en el problema 83. Supongamos que un tercer grupo compró 3 hamburguesas de lujo, 2 papas fritas grandes y 4 refrescos de cola grandes por $10,95. Ahora bien, ¿existe suficiente información para determinar el precio de cada alimento? Si es así, determine cada precio.

85. Pintar una casa Tres pintores Beth, Bill y Edie, trabajando juntos, pueden pintar el exterior de una casa en 12 horas. Bill y Edie juntos pintaron una casa similar en 15 horas. Un día, los tres trabajaron en este mismo tipo de casa durante 5 horas, después de lo cual Edie se fue. Beth y Bill necesitaron 10 horas más para terminar. Suponiendo que no haya ganancia ni pérdida en eficiencia, ¿cuánto tiempo debería tomarle a cada persona completar ese trabajo por sí sola?

86. Problema de desafío Resuelva para x e y, suponiendo a ≠ 0 y b ≠ 0.

87. Problema de desafío Resuelva para x, y y z, suponiendo a ≠ 0, b ≠ 0 y c ≠ 0.

$$= a + b + c$$
$$a2\,x + b2\,y + c2\,z = ca + ab + \text{antes de Cristo}$$
$$= \text{antes de Cristo} + ca$$

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

88. Forma un sistema de tres ecuaciones lineales que contengan tres variables que tiene:
(a) Ninguna solución
(b) Exactamente una solución
(c) Infinitas soluciones
Dale los tres sistemas a un amigo para que los resuelva y los critique.

89. Escribe un breve párrafo que describa tu estrategia para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que contienen dos variables.

90. ¿Prefieres el método de sustitución o el método de eliminación para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que contienen dos variables? Da tus razones.

Conserve su conocimiento

Los problemas 91 a 100 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

91. Grafica f1x2 = - 31-x + 2.

92. Factoriza cada uno de los siguientes:
(a) 412x - 32 3 # 2 # 1x3 + 52 2 + 21x3 + 52 # 3x2 # 12x - 32 4
(b) 13x - 52 - 2 1 2 # 3 # 1x + 32 - 1 2 - 1 2 1x + 32 - 2 3 2 13x - 52 1 2

93. Encuentra el valor exacto del pecado. 10p / 9 ≤ d, -1 c pecado ¢ -

94. Escribe - 23 + i en forma polar y en forma exponencial.

95. Si A = 52, 4, 6, c, 306 y B = 53, 6, 9, c, 306, encuentre A ∩ B.

96. Encuentre la ecuación de una elipse si el centro está en el origen, la longitud del eje mayor es 20 a lo largo del eje x y la longitud del eje menor es 12.

97. Si z = 6ei # 7p>4 y w = 2ei # 5p>6, Encuentra zw y escribe la w. z
respuestas en forma polar y en forma exponencial.

98. Encuentre el capital necesario ahora para obtener $5000 después de 18 meses al 4% de interés compuesto mensualmente.

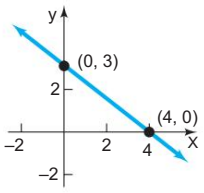
99. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = cos-1 x de x = - a x = 2 1 1 2.

100. Encuentra el área del triángulo con vértices en 10, 52, 13, 92 y 112, 02.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 516

2. (una)



(b) - 4 3 —

11.2 Sistemas de ecuaciones lineales: matrices

OBJETIVOS 1 Escribir la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales (p. 771)
2 Escriba el sistema de ecuaciones a partir de la matriz aumentada (p. 772)
3 Realizar operaciones con filas en una matriz (p. 772)
4 Resuelva un sistema de ecuaciones lineales usando matrices (p. 773)

El enfoque sistemático del método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales proporciona otro método de solución que implica una notación simplificada.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

b 3x + 2y = 10
x - 4y = 14

Si elegimos no escribir las variables, podemos representar este sistema como

J 3 2 10
1 -4 14 R

donde se entiende que la primera columna representa los coeficientes de la variable x, la segunda columna los coeficientes de y, y la tercera columna las constantes del lado derecho de los signos iguales. La barra vertical sirve como recordatorio de los signos iguales. Los corchetes grandes se utilizan para indicar una matriz en álgebra.

Machine Translated by Google

Matriz DEFINICIÓN

Una matriz se define como una matriz rectangular de números:

	Columna 1	Columna 2	Columna j	columna norte
Fila 1		a12 g	a1j g	a1n
Fila 2	a21	a22 g	a2j g	a2n
fila i	ai1	ai2 g	aij g	ain
fila m	am1	am2 g	amj g	amn

(1)

Cada número aij en la matriz tiene dos índices: el índice de fila i y el índice de columna j. La matriz que se muestra en la pantalla (1) tiene m filas yn columnas . los numeros aij generalmente se denominan entradas de la matriz. Por ejemplo, a23 se refiere a la entrada de la segunda fila, tercera columna.

1 Escribe la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales

Ahora usaremos notación matricial para representar un sistema de ecuaciones lineales. La matriz utilizada para representar un sistema de ecuaciones lineales se llama matriz aumentada. Al escribir la matriz aumentada de un sistema, las variables de cada ecuación deben estar en el lado izquierdo del signo igual y las constantes en el lado derecho. Una variable que no aparece en una ecuación tiene un coeficiente de 0.

En palabras

Aumentar significa aumentar o expandir. Una matriz aumentada amplía la idea de matrices a sistemas de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1 Escribir la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales

Escribe la matriz aumentada de cada sistema de ecuaciones.

(a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 & (1) \\ 4x - 6y = 6 & (2) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + z - 1 = 0 & (1) \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 & (2) \\ & (3) \end{cases}$

Solución

(a) La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

- 5 rublos

(b) Se debe tener cuidado de que el sistema se escriba de manera que los coeficientes de todas las variables estén presentes (si falta alguna variable, su coeficiente es 0). Además, todas las constantes deben estar a la derecha del signo igual. Necesitamos reorganizar el sistema dado para darle la forma requerida.

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 & (1) \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 & (2) \\ & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 0y + z = 1 & (1) \\ 2x - y + 2z = 8 & (2) \\ & (3) \end{cases}$$

PRECAUCIÓN Asegúrese de que las variables y constantes estén alineadas correctamente antes de escribir la matriz aumentada.

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ & & & \end{bmatrix}$$

Si no incluimos las constantes a la derecha del signo igual (es decir, a la derecha de la barra vertical en la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones), el resultado

Machine Translated by Google

La matriz se llama matriz de coeficientes del sistema. Para los sistemas analizados en el Ejemplo 1, las matrices de coeficientes son

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ahora trabaja el problema 9

2 Escribe el sistema de ecuaciones a partir de la matriz aumentada.

EJEMPLO 2 **Escribir el sistema de ecuaciones lineales a partir de la matriz aumentada**

Escribe el sistema de ecuaciones lineales que corresponde a cada matriz aumentada.

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución (a) La matriz aumentada tiene dos filas y, por lo tanto, representa un sistema de dos ecuaciones. Las dos columnas a la izquierda de la barra vertical indican que el sistema tiene dos variables. Si se utilizan x e y para denotar estas variables, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ 5x - y = 10 & (2) \end{cases}$$

(b) Dado que la matriz aumentada tiene tres filas, representa un sistema de tres ecuaciones. Como hay tres columnas a la izquierda de la barra vertical, el sistema contiene tres variables. Si x, y y z son las tres variables, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} 2x + 2z = 8 & (1) \\ 3x - y + z = 7 & (2) \\ y + z = 0 & (3) \end{cases}$$

3 Realizar operaciones de fila en una matriz

Las operaciones de fila en una matriz se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones cuando el sistema está escrito como una matriz aumentada. Hay tres operaciones básicas de fila.

Operaciones de fila

- Intercambie dos filas cualesquiera.
- Reemplazar una fila por un múltiplo distinto de cero de esa fila.
- Reemplazar una fila por la suma de esa fila y un múltiplo constante distinto de cero de alguna otra fila.

Estas tres operaciones con renglones corresponden a las tres reglas dadas anteriormente para obtener un sistema de ecuaciones equivalente. Cuando se realiza una operación de fila en una matriz, la matriz resultante representa un sistema de ecuaciones equivalente al sistema representado por la matriz original.

Por ejemplo, considere la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & R \end{bmatrix}$$

Supongamos que queremos usar una operación de fila que dé como resultado una matriz cuya entrada en la fila 2, columna 1 es 0. La operación de fila a usar es

Multiplica cada entrada en la fila 1 por - 4 y suma el resultado a las entradas correspondientes en la fila 2. (2)

Machine Translated by Google

Si usamos R2 para representar las nuevas entradas en la fila 2 y r1 y r2 para representar las entradas originales en las filas 1 y 2, respectivamente, podemos representar la operación de fila en la declaración (2) mediante

$$R2 = -4r1 + r2$$

Entonces

$$\begin{matrix} 2 & & 1 & 2 & 3 & 3 \\ J\,1\,4\,-\,1\,2\,3 & 2\,RSJ\,-\,4\,\#\,1\,+\,4\,-\,4\,\#\,2\,+\,1\,-\,12\,2 & & -\,4\,\#\,3\,+\,2\,R\,=\,J\,1\,2\,0\,-\,9 & -\,10 \end{matrix}$$

Ræ

$$R2 \cdot -4r1 \cdot r2$$

Ahora tenemos la entrada 0 en la fila 2, columna 1.

EJEMPLO 3 Usando una operación de fila en una matriz aumentada

Utilice la operación de fila R2 = - 3r1 + r2 en la matriz aumentada

$$J\,-1\,5\,2\,3 \qquad 9R$$

Solución La operación de fila R2 = - 3r1 + r2 reemplaza las entradas de la fila 2 por las entradas obtenidas después de multiplicar cada entrada de la fila 1 por - 3 y sumar el resultado a las entradas correspondientes de la fila 2.

$$\begin{matrix} & & 1 & -\,2 & 2 & \\ J\,-1\,5\,2\,3 & 9\,RSJ\,-\,3\,\#\,1\,+\,3\,-\,3\,\#\,1\,-\,22\,+\,1\,-\,52\,2 & & -\,3\,\#\,2\,+\,9\,R\,=\,J\,1\,0\,-1\,2\,2\,2 & 3 \end{matrix}$$

Ræ

$$R2 \cdot -3r1 \cdot r2$$

Ahora problema de trabajo 1 9

EJEMPLO 4 Encontrar una operación de fila

Encuentre una operación de fila que dé como resultado la matriz aumentada

$$J\,1\,2\,2\,0 \qquad 3R$$

teniendo 0 en la fila 1, columna 2.

Solución Queremos 0 en la fila 1, columna 2. Debido a que la entrada en la fila 2, columna 2 es 1, multiplique la fila 2 por 2 y agregue el resultado a la fila 1. Es decir, use la operación de fila R1 = 2r2 + r1 .

$$\begin{matrix} J\,0\,-\,2\,1\,2\,2 & 3\,RSJ\,2\,\#\,0\,+\,1\,2\,\#\,1\,+\,1\,-\,22\,æ & 2\,2\,\#\,3\,+\,2 & R\,=\,J\,1\,0\,2\,0\,8 & 3R \end{matrix}$$

$$R1 \cdot 2r2 \cdot r1$$

Unas palabras sobre la notación: la operación de fila R1 = 2r2 + r1 cambia las entradas de la fila 1. Cambiamos las entradas de la fila 1 multiplicando las entradas de alguna otra fila por un número distinto de cero y sumando los resultados a las entradas originales de la fila 1. .

4 Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices Para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices, use operaciones por renglones en la matriz aumentada del sistema para obtener una matriz que esté en forma escalonada por renglones.

DEFINICIÓN Forma escalonada de filas

Una matriz está en forma escalonada por filas cuando se cumplen las siguientes condiciones: • La entrada en la fila 1, columna 1 es un 1, y solo aparecen 0 debajo de ella. • La primera entrada distinta de cero en cada fila después de la primera fila es un 1, solo aparecen 0 debajo y el 1 aparece a la derecha de la primera entrada distinta de cero en cualquier fila superior. • Cualquier fila que contenga todos ceros a la izquierda de la barra vertical aparece en l abajo.

Machine Translated by Google

Por ejemplo, para un sistema de tres ecuaciones que contiene tres variables, x, y y z, con una solución única, la matriz aumentada está en forma escalonada por renglones si tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & d \\ 0 & 1 & c & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{bmatrix}$$

donde a, b, c, d, e y f son números reales. La última fila de esta matriz aumentada establece que z = f. Luego determinamos el valor de y usando sustitución inversa con z = f, ya que la fila 2 representa la ecuación y + cz = e. Finalmente, x se determina usando nuevamente sustitución hacia atrás.

Dos ventajas de resolver un sistema de ecuaciones escribiendo la matriz aumentada en forma escalonada por renglones son las siguientes:

- El proceso es algorítmico; es decir, consta de pasos repetitivos que pueden ser programado en una computadora.
- El proceso funciona en cualquier sistema de ecuaciones lineales, sin importar cuántas ecuaciones o variables estén presentes.

El siguiente ejemplo muestra cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales escribiendo su matriz aumentada en forma escalonada por filas.

EJEMPLO 5 Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices

(Formulario escalonado de filas)

Resuelva

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \quad (1)\\ 2x + 2y &= 0 \quad (2)\\ 3x + 4y - 2z &= 6 \quad (3) \end{aligned}$$

Solución paso a paso

Escriba la matriz aumentada del sistema.

Paso 1: Escriba la matriz aumentada que represente el sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 2: utilice operaciones de fila para obtener 1 en la fila 1, columna 1.

Para obtener 1 en la fila 1, columna 1, intercambie las filas 1 y 2. [Tenga en cuenta que esto equivale a intercambiar las ecuaciones (1) y (2) del sistema.]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 3: use operaciones de fila que dejen la fila 1 sin cambios, pero cambie las entradas en la columna 1 a continuación fila 1 a 0.

A continuación, queremos 0 en la fila 2, columna 1 y 0 en la fila 3, columna 1. Utilice las operaciones de fila R2 = - 2r1 + r2 y R3 = - 3r1 + r3. Tenga en cuenta que la fila 1 no se modifica utilizando estas operaciones de fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R2 \cdot\cdot -2r1 \cdot r2$$
$$R3 \cdot\cdot -3r1 \cdot r3$$

Paso 4: Utilice operaciones de fila para obtener 1 en la fila 2, columna 2 y 0 debajo de ella.

Queremos que la entrada en la fila 2, columna 2 sea 1. También queremos tener 0 debajo del 1 en la fila 2, columna 2. Intercambiar las filas 2 y 3 logrará ambos objetivos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Machine Translated by Google

Paso 5: Repita el Paso 4 para obtener 1 en la fila 3, columna 3.

1 Para obtener 1 en la fila 3, columna 3, use la operación de fila R3 = - r3. El resultado es 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 10 & 0\ 1\ -4\ 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad 4 \text{ CSS } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ & & & & & -2 \end{bmatrix} S$$

$$R3 \cdot\cdot r32 _ \frac{1}{}$$

Paso 6: La matriz de la derecha en el Paso 5 es la forma escalonada por filas de la matriz aumentada. Utilice sustitución hacia atrás para resolver el sistema original.

La tercera fila de la matriz aumentada representa la ecuación z = - 2. Usando z = - 2, sustituye hacia atrás en la ecuación y - 4z = 10 (fila 2) y obtiene

$$y - 4z = 10$$

$$y - 41 - 22 = 10 \; z \cdot \cdot 2$$

$$y = 2 \text{ Resuelve para y.}$$

Finalmente, sustituya hacia atrás y = 2 y z = - 2 en la ecuación x + y + z = 1 (fila 1) y obtenga

$$x + y + z = 1$$

$$x + 2 + 1 - 22 = 1 \; y \cdot 2, z \cdot \cdot 2$$

$$x = 1 \text{ Resuelve para x.}$$

La solución del sistema es x = 1, y = 2, z = - 2 o, usando un triplete ordenado, 11, 2, - 22.

Método matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales

(Formulario escalonado de filas)

Paso 1: Escribe la matriz aumentada que representa el sistema.

Paso 2: utilice operaciones de fila para obtener 1 en la fila 1, columna 1.

Paso 3: utilice operaciones de fila que dejen la fila 1 sin cambios, pero cambien las entradas en la columna 1 debajo de la fila 1 a 0.

Paso 4: Utilice operaciones de fila para obtener 1 en la fila 2, columna 2, pero deje las entradas en las columnas de la izquierda sin cambios. Si es imposible colocar 1 en la fila 2, columna 2, coloque 1 en la fila 2, columna 3. Una vez que el 1 esté en su lugar, use operaciones de fila para obtener 0 debajo de él. (Coloque las filas que contengan solo ceros en el lado izquierdo de la barra vertical, en la parte inferior de la matriz).

Paso 5: Ahora repita el Paso 4 para obtener 1 en la siguiente fila, pero una columna a la derecha. Continúe hasta llegar a la fila inferior o a la barra vertical.

Paso 6: La matriz resultante es la forma escalonada por filas de la matriz aumentada. Analiza el sistema de ecuaciones que le corresponde para resolver el sistema original.

EJEMPLO 6 Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices

(Formulario escalonado de filas)

$$2x + 3y - z = -2 \quad (1)$$

$$\text{Resuelva } 3xc - x2yy \; 9zz = 98 \quad (2)$$

$$(3)$$

Solución Paso 1: La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} & & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

(continuado)

Machine Translated by Google

Paso 2: Debido a que 1 ya está en la fila 1, columna 1, vaya al Paso 3.

Paso 3: Realice las operaciones de fila R2 = - 2r1 + r2 y R3 = - 3r1 + r3 . Cada uno de estos deja la fila 1 sin cambios, mientras que causa 0 en la columna 1 de las otras filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2\ 3 & -1 \\ C31 & -21-9\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0\ 5 & -3 \\ 9\ SSC & 10-1\ 1 & -12\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -18 \\ -15S \end{bmatrix}$$

$$\overset{ae}{R2} \cdot\cdot 2r1 \cdot r2$$
$$R3 \cdot\cdot 3r1 \cdot r3$$

Paso 4: La forma más fácil de obtener la entrada 1 en la fila 2, columna 2 sin alterar la columna 1 es intercambiar las filas 2 y 3 (otra forma sería multiplicar 1 fila 2 por 5

$$-$$

, pero esto introduce fracciones).

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ C01 & -15-3\ 3 & -18S \end{bmatrix}$$

Para obtener 0 debajo del 1 en la fila 2, columna 2, use la operación de fila R3 = - 5r2 + r3 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0\ 1 & -12 & -15 \\ C015 & -13\ 3 & -18 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -12 & -15 \\ SSC & 10-57\ 3 & 57s \end{bmatrix}$$

$$\overset{ae}{R3} \cdot\cdot 5r2 \cdot r3$$

Paso 5: Continuando, obtenga 1 en la fila 3, columna 3 usando R3 = r3 . 57

$$\frac{1}{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0\ 1 & -12 & -15 \\ C010 & -57\ 3 & 57 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -12 & -15 \\ SSC & 10-1 & 1\ 3 & 1S \end{bmatrix}$$

$$\overset{ae}{R3} \cdot \frac{1}{r3\ 57}$$

Paso 6: La matriz de la derecha es la forma escalonada por filas de la matriz aumentada.

El sistema de ecuaciones representado por la matriz en forma escalonada por renglones es

$$\begin{array}{rl} y - 12z = -15 & (1) \\ c\ x - y + z = 8 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{array}$$

Usando z = 1, sustituye hacia atrás para obtener

segundo y - 12 # 1 = - 15 (1) (2) yo segundo x - y = 7 (1) (2)

Simplificar.

Usando y = - 3, sustituye hacia atrás en x - y = 7 para obtener x = 4. La solución del sistema es x = 4, y = - 3, z = 1 o, usando un triplete ordenado, 14, - 3 , 12.

A veces es ventajoso escribir una matriz en forma escalonada reducida.

De esta forma, las operaciones de fila se utilizan para obtener entradas que están 0 por encima (y por debajo) del 1 principal de una fila. Por ejemplo, la forma escalonada por renglones obtenida en la solución del Ejemplo 6 es

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ C010 & 1 & 1 & 1S \end{bmatrix}$$

Machine Translated by Google

Para escribir esta matriz en forma escalonada reducida por filas, proceda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -15 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -15 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -15 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R1 \cdot r2 \cdot r1$ $\qquad$ $R1 \cdot 11r3 \cdot r1$, $R2 \cdot 12r3 \cdot r2$

La matriz ahora está escrita en forma escalonada reducida. La ventaja de escribir la matriz de esta forma es que la solución del sistema, $x = 4$, $y = -3$, $z = 1$, se puede leer en la matriz sin necesidad de realizar una sustitución inversa. Otra ventaja se verá en la sección 11.4, donde se analiza la inversa de una matriz. El método utilizado para escribir una matriz en forma escalonada reducida se llama eliminación de Gauss-Jordan.

Ahora resuelva los problemas 3 9 y 4 9

El método matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales también identifica sistemas que tienen infinitas soluciones y sistemas que son inconsistentes.

EJEMPLO 7 Resolver un sistema dependiente de ecuaciones lineales usando matrices

Resuelva:
$$\begin{cases} -12x + 2y + 2z = -8 & (1) \\ 5x - y - z = 4 & (2) \\ 6x - y - z = 3 & (3) \end{cases}$$

Solución Comience con la matriz aumentada del sistema y use operaciones de fila para obtener 1 en fila 1, columna 1 con 0 debajo.

$$\begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \\ 6 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 8 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \\ 6 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 9 & 9 & -36 \\ 0 & 11 & 11 & -45 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 11 & 11 & -45 \end{bmatrix}$$

$R1 \cdot -1r3 \cdot r1$ $\qquad$ $R2 \cdot 12r1 \cdot r2$, $R3 \cdot -5r1 \cdot r3$

Podemos obtener 1 en la fila 2, columna 2 sin alterar la columna 1 usando $\frac{1}{9}R2 = \frac{1}{9}r2$ o $R2 = 23r3 + r2$. Usamos el primero de estos aquí.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 11 & 11 & -45 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 11 & 11 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 11 & 11 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 43 \end{bmatrix}$$

$R2 \cdot \frac{1}{9}r2$ $\qquad$ $R3 \cdot -11r2 \cdot r3$

Esta matriz está en forma escalonada por renglones. Debido a que la fila inferior consta enteramente de ceros, el sistema en realidad consta sólo de dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x - 2y - z = -11 & (1) \\ y + z = 1 & (2) \end{cases}$$

Para facilitar la escritura de algunas de las soluciones, expresamos x e y en términos de z.

De la segunda ecuación, $y = -z + 1$. Ahora reemplace esta solución para y en la primera ecuación para obtener

$$x = 2y + 1 = 2(-z + 1) + 1 = -2z + 2 + 1 = -2z + 3$$

(continuado)

Machine Translated by Google

El sistema original es equivalente al sistema.

$$\frac{2}{11}z + \frac{7}{11} \quad (1)$$

$$y = z - 11 \qquad \frac{1}{11} \quad (2)$$

donde z puede ser cualquier número real

Veamos la situación. El sistema original de tres ecuaciones es equivalente a un sistema que contiene dos ecuaciones. Esto significa que cualquier valor de x, y, z que satisfaga ambos

$$x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} \qquad y = z - 11 \qquad \frac{1}{11}$$

son soluciones. Por ejemplo, z = 0, x = 5 $\frac{7}{11}$; z = 1, x = , y = $\frac{9}{11}$, y = - ; $\frac{1}{11}$ y z = - 1, x = son tres de las soluciones del sistema original. , y = - 11 11 De hecho, hay infinitos valores de x, y los cuales se satisfacen las dos ecuaciones. Es decir, el sistema original tiene infinitas soluciones. Escribimos la solución del sistema original como

$$x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11}$$

$$y = z - 11 \qquad \frac{1}{11}$$

donde z puede ser cualquier número real

o, usando tripletes ordenados, como

$$\left\{\left(x, y, z\right) \mid x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11},\ y = \frac{1}{11}z - 11,\ z \text{ cualquier número real}\right\}$$

Ahora resuelve el problema 5 5

EJEMPLO 8 Identificación de un sistema inconsistente de ecuaciones lineales utilizando matrices

Resuelva:
$$\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ x + 2y + 2z = 6 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Solución Comience con la matriz aumentada y use operaciones de fila para escribir la matriz en fila. forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot 2r_1 \cdot r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot 1r_1 \cdot r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -9 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Intercambia las filas 2 y 3.}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot 3r_2 \cdot r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \cdot -\frac{1}{9}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot 5r_2 \cdot r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La fila inferior es equivalente a la ecuación.

$$0x + 0y + 0z = -27$$

que no tiene solución. El sistema original es inconsistente.

Ahora trabaja el problema 2 9

El método matricial es especialmente eficaz para sistemas de ecuaciones en los que el número de ecuaciones y el número de variables son desiguales. También en este caso un sistema así es inconsistente o consistente. Si es consistente, tendrá exactamente una solución o infinitas soluciones.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 9

Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices

Resolver:

$$2x + 2y - 3z = -3 \quad (1)$$
$$y - z = -1 \quad (2)$$
$$x + 2y + 2z = 3 \quad (3)$$
$$x + 2y + 2z = 3 \quad (4)$$

Solución Este es un sistema de cuatro ecuaciones que contiene tres variables. Comience con la matriz aumentada y utilice operaciones de fila para escribir la matriz en forma escalonada por filas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot 2r_1 \cdot r_2} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Intercambia las filas 2 y 3.}} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \cdot r_1 \cdot r_4} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot 6r_2 \cdot r_3} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \cdot 5r_3 \cdot r_4} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz está en forma escalonada por renglones, ahora podríamos sustituir z = 3 para encuentre x e y. O podemos continuar y obtener la forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot 2r_2 \cdot r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \cdot r_3 \cdot r_1 \\ R_2 \cdot r_3 \cdot r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz ahora está en forma escalonada por filas reducida y podemos ver que la solución es x = 1, y = 2, z = 3 o, usando un triplete ordenado, 11, 2, 32.

Ahora problema de trabajo 7 1

EJEMPLO 10

Planificación financiera

Adam y Michelle necesitan $25 000 adicionales en ingresos anuales (además de sus beneficios de pensión). Son bastante reacios al riesgo y han reducido sus opciones de inversión a notas del Tesoro que rinden el 3%, bonos del Tesoro que rinden el 5% y bonos corporativos que rinden el 6%. Tienen 600.000 dólares para invertir y quieren que la cantidad invertida en bonos del Tesoro sea igual a la cantidad total invertida en bonos del Tesoro y bonos corporativos. ¿Cuánto deberían colocar en cada inversión?

Solución Sean n, b y c los montos invertidos en notas del Tesoro, bonos del Tesoro y bonos corporativos, respectivamente. Hay un total de $600 000 para invertir, lo que significa que la suma de las cantidades invertidas en notas del Tesoro, bonos del Tesoro y bonos corporativos debe ser igual a $600 000. La primera ecuación es

$$n + b + c = 600.000 \quad (1)$$

(continuado)

Machine Translated by Google

Si se invierten 100.000 dólares en notas del Tesoro, el ingreso es 0,03 # +100.000 = +3000. En general, si se invierten n dólares en notas del Tesoro, el ingreso es 0,03n. Dado que el ingreso total debe ser de $25 000, la segunda ecuación es

$$0{,}03n + 0{,}05b + 0{,}06c = 25.000 \quad (2)$$

El monto invertido en bonos del Tesoro debe ser igual a la suma de los montos invertidos en bonos del Tesoro y bonos corporativos, por lo que la tercera ecuación es

$$n = b + c \text{ o } n - b - c = 0 \quad (3)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} c = 600.000 & (1) \\ 0{,}03n + 0{,}05b + 0{,}06c = 25.000\ c = 0 & (2) \\ c\ \text{norte} + b - \text{segundo} - & (3) \end{array}$$

Comience con la matriz aumentada y utilice operaciones de fila para escribir la matriz en forma escalonada por filas.

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}03\ 0{,}05\ 0{,}06 & 25.000 & 0\ 0{,}02\ 0{,}03 & 7000 \\ C\ 1\ 1 - 1 - 1\ 3\ 600.000 & 0\ SSC\ 1\ 0 - 2 - 2\ 3 & & - 600.000\ S. \end{array} \qquad \begin{array}{l} 600.000 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R2 \cdot \cdot 0.03r1 \cdot r2 \\ R3 \cdot \cdot r1 \cdot r3 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} & 1 & 1 & \\ 0\ 1 & & 1.5 & \\ CE\ 1\ 0 - 2 - 2 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 600.000 \\ 350.000 \\ - 600.000 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0\ 1\ 1{,}5 \\ 0\ 0\ 1 \\ CSS\ 1\ 1\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 350.000 \\ 3\ 600.000\ S. \end{array}$$

$$R2 \cdot \frac{1}{r2\ 0.02} \qquad R3 \cdot 2r2 \cdot r3$$

La matriz ahora está en forma escalonada por renglones. La matriz final representa el sistema.

$$\begin{array}{ll} b + 1{,}5c = 350.000 & (1) \\ c\ \text{norte} + b + c = 600.000 & (2) \\ & (3) \end{array}$$

A partir de la ecuación (3), determinamos que Adam y Michelle deberían invertir $100 000 en bonos corporativos. Sustituya $100 000 en la ecuación (2) para encontrar que b = 200 000, por lo que Adam y Michelle deberían invertir $200 000 en bonos del Tesoro. Vuelva a sustituir estos valores en la ecuación (1) y encuentre que n = +300 000, por lo que se deberían invertir 300 000 dólares en notas del Tesoro.

COMENTARIO La mayoría de las utilidades gráficas tienen la capacidad de poner una matriz aumentada en forma escalonada por filas (ref) y también en forma escalonada por filas reducida (rref). Consulte la Sección B.7 para una discusión.

11.2 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Una matriz rectangular de números de m por n se llama un) _____ .
2. La matriz utilizada para representar un sistema de ecuaciones lineales es llamado(n) _____ la matriz.
3. La notación a35 se refiere a la entrada en la _____ fila y _____ columna de una matriz.
4. Opción múltiple ¿Qué matriz está en forma escalonada reducida por filas?

(a) $J\ 1\ 3 - 1\ 2 \quad 2 \quad 9 \quad - 1$

(b) $J\ 1\ 1\ 0\ 2 \quad 0 \quad 4$

R (c) $J\ 0\ 1\ 2\ 2 \quad 9 \quad 28R$

R (d) $J\ 0\ 1\ 1\ 2\ 2 \quad 9 \quad 4R$

5. Verdadero o Falso La matriz $C\ 0\ 1\ 0\ 3 - 2 \quad 5$ forma. 0 S está en el escalón de fila
6. Opción múltiple ¿ Qué afirmación describe el sistema de

$$0\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad - 2$$

ecuaciones representadas por $0\ 0\ 1\ 0\ 3 - 2 \quad 5S$?

(a) El sistema tiene una solución.
(b) El sistema tiene infinitas soluciones. (c) El sistema no tiene solución. (d)
No se puede determinar el número de soluciones.

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 18, escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones dado.

7. b 4x + 2y = 7
8. b x + 5y = 6
9. b 2x + 3y + 2 = 0
10. b 9x - y = 0
    3x - y - 4 = 0
11. 3 3x - y = 3 2
    1 2x + y =
    d 4 3 3
12. b 0.03x + 0.03y = 0.06
13. c 5x - y + 2z = 7
    x + y = 5
    3z = 2
14. c x + y + 2z = 2
    3x + 3y = 5
15. c 2x + 3y - 4z = 0
    x - 5z + 2 = 0
16. c 5x + 3y = 2
    3x - 2y = 2
17. c x + y + z + w = 0
    x + 3y - 4z + 2w = 2
    x - y + 3z - 5w = - 1
18. 2x + y + 2z = - 1
    3x + 4y = 5
    d x + 2y + z = 0

En los problemas 19 a 26, escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a cada matriz aumentada. Luego realice las operaciones de fila indicadas en la matriz aumentada dada.

19. J 1 - 3 2 - 2 5 R R2 = - 2r1 + r2
20. J 1 5 2 2 3 - 4 R R2 = - 2r1 + r2
21. C 1 - 3 2 3 - 4 - 5 - 3 - 5 S R3 = 3r1 + r3
    4 3 - 5 6 R2 = 4r1 + r2
22. C 1 5 3 4 3 - 5 6 24. C 6 S R2 = - 3r1 + r2
23. C 1 1 3 - 4 sesenta y cinco 6 - 6 S R3 = r1 + r3
25. 4 3 - 6 6 R2 = - 6r1 + r2
26. C 5 - 3 1 1 4 2 - 5 3 - 4 S R3 = 3r1 + r3
    1 - 3 2 - 6 3 6 - 6 R2 = - 2r1 + r2
27. J 1 0 0 2 - 4 0 R
28. J 1 0 2 0 - 1 5 R
29. C 0 1 0 0 0 3 1 2 S
    0 1 0 2
30. C 1 0 0 0 3 0 0 S
    0 1 0 1
31. C 1 0 0 4 3 4 0 S
    0 1 0 0
32. C 1 0 0 3 - 1 0 S
    0 1 0 2
33. C 1 3 3 6 0 0 1 0 S
    0 1 1 3
34. C 1 2 3 D 1 0 0 3 S
    0 0 4 0 0 0 0 3 2 0 S
35. C 1 2 3 D 1 0 0 3 S
    0 1 0 0
36. C 1 0 0 2 0 1 0 - 1 S
    0 0 1 4
37. 0 1 0 0 1
    0 0 1 0 2
    0 0 0 1 3
38. 0 1 0 2 2
    0 0 1 - 1 0
    0 0 0 0 4

En los problemas 39 a 74, resuelva cada sistema de ecuaciones usando matrices (operaciones con renglones). Si el sistema no tiene solución, digamos que es inconsistente.

39. b x + y = 4
40. b x + 2y = 3
41. • 4x + 2y = 8
    3x + 3y = 3
42. m 5x - 6y = 5 4
43. b 3x - 3y = 21
44. b x + 2y = 4
    2x + 4y = 8

Machine Translated by Google

45. $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x - y = \frac{1}{2} \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x + \frac{1}{año} = \frac{3}{2} \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 5x + 5y = 21 \\ 3x + 5y = 3 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2x - 3z = 16 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

50. $\begin{cases} - 2y + 4z = 0 \\ 3x + 2z = -1 \end{cases}$

51. $\begin{cases} - 2x + 2y + z = -7 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 7 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 4y + 2z = 7 \end{cases}$

53. $\begin{cases} - x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$

54.

55. $\begin{cases} - x + 2y - 3z = -4 \\ 3x + 2y + 7z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

56.

57. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ 2x - 2y - 2z = 5 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

58.

59. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ 4x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$

60.

61. $\begin{cases} 7x - 3y + 2z = -1 \\ 3x - 2y + 4z = 6 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

62.

63. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 6z = 11 \\ 2x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$

64.

65. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -15 \\ - y + 5z = 4 \\ 2x + 2y - 6z = 12 \end{cases}$

66.

67. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -5 \\ x + y - 3z = 6 \\ 2x - y + 2z = 14 \end{cases}$

68.

69. $\begin{cases} 3x - y + 3z = 12 \\ x + 4y + 3z = 8 \\ 2x - y + z = 18 \end{cases}$

70.

71. $\begin{cases} 2x - 4y + z = -7 \\ - z = -2x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

72.

63. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y + z = 18 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

64. $\begin{cases} \frac{2}{3} \\ 2x - y + z = 18 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$

mi $3x + y - z =$ —

65. $\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ - x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - w = 6 \\ - 2x + y - 2z + 2w = -1 \end{cases}$

66. $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + z - w = 6 \\ x - 2y + 2z + 2w = 4 \\ 2x + 2y + 2z + 2w = 4 \end{cases}$

67. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$

68. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

69. $\begin{cases} - 2x + y - 3z = 4 \end{cases}$

70. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

71. $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ - x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 5 \end{cases}$

72. $\begin{cases} 2x - y - 4z = 0 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ x - 3y + 2z = 15 \end{cases}$

73. $\begin{cases} - 4x + y = 5 \\ 2x - y + z - w = 5 \\ z + w = 4 \end{cases}$

74. $\begin{cases} 4x + y + 2z - 3w = 4 \end{cases}$

Aplicaciones y extensiones

75. Ajuste de curvas Encuentre la función $y = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica contiene los puntos (1, -12), (3, -12) y (-1, 2).

76. Ajuste de curvas Encuentre la función $y = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica contiene los puntos (1, 2), (-2, -7) y (2, -3).

77. Ajuste de curvas Encuentre la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para la cual $f(-2) = -10$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 5$ y $f(3) = 15$.

78. Ajuste de curvas Encuentra la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para lo cual $f(-3) = -64$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 8$ y $f(2) = 16$.

79. Nutrición Un dietista del Hospital General quiere que un paciente tenga una comida que tenga 47 gramos (g) de proteína, 58 g de carbohidratos y 630 miligramos (mg) de calcio. El servicio de alimentación del hospital le dice al dietista que la cena de hoy consiste en chuletas de cerdo, mazorcas de maíz y leche al 2%. Cada porción de chuletas de cerdo tiene 23 g de proteína, 0 g de carbohidratos y 10 mg de calcio. Cada porción de mazorca de maíz contiene 3 g de proteína, 16 g de carbohidratos y 10 mg de calcio. Cada vaso de leche al 2% contiene 9 g de proteínas, 13 g de carbohidratos y 300 mg de calcio. ¿Cuántas porciones de cada alimento debe proporcionar el dietista al paciente?

80. Nutrición Un dietista de un hospital quiere que un paciente coma una comida que contenga 73 gramos de proteína, 51 gramos de carbohidratos y 68 miligramos de vitamina A. El servicio de alimentación del hospital le dice al dietista que la cena de hoy es filete de salmón. huevos al horno y calabaza bellota. Cada porción de filete de salmón tiene 40 gramos de proteína, 20 gramos de carbohidratos y 1 miligramo de vitamina A. Cada porción de huevos horneados contiene 15 gramos de proteína, 3 gramos de carbohidratos y 15 miligramos de vitamina A. Cada porción de bellota la calabaza contiene 3 gramos de proteína, 25 gramos de carbohidratos y 37 miligramos de vitamina A. ¿Cuántas porciones de cada alimento debe proporcionar el dietista al paciente?

Machine Translated by Google

81. Planificación financiera Una persona tiene $20 000 para invertir. Como asesor financiero de la persona, usted recomienda que el dinero se invierta en letras del Tesoro que rinden el 4%, bonos del Tesoro que rinden el 8% y bonos corporativos que rinden el 12%. La persona quiere tener un ingreso anual de $1560, y la cantidad invertida en bonos corporativos debe ser la mitad de la invertida en letras del Tesoro. Encuentre el monto en cada inversión.

82. Paisajismo Se contrata a una empresa de paisajismo para plantar árboles en tres nuevas subdivisiones. La empresa cobra al desarrollador por cada árbol plantado, una tarifa por hora para plantar los árboles y un cargo fijo por entrega. En una subdivisión se necesitaron 166 horas de trabajo para plantar 250 árboles por un costo de $7520. En una segunda subdivisión se necesitaron 124 horas de trabajo para plantar 200 árboles por un costo de $5945. En la subdivisión final se necesitaron 200 horas de trabajo para plantar 300 árboles por un costo de $8985. Determine el costo de cada árbol, el cargo por mano de obra por hora y el cargo fijo por entrega.

Fuente: www.bx.org

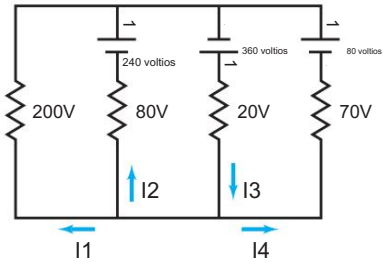
83. Producción Una empresa de jugos de Florida completa la preparación de sus productos esterilizando, llenando y etiquetando botellas. Cada caja de jugo de naranja requiere 9 minutos (min) para esterilizar, 6 min para llenar y 1 min para etiquetar. Cada caja de jugo de toronja requiere 10 min para esterilizar, 4 min para llenar y 2 min para etiquetar. Cada caja de jugo de tomate requiere 12 min para esterilizar, 4 min para llenar y 1 min para etiquetar. Si la empresa hace funcionar la máquina esterilizadora durante 398 min, la máquina llenadora durante 164 min y la máquina etiquetadora durante 58 min, ¿cuántas cajas de cada tipo de jugo se preparan?

84. Producción Para fabricar un automóvil se requiere pintar, secar y pulir. Epsilon Motor Company produce tres tipos de automóviles: Delta, Beta y Sigma. Cada Delta requiere 9 horas de pintura, 2 horas de secado y 3 horas de pulido. Un Beta requiere 33 horas para pintar, 8 horas para secar y 4 horas para pulir, y un Sigma requiere 8 horas para pintar, 1 hora para secar y 2 horas para pulir. Si la empresa tiene 419 horas para pintar, 89 horas para secar y 68 horas para pulir al mes, ¿cuántos automóviles de cada tipo se producen?

85. Electricidad: reglas de Kirchhoff Una aplicación de las reglas de Kirchhoff al circuito mostrado da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} I1 + I2 + I4 &= I3 \\ -200I1 - 40 + 80I2 &= 0 \\ 360 - 20I3 - 80I2 + 40 &= 0 \\ -80 + 70I4 - 200I1 &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre las corrientes I1, I2, I3 e I4.

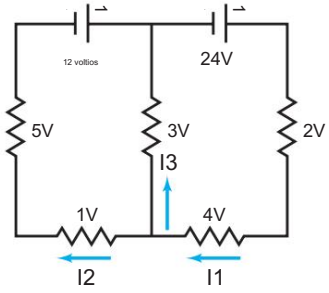


Fuente: Basado en Raymond A. Serway y John W. Jewett, Jr. Física para científicos e ingenieros con física moderna, 9ª ed. (Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2014) Prob. 30, págs. 860–861.

86. Electricidad: Reglas de Kirchhoff Una aplicación de las Reglas de Kirchhoff al circuito mostrado da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} I1 &= I3 + I2 \\ 24 - 6I1 - 3I3 &= 0 \\ C\ 12 + 24 - 6I1 - 6I2 &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre las corrientes I1 , I2 e I3 .



Fuente: Ibíd., Prob. 36, pág. 861.

87. Planificación financiera Una pareja joven tiene $25 000 para invertir. Como su asesor financiero, usted recomienda que inviertan algo de dinero en letras del Tesoro que rinden un 7%, algo de dinero en bonos corporativos que rinden un 9% y algo de dinero en bonos basura que rinden un 11%. Prepare una tabla que muestre las diversas formas en que esta pareja puede lograr los siguientes objetivos:
(a) $1500 por año en ingresos
(b) $2000 por año en ingresos
(c) $2500 por año en ingresos
(d) ¿ Qué consejo le daría a esta pareja con respecto a los ingresos que necesitan y las opciones disponibles?

[Sugerencia: los rendimientos más altos generalmente conllevan más riesgo.]

88. Planificación financiera Tres parejas de jubilados requieren cada una un ingreso anual adicional de $2000 por año. Como su asesor financiero, usted recomienda que inviertan algo de dinero en letras del Tesoro que rinden un 8%, algo de dinero en bonos corporativos que rinden un 12% y algo de dinero en bonos basura que rinden un 16%. Prepare una tabla para cada pareja que muestre las diversas formas en que se pueden lograr sus objetivos:
(a) Si la primera pareja tiene $15 000 para invertir.
(b) Si la segunda pareja tiene $20 000 para invertir.
(c) Si la tercera pareja tiene $30 000 para invertir.
(d) ¿ Qué consejo le daría a cada pareja respecto del monto a invertir y las opciones disponibles?

89. Farmacia La receta de un médico exige la creación de pastillas que contienen 12 unidades de vitamina B12 y 12 unidades de vitamina E. Su farmacia tiene tres polvos que pueden usarse para hacer estas pastillas: uno contiene 20% de vitamina B12 y 30% de vitamina MI; un segundo, 40% de vitamina B12 y 20% de vitamina E; y un tercero, 30% de vitamina B12 y 40% de vitamina E. Crea una tabla que muestre las posibles combinaciones de estos polvos que se podrían mezclar en cada pastilla. [Pista: 10 unidades del primer polvo contienen 10 # 0,2 = 2 unidades de vitamina B12.]

90. Farmacia La prescripción médica exige la ingesta diaria de un suplemento que contiene 40 mg de vitamina C y 50 mg de vitamina D. Su farmacia tiene tres suplementos que se pueden utilizar: uno contiene 20% de vitamina C y 30% de vitamina D; un segundo, 40% de vitamina C y 20% de vitamina D; y un tercero, 30% de vitamina C y 20% de vitamina D. Cree una tabla que muestre varias combinaciones posibles que podrían usarse para surtir la receta.

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

91. Escriba uno o dos párrafos breves que describan su estrategia para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices.

92. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices, ¿prefiere colocar la matriz aumentada en forma escalonada por renglones o en forma escalonada por renglones reducida? Da las razones de tu decisión.

93. Forma un sistema de tres ecuaciones lineales que contengan tres variables que tienen:

(a) Ninguna solución

(b) Exactamente una solución

(c) Infinitas soluciones

Dale los tres sistemas a un amigo para que los resuelva y los critique.

Conserve su conocimiento

Los problemas 94 a 103 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

94. Resuelve: x2 - 3x 6 6 + 2x

95. Gráfica: f 1x2 = x2 + $\dfrac{2x2 - x - 1}{2x + 1}$

96. Indique el dominio de f 1x2 = - ex+5 - 6.

97. Utilice una calculadora para aproximar cos-1 1 - 0,752 en radianes, redondeado a dos decimales.

98. Simplifica: a $\dfrac{18x4\ y5}{27x3}$ b 3

y9 99. Encuentra una ecuación de la hipérbola con vértices 14, 12. y 14, 92 y focos 14, 02 y 14, 102.

100. Escribe c 26acos 5p $\dfrac{-}{12}$ + peco _ $\dfrac{5p}{12\ \text{dormitorios}}$ 4 en forma rectangular x + yi y en forma exponencial reiu .

101. ¿ Cuál es la cantidad que resulta si se invierten $2700 al 3,6% compuesto mensualmente durante 3 años?

102. Encuentre la tasa de cambio promedio de f1x2 = sen-1 x de x = - 1 a x = 1.

103. Encuentra el cociente de diferencias para f1x2 = - $\dfrac{1}{x}$ Expresa x2. Responde como una sola fracción.

11.3 Sistemas de ecuaciones lineales: determinantes

OBJETIVOS 1 Evaluar determinantes 2 por 2 (p. 784)

2 Utilice la regla de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones que contengan Dos variables (p. 785)

3 Evaluar determinantes 3 por 3 (p. 787)

4 Utilice la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones que contenga Tres variables (p. 789)

5 Conozca las propiedades de los determinantes (p. 791)

La sección anterior describió un método para usar matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Esta sección describe otro método más para resolver sistemas de ecuaciones lineales; sin embargo, sólo se puede utilizar cuando el número de ecuaciones es igual al número de variables. Este método, llamado Regla de Cramer, se basa en el concepto de determinante. Aunque el método funciona para todos los sistemas donde el número de ecuaciones es igual al número de variables, se usa con mayor frecuencia para sistemas de dos ecuaciones que contienen dos variables o tres ecuaciones que contienen tres variables.

1 Evaluar determinantes 2 por 2

DEFINICIÓN 2 por 2 Determinante

Si a, b, c y d son cuatro números reales, el símbolo

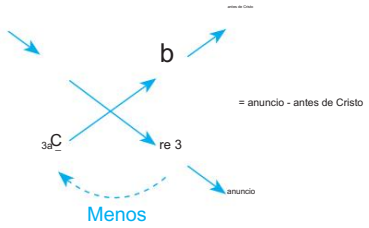
$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se llama determinante de 2 por 2. Su valor es el número ad - bc; eso es,

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad (1)$$

Machine Translated by Google

La siguiente ilustración puede resultar útil para recordar el valor de un determinante de 2 por 2:



EJEMPLO 1 Evaluación de un determinante 2 por 2

Evaluar: 2 3 - 2 1 2 2 3

Solución

2=631#21 - 61 - 22 = 3 - 1 - 122 = 15

Ahora trabaja el problema 7

2 Utilice la regla de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones que contiene dos variables

Veamos el papel que juega un determinante de 2 por 2 en la solución de un sistema de dos ecuaciones que contiene dos variables. Considere el sistema

$$\begin{cases} ax + by = r & (1) \\ cx + dy = s & (2) \end{cases} \tag{2}$$

Usamos el método de eliminación para resolver este sistema.

Siempre que $d \cdot 0$ y $b \cdot 0$, este sistema es equivalente al sistema

$$\begin{cases} bax + bby = br & (1)\ \text{Multiplicar por d.} \\ bdx + bdy = sd & (2)\ \text{Multiplicar por b.} \end{cases}$$

Reste la segunda ecuación de la primera ecuación y obtenga

$$b\ 1ad - bc2x = br - sd \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Ahora la primera ecuación se puede reescribir usando notación determinante.

22abcd2 sbtd 2

Si D = 2 abcd2 - bc · 0, resuelve x para obtener 2 sbtd 2 2

$$x = \frac{sbtd}{abcd} \tag{3}$$

Regrese ahora al sistema original (2). Siempre que $a \cdot 0$ y $c \cdot 0$, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} acx + bcy = cr & (1)\ \text{Multiplicar por c.} \\ acx + ady = as & (2)\ \text{Multiplicar por a.} \end{cases}$$

Machine Translated by Google

Reste la primera ecuación de la segunda ecuación y obtenga

$$bcy = cs \quad 0 \# x \qquad (1)$$
$$b + ac1xad - bc2y = en - cs \qquad (2)$$

La segunda ecuación ahora se puede reescribir usando notación determinante.

$$2abcd\ 2\ y = 2asct\ 2$$

Si D = 2 a2bcd 2 = ad - bc · 0, resuelve para y para

$$y = \frac{2ascto}{2a2bcd\ 2} = \frac{\text{obtener 2 asct 2}}{D} \qquad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) conducen al siguiente resultado, llamado regla de Cramer.

TEOREMA Regla de Cramer para dos ecuaciones que contienen dos variables

La solución al sistema de ecuaciones.

$$\text{e kax + dy = r} \quad (1)$$
$$\text{b cx + dy = t} \quad (2) \qquad (5)$$

es dado por

$$x = \frac{2sbtd}{2a2bcd\ 2} \qquad y = \frac{2ascto}{2a2bcd\ 2} \qquad (6)$$

siempre que

$$D = 2\ \text{abcd}\ 2 \text{ anuncio - antes de Cristo} \cdot 0$$

En la derivación dada para la regla de Cramer, supusimos que ninguno de los números a, b, cyd era 0. En el problema 65 se le pide que complete la demostración bajo la condición menos estricta de que D = ad - bc · 0.

Ahora observe detenidamente el patrón de la regla de Cramer. El denominador en el la solución (6) es el determinante de los coeficientes de las variables.

$$\text{b kax + dy = r} \quad (1)$$
$$\text{b cx + dy = t} \quad (2) \qquad D = 2\ a2bcd$$

En la solución para x, el numerador es el determinante, denotado por Dx, formado al reemplazar las entradas en la primera columna (los coeficientes de x) de D por las constantes en el lado derecho del signo igual.

$$Dx = 2\ s\ \text{segundo}\ t\ d\ 2$$

Machine Translated by Google

En la solución para y, el numerador es el determinante, denotado por Dy, formado al reemplazar las entradas en la segunda columna (los coeficientes de y) de D por las constantes en el lado derecho del signo igual.

$$Dy = 2 \text{ acst } 2$$

La regla de Cramer establece entonces que si D · 0,

$$x = \frac{dx}{D} \qquad y = \frac{dy}{D} \tag{7}$$

EJEMPLO 2 Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando determinantes

Utilice la regla de Cramer, si corresponde, para resolver el sistema.

$$6x + 3y = 12 \quad (1)$$

$$\text{segundo } 3x - 2y = 4 \quad (2)$$

Solución El determinante D de los coeficientes de las variables es

$$D = 2\ 3^{6}\ 2 \quad 1\ 2 = 3 \# 1 - 61 - 22 = 15$$

Como D · 0, se puede utilizar la regla de Cramer (7).

$$x = \frac{dx}{D} = \frac{2^{12}\ 4 - 2\ {}^{12}\ 12}{15} \qquad y = \frac{dy}{D} = \frac{2^{6}3^{12}\ 4\ 2}{15}$$

$$= \frac{4 \# 1 - 13 \# 1 - 22}{15} \qquad = \frac{3 \# 13 - 6 \# 4}{15}$$

$$= \frac{30}{15} \qquad = \frac{15}{15}$$

$$= 2 \qquad = 1$$

La solución es x = 2, y = 1 o, usando un par ordenado, 12, 12.

Si el determinante D de los coeficientes de las variables es igual a 0 (de modo que no se puede utilizar la regla de Cramer), entonces el sistema es consistente con las ecuaciones dependientes o es inconsistente. Para determinar si el sistema no tiene solución o tiene infinitas soluciones, resuelva el sistema usando los métodos de la Sección 11.1 o la Sección 11.2.

Ahora resuelve el problema 1 5

3 Evaluar determinantes 3 por 3

Para usar la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones que contienen tres variables, necesitamos definir un determinante de 3 por 3.

Un determinante de 3 por 3 está simbolizado por

$$\begin{matrix} a21 & a22 & a23 \\ 3a11 & a12 & a13 3 \end{matrix} \tag{8}$$

en el que a11, a12, c, a33 son números reales.

Al igual que con las matrices, utilizamos un subíndice doble para identificar una entrada indicando su números de filas y columnas. Por ejemplo, la entrada a23 está en la fila 2, columna 3.

Machine Translated by Google

El valor de un determinante de 3 por 3 se puede definir en términos de determinantes de 2 por 2 mediante la siguiente fórmula:

Menos Más

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{9}$$

c — Determinante de 2 por 2 que queda después de eliminar la fila y la columna que contiene a_{11}

cc — 2 por 2 determinante izquierda tras izquierda después de eliminar la fila y la columna que contiene a_{12}

2 por 2 determinante después de eliminar la fila y la columna que contiene a_{13}

Los determinantes de 2 por 2 en la fórmula (9) se llaman menores del determinante de 3 por 3. Para un determinante n por n , el Mij menor de la entrada aij es 1n - 12 por 1n - 12 determinante que resulta de eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna.

EJEMPLO 3 Encontrar menores de un determinante de 3 por 3

Para el determinante $A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, Encuentre: (a) M12 (b) M23

Solución (a) M12 es el determinante que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna de A.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = -6 - 6 = -12$$

(b) M23 es el determinante que resulta de quitar la segunda fila y la tercera columna de A.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 0 = -3 - 0 = -3$$

Refiriéndose a la fórmula (9), observe que cada elemento aij en la primera fila del determinante se multiplica por su menor, pero unas veces se suma este término y otras se resta. Para determinar si se suma o resta un término, debemos considerar el cofactor.

DEFINICIÓN Cofactor

Para un determinante A n por n , el cofactor de la entrada aij, denotado por Aij, viene dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

donde Mij es el menor de entrada aij.

El exponente de 1 - 12 i+j es la suma de la fila y columna de la entrada aij, por lo que si i + j es par, 1 - 12 i+j = 1, y si i + j es impar, 1 - 12 i+j Para = - 1.

encontrar el valor de un determinante, multiplica cada entrada en cualquier fila o columna por su cofactor y suma los resultados. Este proceso se conoce como expansión a través de una fila o columna. Por ejemplo, el valor del determinante 3 por 3 en la fórmula (9) se encontró expandiendo la fila 1.

Machine Translated by Google

Expandir hacia abajo la columna 2 da

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -1^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + -1^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + -1^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Expandir hacia abajo la columna 2.

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Expandir a lo largo de la fila 3 da

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -1^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + -1^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + -1^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Expandir a lo largo de la fila 3.

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Observe que los signos, -1^{i+j}, asociados con los cofactores alternan entre positivos y negativos. Por ejemplo, para un determinante de 3 por 3, los signos siguen el patrón

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad (10)$$

Se puede demostrar que el valor de un determinante no depende de la elección de la fila o columna utilizada en la expansión. Entonces, expandir una fila o columna que tiene una entrada igual a 0 reduce la cantidad de trabajo necesario para calcular el valor del determinante.

EJEMPLO 4 Evaluación de un determinante 3 por 3

Encuentra el valor del determinante de 3 por 3: $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 8 & -2 \end{vmatrix}$

Solución Debido a que 0 está en la fila 1, columna 2, es más fácil expandir a lo largo de la fila 1 o hacia abajo en la columna 2. Elegimos expandir a lo largo de la fila 1. Para los signos de los cofactores, usamos "1, - 1, 1" de fila 1 del determinante de 3 por 3 en (10).

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 1 - 42 + 0 + 1 - 42 - 6 - 8 - 42 + 2 - 2 - 0 - 1 - 82$$

$$= 4 - 1 - 42 - 56$$

$$= 66 + 224 = 290$$

Ahora problema de trabajo 11

4 Utilice la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones que contienen tres variables

Considere el siguiente sistema de tres ecuaciones que contienen tres variables.

$$\begin{cases} a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \\ a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \end{cases} \qquad (11)$$

Machine Translated by Google

Se puede demostrar que si el determinante D de los coeficientes de las variables no es 0, es decir, si

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

el sistema en (11) tiene una solución única.

TEOREMA Regla de Cramer para tres ecuaciones que contienen tres variables

Si $D \neq 0$, la solución del sistema en (11) es

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

dónde

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

Observe la similitud entre este patrón y el patrón observado anteriormente para un sistema de dos ecuaciones que contiene dos variables.

EJEMPLO 5 Usando la regla de Cramer

Utilice la regla de Cramer, si corresponde, para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y + 4z = -3 & (1) \\ 2x + 2y - 3z = 4 & (2) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad & (3) \end{cases}$$

Solución El valor del determinante D de los coeficientes de las variables es

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(4)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(2 - 3) - (4 + 3) + 4(-2 - 1) = 2(-1) - 7 + 4(-3) = -21$$

Como $D \neq 0$, proceda a encontrar los valores de D_x, D_y y D_z. Para encontrar D_x, reemplace el coeficientes de x en D con las constantes y luego evaluar el determinante.

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(4)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 3(2 - 3) - 2(8 + 9) + 4(-4 - 3) = 3(-1) - 34 + 4(-7) = -65$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2)\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 1(8 + 9) - 2(-6 - 12) + 1(9 - 16) = 17 + 36 - 7 = 46$$

$$D_z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(3 + 4) - 2(6 - 4) - 3(-2 + 1) = 14 - 4 + 3 = 13$$

Machine Translated by Google

Como resultado,

$$x = \frac{dx}{D} = \frac{15}{5} = 3 \qquad y = \frac{dy}{D} = \frac{-10}{5} = -2 \qquad z = \frac{dz}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

La solución es $x = 3, y = -2, z = 1$ o, usando un triplete ordenado, $13, -2, 12$.

La regla de Cramer no se puede utilizar cuando el determinante de los coeficientes de las variables, D, es 0. Pero, ¿se puede aprender algo sobre el sistema además de que no es un sistema consistente e independiente si D = 0? ¡La respuesta es sí!

Regla de Cramer con sistemas inconsistentes o dependientes

- Si D = 0 y al menos uno de los determinantes Dx, Dy o Dz es diferente de 0, entonces el sistema es inconsistente y el conjunto solución es o { }.
- Si D = 0 y todos los determinantes Dx, Dy y Dz son iguales a 0, entonces el sistema es consistente y dependiente, por lo que hay infinitas soluciones. El sistema debe resolverse utilizando técnicas de reducción de hileras.

Ahora resuelve el problema 3 3

5 Conozca las propiedades de los determinantes

Los determinantes tienen varias propiedades que a veces resultan útiles para obtener su valor. Enumeramos algunos de ellos aquí.

TEOREMA

El valor de un determinante cambia de signo si se intercambian dos filas (o dos columnas cualesquiera). (12)

Prueba de determinantes 2 por 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \text{ y } \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

ab 2 = antes de Cristo - anuncio = - 1ad - antes de Cristo2 ■

EJEMPLO 6 Demostración del teorema (12)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

TEOREMA

Si todas las entradas en cualquier fila (o cualquier columna) son iguales a 0, el valor del determinante es 0. (13)

Prueba Expandir a lo largo de la fila (o hacia abajo en la columna) que contiene los 0. ■

TEOREMA

Si dos filas (o dos columnas cualesquiera) de un determinante tienen entradas correspondientes que son iguales, el valor del determinante es 0. (14)

En el problema 68, se le pide que demuestre el teorema de un determinante de 3 por 3 en el que las entradas de la columna 1 son iguales a las entradas de la columna 3.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Demostración del teorema (14)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 - 12^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 - 12^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 - 12^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 11 - 32 - 21 - 62 + 31 - 32 = - 3 + 12 - 9 = 0$$

TEOREMA

Si cualquier fila (o cualquier columna) de un determinante se multiplica por un número k distinto de cero, el valor del determinante también cambia en un factor de k. (15)

En el problema 67, se le pide que demuestre el teorema de un determinante de 3 por 3 usando la fila 2.

EJEMPLO 8 Demostración del teorema (15)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = - 2 \quad 2 \quad k$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k \\ 4 & 6k \end{vmatrix} = 6k - 8k = - 2k = k1 - 22 = k \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 2$$

TEOREMA

Si las entradas de cualquier fila (o cualquier columna) de un determinante se multiplican por un número k distinto de cero y el resultado se suma a las entradas correspondientes de otra fila (o columna), el valor del determinante permanece sin cambios. (dieciséis)

En el problema 69, se le pide que demuestre el teorema de un determinante de 3 por 3 usando las filas 1 y 2.

EJEMPLO 9 Demostración del teorema (16)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad 2 \quad 2 = - 14 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad 2 \quad S \quad 2 - 7 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5 = - 14 \quad æ$$

Multiplica la fila 2 por ·2 y suma a la fila 1.

Ahora resuelve el problema 4 5

11.3 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. D = 2 a b c d _____.
2. Usando la regla de Cramer, el valor de x que satisface el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + y = -5 \end{cases}$ es x = _____.
3. Verdadero o Falso Un determinante nunca puede ser igual a 0.
4. Verdadero o Falso Al usar la regla de Cramer, si D = 0, entonces el El sistema de ecuaciones lineales es inconsistente.
5. Verdadero o Falso Si cualquier fila (o cualquier columna) de un determinante se multiplica por un número k distinto de cero, el valor del determinante permanece sin cambios.
6. Elección múltiple Si se intercambian dos filas cualesquiera de un determinante, su valor: (a) cambia de signo (b) se vuelve cero (c) permanece igual (d) ya no se relaciona con el valor original

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 14, encuentre el valor de cada determinante.

7. 2 1 6 3 4 2

8. 2 4 8 - 3 2 2

9. 2 5 - 4 3 2 -

10. 2 - 3 4 - 1 2 2

11. 1 - 1 4 2 5 1 3 3 2 - 2 3

12. 6 1 - 5 3 - 2 3 - 1 3 - 2 3 3

13. 1 4 0 3 - 3 - 1 9 3 4 8

14. 6 - 1 0 3 1 4 - 3 1 4 2 3

En los problemas 15 a 42, resuelva cada sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer, si corresponde. Si la regla de Cramer no es aplicable, escriba "No aplicable".

15. b x + y = 4

16. b x + 2y = 3 5

17. b 2x - 3y = 5 - 2 1.

18. b 5 2x - y 3 + y 1 = 3 1 2 2.

19. b 4x + 5y = 3 - 4

3x = 24

20. b x + 2y = 0

b 2x + 3y = 5 1 6 = 2 5 9 •

b 4x - 7y = 4 1 2 = - 1

23. b - 4x + 8y = 5 6

24. b 3x - 2y = 4 0

4x + 2y = 8

3x + 3y = 3 29. • 1 3

26. b 2x - 4 2y = 3 2

27. b 5x + 2 1 3 y 0 = 4

28. b 2 0 x 3 + y 1 0 y 1 = 5

2 x + y = - 2

x - 2y = 8

30. • 2 x - y = 2 1 — 3y = 6

31. • 2x - y = 2 - 1 3 4 2 x + 1 3 año =

32. b 3 1 5 x 5 + y 5 y 3 = 21

33. c x + y - 3z = 14 3x - 2y + z = - 5

35. c x + 4y + 3z = 8 3x - y + 3z = 12

36. c 3x - 3y = 2 2 = 5 2x - 6y + z = - 5

38. c 2x + 4y + 6z = 42. 3x + y - 2z = 0

39. c x + y + 6z = 0 3x - y + 3z = 0

c x - y + 2z = 0 2x - 4y + z = 0

- 2x + 2y - 3z = 0

c x - y + 2z = 0 3x + 2y = 0

2y - 4z = 0

- 2y + 3z = 4y + 6z = 0 3x + y - 2z = 0

En los problemas 43 a 50, utilice las propiedades de los determinantes para encontrar el valor de cada determinante si se sabe que

uvw

3 x y z 4 3

43. uvw

3 2x 4y 6 3

44. uvw

3x y z 3 3

45. - 3 - 6 - 9

x y v w 3 + 3 x + 3 y +

46. x - uy - vz - w

3 1 tu v w 3

47. uvw - tú

x y 2 - 2 3

48. x - 3 y - 6 z - 9 2v

1 2u 2 semanas 3

49. 3u - 1 3v - 2 3w - 3

6 z + 1 9 2 3

50. 2x 2 años 2z

3u + 1 v - 2 w - 3 3

Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 51 a 56, resuelva x.

51. 2 8 x 1 2 = - 2

52. 2x 4 3 2 = 5

53. 1x5 _ _ 4
3 0 3 1 2 - 2 3 = 0

54. 4 3 2
3 - x 1 2 1 5 3 = 2

55. 1x3 _ _
3 0 x 1 1 2 2 3 = - 4x

56. 1x0 _ _ 3
3 6 x 1 2 - 2 3 = 7

57. Geometría: Ecuación de una recta Una ecuación de la recta que contiene los dos puntos 1x1, y12 y 1x2, y22 se puede expresar como el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demuestre este resultado expandiendo el determinante y comparando el resultado con la forma de dos puntos de la ecuación de una recta.

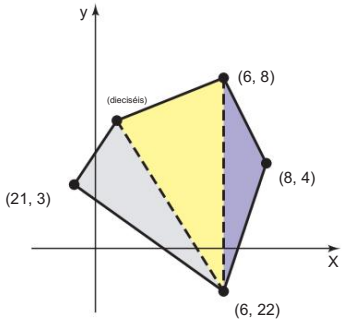
58. Geometría: puntos colineales Utilizando el resultado obtenido en el problema 57, demuestre que tres puntos distintos 1x1, y12, 1x2, y22, y 1x3, y32 son colineales (se encuentran en la misma recta) si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

59. Geometría: área de un triángulo Un triángulo tiene vértices 1x1, y12, 1x2, y22 y 1x3, y32. El área del triángulo es dado por el valor absoluto de D, donde $D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Usa esta fórmula para encontrar el área de un triángulo con vértices 12, 32, 15, 22 y 16, 52.

60. Geometría: área de un polígono La fórmula del problema 59 se puede usar para encontrar el área de un polígono. Para hacerlo, divide el polígono en regiones triangulares que no se superponen y encuentra la suma de las áreas. Utilice este método para encontrar el área del polígono dado.



61. Geometría: área de un polígono Otro método para encontrar el área de un polígono usando determinantes es usar la fórmula

$$\text{Una} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

donde 1x1, y12, 1x2, y22, c, 1xn, yn2 son los n puntos de las esquinas en orden antihorario. Usa esta fórmula para calcular nuevamente el área del polígono del Problema 60. ¿Qué método prefieres?

62. Geometría: Volumen de un tetraedro Un tetraedro (pirámide triangular) tiene vértices 1x1, y1, z12, 1x2, y2, z22, 1x3, y3, z32, y 1x4, y4, z42. El volumen del tetraedro está dado por el valor absoluto de D, donde $D = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$.

Usa esta fórmula para encontrar el volumen del tetraedro con vértices 10, 0, 82, 12, 8, 02, 110, 4, 42 y 14, 10, 62.

63. Geometría: Ecuación de un círculo Una ecuación del círculo que contiene los distintos puntos (x1, y1), (x2, y2) y (x3, y3) se puede encontrar usando la siguiente ecuación.

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Encuentra la ecuación del círculo que contiene los puntos (2, 7), (-2, 9) y (3, 4). Escribe la ecuación en forma estándar.

64. Demuestra que $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ 1 & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$.

65. Complete la demostración de la regla de Cramer para dos ecuaciones que contienen dos variables.

[Sugerencia: En el sistema (5), página 786, si a = 0, entonces b · 0 y c · 0, ya que D = - bc · 0. Ahora demuestre que la ecuación (6) proporciona una solución del sistema cuando a = 0. Entonces quedan tres casos: b = 0, c = 0 y d = 0.]

66. Desafío Problema Intercambia las columnas 1 y 3 de un determinante de 3 por 3. Demuestre que el valor del nuevo determinante es -1 veces el valor del determinante original.

67. Problema de desafío Multiplica cada entrada en la fila 2 de un determinante de 3 por 3 por el número k, k · 0. Demuestre que el valor del nuevo determinante es k veces el valor del determinante original.

68. Problema de desafío Demuestre que un determinante de 3 por 3 en en el que las entradas de la columna 1 son iguales a las de la columna 3 tiene el valor 0.

69. Problema de desafío si la fila 2 de un determinante de 3 por 3 se multiplica por k, k · 0, y el resultado se suma a las entradas de la fila 1, demuestra que no hay cambio en el valor del determinante.

Machine Translated by Google

Conserve su conocimiento

Los problemas 70 a 79 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

70. Para los puntos P = 1 - 4, 32 y Q = 15, - 12 escribe el vector v representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ en la forma ai + bj y encuentre ·· v ··.

71. Enumere los posibles ceros racionales de la función polinómica P1x2 = 2x3 - 5x2 + x - 10.

72. Grafica f 1x2 = 1x + 12 73. ^{2} - 4 usando transformaciones (desplazar, comprimir, estirar y/o reflejar).

Encuentra el valor exacto de tan 42° - cot 48° sin usar calculadora.

74. Exprese - 5 + 5i en forma polar y en forma exponencial.

75. La función f1x2 = 3 + log5 1x - 12 es uno a uno. Encuentra f $^{-1}$ 76.

Encuentra la distancia entre los vértices de f1x2 = 2x2 - 12x + 20 y g1x2 = - 3x2 - 30x - 77.

77. Ampliar: 12x - 52 ^{3}

78. Racionaliza el numerador: $\dfrac{\sqrt{2x + 7} - 10}{x}$

79. Encuentra una ecuación de la recta perpendicular a f1x2 = - x + 7 donde $\frac{2}{5}$x = 10.

11.4 Álgebra matricial

OBJETIVOS 1 Calcular la suma y la diferencia de dos matrices (p. 796)

2 Encuentre múltiplos escalares de una matriz (p. 798)

3 Encuentre el producto de dos matrices (p. 799)

4 Encuentra la inversa de una matriz (p. 803)

5 Resuelva un sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa (p. 807)

La sección 11.2 definió una matriz como una matriz rectangular de números reales y utilizó una matriz aumentada para representar un sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, existe una rama de las matemáticas, llamada álgebra lineal, en la que se define un álgebra de matrices. Esta sección es un estudio de cómo se desarrolla este álgebra matricial .

Antes de comenzar, recuerde la definición de matriz.

Matriz DEFINICIÓN

Una matriz se define como una matriz rectangular de números:

	Columna 1	Columna 2	Columna j	columna norte
Fila 1		a12 g	a1j g	a1n
Fila 2	a21	a22 g	a2j g	a2n
fila i	ai1	ai2 g	aij g	ain
fila m	am1	am2 g	amj g	amn

En palabras

En una matriz, las filas se cruzan y las columnas descienden.

Cada número aij de la matriz tiene dos índices: el índice de fila i y el índice de columna j. La matriz que se muestra aquí tiene m filas yn columnas. Los números aij generalmente se denominan entradas de la matriz. Por ejemplo, a23 se refiere a la entrada de la segunda fila, tercera columna.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1

Organizar datos en una matriz

En una encuesta a 900 personas se obtuvo la siguiente información:

200 machos	Pensó que el gasto federal en defensa era demasiado alto
150 machos	Pensó que el gasto federal en defensa era demasiado bajo
45 machos	no tenía opinión
315 mujeres	Pensó que el gasto federal en defensa era demasiado alto
125 hembras	Pensó que el gasto federal en defensa era demasiado bajo
65 mujeres	no tenía opinión

Podemos organizar estos datos en una matriz rectangular de la siguiente manera:

	Demasiado alto	Demasiado baja	Sin opinión
Masculino	200	150	45
Femenino	315	125	65

o como la matriz

$$\begin{bmatrix} 200 & 150 & 45 \\ 315 & 125 & 65 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene dos filas (que representan hombres y mujeres) y tres columnas (que representan “demasiado alto”, “demasiado bajo” y “sin opinión”).

En palabras

Para una matriz de m por n , el número de filas aparece en primer lugar y el número de columnas en segundo lugar.

La matriz desarrollada en el Ejemplo 1 tiene 2 filas y 3 columnas. En general, una matriz con m filas yn columnas se denomina **matriz de m por n** . Una **matriz** m por n contiene m # n entradas. La matriz desarrollada en el Ejemplo 1 es una matriz de 2 por 3 y contiene 2 # 3 = 6 entradas.

Si una **matriz de** m por n tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, si m = n, entonces la matriz es una matriz cuadrada.

EJEMPLO 2

Ejemplos de matrices

NOTA Las matrices y los determinantes son diferentes. Una matriz es una matriz rectangular de números o expresiones, nada más. Un determinante tiene un valor, normalmente un número real.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ A matriz cuadrada de 2 por 2

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 34 \end{bmatrix}$ Una matriz de 1 por 3

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ A matriz cuadrada de 3 por 3

1 Encuentra la suma y diferencia de dos matrices

Comenzamos nuestra discusión sobre álgebra matricial definiendo matrices iguales y luego definiendo las operaciones de suma y resta. Es importante señalar que estas definiciones requieren que ambas matrices tengan el mismo número de filas y el mismo número de columnas como condición para la igualdad y para la suma y la resta.

Las matrices suelen estar representadas por letras mayúsculas, como A, B y C.

DEFINICIÓN Matrices iguales

Dos matrices A y B son iguales, escritas como

$$A = B$$

siempre que A y B tengan el mismo número de filas y el mismo número de columnas y cada entrada a_{ij} en A sea igual a la entrada correspondiente b_{ij} en B.

Machine Translated by Google

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 9 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

Porque las entradas en la fila 1, columna 2 no son iguales

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Porque la matriz de la izquierda tiene 3 columnas y la matriz de la derecha tiene 4 columnas

Supongamos que A y B representan dos matrices de m por n . La suma, A · B, se define como la matriz m por n formada al sumar las entradas correspondientes aij de A y bij de B. La diferencia, A · B, se define como la matriz m por n formada al restar las entradas bij en B de las entradas correspondientes aij en A. La suma y resta de matrices se definen sólo para matrices que tienen el mismo número m de filas y el mismo número n de columnas. Por ejemplo, una matriz de 2 por 3 y una matriz de 2 por 4 no se pueden sumar ni

EJEMPLO 3 Sumar y restar matrices

Suponer que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & \\ -3 & & & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuentre: (a) A + B (b) A - B Tanto A como B son matrices de 2 por 4, por lo que se pueden sumar y restar.

Solución

(a) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & \\ -3 & & & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 + & 4 & 8 & 6 \\ 0 - 3 & + & & \end{bmatrix}$$

Agregar las entradas correspondientes.

$$= \begin{bmatrix} & & & \\ & & & - 2 \ 3 \end{bmatrix}$$

(b) $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & \\ -3 & & & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 - & 4 & 8 & 6 \\ 0 - 3 & - & & \end{bmatrix}$$

Restar las entradas correspondientes.

$$= \begin{bmatrix} & & & \\ & & & - 4 - 6 - 7 \end{bmatrix}$$

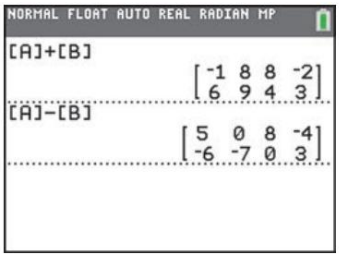


Figura 7 Suma y resta de matrices en una TI-84 Plus C

Ver el concepto

Las utilidades gráficas pueden facilitar el proceso, a veces tedioso, del álgebra matricial. De hecho, la mayoría de las calculadoras gráficas pueden manejar matrices de hasta 9 por 9, algunas incluso más grandes. Ingrese las matrices del Ejemplo 3 en una utilidad gráfica. Nómbrelos A y B. La Figura 7 muestra los resultados de sumar y restar A y B en una TI-84 Plus C.

Ahora trabaja el problema 9

Muchas de las propiedades algebraicas de las sumas de números reales también son válidas para las sumas de matrices. Supongamos que A, B y C son matrices de m por n . Entonces la suma de matrices es conmutativa. Eso es,

Propiedad conmutativa de la suma de matrices

$$A + B = B + A$$

Machine Translated by Google

La suma de matrices también es asociativa. Eso es,

Propiedad asociativa de la suma de matrices

$$1A + B2 + C = A + 1B + C2$$

Aunque no demostramos estos resultados, las pruebas, como el siguiente ejemplo ilustra, se basan en las propiedades conmutativas y asociativas de los números reales.

EJEMPLO 4 Demostración de la propiedad conmutativa de la suma de matrices

$$J \quad R + J \quad 5 - 3 \quad R = J \quad R + J \quad R$$

$$= J \quad R$$

$$= J \quad 5 - 3 \quad R + J \quad R$$

Una matriz cuyas entradas son todas iguales a 0 se llama matriz cero. Cada una de las siguientes matrices es una matriz cero.

$$J \quad R$$ Matriz cero cuadrada de 2 por 2 $$J \quad R$$ matriz cero de 2 por 3 cero $$3\,0\;0\;0\,4$$ Matriz 1 por 3

Las matrices cero tienen propiedades similares al número real 0. Si A es una matriz de m por n y 0 es la matriz cero de m por n , entonces

$$A + 0 = 0 + A = A$$

En otras palabras, una matriz cero es la identidad aditiva en álgebra matricial.

2 Encontrar múltiplos escalares de una matriz

También podemos multiplicar una matriz por un número real. Si k es un número real y A es una matriz de m por n , la matriz kA es la matriz de m por n formada al multiplicar cada entrada aij en A por k. Al número k a veces se le llama escalar y a la matriz kA se le llama múltiplo escalar de A.

EJEMPLO 5 Operaciones usando matrices

Suponer

$$A = J \quad R \quad B = J \quad R \quad C = J \quad R$$

Encuentre: (a) 4A (b) $\frac{1}{3}C$ (c) 3A - 2B

Solución

(a) $4A = 4J \quad R = J \quad R = J \quad R$

(b) $\frac{1}{3}C = \frac{1}{3}J \quad R = \quad R = J \quad R$

(c) $3A - 2B = 3J \quad R - 2J \quad R = J \quad R - J \quad R = J \quad R$

Machine Translated by Google

0

(c) 3A - 2B = 3J 3 1 5- 2 0 6 R - 2J 4 1 8 1-3R

2 # 0

= J 3# 3 22#31#30#35# 6 R - J 2 # 2 8 1 # 1 21 - 32 R

=J 9 -3615 18 R - J 8 2 0 16 2-6R

= J 9-68-3162 0 15 2-18 - 1 - 62R

1 15

= J 1- 22 - 2 24R

Ahora resuelve el problema 1 3

A continuación se enumeran algunas de las propiedades algebraicas de la multiplicación escalar.

Propiedades de la multiplicación escalar

Supongamos que hyk son números reales y que A y B son matrices de m por n . Entonces

- k1hA2 = 1kh2A
- 1k + h2A = kA + hA
- k1A + B2 = kA + kB

3 Encuentre el producto de dos matrices

A diferencia de la definición sencilla de sumar dos matrices, la definición de multiplicar dos matrices no es la que cabría esperar. Para prepararnos para la definición, necesitamos las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN Producto de un vector fila y un vector columna

Un vector fila R es una matriz de 1 por n

$$R = 3\ r1\ r2\ g\ rn\ 4$$

Un vector columna C es una matriz n por 1

$$C = \geq \begin{matrix} c2 \\ F \\ c1 \\ cn \end{matrix} ¥$$

El producto RC de R por C se define como el número

$$RC = 3\ r1\ r2\ g\ rn\ 4 \begin{matrix} c2 \\ F \end{matrix} Dc1\ cn\ T = r1c1 + r2c2 + g + rncn$$

Tenga en cuenta que un vector de fila y un vector de columna se pueden multiplicar si y sólo si ambos contienen el mismo número de entradas.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 El producto de un vector fila y un vector columna

$$\text{Si } R = 33 - 5\ 24 \text{ y } C = C\ 3\ \overset{4}{\underset{-5}{}}\ S, \text{ entonces}$$

$$RC = 33 - 5\ 24\ C\ 3\ \overset{4}{\underset{-5}{}}\ S = 3 \# 3 + 1 - 524 + 21 - 52 = 9 - 20 - 10 = -21$$

EJEMPLO 7 Uso de matrices para calcular los ingresos Una tienda de ropa vende camisas de hombre por $40, corbatas de seda por $20 y trajes de lana por $400. El mes pasado, la tienda vendió 100 camisas, 200 corbatas y 50 trajes. ¿Cuáles fueron los ingresos totales de estas ventas?

Solución Configure un vector de fila R para representar los precios de estos tres artículos y un vector de columna C para representar el número correspondiente de artículos vendidos. Entonces

$$R = \underset{\text{Camisas Corbatas Trajes}}{\overset{\text{Precios}}{340\ 20\ 4004}} \qquad C = C\ \underset{50S}{\overset{\text{Número vendido}}{\overset{200}{100}}}\ \begin{matrix}\text{Camisas}\\ \text{Corbatas}\\ \text{Trajes}\end{matrix}$$

Los ingresos totales de estas ventas equivalen al producto RC. Eso es,

$$RC = 340\ 20\ 4004\ C\ \overset{200}{100}\ 50S$$

$$= \underbrace{40 \# 100}_{\text{Ingresos por camisas}} + \underbrace{20 \# 200}_{\text{Ingresos por corbatas}} + \underbrace{400 \# 50}_{\text{Ingresos por trajes}} = \underbrace{\$\ 28\ 000}_{\text{Ingresos totales}}$$

La definición de multiplicación de dos matrices se basa en la definición de una fila. vector multiplicado por un vector de columna.

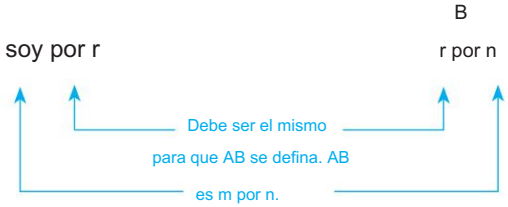
DEFINICIÓN Multiplicación de matrices

Sea A una matriz de m por r y B una matriz de r por n . El producto AB se define como la matriz m por n cuya entrada en la fila i, columna j es el producto de la i-ésima fila de A y la j-ésima columna de B.

La definición del producto AB de dos matrices A y B, en este orden, requiere que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B; de lo contrario, el producto no está definido.

En palabras

Para encontrar el producto AB, el número de columnas de la matriz A de la izquierda debe ser igual al número de filas de la matriz B de la derecha.



Un ejemplo ayudará a aclarar la definición.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 8 Multiplicar dos matrices

Encuentre el producto AB si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 8 \\ 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 6 \\ -2 \\ -1 \end{matrix}$$

Solución

Primero, observe que A es de 2 por 3 y B es de 3 por 4. El número de columnas en A es igual al número de filas en B, por lo que el producto AB está definido y será una matriz de 2 por 4.

Supongamos que queremos la entrada en la fila 2, columna 3 de AB. es igual al producto de vector fila de la fila 2 de A y el vector columna de la columna 3 de B.

Columna 3 de B

Fila 2 de A

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \# 1 + 8 \# 0 + 0 \# 1 - 2 \# 2 = 5$$

Hasta ahora, tenemos

Columna 3

t

$$AB = \begin{bmatrix} ___ & ___ & 5 & ___ \\ ___ & ___ & ___ & ___ \end{bmatrix} \text{R} \quad \text{Fila 2}$$

Ahora, para encontrar la entrada en la fila 1, columna 4 de AB, encuentre el producto de la fila 1 de A y la columna 4 de B.

Columna 4 de B

Fila 1 de A

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \# 4 + 4 \# 6 + 1 - 1 2 \, 1 - 1 2 = 33$$

Siguiendo de esta manera encontramos AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

veces veces veces

multiplicado por la columna 1 de B columna 2 de B columna 3 de B columna 4 de B

=

Fila 2 de A Fila 2 de A Fila 2 de A Fila 2 de A veces

veces veces veces

Columna 1 de A Fila 1 de A Fila 1 de A Fila 2 de A Fila 1 de A Fila 3 de A Fila 1 de A columna 4 de B W

$$= \begin{bmatrix} 2 \# 2 + 4 \# 4 + 1 \# 1 & 2 \# 4 + 4 \# 8 + 1 \# 5 & 2 \# 0 + 4 \# 6 - 1 \# 2 & 2 \# 4 + 4 \# 6 + 1 - 1 2 \\ 5 \# 2 + 8 \# 4 + 0 \# 1 & 5 \# 4 + 8 \# 8 + 0 \# 5 & 5 \# 0 + 8 \# 6 + 0 \# 2 & 5 \# 4 + 8 \# 6 + 0 - 1 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 33 & 77 & 46 & 33 \\ 42 & 89 & 48 & 68 \end{bmatrix}$$

5 de 14 antes 12

Verifique: Ingrese las matrices A y B. Luego encuentre AB. (Mira lo que sucede si intentas encontrar a BA).

Observe que el producto AB en el ejemplo 8 es una matriz de 2 por 4, como esperábamos. Observe también que, para las matrices dadas en el ejemplo 8, el producto BA no está definido porque B es 3 por 4 y A es 2 por 3.

Ahora resuelve el problema 2 7

Machine Translated by Google

EJEMPLO 9 Multiplicar dos matrices

Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

encuentre: (a) AB (b) BA

Solución

(a) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2 por 3 3 por 2 2 por 2

(b) $BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

3 por 2 2 por 3 3 por 3

Observe en el ejemplo 9 que AB es 2 por 2 y BA es 3 por 3. Es posible que tanto AB como BA estén definidos y aún así sean desiguales. De hecho, incluso si A y B son matrices de n por n , de modo que AB y BA estén definidos y n por n, AB y BA generalmente serán desiguales.

EJEMPLO 10 Multiplicar dos matrices cuadradas

Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

encuentre: (a) AB (b) BA

Solución

(a) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

Los ejemplos 9 y 10 demuestran que, a diferencia de la multiplicación de números reales, la matriz la multiplicación no es conmutativa.

TEOREMA

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

Ahora resuelva los problemas 1 5 y 1 7

A continuación, considere dos de las propiedades de los números reales que comparten las matrices. Suponiendo que cada producto y cada suma están definidos, se cumple lo siguiente:

Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices

$$A(BC) = (AB)C$$

Propiedad distributiva

$$A(B + C) = AB + AC$$

Machine Translated by Google

Para una matriz cuadrada de n por n , las entradas ubicadas en la fila i, columna i, 1... i ... n, se denominan entradas diagonales o diagonal principal. La matriz cuadrada de n por n cuyas entradas diagonales son unos y todas las demás entradas son ceros, se llama matriz identidad In. Por ejemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

etcétera.

EJEMPLO 11 Multiplicación con una matriz de identidad

Dejar

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre: (a) AI3 (b) I2A (c) BI2

Solución

(a) $AI_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$

(b) $I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$

(c) $BI_2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = B$

El ejemplo 11 demuestra la siguiente propiedad:

Propiedad de identidad

- Si A es una matriz de m por n , entonces

$$I_m A = A \text{ y } AI_n = A$$

- Si A es una matriz cuadrada de n por n , entonces

$$AI_n = I_n A = A$$

Una matriz identidad tiene propiedades similares a las del número real 1. En otros En otras palabras, la matriz identidad es una identidad multiplicativa en álgebra matricial.

4 Encuentra la inversa de una matriz

DEFINICIÓN Inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de n por n . Si existe una matriz A-1 de n por n (leída como “A inversa”) para la cual

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$$

entonces A-1 se llama inversa de la matriz A.

Machine Translated by Google

No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Cuando una matriz A tiene una inversa A-1, entonces se dice que A es no singular. Si una matriz A no tiene inversa, se llama singular.

EJEMPLO 12 Multiplicar una matriz por su inversa

Demuestre que la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ es } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución Necesitamos demostrar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

A continuación se muestra una forma de encontrar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que A^{-1} está dado por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \tag{1}$$

donde x, y, z y w son cuatro variables. Según la definición de inversa, si A tiene una inversa, entonces

$$AA^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x + 2z & 3y + 2w \\ x + z & y + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como las entradas correspondientes deben ser iguales, se deduce que esta ecuación matricial es equivalente a dos sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{array}{ll} 3x + 2z = 1 & 3y + 2w = 0 \\ x + z = 0 & y + w = 1 \end{array}$$

La matriz aumentada de cada sistema es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{2}$$

El procedimiento habitual sería transformar cada matriz aumentada en una forma escalonada reducida. Sin embargo, observe que los lados izquierdos de las matrices aumentadas son iguales, por lo que se pueden utilizar las mismas operaciones con renglones (consulte la sección 11.2) para reducir ambas matrices. Es más eficiente combinar las dos matrices aumentadas (2) en una sola matriz, como se muestra a continuación.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora, utilice operaciones por filas para transformar la matriz en forma escalonada reducida por filas.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow -3r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow -r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \tag{3}$$

Machine Translated by Google

La matriz (3) está en forma escalonada por filas reducida.

Ahora invierta el paso anterior de combinar las dos matrices aumentadas en (2) y escriba la matriz única (3) como dos matrices aumentadas.

$$\text{J01012 - 2 R y J 1 0102 - 1 3R}$$

La conclusión de estas matrices es que x = 1, z = - 2 e y = - 1, w = 3. Sustituir estos valores en la matriz (1) da como resultado

$$A\text{-}1 = \text{J-12-31R}$$

Observe en la matriz aumentada (3) que la matriz de 2 por 2 a la derecha de la barra vertical es la inversa de A. Observe también que la matriz identidad I2 aparece a la izquierda de la barra vertical. En general, el uso de operaciones por renglones para transformar una matriz cuadrada no singular A, aumentada por una matriz identidad de las mismas dimensiones, en una forma escalonada reducida por renglones da como resultado la matriz inversa A-1.

En palabras
Si A es no singular, comience con la matriz 3A· In 4, y después de transformarla en forma escalonada reducida, terminará con la matriz 3In· A-1 4.

Pasos para encontrar la inversa de una matriz no singular A de n por n **Paso** 1 : Forme la matriz aumentada 3A·In 4.

Paso 2: Transformar la matriz 3A·In 4 en forma escalonada reducida.

Paso 3: La forma escalonada reducida por filas de 3A·In 4 contiene la matriz identidad In a la izquierda de la barra vertical; la matriz n por n a la derecha de la barra vertical es la inversa de A.

EJEMPLO 13 Encontrar la inversa de una matriz

La matriz

$$\text{A = C 101403S}$$

es no singular. Encuentra su inversa.

Solución Primero, forma la matriz.

$$\text{3A·I3 4 = C0141303 0 0 1S}$$

A continuación, utilice operaciones con renglones para transformar 3A·I3 4 en forma escalonada reducida.

$$\text{C 101403 3 0 0 1 CSS 101403 3 1 0 0 0 0 1 SSD 101403 4 1 0 0 0 0 1T}$$

R2 · r1 · r2 ; R2 · $\frac{1}{4}$r2

$$\text{SE 0 0 - 1 5 3 - 1 - 1 1 USO 1 0 0 - 1 5 3 1 1 - 1 USO 1 0 0 0 1 5 1 1-1U}$$

R1 ·· 1r2 · r1 ; R3 ·· 4r2 · r3 ; R3 · ·1r3 ; R1 · r3 · r1 ; R2 ·· 1r3 · r2

(continuado)

Machine Translated by Google

La matriz 3A·I3 4 ahora está en forma escalonada reducida y la matriz identidad I3 está a la izquierda de la barra vertical. La inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mi 7 1 1-1U

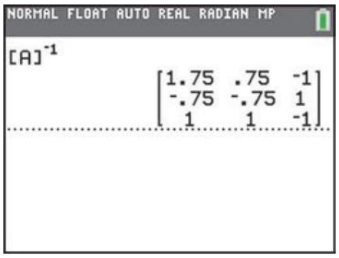


Figura 8 Matriz inversa en una TI-84 Plus C

Debes verificar que este es el inverso correcto demostrando que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I3$$

Verificar: Ingrese la matriz A en una utilidad gráfica. La Figura 8 muestra A-1 en un TI-84 Plus C.

Ahora resuelve el problema 3 7

Si transformar la matriz 3A·In 4 en forma escalonada reducida no da como resultado la matriz identidad In a la izquierda de la barra vertical, entonces A es singular y no tiene inversa.

EJEMPLO 14 Demostrar que una matriz no tiene inversa

Demuestre que la matriz A = J 2 3 6 R no tiene inversa.

Solución Comience escribiendo la matriz [A0I2].

3A·I2 4 = J 4 3 6 2 2 1 0 0 1R

Luego use operaciones con renglones para transformar 3A·I2 4 en forma escalonada reducida.

$$3A\cdot I2\ 4 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

0 1 RSD 1 23 † 0 1 TSD 1 0 0 4

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

1 cucharada

R1 = 1/4r1 R2 = -2r1 + r2

La matriz 3A·I2 4 se reduce lo suficiente como para ver que la matriz identidad no puede aparecer a la izquierda de la barra vertical, por lo que A es singular y no tiene inversa.

Se puede demostrar que si el determinante de una matriz es 0, la matriz es singular. Por ejemplo, el determinante de la matriz A del ejemplo 14 es

`2 3 6` = 4 # 3 - 6 # 2 = 0

Ahora resuelve el problema 6 5

Machine Translated by Google

5 Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa Las matrices inversas se pueden usar para resolver sistemas de ecuaciones en los que el número de ecuaciones es el mismo que el número de variables.

EJEMPLO 15 **Usar la matriz inversa para resolver un sistema de ecuaciones lineales**

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 3 \\ -x + 3y + 4z &= -3 \\ 4y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Resuelve el sistema de ecuaciones:

Solución

Dejar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema de ecuaciones original se puede escribir de forma compacta como la ecuación matricial

$$AX = B \tag{4}$$

Del Ejemplo 13, la matriz A tiene la inversa A^{-1}. Multiplica ambos lados de la ecuación (4) por A^{-1}.

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B && \text{Multiplica ambos lados por } A^{-1}. \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B && \text{Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices} \\ IX &= A^{-1}B && \text{Definición de una matriz inversa} \\ X &= A^{-1}B && \text{Propiedad de la matriz identidad} \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora usa (5) para encontrar $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 13

La solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$ o, usando un triplete ordenado, $(1, 2, -2)$.

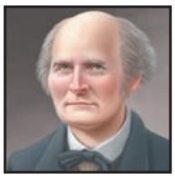
El método utilizado en el Ejemplo 15 para resolver un sistema de ecuaciones es particularmente útil cuando es necesario resolver varios sistemas de ecuaciones en los que las constantes que aparecen a la derecha de los signos iguales cambian, pero los coeficientes de las variables del lado izquierdo permanecen lo mismo. Consulte los problemas 45 a 64 para ver algunas ilustraciones.

Ten cuidado; este método sólo se puede utilizar si existe lo inverso. Si la matriz de coeficientes es singular, se debe utilizar un método diferente y el sistema es inconsistente o dependiente.

Ahora problema de trabajo 4 9

Machine Translated by Google

Característica histórica



Arturo Cayley
(1821–1895)

Las matrices fueron inventadas en 1857 por Arthur Cayley (1821-1895) como una forma de calcular enteramente el resultado de sustituir un sistema lineal por otro (ver Problema histórico 3). El sistema resultante tenía una riqueza increíble, en el sentido de que las matrices podían imitar una amplia variedad de sistemas matemáticos. Cayley y su amigo James J. Sylvester (1814-1897) pasó gran parte del resto de su vida elaborando la teoría. Luego pasó la antorcha a Georg Frobenius (1849-1917), cuyas profundas investigaciones establecieron un lugar central para las matrices en las matemáticas modernas. En 1924, para sorpresa de los físicos, se descubrió que las matrices (con números complejos) eran exactamente la herramienta adecuada para describir el comportamiento de los sistemas atómicos. Hoy en día, las matrices se utilizan en una amplia variedad de aplicaciones.

Problemas históricos

1. Matrices y números complejos Frobenius enfatizó en su investigación cómo se podrían utilizar las matrices para imitar otros sistemas matemáticos. Aquí imitamos el comportamiento de números complejos usando matrices. Los matemáticos llaman a esta relación isomorfismo.

Número complejo · Matriz

a + bi · c ab - malo _

Tenga en cuenta que el número complejo se puede leer en la línea superior de la matriz. Entonces

2 + 3i · c 2 3 -3 2d y c 4 -2 2 4 d · 4 - 2i

(a) Encuentre las matrices correspondientes a 2 - 5i y 1 + 3i.

(b) Multiplica las dos matrices.

(c) Encuentre el número complejo correspondiente a la matriz encontrada en el inciso (b).

(d) Multiplica 2 - 5i y 1 + 3i. El resultado debe ser el mismo que el encontrado en el inciso (c).

El proceso también funciona para sumas y restas. Pruébelo usted mismo.

2. Calcule 1a + bi2 1a - bi2 usando matrices. Interpreta el resultado.
3. Definición de Cayley de multiplicación de matrices Cayley ideó la multiplicación de matrices para simplificar el siguiente problema:

b tu = car + ds so x = ky + mu + nv

(a) Encuentre xey en términos de r y s sustituyendo u y v del primer sistema de ecuaciones en el segundo sistema de ecuaciones .

(b) Utilice el resultado del inciso (a) para encontrar la matriz A de 2 por 2 en

cyx re = A cr

(c) Ahora observe la siguiente forma de hacerlo. Escribe las ecuaciones en forma matricial.

cu v d = c cab dc r cyx d = ckhnn dc u vd

Entonces

cyx d = ckhnn cc abo d dc r

¿Ves cómo Cayley definió la multiplicación de matrices?

11.4 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas es llamado(n) _____ matriz.
2. Verdadero o Falso La suma de matrices es conmutativa.
3. Verdadero o Falso Si A y B son matrices cuadradas, entonces AB = BA.
4. Supongamos que A es una matriz cuadrada de n por n que no es singular. La matriz B para la cual AB = BA = In es la de la matriz A. _____
5. Verdadero o Falso La matriz identidad tiene propiedades similares a las del número real 1.
6. Si AX = B representa una ecuación matricial donde A es una matriz no singular, entonces podemos resolver la ecuación usando X = _____.
7. Opción múltiple Para encontrar el producto AB de dos matrices A y B, ¿qué afirmación debe ser verdadera?
   (a) El número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B.
   (b) El número de filas en A debe ser igual al número de columnas en B.
   (c) A y B deben tener el mismo número de filas y el mismo número de columnas.
   (d) A y B deben ser matrices cuadradas.
8. Opción múltiple Una matriz que no tiene inversa se llama(n):
   (a) matriz cero
   (b) matriz no singular
   (c) matriz de identidad
   (d) matriz singular

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 26, utilice las siguientes matrices. Determine si la expresión dada está definida. Si está definido, exprese el resultado como una matriz única; si no es así, escriba “no definido”.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

9. $A + B$

10. $A - B$

11. $-3B$

12. $4A$

13. $3A - 2B$

14. $2A + 4B$

15. aire acondicionado

16. antes de Cristo

17. CA

18. CB

19. Licenciatura en Letras

20. AB

21. $1A + B2C$

22. $C1A + B2$

23. $CA + 5I3$

24. $CA - 3I2$

25. CA + antes de Cristo

26. $CA - CB$

En los problemas 27 a 34, determine si el producto está definido. Si está definido, encuentre el producto; si no es así, escriba "no definido".

27. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -11 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \\ 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas 35 a 44, cada matriz es no singular. Encuentra la inversa de cada matriz.

35. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas 45 a 64, utilice las inversas que se encuentran en los problemas 35 a 44 para resolver cada sistema de ecuaciones.

45. $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 6x + 2y = 2 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$

50. $\begin{cases} -4x + y = 0 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$

51. $\begin{cases} -4x + 6y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

53. $\begin{cases} bx + by = 2 \\ bx + 2by = 3 \end{cases}$

54. $\begin{cases} ax + ay = 1 \\ 2ax + ay = -a \end{cases}$

55. $\begin{cases} bx + 3y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$

56. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ ax + ay = 7 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x + 2z = 6 - x + \\ 2y + 3z = -5 \\ x - y = 6 \end{cases}$

58. $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ -2y + z = 1 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$

59. $\begin{cases} 3 - x + 2y + 3z = -2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

60. $\begin{cases} -2y + z = 2 \\ -2x - 3y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

61. $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases}$

62. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 8 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

63. $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$

64. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 3x + y + 2z = \frac{10}{3} \\ y + z = 2 \end{cases}$

En los problemas 65 a 70, demuestre que cada matriz no tiene inversa.

65. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

66. $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

67. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

68. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

69. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

70. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -7 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Machine Translated by Google

En los problemas 71 a 74, utilice una herramienta gráfica para encontrar la inversa, si existe, de cada matriz. Redondea las respuestas a dos decimales.

71. $\begin{bmatrix} 61 & -12 \\ 18 & -12 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

72. $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 & -20 & 14 \\ 10 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -19 & -3 & 25 \\ 15 \end{bmatrix}$

73. $\begin{bmatrix} 5 \\ 21 & -17 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 27 & 20 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 22 & -3 & -3 & -10 \end{bmatrix}$ toneladas

74. $\begin{bmatrix} 18 & 6 \\ -2 & 10 & 15 & 5 \\ 21 & 12 & -12 & 4 \\ -8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -16 \\ -44 & 21 & & 4 & 9 \end{bmatrix}$

En los problemas 75 a 78, utilice la matriz inversa que se encuentra en el problema 71 para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Redondea las respuestas a dos decimales.

75. $\begin{cases} 18x - 12y + 7z = -3 \\ 3x + 4y - 2z = 15 \\ x - y + z = 10 \end{cases}$

76. $\begin{cases} 18x - 12y + 7y = -9 \\ 3x + 4y - 2z = 10 \\ x - y + z = 10 \end{cases}$

77. $\begin{cases} 18x - 12y + 7z = 10 \\ 3x + 4y - 2z = 25 \\ x - y + z = 25 \end{cases}$

78. $\begin{cases} 18x - 12y + 7z = 7 \\ 3x + 4y - 2z = 21 \\ x - y + z = 21 \end{cases}$

Práctica mixta En los problemas 79 a 86, resuelva cada sistema de ecuaciones usando el método que desee.

79. $\begin{cases} 2x + 7y = -13 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$

80. $\begin{cases} 5x + 7y = 24 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

81. $\begin{cases} 4x + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

82. $\begin{cases} -3x + 5y - 2z = 17 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = -22 \end{cases}$

83. $\begin{cases} 2x + y + 6z = -7 \\ 3x + 2y + z = 17 \\ x + y + 4z = 17 \end{cases}$

84. $\begin{cases} -x + 5y - 4z = 3 \\ 5x + y + 3z = 17 \\ 7x + 3y + 2z = 17 \end{cases}$

85. $\begin{cases} 3x + y - z = -2 \\ -4x + 3y + 2z = 6 \\ x + 9y + z = 6 \end{cases}$

86. $\begin{cases} -3x + 2y - z = -3 \\ 2x - 3y + 4z = 6 \\ -5x + 4y - 3z = 6 \end{cases}$

Aplicaciones y extensiones

87. **Matrícula universitaria** Nikki y Joe toman clases en un colegio comunitario y en una universidad local. La cantidad de horas de crédito tomadas y el costo por hora de crédito (solo matrícula) se muestran a continuación.

	CC	LU
niki	9	9
José	6	6

	Costo por hora de crédito
CC	$71.00
LU	$158.30

(a) Escriba una matriz A para las horas de crédito tomadas por cada estudiante y una matriz B para el costo por hora de crédito.
(b) Calcule AB e interprete los resultados.

Fuentes: lc.edu, siue.edu

88. **Intereses de préstamos escolares** Jamal y Stephanie tienen préstamos escolares emitidos por los mismos dos bancos. Las cantidades prestado y las tasas de interés mensuales se dan a continuación (el interés se capitaliza mensualmente).

	Prestador 1	Prestador 2
Jamal	$4000	$3000
Estefanía	$2500	$3800

	Mensual Tasa de interés
Prestamista 1	0,011 (1,1%)
Prestamista 2	0,006 (0,6%)

(a) Escriba una matriz A para los montos prestados por cada estudiante y una matriz B para las tasas de interés mensuales.
(b) Calcule AB e interprete el resultado.

(c) Sea C = J 1 1 r. Calcule A1C + B2 e interprete la resultado.

89. **Cálculo del costo de producción** Acme Steel Company es un productor de contenedores de acero inoxidable y aluminio. Cierto día se fabricaron los siguientes contenedores de acero inoxidable: 250 con capacidad de 10 galones, 750 con capacidad de 5 galones y 600 con capacidad de 1 galón. El mismo día se fabricaron los siguientes contenedores de aluminio: 650 de 10 galones de capacidad, 550 de 5 galones de capacidad y 800 con capacidad de 1 galón. Responda lo siguiente para calcular el costo diario de producción.

(a) Encuentre una matriz de 2 por 3 que represente los datos anteriores. (b) Encuentre una matriz de 3 por 1 que represente la cantidad de material si la cantidad de material utilizada en los contenedores de 10 galones es 15 libras, la cantidad utilizada en los contenedores de 5 galones es 9 libras y la cantidad utilizada en los contenedores de 1 galón es de 4 libras.

(c) Multiplique la matriz de 2 por 3 encontrada en el inciso (a) y la matriz de 3 por 1 encontrada en el inciso (b) para obtener una matriz de 2 por 1 que muestre el uso diario de material. ¿Cuál es la matriz resultante?

(d) Si el acero inoxidable le cuesta a Acme $0,10 por libra y el aluminio cuesta $0,05 por libra, encuentre una matriz de 1 por 2 que represente el costo de cada uno.

(e) Multiplique las matrices encontradas en los incisos (c) y (d) para determinar el costo total de la producción del día.

90. **Computación de ganancias** Rizza's Used Cars tiene dos sucursales, una en la ciudad y otra en los suburbios. En enero, la sucursal de la ciudad vendió 400 subcompactos, 250 automóviles de tamaño intermedio y 50 SUV; en febrero vendió 350 subcompactos, 100 intermedios y 30 SUV. En enero se vendieron en esta ubicación suburbana 450 subcompactos, 200 intermedios y 140 SUV. En febrero, la sucursal suburbana vendió 350 subcompactos, 300 intermedios y 100 SUV.

(a) Encuentre matrices de 2 por 3 que resuma los datos de ventas de cada ubicación para enero y febrero (una matriz para cada mes).

(b) Utilice la suma de matrices para obtener las ventas totales durante el período de 2 meses. período.

(c) La ganancia de cada tipo de automóvil es de $100 por subcompacto, $150 por intermedio y $200 por SUV. Encuentre una matriz de 3 por 1 que represente esta ganancia.

(d) Multiplique las matrices encontradas en los incisos (b) y (c) para obtener una matriz de 2 por 1 que muestre la ganancia en cada ubicación.

91. **Criptografía** Un método de cifrado es utilizar una matriz para codificar el mensaje y luego utilizar la matriz inversa correspondiente para decodificar el mensaje. La matriz cifrada, E, se obtiene multiplicando la matriz del mensaje, M,

Machine Translated by Google

por una matriz clave, K. El mensaje original se puede recuperar multiplicando la matriz cifrada por la inversa de la matriz clave. Es decir, E = M # K y M = E·# K-1

1 1 0

(a) La matriz clave K = 1 0 1 Encuentra su inversa, K-1

[Nota: Esta matriz clave se conoce como Q3 Matriz de cifrado de Fibonacci.]

(b) Utilice el resultado de la parte (a) para decodificar el código cifrado.

44 36 27

matriz E = 47 43 28

(c) Cada entrada en el resultado de la parte (b) representa la posición de una letra en el alfabeto inglés 1A = 1, B = 2, C = 3, etc.). ¿Cuál es el mensaje original?

Fuente: goldenmuseum.com

92. Movilidad económica El ingreso de un niño (bajo, medio o alto) generalmente depende del ingreso de los padres del niño. La matriz P, dada por

Ingresos de los padres

L M H

0,5 0,6 0,5 M Ingresos del niño

P = 0,4 0,2 0,4 h

se llama matriz de transición estocástica izquierda. Por ejemplo, la entrada P21 = 0,5 significa que el 50% de los hijos de padres de bajos ingresos pasarán al nivel medio de ingresos. La entrada diagonal Pii representa el porcentaje de niños que permanecen en el mismo nivel de ingresos que sus padres. Suponiendo que la matriz de transición es válida de una generación a la siguiente, calcule e interprete P2

.

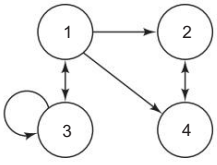
Fuente: Understanding Mobility in America, abril de 2006.

93. Resuelva para la matriz X:

1

c-3 2 5d X = c 2 6 – 7 3 - 4 0d

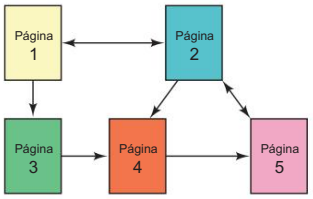
Utilice la siguiente discusión para los problemas 94 y 95. En teoría de grafos, una matriz de adyacencia, A, es una forma de representar qué nodos (o vértices) están conectados. Para un gráfico dirigido simple, cada entrada, aij, es 1 (si existe una ruta directa desde el nodo i al nodo j) o 0 (si no existe una ruta directa desde el nodo i al nodo j). Por ejemplo, considere el siguiente gráfico y la matriz de adyacencia correspondiente.



0 0 0 1
1 0 1 0
D00110101T

La entrada a14 es 1 porque existe una ruta directa desde el nodo 1 al nodo 4. Sin embargo, la entrada a41 es 0 porque no existe ninguna ruta desde el nodo 4 al nodo 1. La entrada a33 es 1 porque existe una ruta directa desde el nodo 3 hacia sí mismo . La matriz Bk = A + A2 + g+ Ak indica el número de formas de llegar del nodo i al nodo j en k movimientos (pasos).

94. Mapa del sitio web Se puede utilizar un mapa de contenido para mostrar cómo se conectan las diferentes páginas de un sitio web. Por ejemplo, el siguiente mapa de contenido muestra la relación entre las cinco páginas de un determinado sitio web con enlaces entre páginas representados por flechas.



El mapa de contenido se puede representar mediante una matriz de adyacencia de 5 por 5 donde cada entrada, aij, es 1 (si existe un vínculo de la página i a la página j) o 0 (si no existe ningún vínculo de la página i a la página j).

(a) Escriba la matriz de adyacencia de 5 por 5 que representa el mapa de contenido dado.

(b) Explique el significado de las entradas en los principales diagonal en el resultado del inciso (a).

(c) Encuentre e interprete A2·

95. Regla de los tres clics Una pauta no oficial, y a menudo cuestionada, para el diseño de sitios web es hacer que todo el contenido del sitio web esté disponible para un usuario con tres clics. La matriz de adyacencia de páginas web para un determinado sitio web viene dada por

1 0 0 1 1

Una = 1 0 0 1 0

0 0 1 0 1

m0 1 0 0 0U

(a) Encuentre B3. ¿Este sitio web cumple con la regla de los tres clics?

(b) ¿ A qué página se puede llegar de más maneras? desde la página 1 con tres clics?

96. Gráficos por computadora: traducción Un aspecto importante de los gráficos por computadora es la capacidad de transformar las coordenadas de puntos dentro de un gráfico. Para fines de transformación, un

y

el punto 1x, y2 se representa como la matriz de columnas X = £ x §.

Para trasladar un punto 1x, y2 horizontalmente h unidades y verticalmente

0 1 mil

k unidades, usamos la matriz de traducción S 0 0 1 § y

Calcule el producto matricial SX. La traslación es hacia la derecha para h 7 0 y hacia la izquierda para h 6 0. Asimismo, la traslación es hacia arriba para k 7 0 y hacia abajo para k 6 0. Las coordenadas transformadas son las dos primeras entradas en la matriz de columnas resultante.

(a) Escriba la matriz de traslación necesaria para trasladar un punto 3 unidades hacia la izquierda y 5 unidades hacia arriba.

(b) Encuentre e interprete S -1 ·

97. Gráficos por computadora: rotación Un aspecto importante de los gráficos por computadora es la capacidad de transformar las coordenadas de puntos dentro de una imagen. Para propósitos de transformación, un punto 1x, y2 es

y

representado como la matriz de columnas X = £ x §. Para rotar un punto, multiplique la matriz de columna de un punto por una matriz de rotación apropiada R para formar el producto matricial RX. Por ejemplo, para rotar un punto 30° en el sentido contrario a las agujas del reloj, la matriz de rotación se encuentra a continuación.

$$R = \begin{bmatrix} \frac{23}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2\,23}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

mi 1 unidad

Utilice esta información para responder las partes (a) y (b) a continuación. (a) Escriba las coordenadas del punto (10, 8) después de haberlo girado 30° en el sentido antihorario.

(b) Encuentre e interprete R-1·

Machine Translated by Google

98. Problema de desafío si A = c ab cd d y B = c 1 1 - 1 1 d , Encuentre a, b, c, d de modo que AB = BA.

99. Problema de desafío si A = c ab malo , encontrar a y b entonces que A2 + A = 0.

Explicar conceptos: discusión y escritura

100. Crea una situación diferente a cualquiera que se encuentre en el texto que se puede representar mediante una matriz.

101. Explique por qué el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de filas de la matriz B para encontrar el producto AB.

102. Si a, b y c · 0 son números reales con ac = bc, entonces a = b. ¿Se cumple esta misma propiedad para las matrices? En otras palabras, si A, B y C son matrices y AC = BC, ¿ debe A = B?

103. ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones AX = 0 si existe A-1 ? Discuta la solución de AX = 0 si A-1 lo hace no existe.

Conserve su conocimiento

Los problemas 104 a 113 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

104. Encuentre un polinomio con grado mínimo y coeficiente principal 1 que tenga ceros x = 3 (multiplicidad 2), x = 0 (multiplicidad 3) y x = - 2 (multiplicidad 1).

105. Para v = - 2i - j y w = 2i + j, encuentre el producto escalar v # w y el ángulo entre v y w.

106. Resuelve: $\frac{5x}{x+2} = \frac{x}{x-2}$

107. Escribe cos1csc $^{-1}$ u2 como expresión algebraica en u.

108. Expresa 8ei # p>3 en forma rectangular.

109. Agregar: + $\frac{x+1}{x-3}$ $\frac{4}{x+3}$

110. Encuentra el dominio de f1x2 = $\frac{\sqrt{210-2x}}{x+3}$.

111. Factorizar completamente: 3x4 + 12x3 - 108x2 - 432x

112. Encuentra el área de la región encerrada por las gráficas de y = 24 - x2 , y = x - 2, y y = - x - 2.

113. Si f1x2 = y g1x2 = seg x, 0 6 x 6 5 $\frac{\sqrt{225x2-4}}{x}$ $\frac{2}{}$ $\frac{pag}{2}$, espectáculo que 1f g2 1x2 = 5 sen x.

11.5 Descomposición en fracciones parciales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Identidad (Sección A.6, p. A44)
- Propiedades de las funciones racionales (sección 4.3, págs. 234–241)
- Reducir una expresión racional a sus términos más bajos (Sección A.5, págs. A35–A36)
- Ceros complejos; Teorema fundamental del álgebra (Sección 4.7, págs. 281–286)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 819.

OBJETIVOS 1 Descomponer donde Q sólo tiene factores lineales no repetidos (p. 814)

$\frac{PAG}{q}$

2 Descomponer donde Q tiene factores lineales repetidos (p. 815)

$\frac{PAG}{q}$

irreducible no repetido $\frac{PAG}{}$ Donde Q tiene un factor Q de descomposición cuadrático 3 (p. 817)

4 Descomponer donde Q tiene un factor cuadrático irreducible repetido (pág. 818)

$\frac{PAG}{P}$

Considere el problema de sumar dos expresiones racionales:

$$\frac{3}{x+4} \quad \text{y} \quad \frac{2}{x-3}$$

la suma es

$$\frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-3} = \frac{31x - 32 + 21x + 42}{1x + 42\ 1x - 32} = \frac{5x - 1}{x2 + x - 12}$$

Machine Translated by Google

El procedimiento inverso, comenzando con la expresión racional y $\frac{5x - 1}{x^2 + x - 12}$ escribiéndolo como la suma (o diferencia) de las dos fracciones más simples y $\frac{3}{x + 4} - \frac{2}{x - 3}$, es se denomina descomposición en fracciones parciales, y las dos fracciones más simples se denominan fracciones parciales. Descomponer una expresión racional en una suma de fracciones parciales es importante para resolver ciertos tipos de problemas de cálculo. Esta sección presenta una forma sistemática de descomponer expresiones racionales.

Recuerde que una expresión racional es la razón de dos polinomios, digamos P y Q · 0. Recuerde también que una expresión racional $\frac{P}{Q}$ se llama propia si el grado del polinomio en el numerador es menor que el grado del polinomio en el denominador. De lo contrario, la expresión racional se llama impropia.

Además, suponemos que P y Q están en sus términos más bajos. Es decir, P y Q no tienen factores comunes.

EJEMPLO 1 Identificar expresiones racionales adecuadas e impropias

Determina si la expresión racional es propia o impropia. Si la expresión es impropia, reescríbela como la suma de un polinomio y una expresión racional propia.

(a) $\frac{x + 5}{x^2 + 3x + 2}$ (b) $\frac{6x^2 - x + 5}{3x - 2}$

Solución

(a) El numerador, x + 5, es un polinomio de grado 1, y el denominador, $x^2 + 3x + 2$, es un polinomio de grado 2. Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el La expresión racional es adecuada.

(b) El numerador, $6x^2 - x + 5$, es un polinomio de grado 2, y el denominador, 3x - 2, es un polinomio de grado 1. Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el La expresión racional es impropia. Usamos división larga para reescribir esta expresión como la suma de un polinomio y una expresión racional propia:

$$
\begin{array}{r}
2x + 1 \\
3x - 2 \overline{)\,6x^2 - x + 5} \\
\underline{6x^2 - 4x} \\
3x + 5 \\
\underline{3x - 2} \\
7
\end{array}
$$

Entonces, $\frac{6x^2 - x + 5}{3x - 2} = 2x + 1 + \frac{7}{3x - 2}$.

Ahora resuelve los problemas 5 y 1 3.

Debido a que al usar división larga, toda expresión racional impropia se puede escribir como la suma de un polinomio y una expresión racional propia, restringimos la discusión que sigue a expresiones racionales propias.

La descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. $\frac{P}{Q}$, en lo más bajo términos, depende de los factores del denominador Q. Recuerde de la Sección 4.7 que cualquier polinomio con coeficientes reales se puede factorizar sobre los números reales en un producto de factores cuadráticos lineales y/o irreducibles.

Machine Translated by Google

Esto significa que el denominador Q de la expresión racional $\frac{P}{q}$ contiene solo factores de uno o ambos de los siguientes tipos:

- Factores lineales de la forma x - a, donde a es un número real.
- Factores cuadráticos irreducibles de la forma ax2 + bx + c, donde a, byc son números reales, a · 0 y b2 - 4ac 6 0. El discriminante negativo garantiza que ax2 + bx + c no se puede escribir como el Producto de dos factores lineales con coeficientes reales.

Resulta que quedan cuatro casos por examinar. Comenzamos con el caso en el que Q sólo tiene factores lineales no repetidos. A lo largo de todo asumimos lo racional expresión $\frac{P}{q}$ está en los términos más bajos.

1 Descomponer $\frac{P}{q}$ Donde Q sólo tiene factores lineales no repetidos

Caso 1: Q solo tiene factores lineales no repetidos.

Bajo el supuesto de que Q sólo tiene factores lineales no repetidos, el polinomio Q tiene la forma

$$Q1x2 = 1x - a12\ 1x - a22\ \#\ g\ \#\ 1x - an2$$

donde no hay dos números a1, a2, c, an que sean iguales. En este caso, el parcial la descomposición en fracciones es de la forma $\frac{P}{q}$

$$\frac{P1x2}{T1x2} = \frac{A1}{x - a1} + \frac{A2}{x - a2} + g + \frac{Un}{x - un} \qquad (1)$$

donde se deben determinar los números A1, A2, c, An .

EJEMPLO 2 Descomponiendo $\frac{P}{q}$ Donde Q sólo tiene factores lineales no repetidos

Encuentre la descomposición en fracciones parciales $\frac{x}{\text{de } x2 - 5x + 6}$.

Solución

Primero, factoriza el denominador,

$$x2 - 5x + 6 = 1x - 22\ 1x - 32$$

y observe que el denominador contiene sólo factores lineales no repetidos. Luego descomponga la expresión racional según la ecuación (1):

$$\frac{x}{x2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \qquad (2)$$

donde A y B son números por determinar. Para encontrar A y B, borra las fracciones multiplicando ambos lados por 1x - 22 1x - 32 = x2 - 5x + 6. El resultado es

$$x = A1x - 32 + B1x - 22 \qquad (3)$$

$$x = 1A + B2x + 1 - 3A - 2B2$$

Machine Translated by Google

Esta ecuación es una identidad en x. Igualar los coeficientes de potencias similares de x para obtener

Igualar los coeficientes de x: 1x · (A · B)x.

segundo 1 = A + B

Iguala las constantes: 0 · ·3A · 2B.

0 = -3A - 2B

Este sistema de dos ecuaciones que contienen dos variables, A y B, se puede resolver utilizando cualquier método que desee. La solucion es

$$A = -2 \quad B = 3$$

De la ecuación (2), la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3}$$

✓ Verificar: La descomposición se puede verificar sumando las expresiones racionales.

$$\frac{-2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3} = \frac{-2(x - 3) + 3(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$= \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

Los números que se encuentran en la descomposición de fracciones parciales a veces se pueden encontrar más fácilmente utilizando opciones adecuadas para x en la identidad obtenida después de borrar las fracciones. En el Ejemplo 2, la identidad después de borrar las fracciones es la ecuación (3):

$$x = A(x - 3) + B(x - 2)$$

Sea x = 2 en esta expresión, y el término que contiene B desaparece, dejando 2 = A(-1), o A = -2. De manera similar, sea x = 3, y el término que contiene A desaparece, dejando 3 = B. Como antes, A = -2 y B = 3.

Ahora resuelve el problema 17

2 Descomponer $\frac{P}{Q}$ Donde Q tiene factores lineales repetidos

Caso 2: Q tiene factores lineales repetidos.

Si el polinomio Q tiene un factor lineal repetido, digamos $(x - a)^n$, $n \geq 2$ un número entero, luego, en la descomposición en fracciones parciales de $\frac{P}{Q}$, permitir los términos

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

donde se deben determinar los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

EJEMPLO 3 Descomponiendo $\frac{P}{Q}$ Donde Q tiene factores lineales repetidos

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$.

Solución Primero, factoriza el denominador,

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$$

y observe que el denominador tiene el factor lineal x no repetido y el factor $(x - 1)^2$ repetido factor lineal. Por el Caso 1, el término $\frac{A}{x}$ está en descomposición; y por el Caso 2, los términos $\frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$ están en descomposición.

(continuado)

Machine Translated by Google

Ahora escribe

$$\frac{x+2}{x3-2x2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{1x-12^{2}} \qquad (4)$$

Nuevamente, elimine las fracciones multiplicando ambos lados por x3 - 2x2 + x = x1x - 12 el ^{2}. El resultado es la identidad

$$x+2=A1x-12^{2}+Ax1x-12+Cx \qquad (5)$$

Sea x = 0 en esta expresión y los términos que contienen B y C desaparecen, dejando 2 = A1 - 12 o A · 2. De manera similar, sea x = 1, y los términos que contienen A y B desaparecen, dejando 3 · C. Entonces la ecuación (5) se convierte en

$$x+2=21x-12^{2}+Ax1x-12+3x$$

Sea x = 2 (cualquier número distinto de 0 o 1 funcionará también). El resultado es

$$2\,4=2\#1+B\#2\#1+3\#2$$
$$4=2+2B+6$$
$$2B=-4$$
segundo · ·2

Por lo tanto, A = 2, B = - 2 y C = 3.

De la ecuación (4), la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x+2}{x3-2x2+x}=\frac{2}{x}+\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{1x-12^{2}}$$

EJEMPLO 4

Descomponiendo $\frac{P}{Q}$ Donde Q tiene factores lineales repetidos

Encuentre la descomposición en fracciones parciales $\frac{x3-8}{\text{de x2 1x - 12}^{3}}$.

Solución

El denominador contiene los factores lineales repetidos x2 y 1x - la ^{3}. el parcial descomposición en 12 fracciones tiene la forma

$$\frac{x3-8}{x2\,1x-12^{3}}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{1x-12^{2}}+\frac{mi}{1x-12^{3}} \qquad (6)$$

Como antes, borra fracciones y obtén la identidad.

$$x3-8=Ax1x-12^{3}+B1x-12^{3}+Cx2\,1x-12^{2}+Dx2\,1x-12+Ex2 \qquad (7)$$

Sea x = 0. (¿Ves por qué se hizo esta elección?) Entonces

$$-8=B1-12$$
si · 8

Sea x = 1 en la ecuación (7). Entonces

·7 · mi

Utilice B = 8 y E = - 7 en la ecuación (7) y recopile los términos semejantes.

$$x3-8=Ax1x-12\,x3-^{3}+81x-12^{3}+Cx2\,1x-12^{2}+Dx2\,1x-12-7x2$$
$$8-81x3-3x2+3x-12+7x2=Ax1x-12^{3}+Cx2\,1x-12-^{2}+Dx2\,1x-12$$
$$7x3+31x2-24x=x1x-12\,3A1x-12\,x1x-12^{2}+Cx1x-12+Dx4$$
$$1-7x+242=x1x-12\,3A1x-12-7x+24=A1x-^{2}+Cx1x-12+Dx4$$
$$12^{2}+Cx1x-12+Dx \qquad (8)$$

Machine Translated by Google

Ahora trabaja con la ecuación (8). Sea x = 0. Entonces

$$24 \cdot A$$

Sea x = 1 en la ecuación (8). Entonces

$$17 \cdot D$$

Utilice A = 24 y D = 17 en la ecuación (8).

$$-7x + 24 = 241x - 12^{2} + Cx1x - 12 + 17x$$

Sea x = 2 y simplifique.

$$-14 + 24 = 24 + C122 + 34$$
$$-48 = 2C$$
$$\cdot 24 \cdot C$$

Ahora se conocen los números A, B, C, D y E. Entonces, de la ecuación (6),

$$\frac{x3 - 8}{x2\ 1x - 12^{3}} = \frac{24}{x} + \frac{8}{x2} + \frac{-24}{x - 1} + \frac{17}{1x - 12^{2}} + \frac{-7}{1x - 12^{3}}$$

Ahora trabaje el ejemplo 4 resolviendo el sistema de cinco ecuaciones que contienen cinco variables que resulta de expandir la ecuación (7).

Ahora resuelve el problema 2 3

Los dos últimos casos involucran factores cuadráticos irreducibles. Un factor cuadrático es irreducible si no se puede factorizar en factores lineales con coeficientes reales. A

La expresión cuadrática ax2 + bx + c es irreducible siempre que b2 - 4ac 6 0. Por ejemplo, x2 + x + 1 y x2 + 4 son irreducibles.

3 Descomponer $\frac{PAG}{q}$ Donde Q tiene un irreducible no repetido Factor cuadrático

Caso 3: Q contiene un factor cuadrático irreducible no repetido.

Supongamos que Q contiene un factor cuadrático irreducible no repetido de la forma ax2 + bx + c.

Luego, en la descomposición en fracciones parciales de permitir Q, $\frac{PAG}{}$ para el término

$$\frac{\text{Hacha} + B}{ax2 + bx + c}$$

donde se van a determinar los números A y B.

EJEMPLO 5

Descomponiendo $\frac{PAG}{q}$ Donde Q tiene un irreducible no repetido Factor cuadrático

Encuentre la descomposición en fracciones parciales $\frac{3x - 5}{\text{de } x3 - 1}$.

Machine Translated by Google

Solución Factoriza el denominador,

$$x3 - 1 = 1x - 12\,1x2 + x + 12$$

Observe el factor lineal no repetido x - 1 y el factor cuadrático irreducible no repetido x2 + x + 1. Tenga en cuenta el término $\frac{A}{\quad}$ por el Caso 1, y permita que x - 1 término $\frac{Bx + C}{x2 + x + 1}$ por el Caso 3. Entonces

$$\frac{3x - 5}{x3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x2 + x + 1} \qquad (9)$$

Multiplica ambos lados de la ecuación (9) por x3 - 1 = 1x - 12 1x2 + x + 12 para obtener la identidad

$$3x - 5 = A1x2 + x + 12 + 1Bx + C2\,1x - 12 \qquad (10)$$

Expanda la identidad en (10) para obtener

$$3x - 5 = 1A + B2x2 + 1A - B + C2x + 1A - C2$$

Esta identidad conduce al sistema de ecuaciones.

(1)

$$A - B + C = 3 \qquad (2)$$

$$A + C = 5 \qquad (3)$$

La solución de este sistema es $A = -\frac{2}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{13}{3}$. Entonces, de la ecuación (9),

$$\frac{3x - 5}{x3 - 1} = \frac{-\frac{2}{3}}{x - 1} + \frac{\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}}{x2 + x + 1}$$

Ahora trabaje el ejemplo 5 usando la ecuación (10) y asignando valores a x.

Ahora resuelve el problema 2 5

4 descomponer $\frac{P}{q}$ Donde Q tiene un irreducible repetido Factor cuadrático

Caso 4: Q contiene un factor cuadrático irreducible repetido.

Supongamos que el polinomio Q contiene un factor cuadrático irreducible repetido 1ax2 + bx + c2 n Ú 2, n un número entero y b2 - 4ac 6 0. Entonces, en el polinomio Q descomposición en fracciones de $\frac{P}{}$, permitir los términos

$$\frac{A1x + B1}{ax2 + bx + c} + \frac{A2x + B2}{1ax2 + bx + c2^2} + g + \frac{Anx + Bn}{1ax2 + bx + c2^n}$$

donde se deben determinar los números A1, B1, A2, B2, c, An, Bn .

EJEMPLO 6

Descomponiendo $\frac{P}{q}$ Donde Q tiene un factor cuadrático irreducible repetido

Encuentra la descomposición en fracciones parciales $\frac{x3 + x2}{1x2 + 42^2}$.

Machine Translated by Google

Solución El denominador contiene el factor cuadrático irreducible repetido $1x2 + 42$ en el ^{2}, entonces Caso 4,

$$\frac{x3 + x2}{1x2 + 42^2} = \frac{\text{Hacha} + B}{x2 + 4} + \frac{Cx + D}{1x2 + 42^2} \qquad (11)$$

Limpiar fracciones para obtener

$$x3 + x2 = 1Ax + B2\ 1x2 + 42 + Cx + D$$

La recopilación de términos semejantes produce la identidad.

$$x3 + x2 = Ax3 + Bx2 + 14A + C2x + 4B + D$$

Igualar coeficientes resulta en el sistema.

$$\begin{aligned} B &= 1 \\ 4A + C &= 0 \\ 4B + D &= 1 \end{aligned}$$

re un = 0

La solución es A = 1, B = 1, C = - 4, D = - 4. De la ecuación (11),

$$\frac{x3 + x2}{1x2 + 42^2} = \frac{x + 1}{x2 + 4} + \frac{- 4x - 4}{1x2 + 42^2}$$

Ahora resuelve el problema 3 9

11.5 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Verdadero o Falso La ecuación $1x - 12$ es $^2 - 1 = x1x - 22$ es un ejemplo de identidad. (pág. A44)
2. Verdadero o Falso La expresión racional es propia. $\frac{5x2 - 1}{x3 + 1}$ (pág. 239)
3. Reducir a los términos más bajos: $\frac{3x - 12}{x2 - 16}$ (págs. A35-A36)
4. Verdadero o Falso Todo polinomio con números reales como coeficientes se puede factorizar en un producto de factores cuadráticos lineales y/o irreducibles. (pág. 285)

Desarrollo de habilidades

En los problemas 5 a 16, determine si la expresión racional dada es adecuada o impropia. Si la expresión es impropia, reescríbela como la suma de un polinomio y una expresión racional propia.

5. $\frac{x}{x2 - 1}$
6. $\frac{5x + 2}{x3 - 1}$
7. $\frac{3x2 - 2}{x2 - 1}$
8. $\frac{x2 + 5}{x2 - 4}$
9. $\frac{6x3 - 5x2 - 7x - 3}{2x - 5}$
10. $\frac{x3 + x2 - 12x + 9}{x2 + 2x - 15}$
11. $\frac{x3 + 12x2 - 9x}{9x2 - x4}$
12. $\frac{5x2 - 7x - 6}{x + x3}$
13. $\frac{5x3 + 2x - 1}{x2 - 4}$
14. $\frac{3x4 + x2 - 2}{x3 + 8}$
15. $\frac{2x1x2 + 42}{x2 + 1}$
16. $\frac{x1x - 12}{1x + 42\ 1x - 32}$ dieciséis.

En los problemas 17 a 50, encuentre la descomposición en fracciones parciales de cada expresión racional.

17. $\frac{4}{x1x - 12}$
18. $\frac{3x}{1x + 22\ 1x - 12}$
19. $\frac{1}{1x + 12\ 1x2 + 42}$
20. $\frac{1}{x1x2 + 12}$
21. $\frac{3x}{1x + 22\ 1x - 42}$
22. $\frac{x}{1x - 12\ 1x - 22}$
23. $\frac{x2}{1x - 12^2\ 1x + 12}$
24. $\frac{x + 1}{x2\ 1x - 22}$
25. $\frac{1}{x3 - 8}$
26. $\frac{2x + 4}{x3 - 1}$
27. $\frac{x + 1}{x2\ 1x - 22^2}$
28. $\frac{x2}{1x - 12^2\ 1x + 12^2}$
29. $\frac{x2 + x}{1x + 22\ 1x - 12^2}$
30. $\frac{x - 3}{1x + 22\ 1x + 12^2}$
31. $\frac{10x2 + 2x}{1x - 12\ \ 2\ 1x2 + 22}$
32. $\frac{x + 4}{x2\ 1x2 + 42}$

Machine Translated by Google

33. $\frac{x2 - 11x - 18}{x1x2 + 3x + 32}$

34. $\frac{x2 + 2x + 3}{1x + 12\ 1x2 + 2x + 42}$

35. $\frac{1}{12x + 32\ 14x - 12}$

36. $\frac{x}{13x - 22\ 12x + 12}$

37. $\frac{x2 - x - 8}{1x + 12\ 1x2 + 5x + 62}$

38. $\frac{x}{x2 + 2x - 3}$

39. $\frac{x2 + 2x + 3}{1x2 + \ ^{2}}$

40. $\frac{x3 + 1}{1x2 + 162x2^{2}}$

41. $\frac{x3 + 1}{x5 - x4}$

42. $\frac{7x + 3}{x3 - 2x2 - 3x}$

43. $\frac{42x2 + 1}{x3 + x2 - 5x + 3}$

44. $\frac{}{x3 - 4x2 + 5x - 2}$

45. $\frac{x2}{1x2 + 42^{3}}$

46. $\frac{x3}{1x2 + 162^{3}}$

47. $\frac{4x}{2x2 + 3x - 2}$

48. $\frac{4}{2x2 - 5x - 3}$

49. $\frac{x2 + 9}{x4 - 2x2 - 8}$

50. $\frac{2x + 3}{x4 - 9x2}$

Práctica mixta En los problemas 51 a 58, utilice el algoritmo de división para reescribir cada expresión racional impropia como la suma de un polinomio y una expresión racional propia. Encuentra la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional adecuada. Finalmente, expresa la expresión racional impropia como la suma de un polinomio y la descomposición en fracciones parciales.

51. $\frac{x3 - 3x2 + 1}{x2 + 5x + 6}$

52. $\frac{x3 + x2 - 3}{x2 + 3x - 4}$

53. $\frac{x3 + x}{x2 + 4}$

54. $\frac{x3}{x2 + 1}$

55. $\frac{x4 + x3 - x + 2}{x2 - 2x + 1}$

56. $\frac{x4 - 5x2 + x - 4}{x2 + 4x + 4}$

57. $\frac{x5 - x3 + x2 + 1}{x4 + 6x2 + 9}$

58. $\frac{x5 + x4 - x2 + 2}{x4 - 2x2 + 1}$

59. Problema de desafío Usa una sustitución y una fracción parcial descomposición para expresar $\frac{}{x - 23\ x}$ en términos de $23x$.

60. Problema de desafío Usa una sustitución y una fracción parcial descomposición para expresar en términos de $\frac{3ex}{e2x + ex - 2}$.

Conserve su conocimiento

Los problemas 61 a 70 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

61. Saldo de la tarjeta de crédito Nick tiene un saldo de tarjeta de crédito de $4200. Si la compañía de la tarjeta de crédito cobra un interés compuesto del 18% diariamente y Nick no realiza ningún pago en la cuenta, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse su saldo? Redondear a dos decimales.

62. Si f 1x2 = x + 4 y g1x2 = x2 - 3x, encuentre 1g f 2 1 - 32.

63. Encuentra el valor exacto de sec 52° cos 308°.

64. Traza el punto dado por las coordenadas polares ϕ - 1, $\frac{5p}{4} \le y$ Encuentre sus coordenadas rectangulares.

65. Determina si f1x2 = - es par, impar o x2 - 10 $\frac{3x}{\text{ninguno}}$ de los dos.

66. La función f1x2 = 8x-3 - 4 es uno a uno. encontrar f^{-1}.

67. Encuentra una ecuación para la hipérbola con vértices 10, - 52 y 10, 52, y un foco en 10, 132.

68. Resuelve: $\frac{5}{2}x - 1 \text{ Ú } x + \frac{4}{5}$

69. Resuelva para D: 2x - 4xD - 4y + 2yD = D

70. La recta normal es la recta que es perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia. Si y = - 2x + 2 es 1 la recta tangente a f1x2 = $\frac{}{3}x2 - 4x + 5$, encuentra una ecuación de la línea normal a f en el punto de tangencia.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. Verdadero 2. Verdadero $\frac{3}{3.x + 4}$ 4. Verdadero

Machine Translated by Google

11.6 Sistemas de ecuaciones no lineales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Líneas (Sección 1.3, págs. 56–67)
- Círculos (Sección 1.4, págs. 71–75)
- Parábolas (Sección 10.2, págs. 690–694)
- Elipses (Sección 10.3, págs. 699–705)
- Hipérbolas (Sección 10.4, págs. 709–717)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 826.

OBJETIVOS 1 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante sustitución (p. 821)

2 Resuelva un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación (p. 822)

En la sección 11.1 observamos que la solución de un sistema de ecuaciones lineales se podía encontrar geométricamente determinando el punto de intersección (si lo hubiera) de las ecuaciones del sistema. De manera similar, al resolver sistemas de ecuaciones no lineales, las soluciones también representan los puntos de intersección (si los hay) de las gráficas de las ecuaciones.

No existe un método general para resolver un sistema de ecuaciones no lineales. A veces la sustitución es mejor; otras veces la eliminación es lo mejor; y a veces ninguno de estos métodos funciona. La experiencia y un cierto grado de imaginación son aquí tus aliados.

Antes de comenzar, conviene hacer dos comentarios.

- Si el sistema contiene dos variables y si las ecuaciones del sistema son fáciles de graficar, entonces graficalas. Al graficar cada ecuación del sistema, puedes tener una idea de cuántas soluciones tiene un sistema y aproximar su ubicación.
- Pueden aparecer soluciones extrañas al resolver sistemas no lineales, por lo que es Es imperativo comprobar todas las soluciones aparentes.

1 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante sustitución

EJEMPLO 1 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante sustitución

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x - y = -2 \quad (1)$$

$$2x^2 - y = 0 \quad (2)$$

Solución

Primero, observa que el sistema contiene dos variables y que sabemos cómo graficar cada ecuación. La ecuación (1) es la recta y = 3x + 2, y la ecuación (2) es la parábola y = 2x2 . Ver Figura 9. El sistema aparentemente tiene dos soluciones.

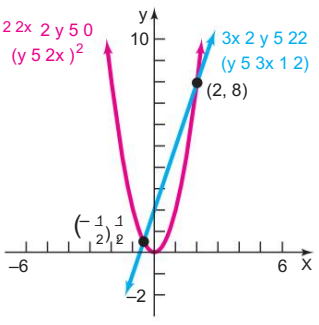


Figura 9

Para usar la sustitución para resolver el sistema, elegimos resolver la ecuación (1) para y.

$$3x - y = -2 \qquad \text{Ecuación (1)}$$

$$y = 3x + 2$$

Sustituya esta expresión por y en la ecuación (2). El resultado es una ecuación que contiene solo la variable x, que podemos resolver.

$$2x^2 - y = 0 \quad \text{Ecuación (2)}$$

$$2x^2 - 13x + 22 = 0 \quad \text{Sustituye y por } 3x + 2.$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \text{Simplifica.}$$

$$12x + 12\,1x - 22 = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

$$2x + 1 = 0 \text{ o } x - 2 = 0 \quad \text{Utilice la propiedad del producto cero.}$$

$$x = -2 \quad -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = 2$$

(continuado)

Machine Translated by Google

Utilice estos valores para x en y = 3x + 2 para encontrar

$$y = 3a - 2b + 2 = \frac{1}{2} \text{ o } y = 3 \# 2 + 2 = 8$$

Las soluciones aparentes son $x = -\frac{1}{2}$, y x 2 $\frac{1}{2}$, y = 8.

✓ Verificar: Para $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2} \text{ segundo} - \frac{1}{2} = - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2 \quad (1)$$

$$\text{re} 2 \text{a} - \frac{1}{2} \text{ segundo} \quad \frac{1}{2} 4 = 2 \# \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad (2)$$

Para x = 2, y = 8,

$$\text{segundo} \; 3 \# 2 - 8 = 6 - 8 = -2 \quad (1)$$

$$2 \# 22 - 8 = 2 \# 4 - 8 = 0 \quad (2)$$

Cada solución comprueba. Las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el puntos un $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ by 12, 82, como se muestra en la Figura 9 en la página anterior.

Ahora resuelva el problema 1 5 usando sustitución

2 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación

EJEMPLO 2 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación

Resuelva x2 x2 y + y2 = 13 (1) Un círculo
(2) Una parábola

Solución

Primero, grafique cada ecuación, como se muestra en la Figura 10. Según el gráfico, esperamos cuatro soluciones. Observe que restar la ecuación (2) de la ecuación (1) elimina la variable x.

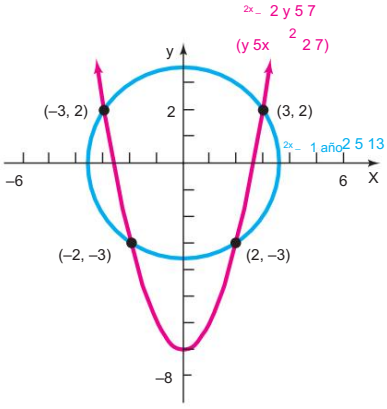


Figura 10

$$\text{b} \; x2 + y2 - y2 = 13$$

$$y2 + y = 6 \text{ Resta.}$$

Esta ecuación cuadrática en y se puede resolver factorizando.

$$y2 + y - 6 = 0$$

$$1 \text{ año} + 32 \; 1 \text{ año} - 22 = 0$$

$$y = -3 \text{ o } y = 2$$

Utilice estos valores para y en la ecuación (2) para encontrar x.

- Si y = 2, entonces x2 = y + 7 = 9, entonces x = 3 o - 3.
- Si y = - 3, entonces x2 = y + 7 = 4, entonces x = 2 o - 2.

Hay cuatro soluciones: x = 3, y = 2; x = - 3, y = 2; x = 2, y = - 3; y x = - 2, y = - 3.

Debes verificar que estas cuatro soluciones también satisfacen la ecuación (1), por lo que las cuatro son soluciones del sistema. Los cuatro puntos, 13, 22, 1 - 3, 22, 12, - 32, y 1 - 2, - 32, son los puntos de intersección de las gráficas. Mire nuevamente la Figura 10.

Ahora resuelve el problema 1 3 usando eliminación

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales

Resuelva: b x2 - y2 = 4 (1) Una hipérbola
(2) Una parábola

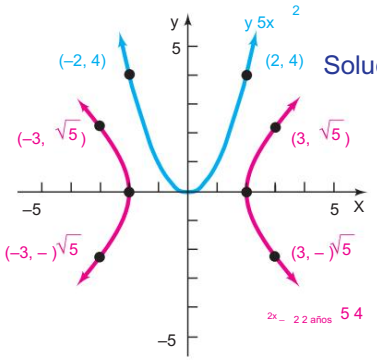


Figura 11

Solución

Aquí se puede utilizar tanto la sustitución como la eliminación. Para usar la sustitución, reemplace x2 por y en la ecuación (1).

x2 - y2 = 4 Ecuación (1)

y - y2 = 4 y · x2

y2 - y + 4 = 0 Colocar en forma estándar.

Esta es una ecuación cuadrática. Su discriminante es 1- 2 - 4 # 1 # 4 = 1 - 16 = - 15 6 0. 12 La ecuación no tiene soluciones reales, por lo que el sistema es inconsistente. Las gráficas de estas dos ecuaciones no se cruzan. Ver Figura 11.

EJEMPLO 4 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación

Resuelva: c x2 + x + y2 - 3y + 2 = 0 (1)

$$x + 1 + \frac{y^2 - y}{x} = 0 \quad (2)$$

Solución

Primero, multiplica la ecuación (2) por x para borrar el denominador. El resultado es un sistema equivalente porque x no puede ser 0. [Mire la ecuación (2) para ver por qué.]

b x2 + x + y2 - 3y + 2 = 0 (1)

x · 0 (2)

Ahora resta la ecuación (2) de la ecuación (1) para eliminar x. El resultado es

- 2 años + 2 = 0

y = 1 Resuelve para y.

Para encontrar x, sustituya hacia atrás y = 1 en la ecuación (1).

x2 + x + y2 - 3y + 2 = 0 Ecuación (1)

x2 + x + 1 - 3 + 2 = 0 Sustituye y por 1.

x2 + x = 0 Simplifica.

x1x + 12 = 0 Factorizar.

x = 0 o x = - 1 Utilice la propiedad del producto cero.

Como x no puede ser 0, el valor x = 0 es extraño, así que deséchelo.

✓ Verificar: Verificar x = - 1, y = 1:

(1) 2 + 1 - 12 + 1 2 - 3 # 1 + 2 = 1 - 1 + 1 - 3 + 2 = 0

(2) c 1 - 12 - 1 + 1 + $\frac{1^2 - 1}{-1}$ = 0 + $\frac{0}{-1}$ = 0

La solución es x = - 1, y = 1. El punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones es 1 - 1, 12.

En el problema 55 se le pide que grafique las ecuaciones dadas en el ejemplo 4. Asegúrese de para mostrar huecos en la gráfica de la ecuación (2) para x = 0.

Ahora resuelva los problemas 2 9 y 4 9

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales

Resuelva: 9x2 + 4y2 = 10 (1)
9x2 + 6xy = 6 (2)

Solución Multiplique la ecuación (1) por 2 y agregue el resultado a la ecuación (2) para eliminar los términos de y2 .

b 9x2 + 4y2 = 10 (1)
9x2 + 6xy = 6 (2)
9x2 + 6xy = 6 Agregar.
3x2 + 2xy = 2 Divide ambos lados por 3.

Dado que x · 0 (¿ves por qué?), resuelve 3x2 + 2xy = 2 para y.

$$y = \frac{2-3x^2}{2x} \qquad x \cdot 0 \quad (3)$$

Ahora sustituya y en la ecuación (2) del sistema.

9x2 + 4y2 = 10 Ecuación (2)

$$9x^2 + 4\left(\frac{2-3x^2}{2x}\right)^2 = 10$$ Sustituir y · $\frac{2 \cdot 3x2}{2x}$.

$$9x^2 + \frac{4 - 12x^2 + 9x^4}{} = 10$$ Amplia y simplifica.

x2 9x4 + 4 - 12x2 + 9x4 = 10x2 Multiplica ambos lados por x2.
18x4 - 22x2 + 4 = 0 Resta 10x2 de ambos lados.
9x4 - 11x2 + 2 = 0 Divide ambos lados por 2.

Esta ecuación cuadrática (en x2) se puede factorizar:

19x2 - 22 1x2 - 12 = 0
9x2 - 2 = 0 o x2 - 1 = 0

$$x^2 = \frac{2}{9} \qquad \text{o} \qquad x^2 = 1$$

$$x = \{\text{Un } 2\sqrt{9} = \{ \qquad \frac{22}{3} \qquad \text{o} \qquad x = \{1$$

Para encontrar y, use la ecuación (3).

- Si $x = \frac{22}{3}$: $y = \frac{2-3x^2}{2x} = \frac{2 - 3\left(\frac{22}{3}\right)}{2\left(\frac{22}{3}\right)} = \frac{4}{222} = 22$
- Si $x = -\frac{22}{3}$: $y = \frac{2-3x^2}{2x} = \frac{2 - 3\left(\frac{22}{3}\right)}{2a-\left(\frac{22}{3}\right)_{3 \text{ segundo}}} = \frac{4}{-222} = -22$
- Si x = 1: $y = \frac{2-3x^2}{2x} = \frac{2 - 3 \# 1^2}{2} = -\frac{1}{2}$
- Si x = - 1: $y = \frac{2-3x^2}{2x} = \frac{2 - 31 - 12^2}{-2} = \frac{1}{2}$

El sistema tiene cuatro soluciones: una $\frac{12}{3}$, 22b, un $-\frac{12}{3}$, - 22b, a1, - 2b, a - 1, 2b. Compruébalos tú mismo.

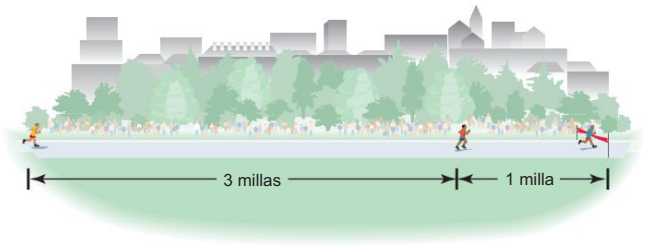
Ahora problema de trabajo 4 7

Machine Translated by Google

El siguiente ejemplo ilustra una solución imaginativa a un sistema de ecuaciones no lineales.

EJEMPLO 6 Correr una carrera de larga distancia

En una carrera de 50 millas, el ganador cruza la línea de meta 1 milla por delante del corredor en segundo lugar y 4 millas por delante del corredor en tercer lugar. Suponiendo que cada corredor mantiene una velocidad constante durante toda la carrera, ¿en cuántas millas el corredor que ocupa el segundo lugar supera al corredor que queda en tercer lugar?



Solución Sean v1, v2 y v3 las velocidades de los corredores en primer, segundo y tercer lugar, respectivamente. Sean t1 y t2 los tiempos (en horas) necesarios para que el corredor en primer lugar y el corredor en segundo lugar terminen la carrera. Entonces resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$50 = v1t1$ (1) El corredor del primer lugar recorre 50 millas en t1 horas.
$49 = v2t1$ (2) El corredor en segundo lugar recorre 49 millas en t1 horas.
$46 = v3t1$ (3) El corredor en tercer lugar recorre 46 millas en t1 horas.
$50 = v2t2$ (4) El corredor en segundo lugar recorre 50 millas en t2 horas.

Queremos la distancia d del corredor en tercer lugar desde la meta en el momento t2 . En el momento t2, el corredor en tercer lugar ha recorrido una distancia de v3t2 millas, por lo que la distancia d restante es 50 - v3t2 . Ahora

$$d = 50 - v3t2$$

$$t2 = 50 - v3\,t1 \cdot \frac{1}{\#\,t1}$$ Multiplica y divide por t1.

$$v2 = 50 - 46 \cdot \frac{\#\,50}{v1}$$ De la ecuación (4), $t2 = \frac{50}{v2}$ y de la ecuación (1), $v1 = \frac{50}{t1}$

$$v1 = 50 - 46 \cdot \frac{1}{\#\,v2}$$

$$50 = 50 - 46 \cdot \frac{1}{\#\,49}$$ Del cociente de las ecuaciones (1) y (2)

$$\approx 3{,}06 \text{ millas}$$

Machine Translated by Google

Característica histórica

Al comienzo de esta sección, se afirmó que la imaginación y la experiencia son importantes para resolver sistemas de no linealidad ecuaciones. De hecho, este tipo de problemas conducen a algunas de las partes más profundas y difíciles de las matemáticas modernas. Mire nuevamente los gráficos de los Ejemplos 1 y 2 de esta sección (Figuras 9 y 10). El ejemplo 1 tiene dos soluciones y el ejemplo 2 tiene cuatro soluciones. Podríamos conjeturar que el número de soluciones es igual al producto de los grados de las ecuaciones involucradas. Esta conjetura fue hecha por Étienne Bézout (1730-1783), pero elaborar los detalles llevó unos 150 años. Resulta que llegar al número correcto de intersecciones requiere contar no sólo las intersecciones de números complejos, sino también aquellas intersecciones que, en cierto sentido, se encuentran en el infinito. Por ejemplo, una parábola y una recta que se encuentra en el eje de la parábola se cruzan en el vértice y en el infinito. Este tema forma parte del estudio de la geometría algebraica.

Problemas históricos

Un papiro que data del año 1950 a.C. contiene el siguiente problema: "Una superficie dada de 100 unidades de área se representará como la suma de dos cuadrados cuyos lados son entre sí como 1 es a $\frac{3}{4}$". Resuelve los lados resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

11.6 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Grafique la ecuación: y = 3x + 2 (págs. 56 y 67)
2. Grafique la ecuación: y + 4 = x2 (págs. 690 y 693)
3. Grafique la ecuación: y2 = x2 - 1 (págs. 709 y 716)
4. Grafique la ecuación: x2 + 4y2 = 4 (págs. 699 a 703)

Desarrollo de habilidades

En los problemas 5 a 24, represente gráficamente cada ecuación del sistema. Luego resuelve el sistema para encontrar los puntos de intersección.

5. b y = x2 + 1
   y = 2x + 1

6. b y = x2 + 1
   y = 1

7. b y = 2x + 1
   y = x2

8. b y = 3x
   y = x2

9. b y = 1 - x
   y = x2

10. b y = 1 - x
    y = x2

11. b y = x2 + 6x + 9
    y = 3x - 5

12. b x = 2y2 - 2y
    x2 + y2 = 4

13. b x2 + y2 = 8
    x2 + 2x + y2 = 0

14. b x2 + y2 + 4y = 0
    xy = 4

15. b x2 + y2 = 5
    y = x2 + 1

16. b x2 + y2 = 20
    y = x2 + 2

17. b x2 - y2 = 16
    x2 + y2 = 4

18. b x2 - y2 = 4
    y = x2 - 2

19. b xy = 1
    y = x

20. b x2 + y2 = 8
    y = x2 - 6x - 13

21. b y = 2x + 1
    y = x2 + 2x + 1

22. b x2 + y2 = 4
    y = x2 - 2

23. b x2 + y2 = 16
    y = x2 - 6

24. b x2 + y2 = 8
    y = x2 + 6x + 8

En los problemas 25 a 54, resuelva cada sistema. Utilice cualquier método que desee.

25. b x2 + y2 = 1
    y = 3x + 2

26. b 2x2 + y2 = 18
    x + y + 1 = 0

27. b x2 - 4y2 = 16
    x2 = 4y + 16

28. e 3x2 + y2 = 4
    x2 + 2y2 = 6

29. b x2 + y2 + 6y - x = - 5
    9x2 - 8xy + 4y2 = 70

30. b 2x2 - xy + y2 = 8
    xy = 4

31. b 2y2 - 3xy + 6y = 0
    2x - 3y + 6 = 0

32. e 3x2 - 2xy + 2y2 = 10
    3x + 2y = 10

33. b 3x2 - 2xy + y2 = 20
    x2 + 2y2 = 36

34. b x2 - 4y2 + 3x = 0
    x2 + y2 = 6

35. b x2 - 3xy + 2y2 + 5 = 0
    x2 + 2y2 = 8

36. b 7x2 - 3y2 + 3x = 0
    x2 + 4 = 2y2

37. b 3xy + 7y2 = 6
    + 13y2 + 36 = 0

38. b x2 + 2xy + 2y2 = 1
    x2 + 2xy - 3y2 = 0

39. b x2 - 3y2 + 3x = 0
    x2 + 4 = 2y2

40. b 2x2 - 2y2 + 3 = 0
    4x2 + 3y2 = - 3

41. b 2x2 - y2 = 8
    = 16

42. b 2x2 + 3y2 = 24
    4x2 - y2 = 24

Machine Translated by Google

43. $\frac{3}{x^2} - \frac{3}{y^2} + 1 = 0$
$\frac{6}{x^2} - \frac{7}{y^2} + 2 = 0$

44. $\frac{2}{x^2} - \frac{2}{y^2} + 3 = 0$
$\frac{3}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 7$

45. $\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} = 1$
$\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = 4$

46. $\frac{6}{x^4} + \frac{6}{y^4} = 6$
$\frac{2}{x^4} - \frac{2}{y^4} = 19$

47. b x2 - 3xy + 2y2 = 6

48. b x2 - xy + 2y2 = 0

49. c y2 + y + x2 - x - 2 = 0
$\frac{x - 2}{y + 1} = 0$

50. c x3 - 2x2 + y2 + 3y - 4 = 0
$x - 2 + \frac{y2 - y}{x2} = 0$

51. b $\log_x 2y = 2$
$\log_{x2} y = 3$

52. b $\log_x y + \log_y x = 5$

53. b $\log_2 x = 3 + 2 \log_2 y$

54. b $\log_3 x = 2 + 2 \log_3 y$

55. Grafica las ecuaciones dadas en el Ejemplo 4.

56. Grafique las ecuaciones dadas en el problema 49.

En los problemas 57 a 64, utilice una utilidad gráfica para resolver cada sistema de ecuaciones. Exprese la(s) solución(es) redondeada(s) a dos decimales.

57. b y = x3 > 2

58. b y = x2 > 3

59. b x3 + y2 = 4

60. b x2 + y3 = 4

61. b x4 + y4 = 1

62. b x4 + y2 = 2

63. b x2 + y2 = ln x

64. b x = ln x

Práctica mixta En los problemas 65 a 70, grafique cada ecuación y encuentre los puntos de intersección, si los hay.

65. La recta x + 2y + 6 = 0 y el círculo $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

66. La recta x + 2y = 0 y el círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

67. El círculo $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ y la parábola y2 - 2y - x - 5 = 0

68. El círculo $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ y la parábola y2 + 4y - x + 1 = 0

69. $y = x + \frac{4}{x}$ y el círculo x2 + 4x + y2 - 4 = 0

70. $y = x - \frac{4}{3}$ y el circulo x2 - 6x + y2 + 1 = 0

Aplicaciones y extensiones

71. La diferencia de dos números es 2 y la suma de sus cuadrados es 74. Encuentra los números.

72. La suma de dos números es 7 y la diferencia de sus cuadrados es 21. Encuentra los números.

73. El producto de dos números es 16 y la suma de sus cuadrados es 32. Encuentra los números.

74. El producto de dos números es 10 y la diferencia de sus cuadrados es 21. Encuentra los números.

75. La diferencia de dos números es igual a su producto y la suma de sus recíprocos es - 15. Encuentra los números.

76. La suma de dos números es igual a su producto y la diferencia de sus recíprocos es 3. Encuentra los números.

77. La relación entre a y b es $\frac{4}{7}$. La suma de a y b es 44. ¿Cuál es el relación de a + b a b - a?

78. La proporción de a a b es 4:3. La suma de a y b es 14. ¿Cuál es el relación de a - b a a + b?

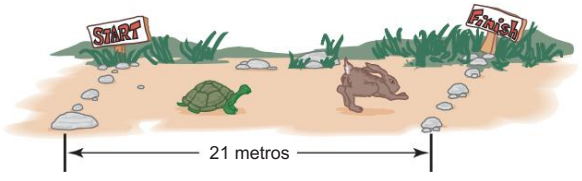
79. Geometría Un área de 52 pies cuadrados debe estar rodeada por dos cuadrados cuyos lados tienen una proporción de 2:3. Encuentra los lados de los cuadrados.

80. Geometría El perímetro de un rectángulo es de 22 pulgadas y su área es de 28 pulgadas cuadradas. ¿Cuales son sus dimensiones?

81. Geometría La altura de un triángulo isósceles trazado hasta su base es de 3 centímetros y su perímetro es de 18 centímetros. Encuentra la longitud de su base.

82. Geometría Dos círculos tienen circunferencias que suman 24p centímetros y áreas que suman 74p centímetros cuadrados. Encuentra el radio de cada círculo.

83. La tortuga y la liebre En una carrera de 18 metros entre un tortuga y una liebre, la tortuga sale 23 minutos antes que la liebre. La liebre, al correr a una velocidad media de 0,5 metros por hora más rápido que la tortuga, cruza la línea de meta 1 minuto antes que la tortuga. ¿Cuáles son las velocidades promedio de la tortuga y la liebre?

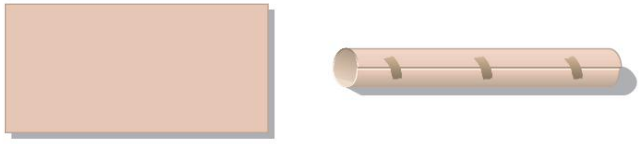


84. Correr una carrera En una carrera de 1 milla, el ganador cruza la línea de meta 10 pies por delante del corredor en segundo lugar y 20 pies por delante del corredor en tercer lugar. Suponiendo que cada corredor mantiene una velocidad constante durante toda la carrera, ¿en cuántos pies gana el corredor en segundo lugar al corredor en tercer lugar?

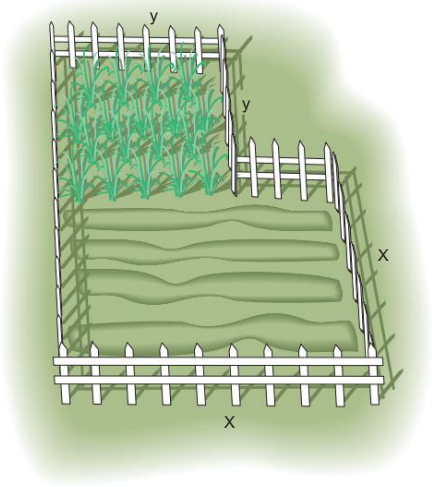
Machine Translated by Google

85. Construir una caja Una pieza rectangular de cartón, cuyo área es de 209 centímetros cuadrados, se convierte en una caja abierta cortando un cuadrado de 2 centímetros de cada esquina y girando por los lados. Si la caja debe tener un volumen de 210 litros centímetros, ¿con qué tamaño de cartón deberías empezar?

86. Construcción de un tubo cilíndrico Una pieza rectangular de Se fabrica cartón cuya superficie es de 216 centímetros cuadrados. en un tubo cilíndrico uniendo dos lados del rectángulo. Ver la figura. Si el tubo debe tener un volumen de 224 centímetros cúbicos, ¿qué tamaño de cartón debes ¿Empezar con?

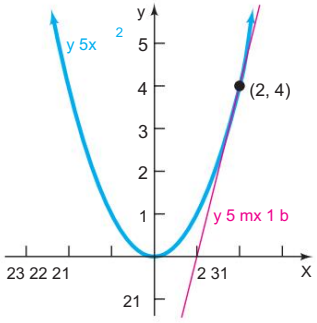


87. Cercado Un granjero tiene 100 pies de cerca disponible para cercar una región de 500 pies cuadrados en forma de cuadrados contiguos, con lados de longitud x e y. El cuadrado grande tiene lados de longitud x y el cuadrado pequeño tiene lados de longitud y. Encuentra x e y.



88. Doblar alambre Un alambre de 60 pies de largo se corta en dos pedazos. Lo es posible doblar una pieza en forma de cuadrado y la otra en forma de círculo para que el área total encerrada por las dos piezas son 100 pies cuadrados? Si esto es posible, busque la longitud del lado del cuadrado y el radio del círculo.

89. Método de raíces iguales de Descartes Método de Descartes para encontrar rectas tangentes depende de la idea de que, para muchos gráficas, la recta tangente en un punto dado es la única recta que cruza la gráfica solo en ese punto. Usamos su método para encontrar una ecuación de la recta tangente a la parábola y = x2 en el punto 12, 42. Ver la figura.



Primero, una ecuación de la recta tangente se puede escribir como y = mx + b. Usando el hecho de que el punto 12, 42 está en la recta, podemos resolver b en términos de my obtener la ecuación y = mx + 14 - 2m2. Ahora queremos que 12, 42 sea el único. solución al sistema

$$b \quad y = mx + 4 - 2m$$

De este sistema obtenemos x2 - mx + 12m - 42 = 0. Usando la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x = \frac{m \{ \sqrt{2m^2 - 412m - 42}}{2}$$

Para obtener una solución única para x, las dos raíces deben ser iguales; en otras palabras, el discriminante m2 - 412m - 42 debe ser 0. Completa el trabajo para obtener m y escribe una ecuación de la recta tangente.

En los problemas 90 a 96, utilice el método de Descartes del problema 89 para encontrar una ecuación de la recta tangente a cada gráfica en el punto dado.

90. x2 + y2 = 10; a las 11, 32

91. x2 + y = 5; en 1 - 2, 12

92. y = x2 + 2; a las 11, 32

93. 3x2 + y2 = 7; en 1 - 1, 22

94. 2x2 + 3y2 = 14; a las 11, 22

95. 2y2 - x2 = 14; a las 12, 32

96. x2 - y2 = 3; a las 12, 12

97. Si r1 y r2 son dos soluciones de una ecuación cuadrática ax2 + bx + c = 0, se puede demostrar que

$$r1 + r2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad r1r2 = \frac{c}{a}$$

Resuelva este sistema de ecuaciones para r1 y r2 .

Machine Translated by Google

98. Problema de desafío Resuelva para x e y en términos de a · 0 y b · 0:

$$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2} = \frac{a2 + b2}{a2\ b2}$$

$$\mu \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{a + b}{ab}$$

99. Problema de desafío Geometría Encuentra fórmulas para la base b y uno de los lados iguales l de un triángulo isósceles en términos de su altitud h y perímetro P.

100. Problema de desafío Geometría Encuentra fórmulas para la longitud l y el ancho w de un rectángulo en términos de su área A y perímetro P.

Explicar conceptos: discusión y escritura

101. Un círculo y una recta se cortan como máximo dos veces. Un círculo y una parábola se cortan como máximo cuatro veces. Deduce que una circunferencia y la gráfica de un polinomio de grado 3 se cortan como máximo seis veces. ¿Qué conjeturas sobre un polinomio de grado 4? ¿Qué pasa con un polinomio de grado n? ¿Puedes explicar tus conclusiones usando un argumento algebraico?

102. Suponga que es el gerente de un taller de chapa. Un cliente le pide que fabrique 10.000 cajas, cada una de las cuales está abierta en la parte superior. Se requiere que las cajas tengan un cuadrado. base y una capacidad de 9 pies cúbicos. Las cajas se construyen recortando un cuadrado de cada esquina de una pieza cuadrada de chapa de metal y doblándolas a lo largo de los bordes.

(a) Encuentre las dimensiones del cuadrado que se va a cortar si el área de la pieza cuadrada de chapa de metal es de 100 pies cuadrados.

(b) ¿Podrías hacer la caja usando una pieza más pequeña de lámina de metal? Haga una lista de las dimensiones de la caja para varias piezas de chapa.

Conserve su conocimiento

Los problemas 103 a 112 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

103. Resuelve: 7x2 = 8 - 6x

104. Encuentra una ecuación de la recta con pendiente $-\frac{2}{5}$ que contiene el punto 110, - 72.

105. Si cot u = y $\frac{24}{7}$ cos u 6 0, encuentre el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas restantes.

106. Hallar la pendiente de un sendero de montaña Un sendero recto con inclinación uniforme conduce desde un hotel, con una elevación de 5300 pies, hasta un lago en el valle, con una elevación de 4100 pies. La longitud del sendero es de 4420 pies. ¿Cuál es la inclinación (grado) del sendero?

107. Encuentra una ecuación del círculo con centro en 1 - 3, 42 y radio 10.

108. Resuelve: x2 6 4x + 21

109. Encuentre la función que finalmente se representa gráficamente después de que y = 225 - x2 se refleja alrededor del eje x y se desplaza 4 unidades hacia la derecha.

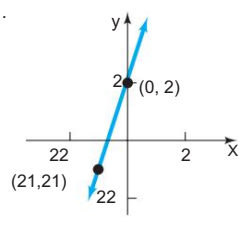
110. Si f1x2 = 2x2 - 8x + 7, encuentre f1x - 32.

111. Encuentra el cociente de diferencias de $f1x2 = \frac{3x}{x - 8}$. Simplifica la respuesta.

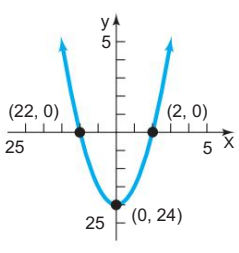
112. Simplifica: $\frac{12x - 52^{9} \# 3 - 3x \# 912x - 52^{8 \# 2}}{3\ 12x - 52^{9}{}_{4}{}^{2}}$

'¿Estas preparado?' Respuestas

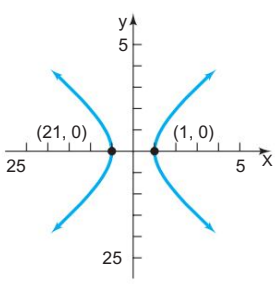
1.



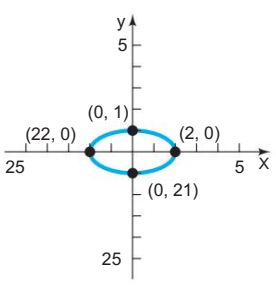
2.



3.



4.



Machine Translated by Google

11.7 Sistemas de desigualdades

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Resolver desigualdades lineales (Sección A.9, págs. A76–A77)
- Líneas (Sección 1.3, págs. 56–67)
- Círculos (Sección 1.4, págs. 71–75)
- Resolver desigualdades que involucran funciones cuadráticas (Sección 3.5, págs. 201–203)
- Funciones cuadráticas y sus propiedades (Sección 3.3, págs. 179–188)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 835.

OBJETIVOS 1 Graficar una desigualdad (p. 830)
2 Graficar un sistema de desigualdades (p. 832)

La sección A.9 analiza las desigualdades en una variable. Esta sección analiza las desigualdades en dos variables.

EJEMPLO 1 Ejemplos de desigualdades en dos variables

(a) 3x + y ... 6 (b) x2 + y2 6 4 (c) y2 7x

1 Graficar una desigualdad

Una desigualdad en dos variables x e y se satisface con un par ordenado 1a, b2 si, cuando x se reemplaza por a y y por b, resulta una afirmación verdadera. La gráfica de una desigualdad en dos variables x e y consta de todos los puntos 1x, y2 cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad.

EJEMPLO 2 Graficar una desigualdad

Grafique la desigualdad lineal: 3x + y … 6

Solución Comience graficando la ecuación.

$$3x + y = 6$$

formado reemplazando (por ahora) el símbolo... con un signo =. La gráfica de la ecuación es una recta. Consulte la Figura 12(a). Esta línea es parte de la gráfica de la desigualdad porque la desigualdad no es estricta, por lo que la línea se dibuja como una línea continua. (¿Ves por qué? Estamos buscando puntos para los cuales 3x + y sea menor o igual a 6.)

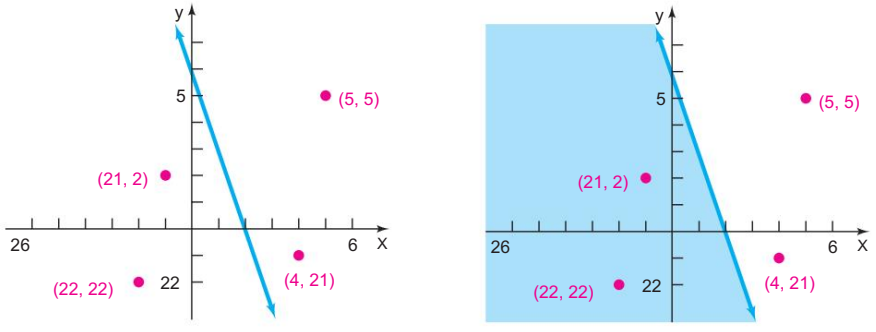


Figura 12 (a) 3x 1 y 5 6 (b) Gráfica de 3x 1 y # 6

Ahora prueba algunos puntos seleccionados al azar para ver si pertenecen a la gráfica de la desigualdad.

Machine Translated by Google

	3x · y " 6 3 # 4	Conclusión
14, - 12	+ 1 - 12 = 11 7 6	No pertenece al gráfico.
15, 52	3 # 5 + 5 = 20 7 6	No pertenece al gráfico.
1 - 1, 22	31 - 12 + 2 = - 1 ... 6 31 -	pertenece al grafico
1 - 2, - 22	22 + 1 - 22 = - 8 ... 6	pertenece al grafico

Mire nuevamente la Figura 12(a). Observa que los dos puntos que pertenecen a la gráfica se encuentran en el mismo lado de la recta y los dos puntos que no pertenecen a la gráfica se encuentran en el lado opuesto. Resulta que todos los puntos que satisfacen la desigualdad estarán a un lado de la recta o en la recta misma. Todos los puntos que no satisfacen la desigualdad quedarán del otro lado. La gráfica de 3x + y ... 6 consta de todos los puntos que se encuentran en la recta o en el mismo lado de la recta que 1 - 1, 22 y 1 - 2, - 22. Esta gráfica se muestra como la región sombreada en la Figura 12. (b).

Ahora resuelve el problema 1 5

La gráfica de cualquier desigualdad en dos variables se puede obtener de manera similar. Los pasos a seguir se dan a continuación.

RECUERDE Las desigualdades estrictas son 6 y 7. Las desigualdades no estrictas son... y Ú · j

Pasos para graficar una desigualdad

Paso 1: Reemplaza el símbolo de desigualdad por un signo igual y grafica la ecuación resultante. Si la desigualdad es estricta, utilice guiones; si no es estricto, utilice una marca sólida. Este gráfico separa el plano xy en dos o más regiones.

Paso 2: En cada región, seleccione un punto de prueba P.

- Si las coordenadas de P satisfacen la desigualdad, también lo hacen todos los puntos en esa región. Indique esto sombreando la región.
- Si las coordenadas de P no satisfacen la desigualdad, no hay punto en esa región satisface la desigualdad.

EJEMPLO 3 Graficar una desigualdad

Gráfica: x2 + y2 … 4

Solución

Paso 1: Grafica la ecuación x2 + y2 = 4, un círculo de radio 2, con centro en el origen. Se utiliza un círculo sólido porque la desigualdad no es estricta.

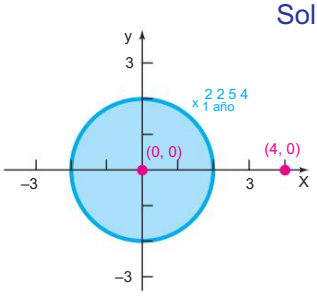


Figura 13 x2 + y2 … 4

Paso 2: Utilice dos puntos de prueba, uno dentro del círculo y el otro fuera.

Adentro	10, 02: x2 + y2 = 02 + 02 = 0 … 4 Pertenece a la gráfica
Afuera	14, 02: x2 + y2 = 42 + 02 = 16 7 4 No pertenece a la gráfica

Todos los puntos dentro y sobre el círculo satisfacen la desigualdad. Ver Figura 13.

Ahora resuelve el problema 1 7

Desigualdades lineales

Una desigualdad lineal es una desigualdad en una de las formas

Ax + Por 6 C Ax + Por 7 C Ax + Por … C Ax + Por Ú C

donde A y B no son ambos cero.

La gráfica de la ecuación correspondiente de una desigualdad lineal es una recta que separa el plano xy en dos regiones llamadas semiplanos. Ver Figura 14.

Como se muestra, Ax + By = C es la ecuación de la línea límite y divide el plano en dos semiplanos: uno para el cual Ax + By 6 C y el otro para el cual Ax + By 7 C. Debido a esto, para desigualdades lineales, solo se requiere un punto de prueba.

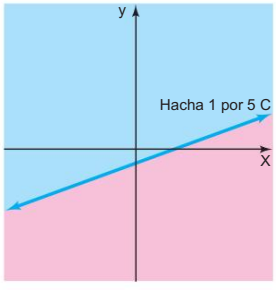


Figura 14

Machine Translated by Google

EJEMPLO 4 Graficar desigualdades lineales

Gráfica: (a) y 6 2 (b) y Ú 2x

Solución

(a) Puntos en la línea horizontal y = 2 no son parte de la gráfica de la desigualdad, por lo que la gráfica se muestra como una línea discontinua. Dado que 10, 02 satisface la desigualdad, la gráfica consta del semiplano debajo de la recta y = 2. Ver Figura 15.

(b) Los puntos en la recta y = 2x son parte de la gráfica de la desigualdad, por lo que la gráfica se muestra como una línea continua. Utilice 13, 02 como punto de prueba. No satisface la desigualdad 30 6 2 # 34 . Los puntos en el semiplano opuesto al lado que contiene 13, 02 satisfacen la desigualdad. Ver Figura 16.

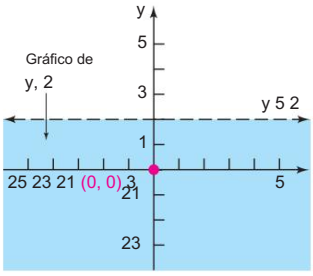


Figura 15 y 6 2

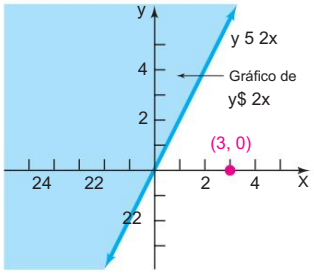


Figura 16 y Ú 2x

COMENTARIO Se puede utilizar una utilidad gráfica para representar gráficamente desigualdades. Para ver cómo, lea la Sección B.6. ■

Ahora resuelve el problema 1 3

2 Graficar un sistema de desigualdades

La gráfica de un sistema de desigualdades en dos variables x e y es el conjunto de todos los puntos 1x, y2 que satisfacen simultáneamente cada desigualdad del sistema. La gráfica de un sistema de desigualdades se puede obtener graficando cada desigualdad individualmente y luego determinando dónde se cruzan, si es que se cruzan.

EJEMPLO 5 Graficar un sistema de desigualdades lineales

Grafique el sistema: b x + y Ú 2 2x - y … 4

Solución

Comienza graficando las rectas x + y = 2 y 2x - y = 4 usando una recta continua, ya que ambas desigualdades no son estrictas. Utilice el punto de prueba 10, 02 en cada desigualdad. Por ejemplo, 10, 02 no satisface x + y Ú 2, por lo tanto sombree sobre la línea x + y = 2. Consulte la Figura 17(a). Pero 10, 02 satisface 2x - y ... 4, por lo que sombrea encima de la línea 2x - y = 4. Véase la Figura 17(b). La intersección de las regiones sombreadas (en violeta) da el resultado presentado en la Figura 17(c).

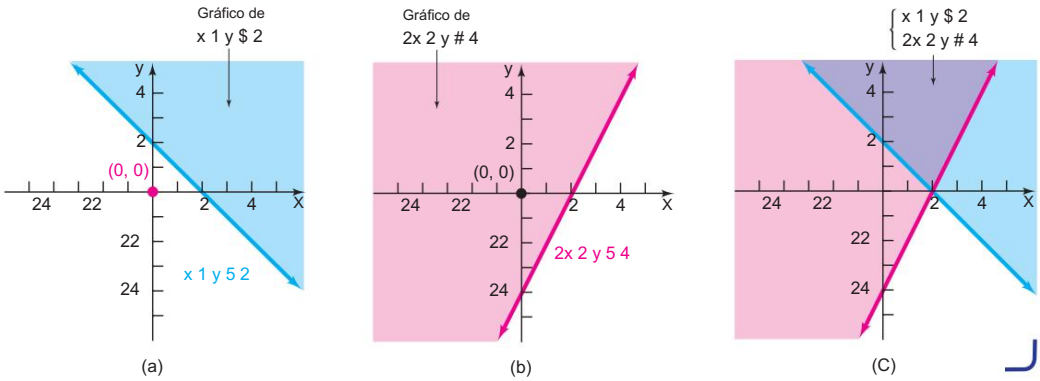


Figura 17

Ahora resuelve el problema 2 3

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 Graficar un sistema de desigualdades lineales

Grafique el sistema: bxx+yyÚ.0. 2

Solución Consulte la Figura 18. La región sombreada de color púrpura superpuesta entre las dos líneas límite es la gráfica del sistema.

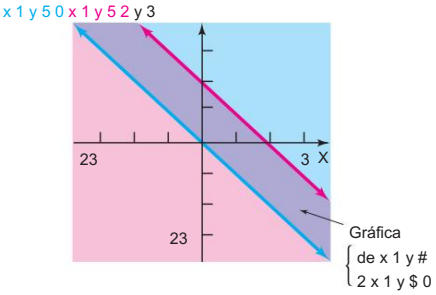


Figura 18

Ahora trabaja el problema 2 9

EJEMPLO 7 Graficar un sistema de desigualdades lineales

Grafique los sistemas:

(a) e 2xx--yy ÚÚ 02 (b) e xx+-2yy úú.62

Solución

(a) Consulte la Figura 19. La región sombreada de color púrpura superpuesta es la gráfica del sistema. Tenga en cuenta que la gráfica del sistema es idéntica a la gráfica de la desigualdad única 2x - y Ú 2.

(b) Véase la Figura 20. Aquí, como no se produce ninguna región superpuesta, no hay puntos en el plano xy que satisfagan simultáneamente cada desigualdad. El sistema no tiene solución.

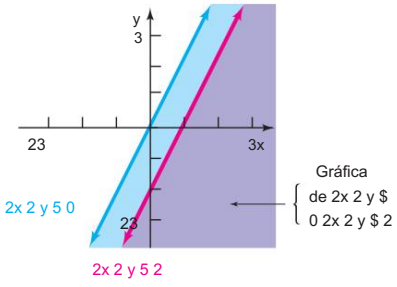


Figura 19

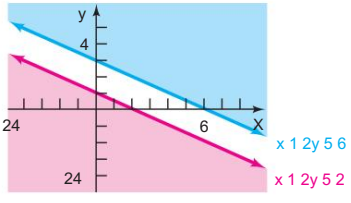


Figura 20

EJEMPLO 8 Graficar un sistema de desigualdades no lineales

Grafique la región debajo de la gráfica de x + y = 2 y arriba de la gráfica de y = x2 - 4 graficando el sistema

y Ú x2 - 4 x

b+ y … 2

Etiqueta todos los puntos de intersección.

Solución La Figura 21 en la página siguiente muestra la gráfica de la región arriba de la gráfica de la parábola y = x2 - 4 y debajo de la gráfica de la recta x + y = 2. Los puntos de intersección se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones

y = x2 - 4

bx + y = 2

(continuado)

Machine Translated by Google

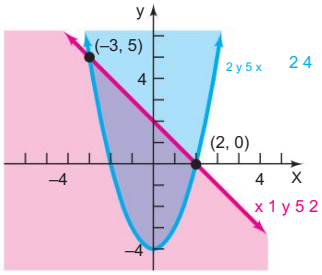


Figura 21

Utilice la sustitución para encontrar

$$x + 1x2 - 42 = 2$$
$$x2 + x - 6 = 0$$
$$1x + 32\ 1x - 22 = 0$$
$$x = -3 \text{ o } x = 2$$

Los dos puntos de intersección son 1 - 3, 52 y 12, 02.

Ahora resuelve el problema 3 7

EJEMPLO 9 Graficar un sistema de cuatro desigualdades lineales

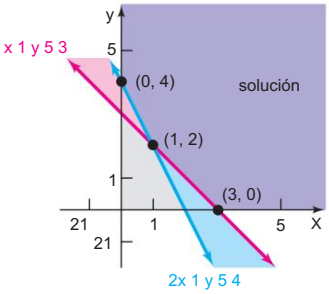


Figura 22

$$2x + y \text{ Ú } 4$$
$$x \text{ Ú } 0$$

Grafique el sistema: d x +yyÚÚ03

Solución Vea la Figura 22. Las dos desigualdades x Ú 0 e y Ú 0 requieren que la gráfica del sistema esté en el cuadrante I. Concéntrese en las dos desigualdades restantes.
La intersección de las gráficas de estas dos desigualdades y el cuadrante I se muestra en violeta oscuro.

EJEMPLO 10 Planificacion Financiera

Una pareja de jubilados puede invertir hasta 25.000 dólares. Como su asesor financiero, usted recomienda que coloquen al menos $15 000 en letras del Tesoro con un rendimiento del 2% y como máximo $5000 en bonos corporativos con un rendimiento del 3%.

(a) Usando x para denotar la cantidad de dinero invertida en letras del Tesoro e y para denotar la cantidad invertida en bonos corporativos, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa los posibles montos de cada inversión. Suponga que xey están en miles de dólares .

(b) Grafique el sistema.

Solución (a) El sistema de desigualdades lineales es

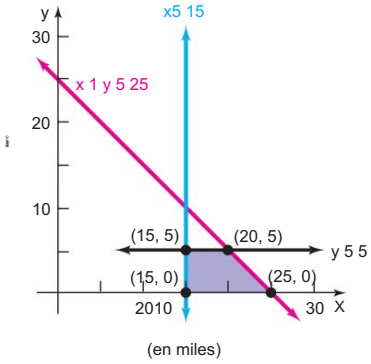


Figura 23

y Ú 0	xey son variables no negativas ya que representan dinero invertido, en miles de dólares .
x + y … 25	El total de las dos inversiones, x + y, no puede exceder los $25 000.
x Ú 15	Al menos 15.000 dólares en letras del Tesoro
e x Ú 0y … 5	Como máximo $5000 en bonos corporativos

(b) Véase la región sombreada en la Figura 23. Tenga en cuenta que las desigualdades x Ú 0 e y Ú 0 Requiere que la gráfica del sistema esté en el cuadrante I.

La gráfica del sistema de desigualdades lineales de la Figura 23 está acotada porque puede estar contenida dentro de algún círculo de radio suficientemente grande. Un gráfico que no puede estar contenido en ningún círculo es ilimitado. Por ejemplo, la gráfica del sistema de desigualdades lineales de la Figura 22 no está acotada, ya que se extiende indefinidamente en las direcciones x e y positivas .

Observe en las Figuras 22 y 23 que se han trazado aquellos puntos que pertenecen al gráfico y que también son puntos de intersección de las líneas límite. Estos puntos se denominan vértices o puntos de esquina del gráfico. El sistema graficado en la Figura 22 tiene tres

Machine Translated by Google

puntos de esquina: 10, 42, 11, 22 y 13, 02. El sistema graficado en la Figura 23 tiene cuatro puntos de esquina: 115, 02, 125, 02, 120, 52 y 115, 52.

Estas ideas se utilizan en la siguiente sección para desarrollar un método para resolver problemas lineales. Problemas de programación, una aplicación importante de las desigualdades lineales.

Ahora resuelve el problema 4 5

11.7 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Resuelve la desigualdad: 3x + 4 6 8 - x (págs. A76–A77)
2. Grafica la ecuación: 3x - 2y = 6 (págs. 63 y 64)
3. Grafica la ecuación: x2 + y2 = 9 (págs. 71 a 75)
4. Grafique la ecuación: y = x2 + 4 (págs. 180 y 185)
5. Verdadero o Falso Las líneas 2x + y = 4 y 4x + 2y = 0 son paralelo. (págs. 64 y 65)
6. Resuelve la desigualdad: x2 - 4 … 5 (págs. 201 y 203)

Conceptos y vocabulario

7. Al graficar una desigualdad en dos variables, use _____ si la desigualdad es estricta; si la desigualdad no es estricta, use una marca. _____
8. La gráfica de una ecuación lineal es una recta que separa el plano xy en dos regiones llamadas _____.
9. Verdadero o Falso La gráfica de un sistema de desigualdades debe tener una región superpuesta.
10. Elección múltiple Si la gráfica de un sistema de desigualdades no puede estar contenida en ningún círculo, entonces la gráfica es: (a) acotada (b) no acotada (c) descompuesta (d) compuesta

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 22, grafica cada desigualdad.

11. y Ú 0
12. x Ú 0
13. x Ú 4
14. y … 2
15. 2x + y Ú 6
16. 3x + 2y … 6
17. x2 + y2 7 1
18. x2 + y2 … 9
19. y 7 x2 + 2
20. y ... x2 - 1
21. xy … 1
22. xy Ú 4

En los problemas 23 a 34, represente gráficamente cada sistema de desigualdades lineales.

23. b x2x + y.Ú 24 7.
24. b 3xx + y Ú 26 28.2
25. b 4x - 5yÚ.20 29.
26. b 2x + 2y Ú 36 b x
b 4x - y Ú 223 1Ú 2x -
2x - 3y3x + 2y b.26
b x - 2y2x - 6y3Ú.0 b 2x
+ 4y ..x 8 + 4y.Ú 42x
4y … 4x - 4y Ú 0
+ y Ú -22x + y Ú 2
+ y Ú 02x + y Ú 2
+ 3y Ú 2x + 3y … 0

En los problemas 35 a 42, represente gráficamente cada sistema de desigualdades. x2 + y2 Ú 9

35. mi x + y … 3
36. b x2 + y2 Ú 3. 9
37. poyy. Ú x2 - 24
38. b y2Ú x x
39. b x2 .+ y2 -.525
40. b x2 + y2 Ú -46
41. poyy Ú + x2 - .11
42. b xyÚ Ú x2 + 1

En los problemas 43 a 52, represente gráficamente cada sistema de desigualdades lineales. Indique si la gráfica es acotada o no y etiquete los puntos de las esquinas.

43. x Ú 0
y Ú 0
x + y Ú 4 2x
+ 3y Ú 6

44. x Ú 0
y Ú 0
2x + y … 6 x +
2y … 6

45. x Ú 0
y Ú 0
x + y Ú 2 2x
+ y Ú 4

46. x Ú 0
y Ú 0
3x + y … 6
2x + y … 2

47. x Ú 0
y Ú 0 x
+ y Ú 1 x + y
… 7 2x + y …
Delaware 10

48. x Ú 0
y Ú 0 x
+ y Ú 2 2x + 3y
… 12
Delaware 3x + y … 12

49. x Ú 0
y Ú 0
x + y Ú 2
x + y … 8
Delaware x + 2y Ú 1

50. x Ú 0
y Ú 0 x
+ y Ú 2 x + y
… 8 2x + y …
Delaware 10

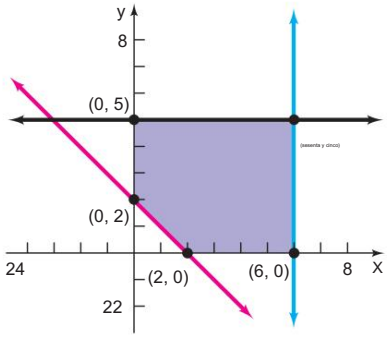
Machine Translated by Google

51.
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 1 \\ x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$$

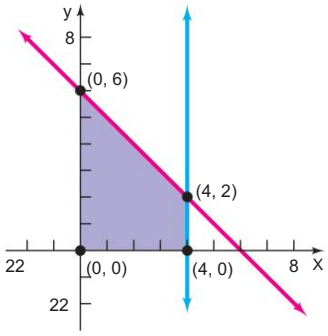
52.
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 1 \\ x + 2y \leq 10 \end{cases}$$

En los problemas 53 a 56, escribe un sistema de desigualdades lineales para la gráfica dada.

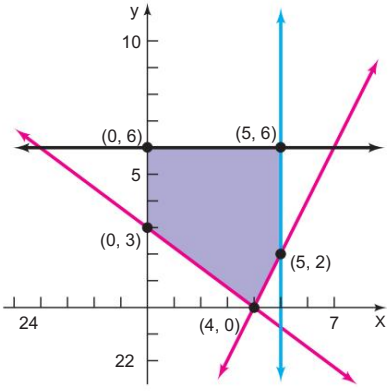
53.



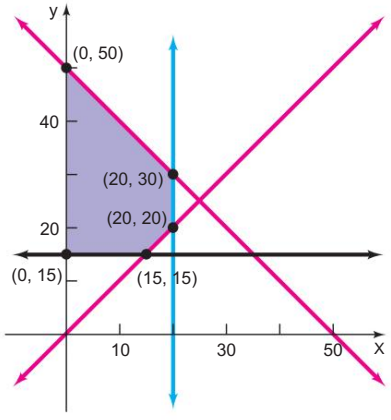
54.



55.



56.



Aplicaciones y extensiones

57. Planificación financiera Una pareja de jubilados tiene hasta $50 000 para invertir. Como su asesor financiero, usted recomienda que coloquen al menos $35 000 en letras del Tesoro con un rendimiento del 1% y como máximo $10 000 en bonos corporativos con un rendimiento del 3%.

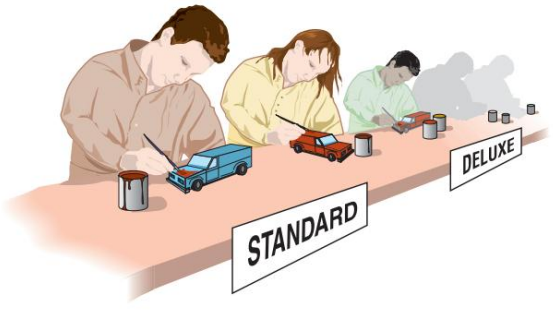
(a) Usando x para denotar la cantidad de dinero invertida en letras del Tesoro e y para denotar la cantidad invertida en bonos corporativos, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa los posibles montos de cada inversión.

(b) Grafique el sistema y etiquete los puntos de las esquinas.

58. Fabricación de camiones Mike's Toy Truck Company fabrica dos modelos de camiones de juguete, un modelo estándar y un modelo de lujo. Cada modelo estándar requiere 2 horas (h) de pintura y 3 h de trabajo de detalle; cada modelo de lujo requiere 3 h para pintar y 4 h para trabajos de detalle. La empresa emplea a dos pintores y tres trabajadores de detalle, y cada uno trabaja 40 h por semana.

(a) Usando x para denotar el número de camiones modelo estándar e y para denotar el número de camiones modelo de lujo, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa los números posibles de cada modelo de camión que se puede fabricar en una semana.

(b) Grafique el sistema y etiquete los puntos de las esquinas.



59. Mezcla de café Bill's Coffee House, una tienda que se especializa en café, tiene disponibles 75 libras (lb) de café grado A y 120 lb de café grado B. Estos se mezclarán en paquetes de 1 libra de la siguiente manera: una mezcla económica que contiene 4 onzas (oz) de A café de grado A y 12 oz de café de grado B , y una mezcla superior que contiene 8 oz de café de grado A y 8 oz de café de grado B.

(a) Usando x para denotar el número de paquetes de la combinación económica e y para denotar el número de paquetes de la combinación superior, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa los posibles números de paquetes de cada tipo de combinación.

(b) Grafique el sistema y etiquete los puntos de las esquinas.

Machine Translated by Google

60. Mixed Nuts Nola's Nuts, una tienda que se especializa en vender nueces, tiene disponibles 90 libras (lb) de anacardos y 120 lb de maní. Estos deben mezclarse en paquetes de 12 onzas (oz) de la siguiente manera: un paquete de menor precio que contiene 8 oz de maní y 4 oz de anacardos, y un paquete de calidad que contiene 6 oz de maní y 6 oz de anacardos.

(a) Utilice x para indicar el número de paquetes de menor precio y utilice y para indicar el número de paquetes de calidad.
Escribe un sistema de desigualdades lineales que describa los números posibles de cada tipo de paquete.

(b) Grafique el sistema y etiquete los puntos de las esquinas.

61. Transporte de mercancías Un camión pequeño no puede transportar más de 1600 libras (lb) de carga y no más de 150 litros cúbicos. pies 1 pie 3 2 de carga. Una impresora pesa 20 lb y ocupa 3 pies3 del espacio. Un horno microondas pesa 30 lb y ocupa 2 pies3 del espacio.

(a) Usando x para representar el número de hornos microondas e y para representar el número de impresoras, escriba un sistema de desigualdades lineales que describa el número de hornos e impresoras que puede transportar el camión.

(b) Grafique el sistema y etiquete los puntos de las esquinas.

62. Problema de desafío Grafique el sistema de desigualdades.

mi··yx·· .+. · ·x2 ~ 34

Conserve su conocimiento

Los problemas 63 a 72 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

63. Resuelve 21x + 12 ^{2} + 8 = 0 en el sistema de números complejos.

64. Escribe la ecuación polar 3r = sen u como una ecuación en coordenadas rectangulares. Identifica la ecuación y graficala.

65. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que f1x2 = 6x2 + 5x - 6 tiene un cero real en el intervalo 3 - 1, 24.

66. Resuelve la ecuación 2 cos2 u - cos u - 1 = 0 para 0 … u 6 2p.

67. Resuelve: x - 2… - 4x + 3… x + 18

68. Si se invierten $7500 en una cuenta que paga 3.25% de interés compuesto diario, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después? ¿5 años?

69. Los caballos de fuerza P necesarios para impulsar un bote a través del agua son directamente proporcionales al cubo de la velocidad s del bote. si un barco necesita 150 caballos de fuerza para viajar a 12 millas por hora, ¿qué caballos de fuerza se necesitan para viajar a 6 millas por hora?

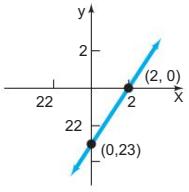
70. Cambie y = log5 x a una declaración equivalente que involucre un exponente.

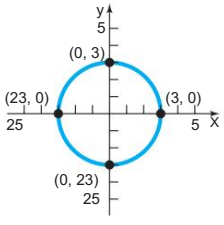
71. Dado f1x2 = x - 5 $\frac{2}{\quad}$ y g1x2 = 2x + 2, encuentre el dominio de 1f g2 1x2.

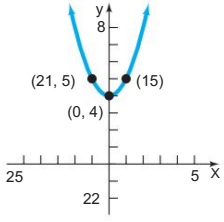
72. Considere las funciones f1x2 = x3 - 7x2 - 5x + 4 y f ′1x2 = 3x2 - 14x - 5. Dado que f es creciente donde f ′1x2 7 0 y f es decreciente donde f ′1x2 6 0, encuentre dónde f aumenta y dónde f disminuye.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 5x· x 6 16 o 1 - q, 12

2. 

3. 

4. 

5. Verdadero

6. 5x 0 - 3 … x … 36 o 3 - 3, 34

11.8 Programación lineal

OBJETIVOS 1 Plantear un problema de programación lineal (p. 838)

2 Resuelva un problema de programación lineal (p. 838)

Históricamente, la programación lineal evolucionó como una técnica para resolver problemas relacionados con la asignación de recursos de bienes y materiales para la Fuerza Aérea de EE. UU. durante la Segunda Guerra Mundial. Hoy en día, las técnicas de programación lineal se utilizan para resolver una amplia variedad de problemas, como la optimización de la programación de las aerolíneas. Aunque la mayoría de los problemas prácticos de programación lineal involucran sistemas de varios cientos de desigualdades lineales que contienen varios cientos de variables, limitamos nuestra discusión a problemas que contienen solo dos variables, porque podemos resolver dichos problemas usando técnicas gráficas.*

*El método simplex es una forma de resolver problemas de programación lineal que involucran muchas desigualdades y variables. Desarrollado por George Dantzig en 1946, es particularmente adecuado para la informatización. En 1984, Narendra Karmarkar de Bell Laboratories descubrió una manera de mejorar el método simplex.

Machine Translated by Google

1 Configurar un problema de programación lineal

Comencemos volviendo al Ejemplo 10 de la Sección 11.7.

EJEMPLO 1 Planificacion Financiera

Una pareja de jubilados tiene hasta 25.000 dólares para invertir. Como su asesor financiero, usted recomienda que coloquen al menos $15 000 en letras del Tesoro con un rendimiento del 2% y como máximo $5000 en bonos corporativos con un rendimiento del 3%. Desarrolle un modelo que pueda usarse para determinar cuánto dinero deben colocar en cada inversión para maximizar los ingresos.

Solución El problema es típico de un problema de programación lineal. El problema requiere que se maximice una determinada función lineal, el ingreso. Si I representa el ingreso, x el monto invertido en letras del Tesoro al 2%, y y el monto invertido en bonos corporativos al 3%, entonces

$$Yo = 0{,}02x + 0{,}03y$$

Supongamos, como antes, que I , xey están en miles de dólares.

La función lineal I = 0,02x + 0,03y se llama función objetivo. Además, el problema requiere que el ingreso máximo se logre bajo ciertas condiciones o restricciones, cada una de las cuales es una desigualdad lineal que involucra las variables. (Vea el ejemplo 10 en la sección 11.7.) El problema de programación lineal se modela como

$$\text{Maximizar } I = 0{,}02x + 0{,}03y$$

sujeto a las limitaciones

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ x + y &\leq 25 \\ x &\geq 15 \\ x \geq 0 \text{ y } &\leq 5 \end{aligned}$$

En general, todo problema de programación lineal tiene dos componentes:

- Una función objetivo lineal que se va a maximizar o minimizar.
- Un conjunto de desigualdades lineales que deben satisfacerse simultáneamente

DEFINICIÓN Problema de programación lineal

Un problema de programación lineal en dos variables x e y consiste en maximizar (o minimizar) una función objetivo lineal

$$z = Ax + Por \text{ A y B son números reales, no ambos 0}$$

sujeto a ciertas restricciones o condiciones, expresables como desigualdades lineales en x e y.

2 Resolver un problema de programación lineal

Para maximizar (o minimizar) la cantidad z = Ax + By, necesitamos identificar los puntos 1x, y2 que hacen que la expresión para z sea la más grande (o más pequeña) posible. Pero no todos los puntos 1x, y2 son elegibles; sólo se pueden utilizar aquellos que también satisfacen cada desigualdad lineal (restricción). Cada punto 1x, y2 que satisface el sistema de desigualdades lineales (las restricciones) es un punto factible. Los problemas de programación lineal buscan el punto factible que maximiza (o minimiza) la función objetivo.

Machine Translated by Google

Mire nuevamente el problema de programación lineal del Ejemplo 1.

EJEMPLO 2

Análisis de un problema de programación lineal

Considere el problema de programación lineal.

$$\text{Maximizar } I = 0{,}02x + 0{,}03y$$

sujeto a las limitaciones

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ x + y &\leq 25 \\ x &\geq 15 \\ \text{e } x &\geq 0 \text{ y } \leq 5 \end{aligned}$$

Grafique las restricciones. Luego grafique la función objetivo para I = 0, 0,3, 0,45, 0,55, y 0,6.

Solución

La Figura 24 muestra el gráfico de las restricciones. Superponemos a esta gráfica la gráfica de la función objetivo para los valores dados de I.

Para I = 0, la función objetivo es la recta 0 = 0,02x + 0,03y.

Para I = 0,3, la función objetivo es la recta 0,3 = 0,02x + 0,03y.

Para I = 0,45, la función objetivo es la recta 0,45 = 0,02x + 0,03y.

Para I = 0,55, la función objetivo es la recta 0,55 = 0,02x + 0,03y.

Para I = 0,6, la función objetivo es la recta 0,6 = 0,02x + 0,03y.

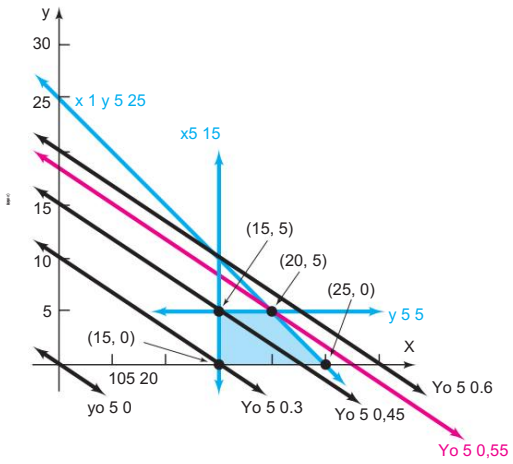


Figura 24

DEFINICIÓN Solución a un problema de programación lineal

Una solución a un problema de programación lineal consiste en un punto factible que maximiza (o minimiza) la función objetivo, junto con el valor correspondiente de la función objetivo.

RECUERDE: La gráfica de un sistema de desigualdades lineales está acotada si puede estar encerrada por un círculo de radio suficientemente grande.

Una condición para que un problema de programación lineal en dos variables tenga solución es que la gráfica de los puntos factibles sea acotada.

Si ninguno de los puntos factibles maximiza (o minimiza) la función objetivo o si no hay puntos factibles, el problema de programación lineal no tiene solución.

Considere el problema de programación lineal planteado en el Ejemplo 2 y observe nuevamente la Figura 24. Los puntos factibles son los puntos que se encuentran en la región sombreada. Por ejemplo, 120, 32 es un punto factible, al igual que 115, 52, 120, 52, 118, 42, etc.

Para encontrar la solución del problema es necesario encontrar un punto factible 1x, y2 que haga que I = 0,02x + 0,03y sea lo más grande posible.

Machine Translated by Google

Observe que a medida que I aumenta en valor de I = 0 a I = 0,3 a I = 0,45 a I = 0,55 a I = 0,6, el resultado es una colección de líneas paralelas. Además, observe que el valor más grande de I que se puede obtener usando puntos factibles es I = 0,55, que corresponde a la recta 0,55 = 0,02x + 0,03y. Cualquier valor mayor de I da como resultado una línea que no pasa por ningún punto factible. Finalmente, observe que el punto factible que produce I = 0,55 es el punto 120, 52, un punto de esquina. Estas observaciones forman la base de los siguientes resultados, que se exponen sin prueba.

TEOREMA Ubicación de la solución de un problema de programación lineal

- Si un problema de programación lineal tiene solución, está ubicada en una esquina punto de la gráfica de los puntos factibles.
- Si un problema de programación lineal tiene múltiples soluciones, al menos una de ellas se ubica en un punto de esquina de la gráfica de los puntos factibles.
- En cualquier caso, el valor correspondiente de la función objetivo es único.

No consideramos problemas de programación lineal que no tengan solución. Como resultado, podemos resumir el procedimiento para resolver un problema de programación lineal de la siguiente manera:

Pasos para resolver un problema de programación lineal

Paso 1: Asigne símbolos a las variables del problema y escriba una expresión para la cantidad que se maximizará (o minimizará). Esta expresión es la función objetivo.

Paso 2: Escribe todas las restricciones como un sistema de desigualdades lineales.

Paso 3: Grafica el sistema (el conjunto de puntos factibles) y encuentra la esquina. puntos.

Paso 4: Evaluar la función objetivo en cada punto de esquina. El mayor (o el más pequeño) de ellos es la solución.

EJEMPLO 3 Resolver un problema de programación lineal mínima

Minimizar la función objetivo

$$z = 2x + 3y$$

sujeto a las limitaciones

$$y \ldots 5 \; x \ldots 6 \; x + y \text{ Ú } 2 \; x \text{ Ú } 0 \; y \text{ Ú } 0$$

Solución

Paso 1: Queremos minimizar la función objetivo z = 2x + 3y.

Paso 2: Las restricciones forman el sistema de desigualdades lineales.

$$x \ldots 6$$
$$x + y \text{ Ú } 2$$
$$x \text{ Ú } 0$$
$$e \; y \ldots 5 y \text{ Ú } 0$$

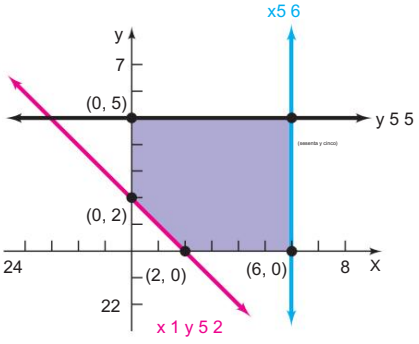


Figura 25

Paso 3: La gráfica de este sistema (el conjunto de puntos factibles) se muestra como la región sombreada en la Figura 25. Los puntos de las esquinas están etiquetados.

Paso 4: La Tabla 1 enumera los puntos de las esquinas y los valores correspondientes de la función objetivo. Según la tabla, el valor mínimo de z es 4 y ocurre en el punto 12, 02.

Machine Translated by Google

tabla 1

Punto de esquina (x, y)	Valor de la Función Objetivo z · 2x · 3y
(0, 2)	z = 2 # 0 + 3 # 2 = 6
(0, 5)	z = 2 # 0 + 3 # 5 = 15
(sesenta y cinco)	z = 2 # 6 + 3 # 5 = 27
(6, 0)	z = 2 # 6 + 3 # 0 = 12
(2, 0)	z = 2 # 0 + 3 # 0 = 0

Ahora resuelva los problemas 5 y 1 1

EJEMPLO 4

Maximizar el beneficio

Al final de cada mes, después de completar los pedidos de sus clientes habituales, a una empresa de café le queda algo de café colombiano puro y algo de café de mezcla especial.
La práctica de la empresa ha sido empaquetar una mezcla de los dos cafés en paquetes de 1 libra (lb) de la siguiente manera: una mezcla de baja calidad que contiene 4 onzas (oz) de café colombiano y 12 onzas de café de mezcla especial, y una mezcla de alta calidad que contiene 8 oz de café colombiano y 8 oz de café de mezcla especial. Se obtiene una ganancia de $1,25 por paquete con la mezcla de baja calidad, mientras que con la mezcla de alta calidad se obtiene una ganancia de $1,75 por paquete. Este mes quedan 120 libras de café de mezcla especial y 100 libras de café puro colombiano. ¿Cuántos paquetes de cada mezcla se deben preparar para lograr la máxima ganancia? Suponga que todos los paquetes preparados se pueden vender.

Solución

Paso 1: comience asignando símbolos para las dos variables.

x = Número de paquetes de la mezcla de baja calidad

y = Número de paquetes de la mezcla de alta calidad

El objetivo es maximizar el beneficio sujeto a restricciones en x e y. Si p denota la ganancia, entonces la función objetivo es

P = $1,25x + $1,75y

Paso 2 : Debido a que xey representan números de paquetes, los únicos valores significativos para xey son números enteros no negativos . Esto produce las dos restricciones.

x Ú 0 y Ú 0 Restricciones no negativas

Hay una cantidad limitada de cada tipo de café disponible. Por ejemplo, la cantidad total de café colombiano utilizada en las dos mezclas no puede exceder las 100 lb o 1600 oz. Debido a que se usan 4 oz en cada paquete de baja calidad y 8 oz en cada paquete de alta calidad, esto lleva a la restricción

4x + 8y … restricción de 1600 café colombiano

De manera similar, la oferta de 120 lb, o 1920 oz, de café de mezcla especial conduce a la restricción

12x + 8y … 1920 Restricción del café de mezcla especial

El problema de programación lineal es

Maximizar P = 1,25x + 1,75y

sujeto a las limitaciones

x Ú 0 y Ú 0 4x + 8y … 1600 12x + 8y … 1920

(continuado)

Machine Translated by Google

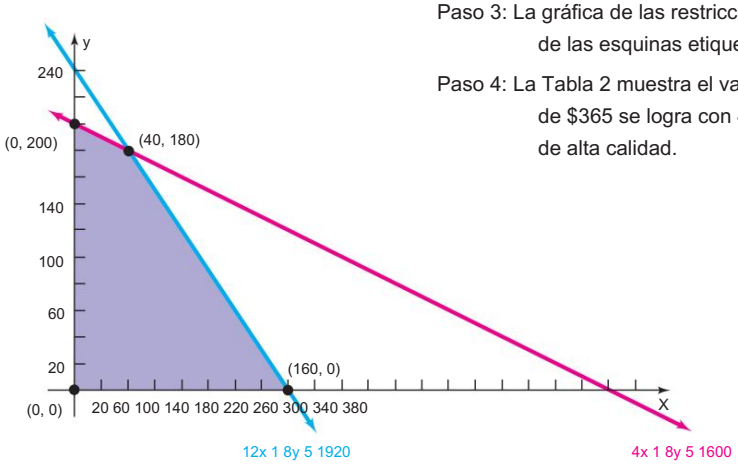


Figura 26

Paso 3: La gráfica de las restricciones (los puntos factibles) se muestra en la Figura 26 con los puntos de las esquinas etiquetados.

Paso 4: La Tabla 2 muestra el valor de P en cada punto de esquina. Según la tabla, la ganancia máxima de $365 se logra con 40 paquetes de la mezcla de baja calidad y 180 paquetes de la mezcla de alta calidad.

Tabla 2

Punto de esquina (x, y)	Valor de la ganancia P · 1,25x · 1,75y
(0, 0)	P = 0
(0, 200)	P = 1,25 # 0 + 1,75 # 200 = $350
(40, 180)	P = 1,25 # 40 + 1,75 # 180 = $ 365
(160, 0)	P = 1,25 # 160 + 1,75 # 0 = $200

Ahora problema de trabajo 1 9

11.8 Evalúe su comprensión

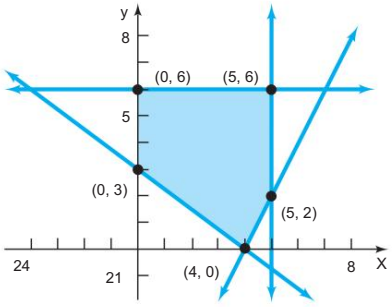
Conceptos y vocabulario

1. Un problema de programación lineal requiere que se maximice o minimice una expresión lineal, llamada. _____ _____,

2. Verdadero o Falso Si un problema de programación lineal tiene solución, ésta se ubica en un punto vértice de la gráfica de los puntos factibles.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 3 a 8, encuentre el valor máximo y mínimo de la función objetivo dada de un problema de programación lineal. La figura ilustra la gráfica de los puntos factibles.



3. z = 2x + 3y

4. z = x + y

5. z = x + 10y

6.z = 10x + y

7. z = 7x + 5y

8.z = 5x + 7y _

En los problemas 9 a 18, resuelva cada problema de programación lineal.

9. Maximizar z = x + 3y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, x + y Ú 3, x … 5, y … 7

10. Maximizar z = 2x + y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, x + y … 6, x + y Ú 1

11. Minimizar z = 2x + 5y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, x + y Ú 2, x … 5, y … 3

12. Minimizar z = 3x + 4y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, 2x + 3y Ú 6, x + y … 8

13. Maximizar z = 5x + 3y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, x + y Ú 2, x + y … 8, 2x + y … 10

14. Maximizar z = 3x + 5y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, x + y Ú 2, 2x + 3y … 12, 3x + 2y … 12

15. Minimizar z = 2x + 3y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, x + y Ú 3, x + y … 9, x + 3y Ú 6

16. Minimizar z = 5x + 4y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, x + y Ú 2, 2x + 3y … 12, 3x + y … 12

17. Maximizar z = 2x + 4y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, 2x + y Ú 4, x + y … 9

18. Maximizar z = 5x + 2y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, x + y … 10, 2x + y Ú 10, x + 2y Ú 10

Machine Translated by Google

Aplicaciones y extensiones

19. Maximizar las ganancias Un fabricante de esquís produce dos Tipos: descenso y cross-country. Utilice la siguiente tabla para determinar cuántos de cada tipo de esquí se deben producir para lograr la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo? ¿Cuál sería la ganancia máxima si el tiempo disponible para ¿Se aumentó la fabricación a 48 horas?

	Cuesta abajo	Cruz-país	Tiempo Disponible
Tiempo de fabricación por esquí	2 horas	1 hora	40 horas
Tiempo de finalización por esquí	1 hora	1 hora	32 horas
Beneficio por esquí	$70	$50	

20. Gestión agrícola Un agricultor tiene 70 acres de tierra disponibles. para sembrar ya sea soja o trigo. En la siguiente tabla se dan el costo de preparar el suelo, los días de trabajo requeridos y la ganancia esperada por acre plantada para cada tipo de cultivo.

	Soja	Trigo
Costo de preparación por acre	$60	$30
Días laborables requeridos por acre	3	4
Beneficio por acre	$180	$100

El agricultor no puede gastar más de $1800 en costos de preparación y no puede utilizar un total de más de 120 días laborables. ¿Cuántas hectáreas de cada cultivo se deben sembrar para maximizar las ganancias? ¿Cuál es el beneficio máximo? ¿Cuál es la ganancia máxima si el agricultor está dispuesto a gastar no más de $2400 en la preparación?

21. Asientos para banquetes Un salón de banquetes ofrece dos tipos de mesas. en alquiler: mesas rectangulares para 6 personas con un costo de $28 cada una y mesas redondas para 10 personas con un costo de $52 cada una. A Kathleen le gustaría alquilar el salón para un banquete de bodas y necesita mesas. para 250 personas. El salón podrá tener un máximo de 35 mesas, y el salón sólo dispone de 15 mesas rectangulares. Cómo ¿Se deben alquilar muchas de cada tipo de mesa para minimizar el costo y cuál es el costo mínimo?

Fuente: instalaciones.princeton.edu

22. Vacaciones de primavera El departamento de actividades estudiantiles de un colegio comunitario planea alquilar autobuses y camionetas para un viaje de vacaciones de primavera. Cada autobús tiene 40 asientos regulares y 1 especial. Asiento diseñado para acomodar a viajeros con discapacidades. Cada La camioneta tiene 8 asientos regulares y 3 asientos especiales. El costo del alquiler es de $350 por cada camioneta y $975 por cada autobús. Si para el viaje se requieren 320 asientos regulares y 36 especiales, ¿cuántos vehículos de cada tipo? ¿Debería alquilarse para minimizar el costo?

Fuente: www.busrates.com

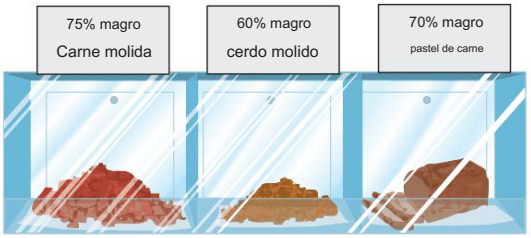
23. Retorno de la inversión Se instruye a un corredor de inversiones por su cliente para invertir hasta 20.000 dólares, algunos en un bono basura con un rendimiento del 9% anual y algo en letras del Tesoro con un rendimiento 7% anual. El cliente quiere invertir al menos $8000 en Letras del Tesoro y no más de 12.000 dólares en bonos basura.

(a) ¿Cuánto debería recomendar el corredor que el cliente coloque en cada inversión para maximizar el ingreso si el cliente insiste en que la cantidad invertida en letras del Tesoro debe igualar o exceder la cantidad colocada en el bono basura?

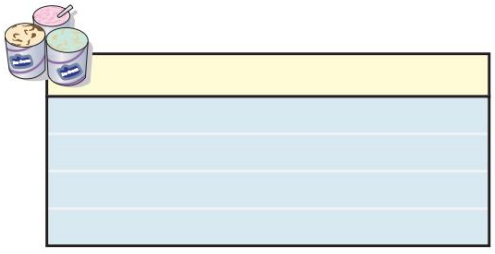
(b) ¿Cuánto debería recomendar el corredor que el cliente coloque en cada inversión para maximizar los ingresos si el cliente insiste en que la cantidad invertida en letras del Tesoro no debe exceder la cantidad colocada en el bono basura?

24. Programación de producción En una fábrica, la máquina 1 produce Alicates de 8 pulgadas (pulg.) a razón de 60 unidades por hora (h) y 6 pulgadas. alicates a razón de 70 unidades/h. La máquina 2 produce 8 pulgadas. alicates a razón de 40 unidades/h y 6 pulgadas. alicates a razón de 20 unidades/h. Cuesta $50/h operar la máquina 1, y la máquina 2 cuesta $30/h operar. El programa de producción requiere que se produzcan al menos 240 unidades de 8 pulgadas. alicates y al menos 140 unidades de 6 pulgadas. Los alicates se producirán durante cada día de 10 h. ¿Qué combinación? ¿Cuál de las máquinas costará menos dinero para operar?

25. Gestión de un mercado de carne Un mercado de carne combina tierra carne de res y cerdo molida en un solo paquete para pastel de carne. El La carne molida es 75% magra (75% carne de res, 25% de grasa) y cuesta el mercado $2.25 por libra (lb). La carne de cerdo molida es 60% magra. y le cuesta al mercado $1,35/lb. El pastel de carne debe tener al menos 70% magro. Si el mercado quiere producir al menos 180 libras de carne pan usando al menos 50 lb de su carne de cerdo disponible, pero no más de 200 libras de carne molida disponible, ¿cuánta carne molida La carne de res debe mezclarse con carne de cerdo molida para que el costo sea ¿minimizado?



26. Helado The Mom and Pop Ice Cream Company fabrica dos tipos de helado de chocolate: regular y premium. El Las propiedades de 1 galón (gal) de cada tipo se muestran en la tabla:



Además, los compromisos actuales exigen que la empresa produzca al menos 1 galón de prima por cada 4 galones de regular. Cada día, la empresa tiene disponibles 725 libras (lb) de saborizantes y 425 libras de productos con grasa láctea. Si la empresa no puede enviar más de 3000 lb de producto por día, ¿cuántos galones de cada tipo se deben producir diariamente para maximizar las ganancias?

Fuente: www.scitoys.com/ingredients/ice_cream.html

Machine Translated by Google

27. Maximizar las ganancias con patines para hielo Una fábrica fabrica
Hay dos tipos de patines para hielo: patines de carreras y patines artísticos.
Los patines de carreras requieren 6 horas de trabajo en su fabricación.
departamento, mientras que los patines artísticos requieren 4 horas de trabajo
allá. Los patines de carreras requieren 1 hora de trabajo en el acabado.
departamento, mientras que los patines artísticos requieren 2 horas de trabajo
allá. El departamento de fabricación tiene disponible como máximo
120 horas de trabajo por día, y el departamento de acabado no tiene más de
40 horas de trabajo por día disponibles. Si la ganancia en
cada patín de carreras cuesta $10 y la ganancia por cada patín artístico
es $12, ¿cuantos de cada uno se deben fabricar cada dia?
para maximizar las ganancias? (Suponga que se venden todos los patines fabricados).

28. Planificación financiera Una pareja de jubilados tiene hasta $50,000 para
lugar en valores de renta fija. Su asesor financiero les sugiere dos valores: uno
es un bono AAA que rinde el 8%
anualmente; el otro es un certificado de depósito (CD) que
rinde 4%. Después de una cuidadosa consideración de las alternativas, el
La pareja decide colocar como máximo $20,000 en el bono AAA y al menos
$15,000 en el CD. También instruyen al asesor financiero
colocar al menos tanto en el CD como en el bono AAA. Cómo
¿Debe proceder el asesor financiero para maximizar el retorno de su inversión?

29. Diseño de producto Un emprendedor tiene un grupo de diseño.
producir al menos seis muestras de un nuevo tipo de sujetador que
quiere comercializar. Cuesta $9.00 producir cada metal.
sujetador y $4.00 para producir cada sujetador de plástico. El quiere
tener al menos dos de cada versión del sujetador y necesita tener todas las
muestras dentro de 24 horas (h) a partir de ahora. Se necesitan 4 h para
producir cada muestra de metal y 2 h para producir cada muestra de plástico
muestra. Para minimizar el costo de las muestras, ¿cuántas de ellas
¿Cada tipo debe pedir el empresario? Que sera el
costo de las muestras?

30. Animal Nutrition Al perro de Kevin, Amadeus, le gustan dos tipos
de comida enlatada para perros. Gourmet Dog cuesta $1.40 por lata y
tiene 20 unidades de complejo vitamínico; el contenido calórico es
75 calorías. Chow Hound cuesta $1,12 por lata y tiene 35 unidades de vitaminas
y 50 calorías. A Kevin le gusta que Amadeus tenga
al menos 1175 unidades de vitaminas al mes y al menos 2375 calorías
durante el mismo período. Kevin tiene espacio para almacenar.
Sólo 60 latas de comida para perros a la vez. ¿Cuánto de cada tipo de
¿Comida para perros debería Kevin comprar cada mes para minimizar su costo?

31. Ingresos de las aerolíneas Una aerolínea tiene dos clases de servicio: primero
clase y entrenador. La experiencia de la gerencia ha sido que
cada avión debe tener al menos 8 pero no más de 16
asientos de primera clase y al menos 80 pero no más de 120 asientos en clase turista.

(a) Si la dirección decide que la proporción entre primera clase y turista
Los asientos nunca deben exceder 1:12, ¿con cuántos de cada tipo de
asiento se debe configurar una aeronave para maximizar los ingresos?

(b) Si la gerencia decide que la proporción entre asientos de primera clase
y de clase turista nunca debe exceder 1:8, ¿con cuántos asientos de
cada tipo debe configurarse una aeronave para maximizar los ingresos?

(c) Si fueras directivo, ¿qué harías?

[Sugerencia: suponga que la aerolínea cobra $C por un asiento en clase
turista y $F por un asiento en primera clase; C 7 0, F 7 C.]

32. Problema de desafío Maximizar z = 10x + 4y sujeto a la
restricciones x Ú 0, y Ú 0, 4x - y Ú - 9, x - 2y Ú - 25,
x + 2y … 31, x + y … 19, 4x + y … 43, 5x - y … 38,
x - 2y ... 4

Explicar conceptos: discusión y escritura

33. Explica con tus propias palabras qué es un problema de programación lineal y cómo se puede resolver.

Conserve su conocimiento

Los problemas 34 a 43 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

34. Resuelve: 2m2/5 - m1/5 = 1

35. Grafica y = - tan ¢x - pag 2 ≤ durante al menos dos períodos. Utilizar el
gráfica para determinar el dominio y el rango.

36. Desintegración radiactiva La vida media del titanio-44 es de 63 años.
¿Cuánto tiempo tardarán 200 gramos en descomponerse a 75 gramos?
Redondear a un decimal.

37. Encuentra la ecuación de la recta paralela a y = 3x + 11
y pasa por el punto 1 - 2, 12.

38. La suma de dos números es 16. Si el número mayor es 4 menos
que 3 veces el número menor, encuentra los dos números.

39. ¿Qué cantidad se debe invertir al 4% de interés compuesto?
¿Diariamente tener $15,000 en 3 años?

40. Encuentre una ecuación de la elipse que tenga vértices 10, {52 y focos 10, {32.

41. Si f1x2 = $\frac{2x - 7}{5x + 1}$, encontrar f^{-1} 1x2.

42. Factoriza completamente: 30x2 1x - 72 3>2 + 15x3 1x - 72 1>2

43. Considere las funciones f1x2 = $\frac{1}{3}$x3 - 3x2 + 5x + 7
y f″1x2 = 2x - 6. Dado que f es cóncava hacia arriba donde f″1x2 7 0
y f es cóncava hacia abajo donde f″1x2 6 0, encuentre dónde f es cóncava
hacia arriba y dónde f es cóncava hacia abajo.

Machine Translated by Google

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Sistemas de ecuaciones (págs. 756 a 758)

- Los sistemas sin soluciones son inconsistentes. Los sistemas con solución son consistentes.
- Los sistemas consistentes de ecuaciones lineales tienen una solución única (independientes) o un número infinito de soluciones (dependientes).

Matriz (pág. 771) Matriz rectangular de números, llamada entradas

- Matriz aumentada (p. 771)
- Operaciones de fila (p. 772)
- Forma escalonada de filas (p. 773)
- Forma escalonada reducida (p. 776)

Determinantes y regla de Cramer (págs. 784–792)

Álgebra matricial (págs. 795 a 807)

- Matriz m por n (p. 796) Matriz con m filas yn columnas
- Matriz de identidad En (p. 803) Una matriz cuadrada de n por n cuyas entradas diagonales son unos, mientras que todas las demás entradas son ceros.
- Inversa de una matriz (p. 803) A-1 es la inversa de A si AA-1 = A-1A = In.
- Matriz no singular (p. 804) Una matriz cuadrada que tiene una inversa.

Problema de programación lineal (p. 838)

Maximizar (o minimizar) una función objetivo lineal, z = Ax + By, sujeta a ciertas condiciones o restricciones, expresables como desigualdades lineales en x e y. Un punto factible 1x, y2 es un punto que satisface las restricciones (desigualdades lineales) de un problema de programación lineal.

Ubicación de la solución de un problema de programación lineal (p. 840)

Si un problema de programación lineal tiene solución, ésta se ubica en un punto de esquina de la gráfica de los puntos factibles. Si un problema de programación lineal tiene múltiples soluciones, al menos una de ellas se ubica en un punto de esquina de la gráfica de los puntos factibles.
En cualquier caso, el valor correspondiente de la función objetivo es único.

Objetivos

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplos de ejercicios de repaso	
11.1	1 Resolver sistemas de ecuaciones por sustitución (p. 759)	4	1–7, 56, 59
	2 Resolver sistemas de ecuaciones por eliminación (p. 759)	5, 6	1–7, 56, 59
	3 Identificar sistemas de ecuaciones inconsistentes que contienen dos variables (p. 761) 7 4 Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes que contiene dos variables (p. 761)	8	5, 54 7, 53
	5 Resolver sistemas de tres ecuaciones que contengan tres variables (p. 762)	9, 12	8–10, 55, 57, 60
	6 Identificar sistemas de ecuaciones inconsistentes que contengan tres variables (p. 764)	10	10
	7 Expresar la solución de un sistema de ecuaciones dependientes que contiene tres variables (pág. 764)	11	9
11.2	1 Escribe la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales (p. 771)	1	20–25
	2 Escribe el sistema de ecuaciones a partir de la matriz aumentada (p. 772)	2	11, 12
	3 Realizar operaciones con filas en una matriz (p. 772)	3, 4	20–25
	4 Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices (p. 773)	5-10	20–25
11.3	1 Evaluar determinantes 2 por 2 (p. 784)	1	26
	2 Usa la regla de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones que contengan dos variables (pág. 785)	2	29, 30
	3 Evaluar determinantes 3 por 3 (p. 787)	4	27, 28
	4 Usa la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones que contengan tres variables (pág. 789)	5	31
	5 Conocer las propiedades de los determinantes (p. 791)	6–9	32, 33

(continuado)

Machine Translated by Google

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplos de ejercicios de repaso	
11.4	1 Encuentra la suma y la diferencia de dos matrices (p. 796)	3, 4	13
	2 Encuentra múltiplos escalares de una matriz (p. 798)	5	14
	3 Encuentra el producto de dos matrices (p. 799)	6-11	15, 16
	4 Encuentra la inversa de una matriz (p. 803)	12-14	17-19
	5 Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa (p. 807)	15	20–25
11.5	1 Descomponer $\frac{P}{Q}$ donde Q sólo tiene factores lineales no repetidos (p. 814)	2	34
	2 Descomponer $\frac{P}{Q}$ donde Q tiene factores lineales repetidos (p. 815)	3, 4	35
	3 Descomponer $\frac{P}{Q}$ donde Q tiene un factor cuadrático irreducible no repetido Q (p. 817)	5	36, 38
	4 Descomponer $\frac{P}{Q}$ donde Q tiene un factor cuadrático irreducible repetido Q (p. 818)	6	37
11.6	1 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante sustitución (p. 821)	1,	39–43
	2 Resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación (p. 822)	3 2, 4, 5	39–43
11.7	1 Grafica una desigualdad (p. 830)	2–4	44, 45
	2 Graficar un sistema de desigualdades (p. 832)	5-10	46–50, 58
11.8	1 Plantee un problema de programación lineal (p. 838)	1	61
	2 Resolver un problema de programación lineal (p. 838)	2–4	51, 52, 61

Ejercicios de revisión

En los problemas del 1 al 10, resuelva cada sistema de ecuaciones usando el método de sustitución o el método de eliminación. Si el sistema no tiene solución, indique que es inconsistente.

1. b $3x + 5y = 12$

2.c $x - 3y = \frac{1}{2}$
$3x - 4y = 4$

3.b $3x + 2y = 4$
$x - 2y = 0$

4.b $2x + 2y = 3$
$x + 2y = 7$

5.c $\frac{1}{2}x - 2 - \frac{3}{2}y + \frac{4}{3} = 0$
$x - 3y + 4 = 0$

6. b $2x + 3y = 12$
$3x - 2y = 0$

7. mi $3x + y = 4$
$2x - y = 5$

8. c $3x + 2y + 3z = - 16$
$2x - y + 3z = - 13$

9. c $x + 2y - 4z = 27$
$2x - 6y + 2z = 15$

10. c $- 3x + y - 5z = - 5$
$x - 4y + 9z = 10$

En los problemas 11 y 12, escribe el sistema de ecuaciones que corresponde a la matriz aumentada dada.

11. J $\begin{matrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -1 \end{matrix}$ R

12. C $\begin{matrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{matrix}$ S

En los problemas 13 a 16, utilice las siguientes matrices para calcular cada expresión.

$A = C \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & -0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \\ 2 \end{matrix}$ S $\quad B = J \begin{matrix} 0 \\ 4 & -3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \\ 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \\ 5 \end{matrix}$ R $\quad C = C \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \\ -4 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \\ 5 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \\ 2 \end{matrix}$ S

13. A + C

14.6A _

15. AB

16. antes de Cristo

En los problemas 17 a 19, encuentre la inversa, si la hay, de cada matriz. Si no hay inversa, indique que la matriz es singular.

17. J $\begin{matrix} 4 & 6 \\ 3 & 8 \end{matrix}$ R

18. C $\begin{matrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}$ S

19.J $\begin{matrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{matrix}$ R

Machine Translated by Google

En los problemas 20 a 25, resuelva cada sistema de ecuaciones usando matrices. Si el sistema no tiene solución, indique que es inconsistente.

20. b 3x + 2y = 10
x - y = 5

21. c 5x + 3y - 7z = 4
x - 6y + 2z = 1
4x - 7y - 2z = - 3

22. c 2x + y + z = 5
8x - y - 3z = 1
4x - y - 3z = 1
d x - y = 0

23. c 3x + y - 2z = 0
x - 2y + 3z = - 1
5x + y - z = 2

24. c x - y + z = 0
y - 5z - 6 = 0
2x - 2y + z - 1 = 0

25.
2x + y - z + 2t = 3
x - 2y - 2z - 3t = 0
- 3x + 4y + 2z + 5t = - 3
x + 3y - z + 2t = 3

En los problemas 26 a 28, encuentre el valor de cada determinante.

26. 2 3 4
1 2 1

27.
1
2 0 - 1
1
3 5 - 3 4
7 3

28.
5 0 1
2 6

En los problemas 29 a 31, utilice la regla de Cramer, si corresponde, para resolver cada sistema.

29. b x + 2y = 4
3x - 2y = 4

30. b 2x + 3y = 0
3x - 2y = 0

31. c x + 2y - 3z = 16
3x - 2y + 3z = - 13
2x - y + 3z = - 13

problemas 32 y 33, use las propiedades de los determinantes para encontrar el valor de cada determinante si se sabe que 2yab 2 = 8.

32. 2 3a 2x
b 2y 3

33. 2 yxba 2

En los problemas 34 a 38, encuentre la descomposición en fracciones parciales de cada expresión racional.

34. $\frac{6}{x(x - 4)}$

35. $\frac{x - 4}{x^2(x - 1)}$

36. $\frac{x}{(x + 9)^2(x + 1)}$

37. $\frac{}{x^3(x^2 + 4)}$

38. $\frac{}{x^2(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$

En los problemas 39 a 43, resuelva cada sistema de ecuaciones.

39. b 3x - y + 4z = 5
x + 2y - z = 0

40. b 2x + y = 2
3x + 2y = 2

41. b x + y = 3
x - 2y = 3

42. c 3x + 2y + 5z = 8
3x + 4y + 2z = 0

43. c x - 3xy + y = - 2
$\frac{x^2 - x}{y} + y + 1 = 0$

En los problemas 44 y 45, grafique cada desigualdad.

44. 3x + 4y … 12

45. y … x

En los problemas 46 a 48, represente gráficamente cada sistema de desigualdades. Indique si la gráfica es acotada o no y etiquete los puntos de las esquinas.

46. b - 2x + y Ú 2
x - y Ú 2

47.
x Ú 0
y Ú 0
x + y … 4
2x + 3y … 6

48.
x Ú 0
y Ú 0
2x + y … 8
x + 2y Ú 2

En los problemas 49 y 50, grafica cada sistema de desigualdades.

49. b x + y Ú 2
x + y … 16

50. por x. x + y Ú 4

En los problemas 51 y 52, resuelva cada problema de programación lineal.

51. Maximizar z = 3x + 4y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0, 3x + 2y Ú 6, x + y … 8

52. Minimizar z = 3x + 5y sujeto a las restricciones x Ú 0, y Ú 0 , x + y Ú 1, 3x + 2y … 12, x + 3y … 12

---

53. Encuentra A para que el sistema de ecuaciones tenga infinitos soluciones.

segundo 4x + 10y = A
2x + 5y = 5

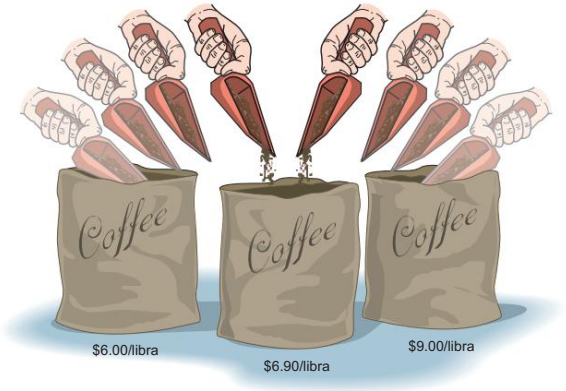
54. Encuentre A de modo que el sistema del problema 53 sea inconsistente.

55. Ajuste de curvas Encuentre la función cuadrática y = ax2 + bx + c que pasa por los tres puntos 10, 12, 11, 02 y 1 - 2, 12.

Machine Translated by Google

56. Mezcla de café Un distribuidor de café está mezclando un café nuevo que costará $6,90 la libra. Consistirá en una mezcla de café a $6,00 la libra y café a $9,00 la libra. ¿Qué cantidades de cada tipo de café se deben mezclar para lograr la mezcla deseada?

[Sugerencia: suponga que el peso del café mezclado es de 100 libras.]



57. Pedidos de galletas Una empresa de galletas fabrica tres tipos de galletas (avena con pasas, con chispas de chocolate y galletas de mantequilla) empaquetadas en cajas pequeñas, medianas y grandes. La caja pequeña contiene 1 docena de avena con pasas y 1 docena de chispas de chocolate; la caja mediana tiene 2 docenas de avena con pasas, 1 docena de chispas de chocolate y 1 docena de galletas de mantequilla; la caja grande contiene 2 docenas de avena con pasas, 2 docenas de chispas de chocolate y 3 docenas de galletas de mantequilla. Si necesita exactamente 15 docenas de avena con pasas, 10 docenas de chispas de chocolate y 11 docenas de galletas de mantequilla, ¿cuántas cajas de cada tamaño debería comprar?

58. Nueces mixtas Una tienda que se especializa en vender nueces tiene disponibles 72 libras (lb) de anacardos y 120 lb de maní. Estos deben mezclarse en paquetes de 12 onzas (oz) de la siguiente manera: un paquete de menor precio que contiene 8 oz de maní y 4 oz de anacardos, y un paquete de calidad que contiene 6 oz de maní y 6 oz de anacardos.

(a) Utilice x para indicar el número de paquetes de menor precio y utilice y para indicar el número de paquetes de calidad. Escribe un sistema de desigualdades lineales que describa los números posibles de cada tipo de paquete.

(b) Grafique el sistema y etiquete los puntos de las esquinas.

59. Determinación de la velocidad de la corriente del río Aguarico En un viaje reciente a la Reserva de Vida Silvestre Cuyabeno en la región amazónica de Ecuador, Mike hizo un viaje de 100 kilómetros en lancha rápida por el río Aguarico desde Chiritza hasta el Flotel Orellana. Mientras Mike observaba cómo se desarrollaba el Amazonas, se preguntaba qué tan rápido iba la lancha rápida y qué tan rápida era la corriente del río Aguarico, de aguas bravas. Mike cronometró el viaje río abajo en 2,5 horas y el viaje de regreso en 3 horas. ¿Cuáles eran las dos velocidades?

60. Trabajos de tasa constante Si Bruce y Bryce trabajan juntos durante 1 hora y 20 minutos, terminarán un determinado trabajo. Si Bryce y Marty trabajan juntos durante 1 hora y 36 minutos, se puede terminar el mismo trabajo. Si Marty y Bruce trabajan juntos, pueden completar este trabajo en 2 horas y 40 minutos. ¿Cuánto tiempo le tomaría a cada uno de ellos, trabajando solo, terminar el trabajo?

61. Minimizar el costo de producción Una fábrica produce motores de gasolina y motores diésel. Cada semana la fábrica está obligada a entregar al menos 20 motores de gasolina y al menos 15 motores diésel. Sin embargo, debido a limitaciones físicas, la fábrica no puede fabricar más de 60 motores de gasolina o más de 40 motores diésel en una semana determinada. Por último, para evitar despidos, se deben producir en total al menos 50 motores. Si producir motores de gasolina cuesta $450 cada uno y producir motores diésel cuesta $550 cada uno, ¿cuántos de cada uno se deben producir por semana para minimizar el costo? ¿Cuál es el exceso de capacidad de la fábrica? Es decir, ¿cuántos motores de cada tipo se producen en exceso de los que la fábrica está obligada a entregar?

62. Describe cuatro formas de resolver un sistema de tres ecuaciones lineales que contienen tres variables. ¿Qué método prefieres? ¿Por qué?

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

En los problemas 1 a 4, resuelva cada sistema de ecuaciones usando el método de sustitución o el método de eliminación. Si el sistema no tiene solución, indique que es inconsistente.

1. b - 2x + 3y = 7

2. c $\frac{1}{3}$x - 2y = 1
   15x - 30y = 18

3. c 5x + 2y + 3z = 8
   3x + 4y - z = - 2

4. - x - $\frac{2}{3}$y + z = 1
   d 3x + 2y - 3z = 8

5. Escribe la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones:

   - 2x - y + 6 = - 19
   c 4x + 5y + 5z = 10

6. Escribe el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz aumentada:

   C-3 2 1 4 3 3 - 6 - 11S

Machine Translated by Google

En los problemas 7 a 10, utilice las siguientes matrices para calcular cada expresión.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

7. $2A + C$ 8. $A - 3C$ 9. CB

10. Licenciatura en Letras

En los problemas 11 y 12, encuentre la inversa de cada matriz no singular.

11. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

12. $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 13 a 16, resuelva cada sistema de ecuaciones usando matrices. Si el sistema no tiene solución, indique que es inconsistente.

13. b $2x + 3y = 22$
$8x + 2y = 56$

14. c $\frac{1}{4}x + y = 7$
$x - 2y = 2$

15. c $x + 2y + 3z = -3$
$4x + 7y + 13z = -10$
$2x + 7y + 15z = -12$

16. c $2x - 2y + 3z = -5$
$3x + 2y - 8z = -2$
$x - y + 2z = 8$

En los problemas 17 y 18, encuentre el valor de cada determinante.

17. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}$

En los problemas 19 y 20, utilice la regla de Cramer, si es posible, para resolver cada sistema.

19. b $3x + 5y = -23$
$8x + 5y = -23$

20. c $4x - 2y + z = 25$
$3x - 5y + 2z = 18$
$-2x + y - 3z = -15$

En los problemas 21 y 22, resuelve cada sistema de ecuaciones.

21. b $3x^2 + y^2 = 12$
$2x^2 - y^2 = 12$

22. b $2y^2 - x^2 = 1$
$y^2 - x^2 = 5$

23. Grafica el sistema de desigualdades $4x^2 + y^2 \le 100$

En los problemas 24 y 25, encuentre la descomposición en fracciones parciales de cada expresión racional.

24. $\dfrac{3x + 7}{(x + 3)^2}$

25. $\dfrac{4x^2 - 3}{x(x^2 + 3)^2}$

26. Grafique el sistema de desigualdades. Indique si la gráfica es acotada o no y etiquete todos los puntos de las esquinas.

$$\begin{cases} y \ge 0 \\ x + 2y \ge 8 \\ 2x + y \ge 8 \\ y \le 2 \end{cases}$$

27. Maximice $z = 5x + 8y$ sujeto a las restricciones $x \ge 0$, $2x + y \le 8$, y $x - 3y \le -3$.

28. Megan fue a comprar ropa y compró 2 pares de jeans, 2 camisolas y 4 camisetas por $90,00. En la misma tienda, Paige compró un par de jeans y 3 camisetas por $42,50, mientras que Kara compró 1 par de jeans, 3 camisolas y 2 camisetas por $62,00. Determine el precio de cada prenda de vestir.

Revisión acumulativa

En los problemas 1 a 6, resuelve cada ecuación.

1. $2x^2 - x = 0$

2. $2\sqrt{3x + 1} = 4$

3. $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$

4. $3^x = 9^{x+1}$

5. $\log_3(x - 1) + \log_3(2x + 1) = 2$

6. $3^x = m$

---

7. Determina si la función $g(x) = \dfrac{2x^3}{x^4 + 1}$ es par, extraño o ninguno de los dos. ¿La gráfica de g es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen?

8. Encuentra el centro y el radio del círculo.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$$

Grafica el círculo.

9. Grafica $f(x) = 3^{-x} + 1$ usando transformaciones. ¿Cuáles son los dominio, rango y asíntota horizontal de f ?

10. La función $f(x) = x + \dfrac{5}{2}$ es uno a uno. encontrar f^{-1}. Encontrar el dominio y el rango de f y el dominio y el rango de f^{-1}.

11. Grafica cada ecuación.

(a) $y = 3x + 6$ (b) $x^2 + y^2 = 4$

(c) $y = x^3$ (d) $y = \dfrac{1}{x}$

(mi) $y = 1^x$ (f) $y = e^x$

(g) $y = \ln x$ (h) $2x^2 + 5y^2 = 1$

(i) $x^2 - 3y^2 = 1$ (j) $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

12. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

(a) Utilizando una herramienta gráfica, grafique f y aproxime los ceros de f.

(b) Utilizando una herramienta gráfica, aproxime los máximos locales y los mínimos locales.

(c) Determine los intervalos en los que f aumenta.

Machine Translated by Google

Proyectos del Capítulo

I. Cadenas de Markov Una cadena (o proceso) de Markov es aquella en la que los resultados futuros están determinados por un estado actual. Los resultados futuros se basan en probabilidades. La probabilidad de trasladarse a un determinado estado depende únicamente del estado ocupado anteriormente y no varía con el tiempo. Un ejemplo de cadena de Markov es la educación máxima alcanzada por los niños en función del nivel educativo más alto alcanzado por sus padres, donde los estados (1) obtienen un título universitario, (2) solo un diploma de escuela secundaria, (3) solo una escuela primaria. Si pij es la probabilidad de pasar del estado i al estado j, la matriz de transición es la matriz m por m

P = C p11 p12 p1m p21 p22 p2m pm1 pm2 pmm S

La tabla representa las probabilidades del nivel educativo más alto de los niños en función del nivel educativo más alto de sus padres. Por ejemplo, la tabla muestra que la probabilidad p21 es del 40% de que padres con educación secundaria (fila 2) tengan hijos con educación universitaria (columna 1).

más alto Educativo Nivel de Padres	Máxima educación que los niños logran		
	Colega	Escuela Secundaria	Primaria
Colega	80%	18%	2%
Escuela secundaria	40%	50%	10%
Elemental	20%	60%	20%

1. Convierte los porcentajes a decimales.
2. ¿Qué es la matriz de transición?
3. Suma entre las filas. ¿Que notaste? ¿Por qué crees que obtuviste este resultado?
4. Si P es la matriz de transición de una cadena de Markov, la entrada 1i, j2 de Pn (enésima potencia de P) da la probabilidad de pasar del estado i al estado j en n etapas.
   ¿Cuál es la probabilidad de que el nieto de un graduado universitario sea un graduado universitario?
5. ¿ Cuál es la probabilidad de que el nieto de un graduado de secundaria termine la universidad?
6. El vector fila y102 = 30,342 0,554 0,1044 representa la proporción de la población estadounidense de 25 años o más que tiene la universidad, la escuela secundaria y la escuela primaria, respectivamente, como el nivel educativo más alto en 2017.* En una cadena de Markov, la distribución de probabilidad y1k2 después de k etapas donde Pk es la k-es y 1k2 = y102 paquete, ésima potencia de la matriz de transición. ¿Cuál será la distribución del mayor logro educativo de los nietos de la población actual?
7. Calcular P3 , P4, P5, C. Continúe hasta que la matriz no cambie.
   A esto se le llama distribución de largo plazo o de estado estacionario.
   ¿Cuál es la distribución a largo plazo del mayor logro educativo de la población?

*Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC).

II. Proyecto en Motorola: Codificación de control de errores La ingeniería de alta potencia necesaria para garantizar que las comunicaciones inalámbricas sean transmitida correctamente se analiza mediante matrices para controlar los errores de codificación.

III. Uso de matrices para encontrar la línea de mejor ajuste ¿Se ha preguntado cómo nuestras calculadoras obtienen la línea de mejor ajuste? Vea cómo encontrar la recta resolviendo una ecuación matricial.

IV. Experimento CBL Simule dos personas caminando una hacia la otra a un ritmo constante. Luego resuelve el sistema de ecuaciones resultante para determinar cuándo y dónde se reunirán.

Machine Translated by Google

Secuencias; Inducción; el teorema del binomio

12

Se prevé que la población mundial alcance los 9.800 millones en 2050

Se espera que la población mundial actual de 7.600 millones de personas alcance los 8.600 millones en 2030, los 9.800 millones en 2050 y los 11.200 millones en 2100, según un informe de DESA de las Naciones Unidas titulado “Perspectivas de la población mundial: la revisión de 2017”.

La mayor parte del aumento proyectado de la población mundial puede atribuirse a una breve lista de países con alta fertilidad, principalmente en África y países que ya tienen grandes poblaciones. Durante el período 2017-2050, se espera que la mitad del crecimiento de la población mundial se concentre en nueve países: India, Nigeria, República Democrática del Congo, Pakistán, Etiopía, República Unida de Tanzania, Estados Unidos de América, Uganda e Indonesia (incluidos en orden de tamaño de su contribución al crecimiento demográfico total). Entre los diez países con mayor población, Nigeria es el que está creciendo más rápidamente.

Nigeria, que actualmente ocupa el séptimo lugar, se prevé que se convierta en el tercer país más grande poco antes de 2050.

China y la India siguen siendo los dos países con mayor población. Con más de mil millones de habitantes cada uno, representan el 19% y el 18% de la población mundial, respectivamente. Para 2024, se espera que la población de la India supere a la de China.

El crecimiento demográfico futuro depende en gran medida de la trayectoria de la fertilidad futura. Los cambios relativamente pequeños en la tasa de fertilidad, cuando se proyectan a lo largo de décadas, pueden generar grandes diferencias en la población total. En los últimos años, la tasa de fertilidad ha disminuido en prácticamente todas las áreas del mundo, incluso en África, donde los niveles de fertilidad siguen siendo los más altos de todas las áreas principales. Europa ha sido una excepción a esta tendencia en los últimos años, con una tasa media de fertilidad total que aumentó de 1,4 nacimientos por mujer en 2000 a 1,6 en 2015.

Fuente: Adaptado del Departamento de Asuntos Económicos y Sociales de las Naciones Unidas, 21 de junio de 2017, Nueva York (https://www.un.org.development/desa/en/news/population/world-population-prospects-2017.html)

—Ver el Proyecto del Capítulo I basado en Internet—

Una mirada atrás, una mirada adelante

Este capítulo se divide en tres partes independientes: Secciones 12.1 —12.3, Sección 12.4 y Sección 12.5.

En el capítulo 2 definimos una función y su dominio, que normalmente era un conjunto de números reales. En las secciones 12.1 a 12.3 analizamos una secuencia, que es una función cuyo dominio es el conjunto de números enteros positivos.

A lo largo de este texto, donde nos pareció oportuno, dimos pruebas de los resultados. En En la sección 12.4 se analiza una técnica para demostrar teoremas que involucran números naturales.

En el Apéndice A, Sección A.3, hay fórmulas para expandir $(x + a)^2$ y $(x + a)^3$. En la Sección 12.5, analizamos el Teorema del binomio, una fórmula para la expansión de $(x + a)^n$. Se tratan los temas presentados en este capítulo. con más detalle en los cursos titulados Matemáticas Discretas. Las aplicaciones de estos temas se encuentran en los campos de la informática, la ingeniería, los negocios y la economía, las ciencias sociales y las ciencias físicas y biológicas.

Describir

12.1 Secuencias

12.2 Secuencias aritméticas

12.3 Secuencias Geométricas; Series geométricas

12.4 Inducción Matemática

12.5 El teorema del binomio

Revisión del capítulo

Prueba de capítulo

Revisión acumulativa

Proyectos del Capítulo

Machine Translated by Google

12.1 Secuencias

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Funciones (Sección 2.1, págs. 85–90)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 858.

OBJETIVOS 1 Enumerar los primeros términos de una secuencia (p. 852)

2 Enumere los términos de una secuencia definida por una fórmula recursiva (p. 855)

3 Utilice la notación de suma (p. 856)

4 Encuentra la suma de una secuencia (p. 857)

Cuando escuchas la palabra secuencia tal como se usa en la frase “una secuencia de eventos”, probablemente pienses en una colección de eventos, uno de los cuales ocurre primero, otro segundo, y así sucesivamente. En matemáticas, la palabra secuencia también se refiere a resultados que son primero, segundo, etc.

DEFINICIÓN Secuencia

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos y cuyo rango es un subconjunto de los números reales.

En una secuencia, las entradas son 1, 2, 3, c. Como una secuencia es una función, tiene una gráfica. La figura 1(a) muestra la gráfica de la función f 1x2 = $\frac{1}{x}$, x 7 0. Si todos los Los puntos de este gráfico se eliminaron excepto aquellos cuyas coordenadas x son positivas.

números enteros, es decir, si se eliminaran todos los puntos excepto 11, 12, a2, $\frac{1}{2}$b, a3, $\frac{1}{3}$b, y así sucesivamente, los puntos restantes serían la gráfica de la secuencia f 1n2 = $\frac{1}{n}$, como como se muestra en la Figura 1(b). Tenga en cuenta que n se utiliza para representar la variable independiente en una secuencia. Esto sirve para recordarnos que n es un número entero positivo.

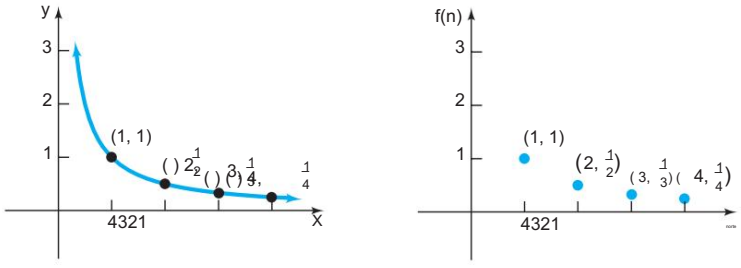


Figura 1 (a) f(x) 5 $\frac{1}{x}$, X . 0 (b) f(n) 5 $\frac{1}{n}$, un entero positivo

1 Enumere los primeros términos de una secuencia

Una secuencia generalmente se representa enumerando sus valores en orden. Por ejemplo, la secuencia cuyo gráfico se muestra en la Figura 1(b) podría representarse como

f112, f122, f132, f142, c o 1, 2 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, c

La lista nunca termina, como indican los puntos suspensivos. Los números de esta lista ordenada se denominan términos de la secuencia.

Al tratar con secuencias, se utilizan letras con subíndice, como a1 para representar el primer término, a2 para el segundo término, a3 para el tercer término, etc.

Para la secuencia f 1n2 = $\frac{1}{n}$, esto significa

a1 = f112 = 1, a2 = f122 = $\frac{1}{2}$, a3 = f132 = $\frac{1}{3}$, a4 = f142 = $\frac{1}{4}$, c, an = f1n2 = 88 8 8 8, 2 $\frac{1}{n}$, c

Primer periodo segundo período tercer término cuarto mandato enésimo término

Machine Translated by Google

En otras palabras, la notación de función tradicional f1n2 normalmente no se usa para secuencias. Para la secuencia f1n2 = $\frac{1}{n}$, tenemos una regla para el enésimo término, que es un = $\frac{1}{n}$, por lo que es fácil encontrar cualquier término de la secuencia.

Cuando se conoce una fórmula para el enésimo término (a veces llamado término general) de una secuencia, la secuencia completa se puede representar colocando llaves alrededor de la fórmula para el enésimo término.

Por ejemplo, la secuencia cuyo enésimo término es bn = a 1 $\frac{}{2 \text{ mil millones}}$ puede ser representado por

$$\frac{}{5 \text{ mil millones } 6 = \text{mi a1 2 segundo norte f}}$$

o enumerando los términos

$$b1 = 1,\ b2 = \frac{1}{2},\ b3 = 2\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{8},\ c,\ bn = a\ 1\ \frac{}{2 \text{ mil millones}},\ ^{c}$$

EJEMPLO 1 Listado de los primeros términos de una secuencia

Enumera los primeros seis términos de la secuencia 5an 6 y grafica.

$$5an\ 6 = e\ n - 1\ nf\ _$$

Solución Los primeros seis términos de la secuencia son

$$\frac{1 - 1}{1} = 0,\ a2 = a1 = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2},\ a3 = 2\ \frac{3 - 1}{3} = \frac{2}{3},\ a4 = \frac{3}{4},\ a5 = \frac{4}{5},\ a6 = 3\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}$$

Consulte la Figura 2 para ver el gráfico.

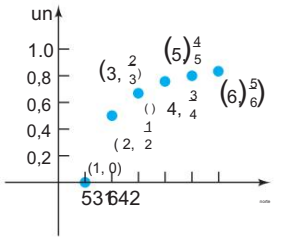


Figura 2 5an 6 = e n - 1 nf _

COMENTARIO Las utilidades gráficas se pueden utilizar para enumerar los términos de una secuencia y representarlos gráficamente. figura 3 muestra la secuencia e n - 1n f generado en una calculadora gráfica TI-84 Plus C. Los primeros seis términos de La secuencia se muestra en la ventana de visualización. La Figura 4 muestra un gráfico de la secuencia después de presionar Y = en el modo SECUENCIA e ingresar la fórmula para la secuencia. Tenga en cuenta que el primer término de la secuencia apenas es visible ya que se encuentra en el eje x. RASTREAR el gráfico le permitirá ver los términos de la secuencia. La función TABLE también se puede utilizar para generar los términos de la secuencia. Ver Tabla 1.

tabla 1

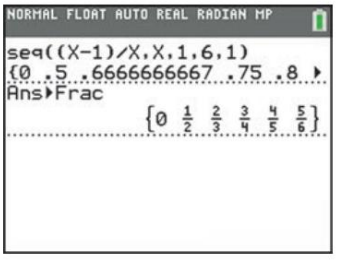


figura 3

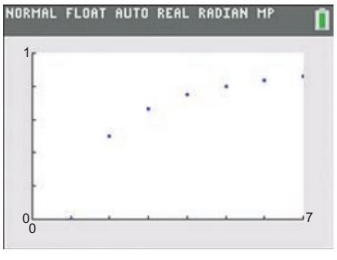
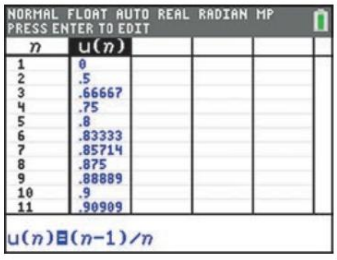


Figura 4



■

Ahora resuelve el problema 1 7

EJEMPLO 2 Listado de los primeros términos de una secuencia

Enumera los primeros seis términos de la secuencia 5bn 6 y grafica.

$$\frac{}{5 \text{ mil millones } 6 = e\ 1 - 12\ n+1\ a\ 2\ novio}$$

Machine Translated by Google

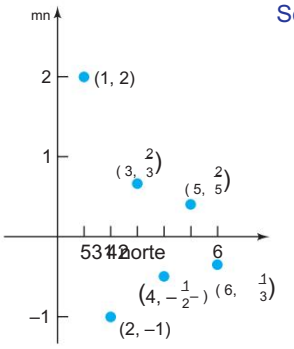


Figura 5 5 mil millones 6 = e 1 -12 n+1a-2novio

Solución Los primeros seis términos de la secuencia son

$$b1 = 1 - 12 \quad {}_{1+1\ un}{}^{-}{}_{2}\,b = 2,\ b2 = 1 - 12\ 2+1\ a\ 2\ \ {}^{-}{}_{2}\,b = -1,\ b3 = 1 - 12\ 3+1\ a\ 2\ \ {}^{-}{}_{3}\,b = \frac{2}{3},$$

$$b4 = -2\,\frac{1}{},\qquad b5 = \frac{2}{5},\qquad b6 = -3\,\frac{1}{}$$

Consulte la Figura 5 para ver el gráfico.

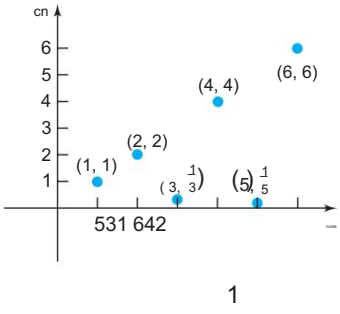
Tenga en cuenta que en la secuencia 5bn 6 del ejemplo 2, los signos de los términos se Esto ocurre cuando usamos factores como 1 - 12 $^{n+1}$, alternan. que es igual a 1 si n es impar y - 1 si n es par, o 1 - 12 n , que es igual a - 1 si n es impar y 1 si n es par.

EJEMPLO 3 Listado de los primeros términos de una secuencia

Enumera los primeros seis términos de la secuencia 5cn 6 y grafica.

$$5cn\ 6 = c\ n\ si\ n\ es\ si\ par\ s\ impar\ s \quad \frac{1}{}$$

Solución Los primeros seis términos de la secuencia son



1

Figura 6 5cn 6 = • n si n es par si n es impar ¶

$$c1 = \frac{1}{1} = 1,\ c2 = 2,\ c3 = ,\ c4 = 4\,\frac{1}{3}\ c5 = ,\ c6 = 6 \qquad \frac{1}{5}$$

Consulte la Figura 6 para ver el gráfico.

Ahora problema de trabajo 1 9

La fórmula que genera los términos de una secuencia no es única. Por ejemplo, Los términos de la secuencia en el Ejemplo 3 también se pueden encontrar usando

$$5dn6 = 5n1\text{-}12n6\ _$$

A veces, una secuencia se indica mediante un patrón observado en los primeros términos que permite inferir la composición del enésimo término. En los ejemplos que siguen, se dan suficientes términos de la secuencia como para sugerir una elección natural para el enésimo término.

EJEMPLO 4 Determinar una secuencia a partir de un patrón

(a) mi, $\frac{e2}{2}, \frac{e3}{3}, \frac{e4}{4}$, c un = $\frac{es}{norte}$

(b) 1, 3 $^{-}$, $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, $bn = \frac{1}{3n-1}$

(c) 1, 3, 5, 7,. . . (d) $cn = 2n - 1$

1, 4, 9, 16, 25, . . . 1 $dn = n2$

(mi) 1, - 2 $^{-}$, $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, c en = 1 - 12 $^{-}{}_{n-1\ unnb}$ _

Ahora resuelve el problema 2 7

El símbolo factorial

Algunas secuencias en matemáticas involucran un producto especial llamado factorial.

DEFINICIÓN Símbolo factorial

Si n Ú 0 es un número entero, el símbolo factorial n! se define de la siguiente manera:

- 0! = 1
- 1! = 1
- norte! = n1n - 12 # g # 3 # 2 # 1 si n Ú 2

Machine Translated by Google

Tabla 2

norte	¡norte!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720

Por ejemplo, 2! = 2 # 1 = 2, 3! = 3 # 2 # 1 = 6, 4! = 4 # 3 # 2 # 1 = 24, y así sucesivamente. La Tabla 2 enumera los valores de n! para 0… n … 6.

Porque

$$¡norte! = n1n - 12\ 1n - 22\ 8\# g\ \# 3\ \# 2\ \# 1$$

$$1n - 12!$$

la formula

$$¡norte! = n1n - 12!$$

se utiliza para encontrar factoriales sucesivos. Por ejemplo, porque 6! = 720,

$$7! = 7\ \# 6! = 7\ \# 720 = 5040$$

y

$$8! = 8\ \# 7! = 8\ \# 5040 = 40{,}320$$

Ahora problema de trabajo 1 1

Exploración

Utilice la clave factorial de su calculadora para ver qué tan rápido aumentan de valor los factoriales. Encuentra el valor de 69!. ¿Qué pasa cuando intentas encontrar 70? De hecho, ¡70! es mayor que 10100 (un googol), que es el número más grande que pueden mostrar la mayoría de las calculadoras.

2 Enumerar los términos de una secuencia definida por una fórmula recursiva

Una segunda forma de definir una secuencia es asignar un valor al primer (o los primeros) término(s) y especificar el enésimo término mediante una fórmula o ecuación que involucre uno o más de los términos que lo preceden. Se dice que tales secuencias se definen recursivamente y la regla o fórmula se denomina fórmula recursiva.

EJEMPLO 5 Listado de los términos de una secuencia definida recursivamente

Enumere los primeros cinco términos de la secuencia definida recursivamente

$$s1 = 1 \qquad sn = nsn\text{-}1$$

Solución El primer término se da como s1 = 1. Para obtener el segundo término, use n = 2 en la fórmula sn = nsn-1 para obtener s2 = 2s1 = 2 # 1 = 2. Para obtener el tercer término, use n = 3 en la fórmula para obtener s3 = 3s2 = 3 # 2 = 6. Para obtener un nuevo término es necesario conocer el valor del término anterior. Los primeros cinco términos son

$$s1 = 1$$
$$s2 = 2\ \# 1 = 2$$
$$s3 = 3\ \# 2 = 6$$
$$s4 = 4\ \# 6 = 24$$
$$s5 = 5\ \# 24 = 120$$

¿Reconoces esta secuencia? sn = n!

EJEMPLO 6 Listado de los términos de una secuencia definida recursivamente

Enumere los primeros cinco términos de la secuencia definida recursivamente

$$u1 = 1 \qquad u2 = 1 \qquad un = un\text{-}2 + un\text{-}1$$

Solución Se dan los dos primeros términos. Encontrar cada término sucesivo requiere conocer el dos términos anteriores. Eso es,

$$u1 = 1$$
$$u2 = 1$$
$$u3 = u1 + u2 = 1 + 1 = 2$$
$$u4 = u2 + u3 = 1 + 2 = 3$$
$$u5 = u3 + u4 = 2 + 3 = 5$$

Machine Translated by Google

La secuencia dada en el ejemplo 6 se llama secuencia de Fibonacci y los términos de la secuencia se llaman números de Fibonacci. Estos números aparecen en una amplia variedad de aplicaciones (véanse los problemas 85 a 88).

Ahora resuelve los problemas 3 5 y 4 3

3 Usar notación de suma

A menudo es importante encontrar la suma de los primeros n términos de una secuencia 5an 6, es decir

$$a1 + a2 + a3 + g + an$$

En lugar de escribir todos estos términos, utilizamos la notación sumatoria para expresar la suma de manera más concisa:

$$a1 + a2 + a3 + g + an = a \sum_{k=1}^{n} Alaska$$

El símbolo Σ (la letra griega sigma, que es una S en nuestro alfabeto) es simplemente una instrucción para sumar o sumar los términos. El número entero k se llama índice de la suma; indica dónde comenzar la suma y dónde terminarla. La expresion

$$\sum_{k=1}^{n} a \quad Alaska$$

es una instrucción para sumar los términos ak de la sucesión 5an 6 comenzando con k = 1 y terminando con k = n. La expresión se lee como “la suma de ak desde k = 1 hasta k = n”.

EJEMPLO 7 Notación de sumatoria expandible

Expande cada suma.

(un) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{}$ (b) $\sum_{k=1}^{n} ¡k!$

Solución (a) $\sum_{=1}^{n} \frac{1}{} = 1 + k\,k \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + g + \frac{1}{n}$ (b) $\sum_{k=1}^{n} ¡k! = 1! + 2! + g + n!$

Ahora resuelve el problema 5 1

EJEMPLO 8 Expresar una suma usando la notación sumatoria

Expresa cada suma usando la notación sumatoria.

(un) $1^2 + 22 + 32 + g + 92$ (b) $1 + 2 \quad \frac{1}{} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + g + \frac{1}{2n-1}$

Solución (a) La suma $1^2 + 22 + 32 + g + 92$ tiene 9 términos, cada uno de la forma $k2$, comenzando en k = 1 y terminando en k = 9:

$$2\,1 + 22 + 32 + g + 92 = a\,k2 \sum_{k=1}^{9}$$

(b) La suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + g + \frac{1}{2n-1}$$

tiene n términos, cada uno de la forma $\frac{1}{2k-1}$, comenzando en k = 1 y terminando en k = n:

$$1\,1 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + g + \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

Ahora resuelve el problema 6 1

Machine Translated by Google

El índice de suma no necesita comenzar en 1 ni terminar en n; por ejemplo, la suma en el Ejemplo 8(b) también podría expresarse como

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(1 + 2k\right) - \frac{1}{4} + g + \frac{1}{2n-1}$$

Otras letras además de k también se utilizan como índice. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} aj \text{ y } \sum_{i=1}^{n} i$$

ambos representan la misma suma dada en el ejemplo 7(b).

4 Encuentra la suma de una secuencia

El siguiente teorema enumera algunas propiedades de la notación de suma. Estas propiedades son útiles para sumar los términos de una secuencia.

TEOREMA Propiedades de la notación de suma

Si 5an 6 y 5bn 6 son dos secuencias y c es un número real, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} 1cak2 = ca1 + ca2 + g + can = c1a1 + a2 + g + an2 = c\sum_{k=1}^{n} ak \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} 1ak + bk2 = \sum_{k=1}^{n} ak + \sum_{k=1}^{n} bk \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} 1ak - bk2 = \sum_{k=1}^{n} y - \sum_{k=1}^{n} bk \quad (3)$$

$$\sum_{k=j+1}^{n} ak = \sum_{k=1}^{n} y - \sum_{k=1}^{j} ak \text{ donde } 0 6 j 6 n \quad (4)$$

La prueba de la propiedad (1) se deriva de la propiedad distributiva de los números reales. Las demostraciones de las propiedades (2) y (3) se basan en las propiedades conmutativas y asociativas de los números reales. La propiedad (4) establece que la suma de j + 1 an es igual a la suma de 1 an menos la suma de 1 an j. Esta propiedad es útil cuando el índice de suma comienza en un número mayor que 1.

El siguiente teorema proporciona algunas fórmulas para encontrar la suma de ciertos secuencias.

TEOREMA Fórmulas para sumas de los primeros n términos de una secuencia

$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + g + c}_{n \text{ términos}} = cn \quad c \text{ es un número real} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n} = 1 + 2 + 3 + g + n = \frac{n1n + 12}{2} \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k2 = 1^2 + 22 + 32 + g + n2 = \frac{n1n + 12\,12n + 12}{6} \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k3 = 1^3 + 23 + 33 + g + n3 = c\,n1n + 212\,d^2 \quad (8)$$

La prueba de la fórmula (5) se deriva de la definición de notación sumatoria. Se le pide que demuestre la fórmula (6) del problema 94. Las demostraciones de las fórmulas (7) y (8) requieren inducción matemática, que se analiza en la sección 12.4.

Machine Translated by Google

Observe la diferencia entre las fórmulas (5) y (6). En (5) la constante c se suma de 1 a n, mientras que en (6) el índice de suma k se suma de 1 a n.

EJEMPLO 9 Encontrar la suma de una secuencia

Encuentra la suma de cada secuencia.

$$\text{(a) } \sum_{k=1}^{5} 13k2 \qquad \text{(b) } \sum_{k=1}^{10} 1k3 + 12$$

$$\text{(c) } \sum_{k=1}^{24} 1k2 - 7k + 22 \qquad \text{(d) } \sum_{k=6}^{20} 14k22$$

Solución (a)
$$\sum_{k=1}^{5} 13k2 = 3a \sum_{k=1}^{5} k \qquad \text{Propiedad (1)}$$
$$= 3 \# \frac{515 + 12}{2} \qquad \bar{a}_{k\cdot1} k \cdot \frac{n1n \cdot 12}{2}$$
$$= 3 \# 15$$
$$= 45$$

$$\text{(b) } \sum_{k=1}^{10} 1k3 + 12 = \sum_{k=1}^{10} k3 + \sum_{k=1}^{10} 1 \qquad \text{Propiedad (2)}$$
$$= \text{un} \frac{10110 + 12}{2} \text{b}^{2} + 1 \# 10a \quad \bar{a}_{k\cdot1} k3 \cdot J \overline{n1n\,2\,12} \; ; \bar{a}_{k\cdot1} 1 \cdot 1 \sim \text{norte}$$
$$= 3025 + 10$$
$$= 3035$$

$$\text{(c) } \sum_{k=1}^{24} 1k2 - 7k + 22 = \sum_{k=1}^{24} k2 - \sum_{k=1}^{24} 17k2 + \sum_{k=1}^{24} 2 \qquad \text{Propiedades (2) y (3)}$$
$$= \sum_{k=1}^{24} k2 - 7a \sum_{k=1}^{24} k + a \sum_{k=1}^{24} 2 \qquad \text{Propiedad (1)}$$
$$= \frac{24124 + 12\ 12 \# 24 + 12}{6} - 7 \# \frac{24124 + 12}{2} + 2 \# 24 \qquad \text{Fórmulas (7), (6), (5)}$$
$$= 4900 - 2100 + 48$$
$$= 2848$$

(d) Observe que el índice de sumatoria comienza en 6. Utilice la propiedad (4) de la siguiente manera:

$$\sum_{k=6}^{20} 14k22 = 4a \sum_{k=6}^{20} k2 = 4J \text{ a} \sum_{k=1}^{20} k2 - \sum_{k=1}^{5} k2 \text{ R} = 4J \frac{20 \# 21 \# 41}{6} - \frac{5 \# 6 \# 11}{6R}$$

Propiedad (1) Propiedad (4) Fórmula (7)

$$= 432870 - 554 = 11,260$$

Ahora problema de trabajo 7 3

12.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

Para la función f 1x2 = $\frac{x - 1\ 1.}{x}$, Encuentre f122 y f132. (págs. 87–90)

2. Verdadero o Falso Una función es una relación entre dos conjuntos D y R de modo que cada elemento x en el primer conjunto D está relacionado exactamente con un elemento y en el segundo conjunto R. (págs. 85-87)

Machine Translated by Google

Conceptos y vocabulario

3. Un(n) _____ es una función cuyo dominio es el conjunto de entero positivo.

4. Verdadero o Falso La notación a5 representa el quinto término de una secuencia.

5. Verdadero o Falso Si n Ú 2 es un número entero, entonces

¡norte! = n1n - 12 g3 # 2 # 1

6. Opción múltiple La secuencia a1 = 5, an = 3an-1 es un ejemplo de a(n) _____ secuencia.
(a) alternante (b) recursivo
(c) Fibonacci (d) suma

7. La notación

$$a1 + a2 + a3 + g + an = a_{k=1}^{\text{Alaska}}$$

es un ejemplo de _____ notación.

8. Opción múltiple $\sum_{k=1}^{} k = 1 + 2 + 3 + gramo + norte =$ _____.

(¡un ! (b) $\frac{n1n + 12}{2}$

(c) nk (d) $\frac{n1n + 12\ 12n + 12}{6}$

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 14, evalúe cada expresión factorial.

9. 9! 10. 10! 11. $\frac{9!}{6!}$ 12. $\frac{12!}{10!}$ 13. $\frac{5!\ 8!}{3!}$ 14. $\frac{4!\ 11!}{7!}$

En los problemas 15 a 26, enumere los primeros cinco términos de cada secuencia.

15. 5sn6 = 5n2 + 16 16. 5sn6 = 5n6 17. 5an 6 = e n n + 2 f 18. 5 mil millones 6 = e2n + 1 f

19. 5cn 6 = 5 1 - 12 $^{n+1}$ n26 20. 5dn 6 = e1 - 12 n-1 un n2n - 1 bf 21. 5sn 6 = e a4 3 b n f 24. 22. 5sn 6 = b 3n2norte + 3r

23. 5an 6 = b 3n n r 5tn 6 = b 1n + 12 1n + 22 r 25. 5cn 6 = b n2 $\frac{1 - 12\ \text{norte}}{2nr}$ _ 26. 5 mil millones 6 = segundo n2n r

En los problemas 27 a 34, el patrón dado continúa. Escribe el enésimo término de una secuencia 5an 6 sugerida por el patrón.

27. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ^{c}$ 28. $\frac{1}{1\#2}, \frac{1}{2\#3}, \frac{1}{3\#4}, \frac{1}{4\#5}, ^{c}$ 29. 3 $\frac{2}{}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{\text{dieciséis}}{81}, ^{.c}$ 30. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ^{c}$

31. $1, , \frac{1}{3}, 5, , \frac{1}{4}, 2\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{8}$, c 32. 1, - 1, 1, - 1, 1, - 1, c 33. 2, - 4, 6, - 8, 10,c 34. 1, - 2, 3, - 4, 5, - 6, c

En los problemas 35 a 48, una secuencia se define de forma recursiva. Enumere los primeros cinco términos.

35. a1 = 2; an = 3 + an-1 36. a1 = 3; an = 4 - an-1 38. a1 = - 2; an = n + an-1 39. a1 = 2; un = - un-1

37. a1 = 1; an = n - an-1

40. a1 = 4; an = 3an-1

41. a1 = - 2; an = n + 3an-1 42. a1 = 3; un = $\frac{an-1}{\text{norte}}$

43. a1 = 1; a2 = 2; an = an-1 # an-2

44. a1 = - 1; a2 = 1; an = an-2 + nan-1 45. a1 = A; an = corrió-1 , $\frac{r \cdot 0}{}$

46. a1 = A; an = an-1 + d

47. a1 = 22; an = A an-1 $\frac{}{2}$ 48. a1 = 22; an = 22 + an-1

En los problemas 49 a 58, expanda cada suma.

49. $\sum_{k=1}^{} 12k + 12$ 50. $\sum_{k=1}^{} 1k + 22$ 51. $\sum_{k=1}^{} \frac{k2}{2}$ 52. $\sum_{k=1}^{} 1k + 12^{\ 2}$ 53. $\sum_{k=0}^{k} \text{un}_{\text{segundo}}$

54. $\sum_{k=0}^{} \frac{1}{3k}$ 55. $\sum_{k=0}^{n-1} 12k + 12$ 56. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+1}$ 57. $\sum_{k=3}^{} 1 - 12^{\ k+1\ 2k}$ 58. $\sum_{k=2}^{} 1 - 12^{k}$ en k

En los problemas 59 a 68, exprese cada suma usando notación sumatoria.

59. 1 + 23 + 33 + g+ 83

60. 1 + 2 + 3 + g+ 20

61. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + g + \frac{13}{13 + 1}$

62. 1 + 3 + 5 + 7 + g+ 321122 - 14

63. $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27}$ - sol+ 1 - 12 ^{11} 12 un segundo

64. 1 - $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$ + g+ 1 - 12 6 ¢ 36 ≤

$\frac{1}{\text{mi}} + \frac{2}{\text{e2}} + \frac{3}{\text{e3}}$ + g+ es $\frac{}{\text{norte}}$

66. 3 + $\frac{32}{2} + \frac{33}{3}$ +g+ $\frac{3n}{\text{norte}}$

2 67. a + ar + ar g+ ar n-1 +

68. a + 1a + d2 + 1a + 2d2 + g+ 1a + nd2

Machine Translated by Google

En los problemas 69 a 80, encuentre la suma de cada secuencia.

69. $\sum_{k=1}^{50} 8$

70. $\sum_{k=1}^{40} 5$

71. $\sum_{k=1}^{24} (1 - k2)$

72. $\sum_{k=1}^{40} k$

73. $\sum_{k=1}^{20} (15k + 32)$

74. $\sum_{k=1}^{26} (13k - 72)$

75. $\sum_{k=0}^{14} (1k2 - 42)$

76. $\sum_{k=1}^{} (1k2 + 42)$

77. $\sum_{k=8}^{40} (1-3k2 _$

78. $\sum_{k=10}^{60} 12k2$

79. $\sum_{k=4}^{24} k3$

80. $\sum_{k=5}^{20} k3$

Aplicaciones y extensiones

81. Deuda de tarjeta de crédito John tiene un saldo de $3000 en su tarjeta Discover que cobra 1% de interés mensual sobre cualquier saldo impago. John puede permitirse el lujo de pagar $200 del saldo cada mes. Su saldo cada mes después de realizar un pago de $200 viene dado por el definido recursivamente secuencia

B0 = $3000 mil millones = 1,01 mil millones-1 - 200

Determine el saldo de John después de realizar el primer pago.
Es decir, determine B1 .

82. Población de truchas Un estanque contiene actualmente 2000 truchas. Un criadero de peces decide agregar 20 truchas cada mes. También se sabe que la población de truchas crece a un ritmo del 3% mensual. El tamaño de la población después de n meses viene dado por la secuencia definida recursivamente

p0 = 2000 pn = 1.03pn-1 + 20

¿Cuántas truchas hay en el estanque después de 2 meses? Es decir, ¿qué es p2?

83. Préstamos para automóviles Phil compró un automóvil solicitando un préstamo por $26 300 al 0,9 % de interés mensual. El pago mensual normal de Phil es $485,32 por mes, pero decide que puede pagar $125 adicionales para el saldo cada mes. Su saldo cada mes viene dado por la secuencia definida de forma recursiva que se muestra a continuación.

B0 = $26.300 mil millones = 1.009 mil millones-1 - 610,32

Determine el saldo de Phil después de realizar el primer pago.
Es decir, determine B1 .

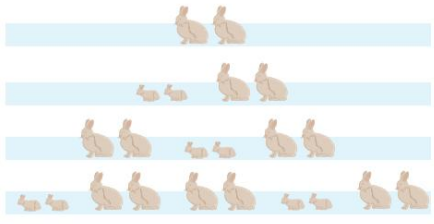
84. Control Ambiental La Agencia de Protección Ambiental (EPA) determina que Maple Lake tiene 250 toneladas de contaminantes como resultado de desechos industriales y que el 10% del contaminante presente es neutralizado por oxidación solar cada año.
La EPA impone nuevas leyes de control de la contaminación que resultan en la entrada al lago de 15 toneladas de nuevos contaminantes cada año.
La cantidad de contaminante en el lago después de n años viene dada por la secuencia definida recursivamente

p0 = 250 pn = 0,9pn-1 + 15

Determine la cantidad de contaminante en el lago después de 2 años.
Es decir, determine p2 .

85. Crecimiento de una colonia de conejos Una colonia de conejos comienza con un par de animales maduros, que producirán un par de crías (un macho y una hembra) después de dos meses. Suponga que todos los conejos maduran en 2 meses y producen un par de crías (un macho y una hembra) después de 4 meses. Si nunca muere ningún conejo, ¿cuántas parejas de conejos maduros quedan después de 10 meses?

[Pista: una secuencia de Fibonacci modela esta colonia.]

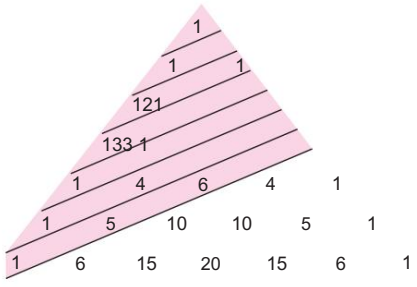


86. Secuencia de Fibonacci Let

$$un = \frac{11 + 252 \text{ norte} - 11 - 252 \text{ norte}}{2n\ 25}$$

definir el enésimo término de una secuencia.
(a) Demuestre que u1 = 1 y u2 = 1.
(b) Demuestre que un+2 = un+1 + un .
(c) Saque la conclusión de que 5un 6 es una secuencia de Fibonacci.

87. El triángulo de Pascal La matriz triangular que se muestra, llamada triángulo de Pascal, se divide usando líneas diagonales como se muestra. Encuentra la suma de los números en cada fila diagonal. ¿Reconoces esta secuencia?



88. Secuencia de Fibonacci Usa el resultado del problema 86 para hacer la siguientes problemas.
(a) Enumere los primeros 11 términos de la secuencia de Fibonacci.
(b) Enumere los primeros 10 términos de la razón $\frac{un+1}{___}$.
(c) A medida que n aumenta, ¿a qué número se aproxima la razón?
Este número se conoce como proporción áurea. Los griegos consideraban que los rectángulos cuyos lados estaban en esta proporción eran agradables a la vista. Por ejemplo, la fachada del Partenón se construyó utilizando la proporción áurea.
(d) Escriba los primeros 10 términos de la razón $\frac{un+1}{___}$.
(e) A medida que n aumenta, ¿a qué número se aproxima la razón?
Este número se conoce como proporción áurea conjugada. Se cree que esta proporción se utilizó en la construcción de la Gran Pirámide de Egipto. La proporción es igual a la suma de las áreas de las cuatro caras de los triángulos dividida por la superficie total de la Gran Pirámide.

Machine Translated by Google

89. Aproximar f1x2 · ex En cálculo, se puede demostrar que

$$f\,1x2 = ex = a \underset{k=0}{\overset{q}{} } \frac{xk}{¡k!}$$

Podemos aproximar el valor de f 1x2 = ex para cualquier x usando la siguiente suma

$$f\,1x2 = ex \approx a \underset{k=0}{\overset{-}{} } \frac{xk}{¡k!}$$

para algunos n.

(a) Aproximadamente f11.32 con n = 4.
(b) Aproximar f11.32 con n = 7.
(c) Utilice una calculadora para aproximar f11,32.
(d) Usando prueba y error, junto con el modo SEQuence de una utilidad gráfica, determine el valor de n requerido para aproximar f11.32 con ocho decimales.

90. Aproximación de f1x2 = ex Consulte el problema 89.
(a) Aproximar f 1 - 2,42 con n = 3.
(b) Aproximar f 1- 2,42 con n = 6.
(c) Utilice una calculadora para aproximar f 1 - 2,42.
(d) Usando prueba y error, junto con el modo SEQuence de una utilidad gráfica, determine el valor de n requerido para aproximar f 1-2.42 con ocho decimales.

91. Ley de Bode En 1772, Johann Bode publicó la siguiente fórmula para predecir las distancias medias, en unidades astronómicas (UA), de los planetas al sol:

$$a1 = 0{,}4 \qquad an = 0{,}4 + 0{,}3 \# 2n\text{-}2$$

donde n Ú 2 es el número del planeta desde el sol.
(a) Determine los primeros ocho términos de la secuencia.
(b) En el momento de la publicación de Bode, los planetas conocidos eran Mercurio (0,39 AU), Venus (0,72 AU), la Tierra (1 AU), Marte (1,52 AU), Júpiter (5,20 AU) y Saturno (9,54 AU). .

¿Cómo se comparan las distancias reales con los términos de la secuencia?
(c) El planeta Urano fue descubierto en 1781 y el asteroide Ceres fue descubierto en 1801. El orbital medio
las distancias del sol a Urano y Ceres* son 19,2 AU
y 2,77 AU, respectivamente. ¿Qué tan bien encajan estos valores dentro de la secuencia?
(d) Determine los términos noveno y décimo de la secuencia de Bode.
(e) Los planetas Neptuno y Plutón* fueron descubiertos en 1846 y 1930, respectivamente. Sus distancias orbitales medias al sol son 30,07 AU y 39,44 AU, respectivamente. ¿Cómo se comparan estas distancias reales con los términos de la secuencia?

(f) El 29 de julio de 2005, la NASA anunció el descubrimiento de un planeta enano* 1n = 112, que ha sido denominado Eris. Utilice la ley de Bode para predecir la distancia orbital media de Eris al sol. Su distancia media real aún no se conoce, pero Eris se encuentra actualmente a unas 97 unidades astronómicas del sol.
Fuente: NASA

92. Efecto Droste El Efecto Droste, llamado así por la imagen en las cajas de cacao en polvo Droste, se refiere a una imagen que contiene una versión más pequeña de la imagen, que a su vez contiene una versión aún más pequeña, y así sucesivamente. si cada uno
La versión de la imagen es la $\frac{1}{-}$ altura de la versión anterior, 5.
la altura de la enésima versión está dada por $an = \frac{1}{5}$ an-1. Supongamos
Una imagen de Droste en un paquete tiene una altura de 4 pulgadas.
¿Qué altura tendría la imagen en la sexta versión?

* Ceres, Haumea, Makemake, Plutón y Eris se conocen como planetas enanos.

93. Reflejos en un espejo Un espejo altamente reflectante refleja el 95% de la luz que incide sobre él. En una caja de luz que tiene paredes hechas de espejo, la luz se refleja de un lado a otro entre los espejos.

(a) Si la intensidad original de la luz es I0 antes de caer sobre un espejo, escriba el enésimo término de la secuencia que describe la intensidad de la luz después de n reflexiones.

(b) ¿Cuántas reflexiones se necesitan para reducir la intensidad de la luz en al menos un 98%?

94. Demuestra que

$$1 + 2 + \text{gramo+ } 1\text{norte} - 12 + \text{norte} = \frac{n1n + 12}{2}$$

[Pista: deja que

$$S = 1 + 2 + \text{gramo+ } 1\text{norte} - 12 + \text{norte}$$

$$S = \text{norte} + 1\text{norte} - 12 + 1\text{norte} - 22 + \text{gramo+ } 1$$

Suma estas ecuaciones. Entonces

$$2S = 31 + n4 + 32 + 1n - 12\ 4 + g+ 3n + 14$$

8
n términos entre paréntesis

Ahora completa la derivación.]

Calcular raíces cuadradas Un método para aproximar 1p se remonta a $\frac{-}{}$ los babilonios. La fórmula viene dada por la secuencia definida recursivamente

$$a0 = k \qquad an = \frac{1}{2}\left(an\text{-}1 + \frac{pag}{an\text{-}1}\right)$$

donde k es una estimación inicial del valor de la raíz cuadrada. Utilice esta fórmula recursiva para aproximar las siguientes raíces cuadradas encontrando a5 . Compare este resultado con el valor proporcionado por su calculadora.

95. $\sqrt{28}$ 96. $\sqrt{25}$ 97. $\sqrt{289}$ 98. $\sqrt{221}$

99. Números triangulares Un número triangular es un término de la secuencia

$$u1 = 1 \qquad un+1 = un + 1n + 12$$

Enumera los primeros siete números triangulares.

100. Problema de desafío Para la secuencia dada en el problema 99, muestra esa

$$un+1 = \frac{1n + 12\ 1n + 22}{2}.$$

101. Problema de desafío Para la secuencia dada en el problema 99, muestra esa

$$un+1 + un = 1n + 12^{2}$$

Machine Translated by Google

102. Problema de desafío Si los términos de una secuencia tienen la propiedad que $\frac{a1}{a2} = \frac{a2}{a3} = \cdots = \frac{an-1}{un}$, muestra que $\frac{a1}{a2} = \frac{a1}{un+1}$. [Sugerencia: Sea r igual a la razón común, de modo que $\frac{a1}{a2} = \frac{a2}{a3} = \cdots = \frac{an-1}{un} = r$.]

Explicar conceptos: discusión y escritura

103. Investigue diversas aplicaciones que conducen a una secuencia de Fibonacci, como en el arte, la arquitectura o los mercados financieros. Escribe un ensayo sobre estas aplicaciones.

104. Escribe un párrafo que explique por qué los números que se encuentran en El problema 99 se llama triangular.

Conserve su conocimiento

Los problemas 105 a 113 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

105. Si se invierten $2500 al 3% compuesto mensual, encuentre la cantidad que resulta después de un período de 2 años.

106. Escribe el número complejo - 1 - i en forma polar. Expresa el argumento en grados.

107. Para v = 2i - j y w = i + 2j, encuentre el producto escalar v # w.

108. Encuentra una ecuación de la parábola con vértice 1 - 3, 42 y foco 11, 42.

109. Encuentre la asíntota horizontal, si existe, de

$$f\,1x2 = \frac{9x}{3x2 - 2x - 1}$$

110. En un triángulo, el ángulo B es 4 grados menor que el doble de la medida del ángulo A, y el ángulo C es 11 grados menor que tres veces la medida del ángulo B. Calcula la medida de cada ángulo.

111. Encuentre la tasa de cambio promedio de y = tan1sec-1 x2 sobre intervalo $c\,\frac{el\,\overline{210}}{3}, 210\,d$.

112. Si f 1x2 = 5x2 - 2x + 9 y f 1a + 12 = 16, encuentre los valores posibles para a.

113. En cálculo, los números críticos para una función son números en el dominio de f donde f ′1x2 = 0 o f ′1x2 no está definido. Encuentre los números críticos para $f\,1x2 = \frac{x2 - 3x + 18}{x - 2}$ si $f\,'1x2 = \frac{x2 - 4x - 12}{1x - 22^2}$.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. $f122 = \frac{1}{2}$; $f132 = \frac{2}{3}$ 2. Verdadero

12.2 Secuencias aritméticas

OBJETIVOS 1 Determinar si una secuencia es aritmética (p. 862)
2 Encuentre una fórmula para una secuencia aritmética (p. 863)
3 Encuentra la suma de una secuencia aritmética (p. 865)

1 Determinar si una secuencia es aritmética

Cuando la diferencia entre términos sucesivos de una sucesión es siempre el mismo número, la sucesión se llama aritmética.

DEFINICIÓN Secuencia Aritmética

Una secuencia aritmética* se define recursivamente como a1 = a, an - an-1 = d, o como

$$a1 = un \qquad an = an-1 + d \tag{1}$$

donde a1 = a y d son números reales. El número a es el primer término y el número d se llama diferencia común.

*A veces llamada progresión aritmética

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1 Determinar si una secuencia es aritmética

La secuencia

4, 6, 8, 10, c

es aritmética ya que la diferencia de términos sucesivos es 2. El primer término es a1 = 4, y la diferencia común es d = 2.

EJEMPLO 2 Determinar si una secuencia es aritmética

Demuestre que la siguiente secuencia es aritmética. Encuentra el primer término y la diferencia común.

5sn6 = 53n + 56

Solución El primer término es s1 = 3 # 1 + 5 = 8. El enésimo término y el 1n - 12º término de la secuencia 5sn 6 son

sn = 3n + 5 y sn-1 = 31n - 12 + 5 = 3n + 2

Su diferencia d es

d = sn - sn-1 = 13n + 52 - 13n + 22 = 5 - 2 = 3

Como la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera es 3, 5sn 6 es una secuencia aritmética. La diferencia común es d = 3.

EJEMPLO 3 Determinar si una secuencia es aritmética

Demuestre que la secuencia 5tn 6 = 54 - n6 es aritmética. Encuentra el primer término y la diferencia común.

Solución El primer término es t1 = 4 - 1 = 3. El enésimo término y el 1n - 12º término son

tn = 4 - n y tn-1 = 4 - 1n - 12 = 5 - n

Su diferencia d es

d = tn - tn-1 = 14 - n2 - 15 - n2 = 4 - 5 = - 1

Como la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera es -1, 5tn 6 es una secuencia aritmética. La diferencia común es d = - 1.

Ahora trabaja el problema 9

2 Encontrar una fórmula para una secuencia aritmética

Supongamos que a es el primer término de una secuencia aritmética cuya diferencia común es d. Buscamos una fórmula para el enésimo término, an. Para ver el patrón, considere los primeros términos.

a1 = un

a2 = a1 + d = a1 + 1 # d

a3 = a2 + d = 1a1 + d2 + d = a1 + 2 # d

a4 = a3 + d = 1a1 + 2 # d2 + d = a1 + 3 # d

a5 = a4 + d = 1a1 + 3 # d2 + d = a1 + 4 # d

an = an-1 + d = 3a1 + 1n - 22d4 + d = a1 + 1n - 12d

Los términos de una secuencia aritmética con el primer término a1 y diferencia común d siguen el patrón

a1, a1 + d, a1 + 2d, a1 + 3d, c

Machine Translated by Google

TEOREMA Término enésimo de una secuencia aritmética

Para una secuencia aritmética 5an 6 cuyo primer término es a1 y cuya diferencia común es d, el enésimo término está determinado por la fórmula

an = a1 + 1n - 12d n un entero positivo (2)

EJEMPLO 4 Encontrar un término particular de una secuencia aritmética

Encuentra el término 41 de la secuencia aritmética: 2, 6, 10, 14, 18,. . .

Solución El primer término de la secuencia aritmética es a1 = 2, y la diferencia común es d = 4. Por la fórmula (2), el enésimo término es

an = 2 + 1n - 124 = 4n - 2 an · a1 · 1n · 12d

El término 41 es

a41 = 4 # 41 - 2 = 164 - 2 = 162

Ahora resuelve el problema 2 5

EJEMPLO 5 Encontrar una fórmula recursiva para una secuencia aritmética

El octavo término de una secuencia aritmética es 75 y el vigésimo término es 39.

(a) Encuentre el primer término y la diferencia común.
(b) Encuentre una fórmula recursiva para la secuencia.
(c) ¿Cuál es el enésimo término de la secuencia?

Solución (a) El enésimo término de una secuencia aritmética es an = a1 + 1n - 12d. Como resultado,

segundo a8 = a1 + 7d = 75
a20 = a1 + 19d = 39

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales que contienen dos variables, a1 y d, que se pueden resolver mediante eliminación. Restar la segunda ecuación de la primera da

- 12d = 36
re = - 3

Con d = - 3, usa a1 + 7d = 75 para encontrar que a1 = 75 - 7d = 75 - 71 - 32 = 96.
El primer término es a1 = 96 y la diferencia común es d = - 3.

(b) Usando la fórmula (1), una fórmula recursiva para esta secuencia es

a1 = 96 an = an-1 - 3

(c) Usando la fórmula (2), el enésimo término de la secuencia 5an 6 es

an = a1 + 1n - 12d = 96 + 1n - 12 1 - 3) = 99 - 3n

Ahora resuelve los problemas 1 7 y 3 1

Exploración

Grafica la fórmula recursiva del Ejemplo 5, a1 = 96, an = an-1 - 3, usando una utilidad gráfica. Concluya que la gráfica de la fórmula recursiva se comporta como la gráfica de una función lineal. ¿Cómo se relaciona d, la diferencia común, con m, la pendiente de una recta?

Machine Translated by Google

3 Encuentra la suma de una secuencia aritmética

El siguiente teorema proporciona dos fórmulas para encontrar la suma de los primeros n términos de una secuencia aritmética.

TEOREMA Suma de los primeros n términos de una secuencia aritmética

Supongamos que 5an 6 es una secuencia aritmética con el primer término a1 y diferencia común d. La suma Sn de los primeros n términos de 5an 6 se puede encontrar de dos maneras:

$$Sn = a1 + a2 + a3 + g + an$$

$$= \frac{n}{2}\,32a1 + 1n - 12d4\ 2 \qquad (3)$$

$$= \frac{n}{2}\,1a1 + an2\ 2 \qquad (4)$$

Prueba

$Sn = a1 + a2 + a3 + g + an$ Suma de los primeros n términos

$= a1 + 1a1 + d2 + 1a1 + 2d2 + g + 3a1 + 1n - 12d4$ Fórmula (2)

$= 1a\ 81^{+}\ a1 + g + a12 + 3d + 2d + g + 1n - 12d4$ Reordenar términos.

n términos

$= na1 + d31 + 2 + g + 1n - 12\ 4$

$= na1 + d\ \#\ 2\ \frac{1n - 12n}{}\ \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \frac{1n \cdot 12n}{2}$

$= na1 + \frac{n}{2}\,1n - 12d$

$= \frac{n}{2}\,32a1 + 1n - 12d4$ Factorizar $\frac{n}{2}$; esta es la fórmula (3).

$= \frac{n}{2}\,3a1 + a1 + 1n - 12d4$

$= \frac{n}{2}\,1a1 + an2\ 2$ un · a1 · 1n · 12d; esta es la fórmula (4). ■

Hay dos formas de encontrar la suma de los primeros n términos de una secuencia aritmética. La fórmula (3) usa el primer término y la diferencia común, y la fórmula (4) usa el primer término y el enésimo término. Utilice la forma que le resulte más fácil.

EJEMPLO 6 Encontrar la suma de una secuencia aritmética

Encuentre la suma Sn de los primeros n términos de la secuencia aritmética

$$8 + 11 + 14 + 17 + g$$

Solución La secuencia es una secuencia aritmética con el primer término a1 = 8 y la diferencia común d = 11 - 8 = 3. Para encontrar la suma de los primeros n términos, use la fórmula (3).

$$Sn = \frac{n}{2c}\,32\ \#\ 8 + 1n - 12\ \#\ 34 = 2\ \frac{n}{}\,13n + 132$$

$$Sn \cdot \frac{n}{2}\,32a1 \cdot 1n \cdot 12d4$$

Ahora resuelve el problema 3 9

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Encontrar la suma de una secuencia aritmética

Encuentra la suma: 60 + 64 + 68 + 72 + g + 120

Solución Esta es la suma Sn de una secuencia aritmética 5an 6 cuyo primer término es a1 = 60 y cuya diferencia común es d = 4. El enésimo término es an = 120. Utilice la fórmula (2) para encontrar n.

an = a1 + 1n - 12d	Fórmula (2)
120 = 60 + 1n - 12 # 4	un · 120, a1 · 60, d · 4
60 = 41norte - 12	Simplificar.
15 = norte - 1	Simplificar.
norte = 16	Resuelve para n.

Ahora usa la fórmula (4) para encontrar la suma S16.

$$60 + 64 + 68 + g + 120 = S16 = c \qquad \frac{\text{dieciséis}}{2} 160 + 1202 = 1440$$

$$Sn \cdot \frac{\text{norte}}{2} 1a1 \cdot un\ 2$$

Ahora resuelve el problema 4 3

EJEMPLO 8 Crear un diseño de piso

Un piso de baldosas de cerámica está diseñado en forma de trapezoide de 20 pies de ancho en la base y 10 pies de ancho en la parte superior. Vea la Figura 7. Las losetas, que miden 12 pulgadas por 12 pulgadas, deben colocarse de modo que cada fila sucesiva contenga una loseta menos que la fila anterior. ¿Cuántas fichas se necesitarán?

Solución

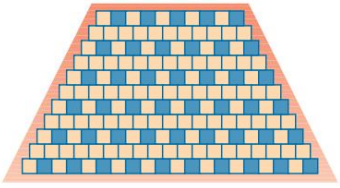


Figura 7

La fila inferior requiere 20 fichas y la fila superior, 10 fichas. Dado que cada fila sucesiva requiere una ficha menos, el número total de fichas necesarias es

$$S = 20 + 19 + 18 + g + 11 + 10$$

Esta es la suma de una secuencia aritmética; la diferencia común es - 1. El número de términos que se agregarán es n = 11, con el primer término a1 = 20 y el último término a11 = 10.
La suma S es

$$S = \frac{\text{norte}}{} 1a1 + a112 = 2 \quad \frac{11}{2} 120 + 102 = 165$$

En total, se necesitarán 165 fichas.

12.2 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. En un(s) _____ secuencia, la diferencia entre términos sucesivos es una constante.
2. Verdadero o Falso Para una secuencia aritmética 5an 6 cuyo primer término es a1 y cuya diferencia común es d, el enésimo término está determinado por la fórmula an = a1 + nd.
3. Si el quinto término de una secuencia aritmética es 12 y la diferencia común es 5, entonces el sexto término de la secuencia es .
4. Verdadero o Falso La suma Sn de los primeros n términos de una secuencia aritmética 5an 6 cuyo primer término es a1 se encuentra usando la fórmula Sn = $\frac{\text{norte}}{2}$ 1a1 + an2.
5. Opción múltiple Una secuencia aritmética siempre puede ser expresado como una (n) secuencia.
   (a) Fibonacci (b) alternando
   (c) creciente (d) recursivo
6. Opción múltiple Si an = - 2n + 7 es el enésimo término de una secuencia aritmética, el primer término es . _____
   (a) - 2 (b) 0
   (c) 5 (d) 7

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 16, demuestre que cada secuencia es aritmética. Encuentra la diferencia común y enumera los primeros cuatro términos.

7. 5sn 6 = 5n - 56
8. 5sn6 = 5n + 46
9. 5an 6 = 52n - 56
10. 5 mil millones 6 = 53 n + 16
11. 5an 6 = 54 - 2n6
12. 5cn6 = 56 - 2n6
13. 5tn6 = e2 $\frac{}{3}$ + $\frac{\text{norte}}{4f}$
14. 5tn6 = e1 $\frac{}{2}$ - $\frac{1}{3}$ nf _
15. 5sn 6 = 5elnn 6
16. 5sn 6 = 5ln 3n 6

En los problemas 17 a 24, encuentre el enésimo término de la secuencia aritmética 5an 6 cuyo primer término a1 y la diferencia común d están dados. ¿Cuál es el mandato 51?

17. a1 = 2; re = 3
18. a1 = - 2; re = 4
19. a1 = 6; re = - 2
20. a1 = 8; re = - 7
21. a1 = 1; re = - 3 $\frac{1}{}$
22. a1 = 0; re = 2 $\frac{1}{}$
23. a1 = 0; re = pag
24. a1 = 22; re = 22

En los problemas 25 a 30, encuentre el término indicado en cada secuencia aritmética.

25. Término 100 de 2, 4, 6,. . .
26. 80.o término de - 1, 1, 3, c
27. 80.o término de 5, 0, - 5, c
28. 90.º término de 3, - 3, - 9, c
29. 70.º término de 225, 425, 625, c
30. 80.º término de 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, c

En los problemas 31 a 38, encuentre el primer término y la diferencia común de la secuencia aritmética descrita. Encuentra una fórmula recursiva para la secuencia. Encuentra una fórmula para el enésimo término.

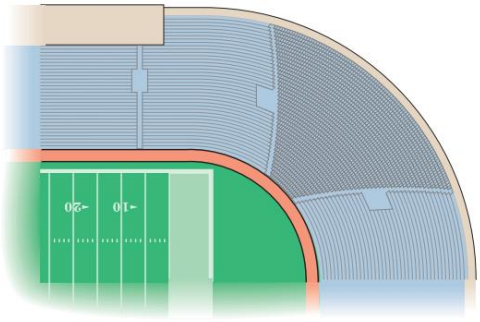
31. El octavo término es 8; el vigésimo término es 44
32. El cuarto término es 3; El vigésimo término es 35
33. El octavo término es 4; El término 18 es - 96.
34. el noveno término es - 5; el término 15 es 31
35. El quinto término es - 2; El decimotercer término es 30
36. El decimoquinto término es 0; El término 40 es - 50
37. el término 12 es 4; El término 18 es 28.
38. El decimocuarto término es - 1; El término 18 es - 9.

En los problemas 39 a 56, encuentre cada suma.

39. 1 + 3 + 5 + g+ 12n - 12
40. 2 + 4 + 6 + g+ 2n
41. - 1 + 3 + 7 + g+ 14n - 52
42. 7 + 12 + 17 + g+ 12 + 5n2
43. 2 + 4 + 6 + g+ 70
44. 1 + 3 + 5 + g+ 59
45. 2 + 5 + 8 + g + 41
46. - 9 - 5 - 1 + g+ 39
47. 7 + 1 - 5 - 11 - g- 299
48. 93 + 89 + 85 + g - 287
49. 8 + 8 $\frac{1}{}$ + 8 $\frac{1}{2}$ + 8 $\frac{3}{4}$ + 9 + g+ 50 4
50. 4 + 4,5 + 5 + 5,5 + g + 100
51. $\sum_{norte=1}^{90}$ un 13 - 2n2
52. $\sum_{norte=1}^{80}$ un 14n - 92
53. $\sum_{norte=1}^{80}$ un $\frac{}{3}$ norte + $\frac{1}{}$ un-1 2 segundo
54. $\sum_{norte=1}^{100}$ un $\frac{1}{}$ a6 - 2 nótese bien
55. La suma de los primeros 46 términos de la secuencia. 2, - 1, - 4, - 7, c
56. La suma de los primeros 120 términos de la secuencia. 14, 16, 18, 20, c

Aplicaciones y extensiones

57. Encuentra x de modo que x + 3, 2x + 1 y 5x + 2 sean consecutivos términos de una secuencia aritmética.
58. Encuentra x de modo que 2x, 3x + 2 y 5x + 3 sean términos consecutivos de una secuencia aritmética.
59. ¿Cuántos términos hay que sumar en una sucesión aritmética cuyo primer término es 11 y cuya diferencia común es 3 para obtener una suma de 1092?
60. ¿ Cuántos términos hay que sumar en una sucesión aritmética cuyo primer término es 78 y cuya diferencia común es - 4? para obtener una suma de 702?
61. Asientos de teatro Un teatro tiene 17 asientos en la primera fila y 31 filas en total. Cada fila sucesiva contiene un asiento adicional. ¿Cuantos asientos hay en el teatro?
62. Asientos en un anfiteatro Un anfiteatro al aire libre tiene 35 asientos en la primera fila, 37 en la segunda fila, 39 en la tercera. fila, etcétera. Hay 27 filas en total. ¿Cuántas personas tiene capacidad para el anfiteatro?
63. Estadio de fútbol La sección de esquina de un estadio de fútbol tiene 15 asientos en la primera fila y 40 filas en total. Cada sucesivo La fila contiene dos asientos adicionales. ¿Cuántos asientos hay en esta sección?



Machine Translated by Google

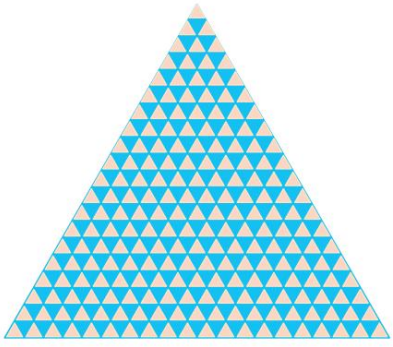
64. Construir una escalera de ladrillos Una escalera de ladrillos tiene un total de 30 escalones. El paso inferior requiere 100 ladrillos. Cada paso sucesivo requiere dos ladrillos menos que el paso anterior.
(a) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el escalón superior?
(b) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir la escalera?

65. Salario Si acepta un trabajo con un salario inicial de $35 000 por año y un aumento garantizado de $1400 por año, ¿cuántos años pasarán antes de que su salario total sea de $280 000?

[Pista: recuerde que su salario total después de 2 años es $35 000 + 1 $35 000 + $14 002.]

66. Construcción del estadio ¿ Cuántas filas hay en la sección de la esquina de un estadio que contiene 2040 asientos si la primera fila tiene 10 asientos y cada fila sucesiva tiene 4 asientos adicionales?

67. Crear un mosaico Un mosaico está diseñado en forma de triángulo equilátero, de 16 pies de cada lado. Cada mosaico del mosaico tiene la forma de un triángulo equilátero de 12 pulgadas de lado. Los mosaicos deben alternar colores como se muestra en la ilustración. ¿Cuántas fichas de cada color se necesitarán?



68. Old Faithful Old Faithful es un géiser en el Parque Nacional de Yellowstone llamado así por su patrón de erupción regular. Los datos anteriores indican que el tiempo medio entre erupciones es de 1h 35m.
(a) Suponga que los guardabosques registran la primera erupción en un día determinado a las 0:57 am. Usando a1 = 57, escribe una fórmula de predicción para la secuencia de tiempos de erupción ese día en términos del número de minutos después de la medianoche.
(b) ¿ A qué hora del día (por ejemplo, a las 7:15 am) se espera que ocurra la décima erupción?
(c) ¿ A qué hora del día se espera que ocurra la última erupción? ¿ocurrir?

69. Aire de enfriamiento A medida que una porción de aire asciende, se enfría a la velocidad de 3.5°F por 1000 pies hasta alcanzar su punto de rocío. Si la temperatura del suelo es 77°F, escribe una fórmula para la secuencia de temperaturas, {Tn}, de una porción de aire que se ha elevado n mil pies. ¿Cuál es la temperatura de una masa de aire si ha subido 6000 pies?

Fuente: Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio

70. Escaleras para cítricos Las escaleras utilizadas por los recolectores de frutas suelen ser cónicas, con una parte inferior ancha para mayor estabilidad y una parte superior estrecha para facilitar la recolección. Si el peldaño inferior de dicha escalera tiene 49 pulgadas de ancho y el peldaño superior tiene 24 pulgadas de ancho, ¿cuántos peldaños tiene la escalera si cada peldaño es 2,5 pulgadas más corto que el que está debajo? ¿Cuánto material se necesitaría para hacer los peldaños de la escalera descrita?

Fuente: www.stokesladders.com

71. Problema de desafío Supongamos que 5an 6 es una secuencia aritmética. Si Sn es la suma de los primeros n términos de 5an 6, y es un Sn $\frac{S2n}{}$ constante positiva para todo n, encuentre una expresión para el enésimo término, an, en términos de solo n y la diferencia común, d.

72. Problema de desafío Si 5an 6 es una secuencia aritmética con 100 términos donde a1 = 2 y a2 = 9, y 5bn 6 es una secuencia aritmética con 100 términos donde b1 = 5 y b2 = 11, ¿cuántos términos son iguales en cada secuencia?

Explicar conceptos: discusión y escritura

73. Inventa una secuencia aritmética. Dáselo a un amigo y pídele su vigésimo término.

74. Describe las similitudes y diferencias entre la aritmética. sucesiones y funciones lineales.

Conserve su conocimiento

Los problemas 75 a 84 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

75. Si una tarjeta de crédito cobra un interés compuesto mensual del 15,3%, encuentre la tasa de interés efectiva.

76. El vector v tiene un punto inicial P = 1 - 1, 22 y un punto terminal Q = 13, - 42. Escribe v en la forma ai + bj; es decir, encuentre su vector de posición.

77. Analiza y grafica la ecuación: 25x2 + 4y2 = 100

78. Encuentra la inversa de la matriz c 2 3 - 1 d , 0 si existiera; en caso contrario, indique que la matriz es singular.

79. Encuentra la descomposición en fracciones parciales de $\frac{3x}{x3 - 1}$.

80. Encuentra el valor exacto de sin2 $\frac{5p}{8}$ - cos2 $\frac{5p}{8}$.

81. Si g es una función con dominio 3 - 4, 104, ¿cuál es el dominio de la función 2g1x - 12?

82. Encuentra los ceros reales de

$$h1x2 = \frac{1x4 + 12 \# 2x - 1x2 - 12 \# 4x3}{1x4 + 12}$$

83. Identifica la curva dada por la ecuación 6y2 + 241x + y2 - 12x2 = 0

84. Resuelve: 1x + 32 ^{2} = 1x + 32 1x - 52 + 7

Machine Translated by Google

12.3 Secuencias Geométricas; Series geométricas

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:
• Interés compuesto (Sección 5.7, págs. 361–367)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 877.

OBJETIVOS 1 Determinar si una secuencia es geométrica (p. 869)
2 Encuentra una fórmula para una secuencia geométrica (p. 870)
3 Encuentra la suma de una secuencia geométrica (p. 871)
4 Determinar si una serie geométrica converge o diverge (p. 872)
5 Resolver problemas de anualidades (p. 875)

1 Determinar si una secuencia es geométrica

Cuando la razón de los términos sucesivos de una secuencia es siempre el mismo número distinto de cero, la secuencia se llama geométrica.

DEFINICIÓN Secuencia Geométrica

Una secuencia geométrica* se define recursivamente como a1 = a, $\frac{un}{an-1}$ = r, o como

$$a1 = a \quad an = corrió-1 \qquad (1)$$

donde a1 = a y r · 0 son números reales. El número a1 es el primer término y el número r distinto de cero se llama razón común.

EJEMPLO 1 Determinar si una secuencia es geométrica

La secuencia

$$2, 6, 18, 54, 162, c$$

es geométrico porque la razón de términos sucesivos es 3; un $\frac{}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18}$ = gramo = 3b.
El primer término es a1 = 2 y la razón común es 3.

EJEMPLO 2 Determinar si una secuencia es geométrica

Demuestre que la siguiente secuencia es geométrica.

$$5sn6 = 52- n6$$

Encuentra el primer término y la razón común.

Solución

El primer término de la secuencia es s1 = 2-1 = $\frac{1}{2}$. El enésimo término y el 1n - 12.° término de la secuencia 5sn 6 son

$$sn = 2\text{-}n \text{ y } sn\text{-}1 = 2\text{-}1n\text{-}12$$

Su proporción es

$$\frac{sn}{sn\text{-}1} = \frac{2\text{-norte}}{2\text{-}1n\text{-}12} = 2\text{-}n + 1n\text{-}12 = 2\text{-}1 = \frac{1}{2}$$

Porque la razón de términos sucesivos es la constante distinta de cero $\frac{1}{2}$, la secuencia 5sn 6 es geométrico y la razón común es $\frac{1}{2}$.

*A veces se le llama progresión geométrica.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3

Determinar si una secuencia es geométrica

Demuestre que la siguiente secuencia es geométrica.

$$5tn\ 6 = 53\ \#\ 4n\ 6$$

Encuentra el primer término y la razón común.

Solución El primer término es t1 = 3 # 41 = 12. El enésimo término y el 1n - 12º término son

$$tn = 3\ \#\ 4n \text{ y } tn-1 = 3\ \#\ 4n-1$$

Su proporción es

$$\frac{tn}{tn-1} = \frac{3\ \#\ 4n}{3\ \#\ 4n-1} = 4n-\ 1n-12 = 4$$

La secuencia, 5tn 6, es una secuencia geométrica con razón común 4.

Ahora problema de trabajo 1 1

2 Encuentra una fórmula para una secuencia geométrica

Supongamos que a1 es el primer término de una secuencia geométrica con razón común r · 0. Buscamos una fórmula para el enésimo término, an. Para ver el patrón, considere los primeros términos:

$$a1 = a1\ \#\ 1 = a1r^{0}$$

$$a2 = ra1 = a1r^{1}$$

$$a3 = ra2 = r1a1r2 = a1r^{2}$$

$$a4 = ra3 = r1a1r\ 22 = a1r^{3}$$

$$a5 = ra4 = r1a1r\ 32 = a1r^{4}$$

$$an = corrió-1 = r1a1r\ n-22 = a1r^{n-1}$$

Los términos de una secuencia geométrica con el primer término a1 y razón común r siguen el patrón

$$a1, a1r, a1r^{2}, a1r^{3},$$

TEOREMA Término enésimo de una sucesión geométrica

Para una secuencia geométrica 5an 6 cuyo primer término es a1 y cuya razón común es r, el enésimo término está determinado por la fórmula

$$un = a1r^{n-1} \qquad r \cdot 0 \qquad (2)$$

EJEMPLO 4

Encontrar un término particular de una secuencia geométrica

(a) Encuentre el enésimo término de la secuencia geométrica: $10, 9, \frac{81}{10}, \frac{729}{100},$

(b) Encuentre el noveno término de la secuencia.

(c) Encuentre una fórmula recursiva para la secuencia.

Machine Translated by Google

Solución (a) El primer término de la secuencia geométrica es a1 = 10. La razón común r = $\frac{un}{es\ un-1}$ la razón de dos términos cualesquiera consecutivos. Entonces, r $\frac{a2}{= a1} = \frac{9}{10.}$ Luego, por la fórmula (2), el enésimo término de la secuencia geométrica es

$$un = 10\ un\ 9_{segundo}^{n-1} \qquad un \cdot a1rn-1;\ a1 \cdot 10,\ r \cdot \frac{9}{10}$$

(b) El noveno término es

$$a9 = 10a\ 9_{10\ segundo}^{9-1} = 10a\ 9_{10\ segundo}^{8} = 4{,}3046721$$

(c) El primer término de la secuencia es 10 y la razón común es r = Usando 10. $\frac{9}{}$ fórmula (1), la fórmula recursiva es a1 = 10, an = $\frac{9}{10}$ an-1.

Exploración

Utilice una herramienta gráfica para encontrar el noveno término de la secuencia del Ejemplo 4. Úselo para encontrar los términos 20 y 50.

Ahora use una utilidad gráfica para representar gráficamente la fórmula recursiva que se encuentra en el ejemplo 4(c). Concluya que la gráfica de la fórmula recursiva se comporta como la gráfica de una función exponencial. ¿Cómo se relaciona r, la razón común, con a, la base de la función exponencial y = ax ?

Ahora problemas de trabajo 1 9 , 2 7 y 3 5

3 Encuentra la suma de una secuencia geométrica

TEOREMA Suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica

Sea 5an 6 una secuencia geométrica con el primer término a1 y razón común r, donde r · 0, r · 1. La suma Sn de los primeros n términos de 5an 6 es

$$Sn = a1 + a1r + a1r^2 + g + a1r^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a1rk^{k-1}$$

$$= a1\ \#\ \frac{1-r^{n}}{1-r} \qquad r \cdot 0,\ 1 \qquad (3)$$

Prueba La suma Sn de los primeros n términos de 5an 6 = 5a1r n-16 es

$$Sn = a1 + a1r + g + a1r^{n-1} \qquad (4)$$

Multiplica ambos lados por r para obtener

$$rSn = a1r + a1r^2 + g + a1r^{n} \qquad (5)$$

Ahora, resta (5) de (4). El resultado es

$$Sn - rSn = a1 - a1r\ 11^{n}$$

$$-\ r2Sn = a1\ 11 - r\ n2$$

Dado que r · 1, resuelve para Sn .

$$Sn = a1\ \#\ \frac{1-r^{n}}{1-r}$$

■

EJEMPLO 5 Encontrar la suma de los primeros n términos de una secuencia geométrica

Encuentre la suma Sn de los primeros n términos de la secuencia e a1 2 b n f; es decir, encontrar

$$\sum_{k=1}^{n} a\ un\ 1_{segundo}^{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + g + un\ 1_{2\ mil\ millones}$$

Machine Translated by Google

Solución La secuencia e a1 2 b n f es una secuencia geométrica con a1 = $\frac{1}{2}$ 1 yr = . Utilice 2 fórmula (3) para obtener

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{g} + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{2}, \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{Fórmula (3); } a_1 \cdot \frac{1}{2}, r \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}, \frac{1 - a_1 2^n}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - a_1 2^n$$

Ahora resuelve el problema 4 1

EJEMPLO 6 Usar una utilidad gráfica para encontrar la suma de una secuencia geométrica

Utilice una herramienta gráfica para encontrar la suma de los primeros 15 términos de la secuencia e a1 3 b n f; es decir, encontrar

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \text{g} + a_1 3^{15}$$

Solución La Figura 8 muestra el resultado usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C. la suma de la

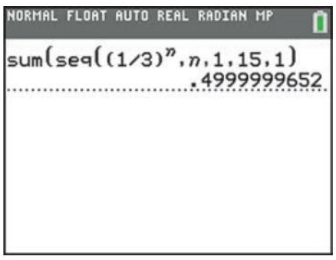


Figura 8

Los primeros 15 términos de la secuencia e a1 3 b n f son aproximadamente 0,4999999652.

Ahora problema de trabajo 4 7

4 Determinar si una serie geométrica Converge o diverge

DEFINICIÓN Serie Geométrica Infinita

Una suma infinita de la forma

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \text{g} + a_1 r^{n-1} + \text{g}$$

con primer término a1 y razón común r, se llama serie geométrica infinita y se denota por

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$$

La suma Sn de los primeros n términos de una serie geométrica es

$$S_n = a_1 + a_1 \# r + a_1 \# r^2 + \text{g} + a_1 \# r^{n-1} \qquad (6)$$

Machine Translated by Google

Si esta suma finita Sn se acerca a un número L como n S q, entonces la serie geométrica infinita $\sum_{k=1}^{q} a_{1}r^{k-1}$ converge a L y L se llama suma del infinito geométrico serie. La suma se escribe como

$$L = \sum_{k=1}^{q} a_{1}r^{k-1}$$

Una serie que no converge se llama serie divergente.

TEOREMA Convergencia de una serie geométrica infinita

Si 0r0 6 1, la serie geométrica infinita $\sum_{k=1}^{q} a_{1}r^{k-1}$ converge. Su suma es

$$\sum_{k=1}^{q} a_{1}r^{k-1} = \frac{a_{1}}{1-r} \qquad (7)$$

Prueba intuitiva

• Si r = 0, entonces Sn = a1 + 0 + g+ 0 = a1, entonces la fórmula (7) es verdadera para r = 0. • Si r · 0 y ·r· 6 1, entonces, según la fórmula (3) ,

$$S_n = a_1 \# \frac{1-r^{n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1 r^{n}}{1-r} \qquad (8)$$

Dado que ·r· 6 1, se deduce que 0r n 0 tiende a 0 cuando n S q. Entonces, en la fórmula (8), el término $a_1 r^{n}$ tiende a 0, por lo que la suma Sn se acerca como n S q. $\frac{a_1}{1-r}$ ■

EJEMPLO 7 Determinar si una serie geométrica converge o diverge

Determinar si la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{q} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + g$$

converge o diverge. Si converge, encuentre su suma.

Solución Comparando $\sum_{k=1}^{q} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ a $\sum_{k=1}^{q} a_{1}r^{k-1}$, el primer término es a1 = 2 y la razón común es $r = \frac{2}{3}$. Como 0r0 6 1, la serie converge. Utilice la fórmula (7) para encontrar su suma:

$$\sum_{k=1}^{q} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \text{gramo} = \frac{2}{2\,1\,-\frac{2}{3}} = 6$$

Ahora resuelve el problema 5 3

EJEMPLO 8 Decimales repetidos

Demuestre que el decimal periódico 0,999. . . es igual a 1.

Solución El decimal $0{,}999c = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + g = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + g$ es una serie geométrica infinita. Escríbelo en forma de $\sum_{k=1}^{q} a_{1}r^{k-1}$ y utilice la fórmula (7).

$$0{,}999c = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \text{gramo} = \sum_{k=1}^{q} \frac{9}{10k} = 10\sum_{k=1}^{q} \frac{9}{10k-1} = 10\left(\#\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

(continuado)

Machine Translated by Google

Compare esta serie con una $\sum_{k=1}^{q} a_1 r^{k-1}$ y tenga en cuenta que $a_1 = \frac{9}{10}$ yr = 10. $\frac{1}{10}$ Desde 0r0 6 1, la serie converge y su suma es

$$0.999c = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

El decimal periódico 0,999. . . es igual a 1.

EJEMPLO 9 Columpios de péndulo

Inicialmente, un péndulo oscila a través de un arco de 18 pulgadas de longitud. Vea la Figura 9. En cada movimiento sucesivo, la longitud del arco es 0,98 de la longitud anterior.

Figura 9

(a) ¿Cuál es la longitud del arco del décimo swing?

(b) ¿En qué oscilación la longitud del primer arco es menor de 12 pulgadas?

(c) Después de 15 oscilaciones, ¿qué distancia total ha oscilado el péndulo?

(d) Cuando se detiene, ¿qué distancia total ha oscilado el péndulo?

Solución

(a) La longitud del primer swing es de 18 pulgadas.
La longitud del segundo swing es 0,98 # 18 pulgadas.
La longitud del tercer swing es 0,98 # 0,98 # 18 = 0,982 # 18 pulgadas.
La longitud del arco del décimo swing es

$$10.982^{9} \# 18 \approx 15.007 \text{ pulgadas}$$

(b) La longitud del arco del enésimo swing es 10.982^{n-1} # 18. Para la longitud del arco. ser exactamente 12 pulgadas requiere que

$$10.982^{n-1} \# 18 = 12$$

$$10.982^{n-1} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$ Divide ambos lados por 18.

$$n - 1 = \log_{0.98}\left(\frac{2}{3}\right)$$ Expresar como logaritmo.

$$n = 1 + \frac{\ln \frac{2}{3}}{\ln 0.98} \approx 1 + 20.07 = 21.07$$ Resuelva para n; Utilice la fórmula de cambio de base.

La longitud del arco del péndulo excede las 12 pulgadas en la oscilación número 21 y es primero inferior a 12 pulgadas en la oscilación 22.

(c) Después de 15 cambios, la distancia total recorrida es

$$L = 18 + 0.98 \# 18 + 10.982^{2} \# 18 + 10.982^{3} \# 18 + g + 10.982^{14} \# 18$$

1º 2º 3º 4to 15º

Esta es la suma de una secuencia geométrica. La proporción común es 0,98; el primer término es 18. La suma tiene 15 términos, entonces

$$L = 18 \# \frac{1 - 0.9815}{1 - 0.98} \approx 18 \# 13.07 \approx 235.3 \text{ pulgadas}$$

El péndulo ha oscilado aproximadamente 235,3 pulgadas después de 15 oscilaciones.

(d) Cuando el péndulo se detiene, ha recorrido la distancia total

$$T = 18 + 0.98 \# 18 + 10.982^{2} \# 18 + 10.982^{3} \# 18 + g$$

Esta es la suma de una serie geométrica infinita. La razón común es r = 0,98; el primer término es a1 = 18. Como 0 r 0 6 1, la serie converge. Su suma es

$$t = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{18}{1 - 0.98} = 900$$

El péndulo ha oscilado un total de 900 pulgadas cuando finalmente se detiene.

Ahora problema de trabajo 8 7

Machine Translated by Google

5 resolver problemas de anualidades

La sección 5.7 desarrolló la fórmula del interés compuesto, que da el valor futuro cuando se deposita una cantidad fija de dinero en una cuenta que paga intereses compuestos periódicamente. Sin embargo, a menudo el dinero se invierte en pequeñas cantidades a intervalos periódicos. Una anualidad es una secuencia de depósitos periódicos iguales. Los depósitos periódicos podrán realizarse anualmente, trimestralmente, mensualmente o diariamente.

Cuando los depósitos se realizan al mismo tiempo que se acreditan los intereses, la anualidad se denomina ordinaria. Aquí sólo analizamos las anualidades ordinarias. El monto de una anualidad es la suma de todos los depósitos realizados más todos los intereses pagados.

Supongamos que la tasa de interés que gana una cuenta es del i por ciento por período de pago (expresada como decimal). Por ejemplo, si una cuenta paga un 12% compuesto mensualmente (12 veces al año), entonces $i = \frac{0,12}{12} = 0,01$. Si una cuenta paga un 8% compuesto trimestralmente (4 veces al año), entonces $i = \frac{0,08}{4} = 0,02$.

Para desarrollar una fórmula para el monto de una anualidad, supongamos que se deposita $P en cada período de pago durante n períodos de pago en una cuenta que gana el i por ciento por período de pago. Cuando el último depósito se realiza en el enésimo período de pago, el primer depósito de $P devengó intereses compuestos para n - 1 períodos de pago, el segundo depósito de $P devengó intereses compuestos para n - 2 períodos de pago, y así sucesivamente. La Tabla 3 muestra el valor de cada depósito después de que se hayan realizado n depósitos.

Tabla 3

Depósito	1	2	3	. . .	norte - 1	norte
Cantidad	$P11 + i2^{n-1}$	$P11 + i2^{n-2}$	$P11 + i2^{n-3}$	. . .	$P11 + i2$	PAG

El monto A de la anualidad es la suma de los montos que se muestran en la Tabla 3; eso es,

$$A = P \# 11 + i2^{n-1} + P \# 11 + i2^{n-2} + g + P \# 11 + i2 + P$$
$$= P31 + 11 + i2 + g + 11 + i2^{n-1}{}_4$$

La expresión entre paréntesis es la suma de una secuencia geométrica con n términos y una razón común de 11 + i2. Como resultado,

$$A = P31 + 11 + i2 + g + 11 + i2^{n-2} + 11 + i2^{n-1}{}_4$$
$$= P\,\frac{1 - 11 + i2^{norte}}{1 - 11 + i2} = P\,\frac{1 - 11 + i2^{norte}}{-i} = P\,\frac{11 + i2^{n} - 1}{i}$$

Se ha demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA Monto de una anualidad

Supongamos que P es el depósito en dólares realizado al final de cada período de pago de una anualidad que paga el i por ciento de interés por período de pago. El monto A de la anualidad después de n depósitos es

$$A = P\,\frac{11 + i2^{norte} - 1}{i} \qquad (9)$$

NOTA En la fórmula (9), recuerde que cuando se realiza el enésimo depósito, el primer depósito devengó intereses durante n - 1 períodos de capitalización y el enésimo depósito no devengó intereses.

EJEMPLO 10 Determinar el monto de una anualidad

Para ahorrar para la jubilación, Brett decide colocar $4000 en una cuenta de jubilación individual (IRA) cada año durante los próximos 30 años. ¿Cuál será el valor de la IRA cuando Brett haga su depósito número 30? Supongamos que la tasa de rendimiento de la IRA es del 7% anual compuesto anualmente. (Esta es la tasa de rendimiento histórica en el mercado de valores).

Machine Translated by Google

Solución Ésta es una anualidad ordinaria con n = 30 depósitos anuales de P = $4000. La tasa de
El interés por período de pago es i = $\frac{0,07}{1}$ = 0,07. El importe A de la anualidad después
30 depósitos.

$$= \$4000\ 0,07\ \frac{11 + 0,072\ A^{30} - 1}{} \approx \$4000 \# 94.46078632 \approx \$377,843.15$$

EJEMPLO 11 Determinar el monto de una anualidad

Para ahorrar para la educación universitaria de su hija, Miranda decide ahorrar $100 cada mes en una cuenta de una cooperativa de crédito que paga un interés compuesto del 2% mensual. Comienza este programa de ahorro cuando su hija tiene 3 años. ¿Cuánto habrá ahorrado cuando haga el depósito número 180? ¿Qué edad tiene su hija en este momento?

Solución Esta es una anualidad con P = $100, n = 180 e i = $\frac{0,02}{12}$. El monto A de la anualidad después de 180 depósitos es

$$R = \$100\ \frac{a1 + \frac{0,02}{12\ \text{segundo}}^{180} - 1}{\frac{0,02}{12}} \approx \$100 \# 209,71306 \approx \$20.971,31$$

Debido a que hay 12 depósitos por año, cuando el depósito número 180 es
hecho $\frac{180}{12}$ = Han pasado 15 años y la hija de Miranda tiene 18 años.

Ahora problema de trabajo 9 1

Característica histórica

Fibonacci

Las secuencias se encuentran entre los objetos más antiguos. Han sido estudiados durante más de 3500 años. Sin embargo, después de los pasos iniciales, se lograron pocos avances hasta aproximadamente 1600.

Las secuencias aritméticas y geométricas aparecen en el papiro Rhind, un texto matemático que contiene 85 problemas copiados alrededor de 1650 a. C. por el escriba egipcio Ahmes de una obra anterior (ver Problema histórico 1). Fibonacci (1220 d.C.) escribió sobre problemas similares a los encontrados en el papiro de Rhind, lo que lleva a sospechar que Fibonacci pudo haber tenido material disponible que ahora está perdido. Este material habría estado en la tradición griega no euclidiana de Herón (alrededor del 75 d.C.) y Diofanto (alrededor del año 250 d.C.). Un problema, nuevamente ligeramente modificado, todavía nos acompaña en la familiar rima del rompecabezas "Cuando iba a St. Ives. . . "(ver Problema Histórico 2).

El papiro de Rhind indica que los egipcios sabían sumar los términos de una secuencia aritmética o geométrica, al igual que los babilonios. La regla para resumir una secuencia geométrica se encuentra en los Elementos de Euclides (Libro IX, 35, 36), donde, como todo el álgebra de Euclides, se presenta en forma geométrica.

Las investigaciones de otros tipos de secuencias comenzaron en el siglo XVI, cuando el álgebra se desarrolló lo suficiente como para manejar los problemas más complicados. El desarrollo del cálculo en el siglo XVII añadió una nueva y poderosa herramienta, especialmente para encontrar la suma de una serie infinita, y el tema continúa floreciendo en la actualidad.

Problemas históricos

1. Problema de secuencia aritmética del papiro de Rhind (declaración ligeramente modificada para mayor claridad) Se deben dividir cien hogazas de pan entre cinco personas de modo que las cantidades que reciben formen una secuencia aritmética. Los dos primeros en conjunto reciben una séptima parte de lo que reciben los tres últimos. ¿Cuántos panes recibe cada uno?

   [Respuesta parcial: La primera persona recibe 1 pan.$\frac{2}{3}$]

2. La siguiente rima infantil en inglés antiguo se parece a uno de los problemas del papiro de Rhind.

   Mientras iba a St. Ives
   Conocí a un hombre con siete esposas.
   Cada esposa tenía siete sacos
   Cada saco tenía siete gatos.
   Cada gato tenía siete crías [gatitos]
   Kits, gatos, sacos, esposas.
   ¿Cuántos iban a St. Ives?

   (a) Suponiendo que el hablante y los aficionados a los gatos se conocieron viajando en direcciones opuestas, ¿cuál es la respuesta?

   (b) ¿Cuántos gatitos se transportan?

   c) Kits, gatos, sacos, esposas; ¿cuántos?

Machine Translated by Google

12.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Si se invierten $1000 al 4% anual compuesto semestralmente, ¿cuánto queda en la cuenta después de 2 años? (págs. 361–364)

2. ¿Cuánto necesitas invertir ahora al 5% anual compuesto mensualmente para que en 1 año tengas $10,000? (págs. 365 y 366)

Conceptos y vocabulario

3. En a(n) _____ secuencia, la proporción de términos sucesivos es una constante.

4. Si 0r0 6 1, la suma de la serie geométrica $\sum_{k=1}^{q} ar^{k-1}$ es _____.

5. Opción múltiple Si una serie no converge, se llama serie. a(n) _____

(a) aritmética (b) divergente (c) geométrica (d) recursiva

6. Verdadero o Falso Una secuencia geométrica se puede definir recursivamente.

7. Verdadero o Falso En una secuencia geométrica, la razón común es siempre un número positivo.

8. Verdadero o Falso Para una secuencia geométrica con el primer término a1 y razón común r, donde r · 0, r · 1, la suma de los 1 - r primeros n términos es a1 # $S_n = \frac{-}{1-r}$.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 18, demuestre que cada secuencia es geométrica. Luego encuentra la razón común y enumera los primeros cuatro términos.

9. 5sn6 = 5 1 - 52n6

10. 5sn6 = 54n6

11. 5an 6 = e- 3a 1 2b n f

12. 5bn 6 = e a5 2 b n f

13. 5dn 6 = b 3n 9r 18.

14. 5cn 6 = b 2n-1 4 r

15. 5fn6 = 532n6 _

16. 5en 6 = 57n>46

17. 5un 6 = b 2n 3n-1 r

5tn 6 = b 3n-1 2n r

En los problemas 19 a 26, encuentre el quinto término y el enésimo término de la secuencia geométrica cuyo primer término a1 y la razón común r están dados.

19. a1 = 2; r = 3

20. a1 = - 2; r = 4

21. a1 = 6; r = - 2

22. a1 = 5; r = - 1

1 23. a1 = 1; r = - 3

1 24. a1 = 0; r = $\frac{-}{7}$

25. a1 = 0; r = $\frac{1}{\text{pag}}$

26. a1 = 23; r = 23

En los problemas 27 a 32, encuentre el término indicado de cada secuencia geométrica.

1 27. 7mo término de $\frac{-}{1, 2}, \frac{1}{4}, \ldots$

28. 8º término de 1, 3, 9,. . .

29. Décimo término de - 1, 2, - 4, c

30. 15.º término de 1, - 1, 1, c

31. Séptimo término de 0,1, 1,0, 10,0,. . .

32. 8º término de 0,4, 0,04, 0,004,. . .

En los problemas 33 a 40, encuentre el enésimo término an de cada secuencia geométrica. Cuando se da, r es la razón común.

33. 5, 10, 20, 40,. . .

34. 6, 18, 54, 162,. . .

1 35. - 3, 1, - 3 —, $\frac{1}{9}$, ...

1 36. 4, $\frac{-}{1, 4}, \frac{-}{1\ 16}$,

1 37. a2 = 7; r = $\frac{-}{3}$

38. a6 = 243; r = - 3

1 39. a3 = ; a6 = 3 81 $\frac{1}{-}$

40. a2 = 7; a4 = 1575

En los problemas 41 a 46, encuentre cada

41. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{22}{4}\ 23 + \frac{}{4} + g + \frac{\text{suma. } 2n-1}{4}$

42. $\frac{3}{9} + \frac{32}{9} + \frac{33}{9} + g + \frac{3n}{9}$

43. $\sum_{k=1}^{-} a\ 4\ \#\ 3k-1$

44. $\sum_{k=1}^{-} un$ $\frac{-}{un2\ 3\ b}^{k}$

45. $2 + \frac{6}{5} + \frac{18}{25} + g + 2a\ 3\ 5\ b^{\frac{-}{n-1}}$

46. - 1 - 2 - 4 - 8 - g - 12n-1 2

Para los problemas 47 a 52, utilice una utilidad gráfica para encontrar la suma de cada secuencia geométrica.

47. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{22}{4} + \frac{23}{4} + g + \frac{214}{4}$

48. $\frac{3}{9} + \frac{32}{9} + \frac{33}{9} + g + \frac{315}{9}$

49. $\sum_{\text{norte}=1}^{15} a\ 4\ \#\ 3n-1$

50. $\sum_{\text{norte}=1}^{15} un$ $\frac{-}{\text{un 2 b norte}}$

51. $2 + 5\ \frac{6}{-} + \frac{18}{25} + g + 2a\ 3\ 5\ \text{segundo}^{\frac{15}{-}}$

52. - 1 - 2 - 4 - 8 - g - 214

Machine Translated by Google

En los problemas 53 a 68, determine si cada serie geométrica infinita converge o diverge. Si converge, encuentre su suma.

53. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + g$

54. $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + g$

55. $6 + 2 + \frac{2}{_} + g\ 3$

56. $8 + 4 + 2 + g$

57. $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{\text{decisión}} - \frac{27}{__} + g$

58. $2 - 64$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} + g$

59. $9 + 12 + 16 + \frac{64}{3} + sol$

60. $8 + 12 + 18 + 27 + sol$

61. $\sum_{k=1}^{q} 8a\,\overline{1_{segundo}}^{k-1}$

62. $\sum_{k=1}^{q} 5a\,\overline{1_{segundo}}^{k-1}$

63. $\sum_{k=1}^{q} \overline{3\ un_{segundo}}^{k-1}$

64. $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\overline{2}}\ \#\ 3k-1$

65. $\sum_{k=1}^{q} 4a - \overline{2b}^{k-1}$

66. $\sum_{k=1}^{q} 6a - \overline{3b}^{k-1}$

67. $\sum_{k=1}^{q} \overline{2\ un_{segundo}}^{k}$

68. $\sum_{k=1}^{q} \overline{3\ un_{segundo}}^{k}$

Práctica mixta En los problemas 69 a 82, determine si la secuencia dada es aritmética, geométrica o ninguna de las dos. Si la secuencia es aritmética, encuentre la diferencia común; si es geométrico, encuentre la razón común. Si la secuencia es aritmética o geométrica, encuentra la suma de los primeros 50 términos.

69. 52n - 56

70. 5n + 26

71. 55n2 + 16

72. 54n26

73. $e\ 8 - \frac{3}{4}\ nf\ _$

74. $mi\ 3 - \frac{2}{3}\ nf\ _$

75. 2, 4, 6, 8, . . .

76. 1, 3, 6, 10,. . .

77. $e\ a5\ \overline{4}\ b\ n\ f$

78. $e\ a2\ \overline{3}\ b\ n\ f$

79. 1, 1, 2, 3, 5, 8,. . .

80. - 1, 2, - 4, 8, c 81. 5 1 - 12 n 6

82. 53n>26

Aplicaciones y extensiones

83. Encuentre x de modo que x, x + 4 y x + 7 sean términos consecutivos de a secuencia geométrica.

84. Encuentre x de modo que x - 1, x y x + 2 sean términos consecutivos de a secuencia geométrica.

85. Aumentos salariales Suponga que acaba de ser contratado con un salario anual de $ 23 000 y espera recibir aumentos anuales del 8%. ¿Cuál será su salario cuando comience su séptimo año?

86. Depreciación del equipo Un equipo nuevo le costó a una empresa $15 000. Cada año, a efectos fiscales, la empresa deprecia el valor en un 15%. ¿Qué valor debería darle la empresa al equipo después de 5 años?

87. Oscilaciones del péndulo Inicialmente, un péndulo oscila a través de un arco de 4 pies. En cada movimiento sucesivo, la longitud del arco es 0,9 de la longitud anterior.

(a) ¿Cuál es la longitud del arco del noveno movimiento?

(b) ¿ En qué oscilación la longitud del arco es primero menor que ¿2 pies?

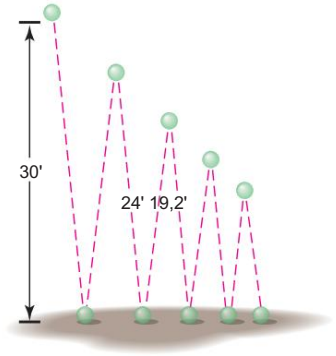
(c) Después de 15 oscilaciones, ¿qué longitud total tendrá el péndulo? balanceado?

(d) Cuando se detenga, ¿qué longitud total tendrá el péndulo? balanceado?

88. Pelotas que rebotan Se deja caer una pelota desde una altura de 30 pies. Cada vez que golpea el suelo, rebota hasta 0,8 de la altura anterior.

(a) ¿ A qué altura rebota la pelota después de golpear el suelo por tercera vez?

(b) ¿ A qué altura rebota después de golpear? el suelo por enésima vez?



(c) ¿ Cuántas veces debe golpear la pelota el suelo? antes de que su rebote sea inferior a 6 pulgadas?

(d) ¿Qué distancia vertical total recorre la pelota antes de dejar de rebotar?

89. Jubilación Christine aporta $100 cada mes a su 401(k). ¿Cuál será el valor del plan 401(k) de Christine después del depósito número 360 (30 años) si se supone que la tasa de rendimiento anual es del 8% compuesto mensualmente?

90. Ahorrar para una casa Jolene quiere comprar una casa nueva. Supongamos que invierte $400 por mes en un fondo mutuo. Si se supone que la tasa de rendimiento anual del fondo mutuo es del 6% compuesto mensualmente, ¿cuánto tendrá Jolene para el pago inicial después del depósito número 36? (3 años)?

91. Anualidad protegida por impuestos Don aporta $300 al final de cada trimestre a una anualidad protegida por impuestos (TSA). ¿Cuál será el valor de la TSA después del depósito número 80 (20 años) si se supone que la tasa de rendimiento anual es del 7% compuesto trimestralmente?

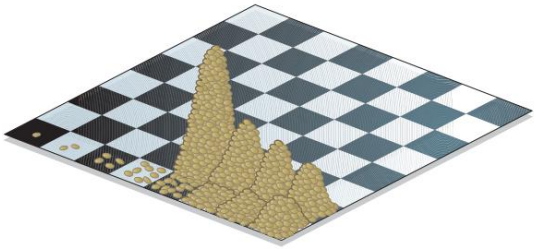
92. Jubilación Ray aporta $1000 a una cuenta de jubilación individual (IRA) semestralmente. ¿Cuál será el valor de la IRA cuando Ray haga su depósito número 30 (después de 15 años) si se supone que la tasa de rendimiento anual es del 7% compuesto semestralmente?

93. Fondo de amortización Para un niño nacido en 2018, se proyecta que el costo de una educación universitaria de 4 años en una universidad pública sea de $185,000. Suponiendo una tasa de rendimiento anual del 4,75% compuesta mensualmente, ¿cuánto se debe contribuir a un fondo universitario cada mes para tener $185 000 dentro de 18 años cuando el niño comience la universidad?

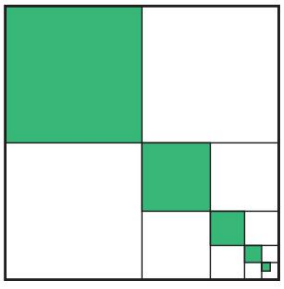
94. Fondo de amortización Scott y Alice quieren comprar una casa de vacaciones en 10 años y necesitan $50 000 para el pago inicial. ¿Cuánto deberían depositar en una cuenta de ahorros cada mes si se supone que la tasa de rendimiento anual es del 3,5% compuesto mensual?

Machine Translated by Google

95. Granos de trigo en un tablero de ajedrez En una antigua fábula, a un plebeyo que había salvado la vida del rey se le dijo que podía pedirle cualquier recompensa justa. Siendo un hombre astuto, el plebeyo dijo: “Un simple deseo, señor. Coloque un grano de trigo en el primer cuadrado de un tablero de ajedrez, dos granos en el segundo cuadrado, cuatro granos en el tercer cuadrado, y continúe hasta llenar el tablero. Esto es todo lo que busco”. Calcule el número total de granos necesarios para hacer esto y ver por qué no se pudo conceder la solicitud, aparentemente simple. (Un tablero de ajedrez consta de 8 * 8 = 64 casillas).



96. Sombrear cuadrados Mira la figura. ¿Qué fracción del cuadrado finalmente se sombrea si el proceso de sombreado indicado continúa indefinidamente?



97. Multiplicador Supongamos que, en toda la economía estadounidense, los individuos gastan el 90% de cada dólar adicional que ganan. Los economistas dirían que la propensión marginal a consumir de un individuo es 0,90. Por ejemplo, si Jane gana un dólar adicional, gastará 0,9112 = $0,90 del mismo. La persona que gana $0,90 (de Jane) gastará el 90%, o $0,81. Este proceso de gasto continúa y da como resultado una serie geométrica infinita como sigue:

$$1,\ 0{,}90,\ 0{,}902,\ 0.903,\ 0.904_{c}$$

La suma de esta serie geométrica infinita se llama multiplicador. ¿Cuál es el multiplicador si las personas gastan el 90% de cada dólar adicional que ganan?

98. Multiplicador Consulte el problema 97. Supongamos que la propensión marginal a consumir en toda la economía estadounidense es 0,95. ¿Cuál es el multiplicador de la economía estadounidense?

99. Precio de las acciones Un método para fijar el precio de una acción es descontar el flujo de dividendos futuros de la acción. Supongamos que una acción paga $P por año en dividendos y, históricamente, el dividendo ha aumentado un i% por año. Si desea una tasa de rendimiento anual del r%, este método para fijar el precio de una acción establece que el precio que debe pagar es el valor presente de un flujo infinito de pagos:

$$\text{Precio} = P + P\#\left(\frac{1+i}{1+r}\right) + P\#\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^{2} + P\#\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^{3} + g$$

El precio de la acción es la suma de una serie geométrica infinita. Supongamos que una acción paga un dividendo anual de $4,00 y, históricamente, el dividendo ha aumentado un 3% anual. Desea una tasa de rendimiento anual del 9%. ¿Cuánto es lo máximo que debería pagar por las acciones?

100. Precio de las acciones Consulte el problema 99. Suponga que una acción paga un dividendo anual de $2,50 y, históricamente, el dividendo ha aumentado un 4% anual. Desea una tasa de rendimiento anual del 11%. ¿Cuánto es lo máximo que debería pagar por las acciones?

101. La promesa de un hombre rico Un hombre rico promete darte $1000 el 1 de septiembre. Cada día a partir de entonces te dará 9

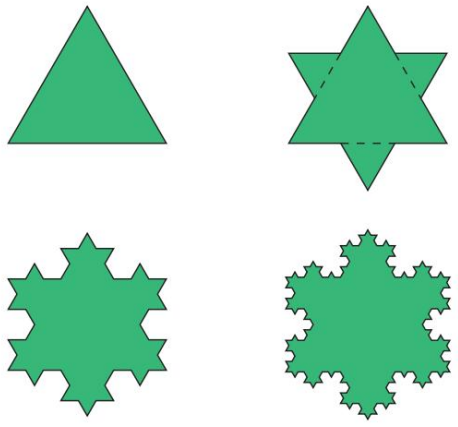
tu $\frac{}{10}$ de lo que te dio el día anterior. Cual es el primero ¿Fecha en la que la cantidad que recibe es inferior a 1¢? ¿Cuánto has recibido cuando esto sucede?

102. Ingresos por asientos Una sección especial en la zona de anotación de un estadio de fútbol tiene 2 asientos en la primera fila y 14 filas. total. Cada fila sucesiva tiene 2 asientos más que la fila. antes. En esta sección en particular, el primer asiento se vende por 1 centavo y cada asiento siguiente se vende por un 5% más que el asiento anterior. Encuentre los ingresos totales generados si se venden todos los asientos de la sección. Redondea solo la respuesta final e indica la respuesta final en dólares redondeados a dos decimales. (JJC)†

103. Problema de desafío Supongamos que x, y, z son términos consecutivos en una secuencia geométrica. Si x + y + z = 103 y x2 + y2 + z2 = 6901, encuentre el valor de y. [Sugerencia: Sea r la razón común, entonces y = xr y z = yr = xr 104. Problema de ^{2}.]

desafío Copo de nieve de Koch El área dentro del fractal conocido como copo de nieve de Koch se puede describir como suma de las áreas de infinitos triángulos equiláteros, como se muestra a continuación.

Para todos los triángulos excepto el central (el más grande), un triángulo en el El copo de nieve de $\frac{1}{}$ Koch es el área del siguiente triángulo más grande en 9 el fractal. Supongamos que el área del triángulo más grande tiene un área de 2 metros cuadrados.



(a) Demuestre que el área del copo de nieve de Koch está dada por la serie

$$A = 2 + 2\#3a\tfrac{1}{9}b + 2\#12a\tfrac{1}{\text{segundo}}^{2} + 2\#48a\tfrac{1}{\text{segundo}}^{3} + 2\#192a\tfrac{1}{\text{segundo}}^{4} + g$$

(b) Encuentre el área exacta del copo de nieve de Koch hallando el suma de la serie.

†Cortesía del Departamento de Matemáticas de Joliet Junior College.

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

105. Pensamiento crítico Estás en una entrevista de trabajo y recibes dos ofertas para un contrato de cinco años:

R: $40,000 para comenzar, con aumentos anuales garantizados del 6% durante los primeros 5 años

B: $44,000 para comenzar, con aumentos anuales garantizados del 3% durante los primeros 5 años

¿Qué oferta es mejor si tu objetivo es ganar tanto como sea posible después de 5 años? ¿Qué es mejor si su objetivo es ganar la mayor cantidad de dinero posible durante el contrato (5 años)?

106. Pensamiento crítico ¿Cuál de las siguientes opciones, A o B, genera más dinero?

R: Para recibir $1000 el día 1, $999 el día 2, $998 el día 3, y el proceso finalizará después de 1000 días.

B: Para recibir $1 el día 1, $2 el día 2, $4 el día 3, durante 19 días

107. Pensamiento crítico Acabas de firmar un contrato de liga de fútbol profesional de 7 años con un salario inicial de 2.000.000 de dólares al año. La dirección le ofrece las siguientes opciones con respecto a su salario durante los 7 años.

1. Un bono de 100.000 dólares cada año.
2. Un aumento anual del 4,5% anual a partir de 1 año.
3. Un aumento anual de $95 000 por año a partir de 1 año

¿Qué opción proporciona más dinero durante el período de 7 años? ¿Cuál menos? ¿Cuál escogerías? ¿Por qué?

108. Pensamiento crítico Suponga que le ofrecen un trabajo en el que trabajaría 8 horas al día durante 5 días laborables a la semana durante 1 mes realizando un duro trabajo manual. Su paga el primer día sería de 1 centavo. El segundo día su paga sería de dos centavos; el tercer día 4 centavos. Su salario se duplicaría en cada día laboral sucesivo. Hay 22 días laborables en el mes. No habrá días de enfermedad. Si falta un día de trabajo, no hay pago ni aumento salarial. ¿Cuánto te pagan si trabajas los 22 días? ¿Cuánto le pagan por el día 22 de trabajo? ¿Qué riesgos corres si aceptas esta oferta de trabajo? ¿Aceptarías el trabajo?

109. ¿Puede una secuencia ser a la vez aritmética y geométrica? Justifica tu respuesta.

110. Inventa una secuencia geométrica. Dáselo a un amigo y pregúntale. para su vigésimo mandato.

111. Forma dos series geométricas infinitas, una que tenga suma y otra que no. Regálaselo a un amigo y pídele la suma de cada serie.

112. Describe las similitudes y diferencias entre secuencias geométricas y funciones exponenciales.

Conserve su conocimiento

Los problemas 113 a 122 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

113. Utilice la fórmula de cambio de base y una calculadora para evaluar log7 62. Redondee la respuesta a tres decimales.

114. Encuentre el vector unitario en la misma dirección que v = 8i - 15j.

115. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en 1 - 2, 02 y 12, 02, y un foco en 14, 02.

116. Encuentra el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0-2 & 6 \\ 3 & 4-1-2 \end{vmatrix}$

117. Liv nota un arrendajo azul en un árbol. Inicialmente debe mirar hacia arriba 5 grados desde el nivel de los ojos para ver al arrendajo, pero después de acercarse 6 pies debe mirar hacia arriba 7 grados desde el nivel de los ojos. ¿Qué altura tiene el arrendajo en el árbol si sumas 5,5 pies para tener en cuenta la altura de Liv? Redondea a la décima más cercana.

118. Escribe la forma factorizada de la función polinómica de menor grado que toca el eje x en x = 4, cruza el eje x en x = - 2 y x = 1, y tiene una intersección con el eje y de 4.

119. Dado s1t2 = - 16t ^{2} + 3t, encuentra el cociente de diferencias $\frac{s1t2 - s112}{t - 1}$.

120. Encuentre una ecuación rectangular de la curva plana con ecuaciones paramétricas x1t2 = t + 5 e y1t2 = 2t para t Ú 0.

121. Encuentre la función g cuya gráfica es la gráfica de y = 2x pero se estira verticalmente por un factor de 7 y se desplaza Quedan 5 unidades.

122. Factoriza completamente: x4 - 29x2 + 100

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. $1082.43 2. $9513.28

Machine Translated by Google

12.4 Inducción Matemática

OBJETIVO 1 Demostrar enunciados mediante inducción matemática (p. 881)

1 Demostrar afirmaciones mediante inducción matemática

La inducción matemática es un método para demostrar que las afirmaciones que involucran números naturales son verdaderas para todos los números naturales.*

Por ejemplo, la afirmación "la suma de los primeros n enteros impares positivos es igual a n2 ", es decir,

$$1 + 3 + 5 + g + 12n - 12 = n2 \qquad (1)$$

se puede demostrar para todos los números naturales n mediante inducción matemática.

Antes de exponer el método de inducción matemática, intentemos tener una idea del poder del método. Usamos el enunciado de la ecuación (1) para este propósito reformulándolo para varios valores de n = 1, 2, 3, c.

norte = 1	La suma del primer entero impar positivo es 1. ^{2}; 1 = 1 ^{2}.
norte = 2	La suma de los primeros 2 enteros impares positivos es 22 ; 1 + 3 = 4 = 22 .
norte = 3	La suma de los primeros 3 enteros impares positivos es 32 ; 1 + 3 + 5 = 9 = 32 .
norte = 4	La suma de los primeros 4 enteros impares positivos es 42 ; 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 42 .

Aunque a partir de este patrón podríamos conjeturar que el enunciado (1) es verdadero para cualquier número natural n, ¿podemos realmente estar seguros de que no falla para alguna elección de n? El método de prueba por inducción matemática nos permite demostrar que la afirmación es verdadera para todo n.

TEOREMA El principio de inducción matemática

Supongamos que se cumplen las dos condiciones siguientes con respecto a un enunciado sobre números naturales:

CONDICIÓN I:	La afirmación es cierta para el número natural 1.
CONDICIÓN II:	Si la afirmación es verdadera para algún número natural k, y se puede demostrar que es verdadera para el siguiente número natural k + 1,

entonces la afirmación es cierta para todos los números naturales.

Figura 10

La siguiente interpretación física ilustra por qué funciona el principio. Piense en una colección de números naturales que obedecen a un enunciado como una colección de infinitas fichas de dominó. Ver Figura 10.

Ahora supongamos que se dan dos hechos:

1. Se empuja la primera ficha de dominó.
2. Si una ficha se cae, digamos la k-ésima ficha, también lo hará la siguiente, la 1k + 12. dominó.

¿Es seguro concluir que todas las fichas de dominó se caen? La respuesta es sí, porque si el primero cae (Condición I), el segundo también cae (por Condición II); y si cae el segundo, también cae el tercero (por la Condición II); etcétera.

EJEMPLO 1 Usando la inducción matemática

Demuestre que la siguiente afirmación es verdadera para todos los números naturales n.

$$1 + 3 + 5 + g + 12n - 12 = n2 \qquad (2)$$

*Recuerda que los números naturales son los números 1, 2, 3, 4, ... En otras palabras, los términos números naturales y los números enteros positivos son sinónimos.

Machine Translated by Google

Solución Primero demuestre que el enunciado (2) es válido para n = 1. Porque $1 = 1^2$, la afirmación (2) es verdadera para n = 1. La condición I se cumple.

A continuación, demuestre que se cumple la condición II. Del enunciado (2), suponga que

$$1 + 3 + 5 + g + 12k - 12 = k2 \qquad (3)$$

es cierto para algún número natural k.

Ahora demuestre que, según la ecuación (3), el enunciado (2) se cumple para k + 1. Observe la suma de los primeros k + 1 enteros impares positivos para determinar si esta suma es igual a $1k + 12^2$.

$$1 + 3 + 5 + g + 12k - 12 + 321k + 12 - 14 = 3 \qquad 1 + 3 + 5 + g + 12k - 12\ 4 + 12k + 12$$

$$8 \cdot k2 \text{ por la ecuación (3)}$$

$$= k2 + 12k + 12$$

$$= k2 + 2k + 1 = 1k + 12^2$$

Se cumplen las condiciones I y II; Según el principio de inducción matemática, el enunciado (2) es verdadero para todos los números naturales n.

EJEMPLO 2 Usando la inducción matemática

Demuestre que la siguiente afirmación es verdadera para todos los números naturales n.

$$2norte\ 7norte\ _$$

Solución Primero, demuestre que el enunciado 2n 7 n se cumple cuando n = 1. Como 21 = 2 7 1, la desigualdad es verdadera para n = 1. La condición I se cumple.

A continuación, supongamos que el enunciado es válido para algún número natural k; es decir, 2k 7 k.

Ahora demuestre que el enunciado es válido para k + 1; es decir, demuestre que 2k+1 7 k + 1.

$$2k+1 = 2 \# 2k\ 7\ 2 \# k = k + k\ Ú\ k + 1$$

$$c \qquad c$$

$$c\ 2k + k \qquad k \# 1$$

Si 2k 7 k, entonces 2k+1 7 k + 1, entonces la Condición II del Principio de Matemática
La inducción se cumple. La afirmación 2n 7 n es cierta para todos los números naturales n.

EJEMPLO 3 Usando la inducción matemática

Demuestre que la siguiente fórmula es cierta para todos los números naturales n.

$$1 + 2 + 3 + gramo + norte = 2 \quad \frac{n1n + 12}{} \qquad (4)$$

Solución Primero, demuestre que la fórmula (4) es verdadera cuando n = 1. Porque

$$\frac{111 + 12}{2} = \frac{1 \# 2}{2} = 1$$

Se cumple la condición I del principio de inducción matemática.

A continuación, suponga que la fórmula (4) es válida para algún número natural k y determine si la fórmula es válida para el siguiente número natural, k + 1.

Asumir que

$$1 + 2 + 3 + g + k = \quad \frac{k1k + 12}{2} \quad \text{por algunos k} \qquad (5)$$

Ahora muestra eso

$$1 + 2 + 3 + g + k + 1k + 12 = 2 \qquad \frac{1k + 12\ 3\ 1k + 12 + 14}{} = \frac{1k + 12\ 1k + 22}{2}$$

Machine Translated by Google

como sigue:

$$1 + 2 + 3 + g + k + 1k + 12 = 831 + 2 + 3 + g + k4 + 1k + 12$$

$$\cdot \frac{k1k \cdot 12}{2} \quad \text{por la ecuación (5)}$$

$$= \frac{k1k + 12}{2} + 1k + 12$$

$$= \frac{k2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$= \frac{k2 + 3k + 2}{2} = \frac{1k + 12\ 1k + 22}{2}$$

La condición II también se cumple. Como resultado, la fórmula (4) es válida para todos los números naturales n.

Ahora trabaja el problema 1

EJEMPLO 4 Usando la inducción matemática

Demuestre que 3n - 1 es divisible por 2 para todos los números naturales n.

Solución

Primero, demuestre que el enunciado es verdadero cuando n = 1. Como 31 - 1 = 3 - 1 = 2 es divisible por 2, el enunciado es verdadero cuando n = 1. Se cumple la condición I.

A continuación, suponga que el enunciado es válido para algún número natural k y determine si el enunciado es válido para el siguiente número natural, k + 1.

Supongamos que 3k - 1 es divisible por 2 para algún k. Ahora demuestra que 3k+1 - 1 es divisible por 2.

$$3k+1 - 1 = 3k+1 - 3k + 3k - 1 \qquad \text{Resta y suma } 3k .$$

$$= 3k\ 13 - 12 + 13k - 12 = 3k \# 2 + 13k - 12$$

Debido a que 3k # 2 es divisible por 2 y 3k - 1 es divisible por 2, se deduce que 3k # 2 + 13k - 12 = 3k+1 - 1 es divisible por 2. La condición II también se cumple. Como resultado, la afirmación " 3n - 1 es divisible por 2" es cierta para todos los números naturales n.

Ahora problema de trabajo 1 9

ADVERTENCIA La conclusión de que una afirmación que involucra números naturales es verdadera para todos los números naturales se llega sólo después de que se hayan satisfecho las Condiciones I y II del Principio de Inducción Matemática. El problema 28 demuestra un enunciado para el cual sólo se cumple la condición I, y el enunciado no es verdadero para todos los números naturales. El problema 29 demuestra un enunciado para el cual sólo se cumple la condición II, y el enunciado no es verdadero para ningún número natural.

12.4 Evalúe su comprensión

Desarrollo de habilidades

En los problemas 1 a 22, utilice el principio de inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es verdadero para todos los números naturales n.

1. $2 + 4 + 6 + g + 2n = n1n + 12$ 2. $1 + 5 + 9 + g + 14n - 3) = n12n - 12$

3. $3 + 5 + 7 + g + 12n + 12 = n1n + 22$

4. $3 + 4 + 5 + g + 1n + 22 = \frac{1}{2}n1n + 52$

5. $1 + 4 + 7 + g + 13n - 22 = 2\ \frac{1}{}n13n - 12$

6. $2 + 5 + 8 + g + 13n - 12 = 2\ \frac{1}{}n13n + 12$

7. $1 + 3 + 32 + g + 3n\text{-}1 = \frac{1}{2}13n - 12$

8. $1 + 2 + 22 + g + 2n\text{-}1 = 2n - 1$

9. $1 + 5 + 52 + g + 5n\text{-}1 = \frac{1}{4}15n - 12$

10. $1 + 4 + 42 + g + 4n\text{-}1 = \frac{1}{3}14n - 12$

11. $\frac{1}{1 \# 3} + \frac{1}{3 \# 5} + \frac{1}{5 \# 7} + g + \frac{1}{12n - 12\ 12n + 12} = \frac{}{2n + 1}$

12. $\frac{1}{1 \# 2} + \frac{1}{2 \# 3} + \frac{1}{3 \# 4} + g + \frac{1}{n1n + 12} = \frac{}{norte + 1}$

Machine Translated by Google

3 13. 1 + 23 + 33 + g + n3 = $\frac{1}{4}$ n2 1n + 12 2

2 14. 1 + 22 + 32 + g + n2 = $\frac{1}{6}$ n1n + 12 12n + 12

15. - 2 - 3 - 4 - g - 1n + 12 = - 2 $\frac{1}{}$ n1n + 32

16. 4 + 3 + 2 + g + 15 - n2 = 2 $\frac{1}{}$ n19- n2

17. 1 # 2 + 3 # 4 + 5 # 6 + g+ 12n - 1212n2 = $\frac{1}{}$ n1n + 1214n - 12 3

18. 1 # 2 + 2 # 3 + 3 # 4 + g + n1n + 12 = $\frac{1}{3}$ n1n + 12 1n + 22

19. n2 + n es divisible por 2.

20. n3 + 2n es divisible por 3.

21. n1n + 12 1n + 22 es divisible por 6.

22. n2 - n + 2 es divisible por 2.

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 23 a 27, prueba cada afirmación.

23. Si 0 6 x 6 1, entonces 0 6 xn 6 1.

24. Si x 7 4, entonces xn 7 4.

25. a + b es un factor de a2n+1 + b2n+1 .

26. a - b es un factor de an - bn .

[Pista: ak+1 - bk+1 = a1ak - bk2 + bk 1a - b2]

27. 11 + a2 n Ú 1 + na, para a 7 0

28. Demuestre que el enunciado “n2 - n + 41 es un número primo” es cierto para n = 1 pero no es cierto para n = 41.

29. Demuestre que la fórmula

$$2 + 4 + 6 + g + 2n = n2 + n + 2$$

obedece la Condición II del Principio de Inducción Matemática. Es decir, demuestre que si la fórmula es verdadera para algún k, también lo es para k + 1. Luego demuestre que la fórmula es falsa para n = 1 (o para cualquier otra elección de n).

30. Utilice la inducción matemática para demostrar que si r · 1, entonces

$$2 a + ar + ar \quad g + ar^{n-1} + = un\frac{1- r}{1- r}$$

31. Utilice la inducción matemática para demostrar que

$$a + 1a + d2 + 1a + 2d2 + g+ 3a + 1n - 12d4 = na + d\frac{n1n - 12}{2}$$

32. Principio extendido de inducción matemática El principio extendido de inducción matemática establece que si se cumplen las condiciones I y II, es decir,

(I) Una afirmación es verdadera para un número natural j.

(II) Si la afirmación es verdadera para algún número natural k Ú j, entonces también es válido para el siguiente número natural k + 1.

entonces la afirmación es verdadera para todos los números naturales Ú j. Utilice el principio extendido de inducción matemática para mostrar que el número de diagonales en un polígono convexo de n lados es $\frac{1}{2}$ n1n - 32.

[Sugerencia: comience demostrando que el resultado es verdadero cuando n = 4 (Condición I).]

33. Geometría Usa el principio extendido de inducción matemática para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a 1n - 22 # 180°.

34. Problema de desafío Utilice el principio de inducción matemática para demostrar que

$$c2^{3}-8^{n} \text{ norte} = c\,4n \frac{2n}{1 - 4n} \text{ re}$$

para todos los números naturales n.

35. Problema de desafío Arrugas en el papel Si una hoja de papel se dobla por la mitad doblando el borde superior hacia el borde inferior, se producirá un pliegue. Si el papel doblado se dobla de la misma manera, el resultado serán tres pliegues. Con cada pliegue, el número de pliegues se puede definir de forma recursiva como c1 = 1, cn+1 = 2cn + 1.

(a) Encuentre el número de pliegues para n = 3 y n = 4 pliegues.

(b) Utilice la información proporcionada y los resultados del inciso (a) para encontrar una fórmula para el número de pliegues después de n pliegues, cn, en términos del número de pliegues únicamente.

(c) Utilice el principio de inducción matemática para demostrar que la fórmula encontrada en el inciso (b) es correcta para todos los números naturales.

(d) Se dice que Tosa Tengujo es el papel más delgado del mundo, con un espesor de 0,02 mm. Si un trozo de este papel pudiera doblarse 25 veces, ¿qué altura tendría la pila?

Explicar conceptos: discusión y escritura

36. ¿Cómo le explicarías el Principio de Inducción Matemática a un amigo?

Conserve su conocimiento

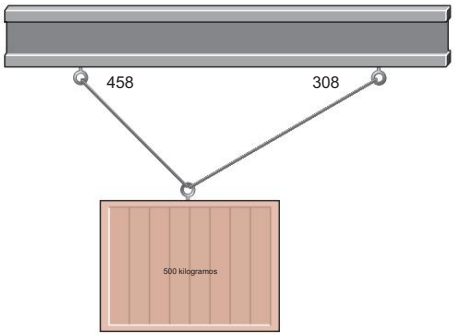
Los problemas 37 a 45 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

37. Resuelve: $\log_2 2x + 5 = 4$

38. Resuelve el sistema: e 4x + 3y = 16

Machine Translated by Google

39. Una masa de 500 kg está suspendida de dos cables, como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las tensiones en los dos cables?



40. Para A = c 1 2 - 1 1 0 0 1 4 d y B = £ 3 - 1 - 2 2 §, encuentre A # B.

41. Encuentra la descomposición en fracciones parciales $\frac{3x}{x^2 + x - 2}$.

42. Si a = 4, b = 9 y c = 10,2, encuentre la medida del ángulo B al más cercano décimo de grado.

43. Resuelve: e3x-7 = 4

44. Encuentra el valor exacto de $\tan\left(\cos^{-1}\frac{5}{8}\right)$ si $\sin u = \frac{7}{2}$ y $0 < u < \frac{\pi}{2}$.

45. Si f ′1x2 = 1x2 - 2x + 12 13x2 2 + 1x3 - 12 12x - 22, encuentre todos los números reales x para los cuales f ′1x2 = 0.

12.5 El teorema del binomio

OBJETIVOS 1 Evaluar un jb (pág. 885)
2 Utilice el teorema del binomio (p. 887)

Se han dado fórmulas para expandir 1x + a2 n para n = 2 y n = 3. El teorema del binomio* es una fórmula para la expansión de 1x + a2 n para cualquier entero positivo n. Si n = 1, 2, 3 y 4, la expansión de 1x + a2 n es sencillo.

$1x + a2^{1} = x + a$ Dos términos, que comienzan con x1 y terminan con a1

$1x + a2^{2} = x2 + 2ax + a2$ Tres términos, que comienzan con x2 y terminan con a2.

$1x + a2^{3} = x3 + 3ax2 + 3a2x + a3$ _ Cuatro términos, que comienzan con x3 y terminan con a3

$1x + a2^{4} = x4 + 4ax3 + 6a2\,x2 + 4a3x + a4$ _ Cinco términos, comenzando con x4 y terminando con a4

Observe que cada expansión de 1x + a2 n comienza con xn y termina con . De izquierda a derecha, las potencias de x disminuyen en 1, mientras que las potencias de a aumentan en 1. Además, el número de términos es igual a n + 1. Observe también que el grado de cada monomio en la expansión es igual a n . Por ejemplo, en el desarrollo de 1x + a2 cada monomio 1x3 , 3ax2 ^{3}, , 3a2 x, a32 es de grado 3. Como resultado, es razonable conjeturar que la expansión de 1x + a2 n se vería así:

$$1x + a2\,n = xn + _____\,axn\text{-}1 + _____\,a2\,xn\text{-}2 + g + _____\,an\text{-}1\,x + an$$

donde los espacios en blanco son números que se encuentran. De hecho, este es el caso.

Antes de que podamos completar los espacios en blanco, debemos introducir el símbolo ajnb.

1 evaluar unajnb

El símbolo unajnpan " n tomado j a la vez", se define a continuación.

*El nombre binomio se deriva del hecho de que x + a es un binomio; es decir, contiene dos términos.

Machine Translated by Google

COMENTARIO En una calculadora gráfica, el símbolo un n j b puede denotarse por el clave nCr .

DEFINICIÓN a n b j

Si j y n son números enteros con 0 … j … n, el símbolo a j n b se define

como a n b = $\frac{\text{¡norte!}}{\text{¡norte! j!1n - j2!}}$ (1)

EJEMPLO 1

Evaluación de una j b

Encontrar:

(a) a 31 (b) a 42 b (c) a 87 b (d) un 65 15b

Solución

b (a) a 3 1 b = $\frac{3!}{1!13 - 12!} = \frac{3!}{1!\ 2!} = \frac{3 \# 2 \# 1}{112 \# 12} = \frac{6}{2} = 3$

= (b) a4 2 b = $\frac{4!}{2!14 - 22!} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4 \# 3 \# 2 \# 1}{12 \# 12\ 12 \# 12} = \frac{24}{4} = 6$

= (c) a8 7 b = $\frac{8!}{7!18 - 72!} = \frac{8!}{7!\ 1!} = \frac{8 \# 7!}{7! \# 1!} = \frac{8}{1} = 8$

8! · 8 ~ 7! (d)

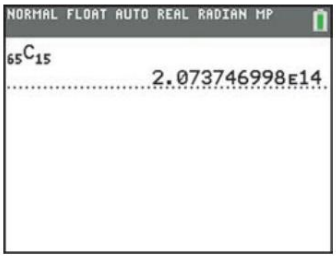


Figura 11

La Figura 11 muestra la solución usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C. Entonces

a 65 15b ≈ 2.073746998 * 1014

Ahora resuelve el problema 5

TEOREMA

Cuatro fórmulas útiles que involucran el símbolo aj n b

son : • a n 0 b = 1 • a n 1 b = n • a nn - 1 b = n • a n n b = 1

Prueba una norte 0 b = $\frac{\text{¡norte!}}{0!1n - 02!} = \frac{\text{¡norte!}}{0!\ \text{¡norte!}} = \frac{1}{1} = 1$

una norte 1 b = $\frac{\text{¡norte!}}{1n - 12!\ 1n - 12!} = \frac{\text{¡norte!}}{1n - 12 !\ 1!} = \frac{n1n - 12 !\ 1!}{1n - 12 !\ 1!} = \text{norte}$

Se le pide que pruebe las dos fórmulas restantes del problema 45. ■

Supongamos que los valores del símbolo a n b están dispuestos en una visualización triangular, como se muestra a continuación y en la Figura 12.

a0

0ba 1 0 ba

11 ba 2 0ba 2 1 ba

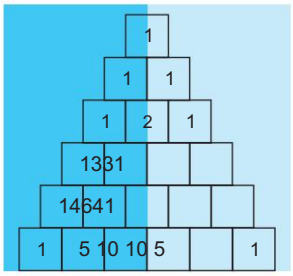
22 ba 3 0ba 3 1 ba 3 2 ba

33 ba 4 0ba 4 1 ba 4 2 ba 4 3 ba

44 ba 5 0ba 5 1 ba 5 2 ba 5 3 ba 5 4 ba 5 5 b

Machine Translated by Google

NOTA El triángulo de Pascal es simétrico con respecto a una línea que pasa por su centro. Si dividimos el triángulo verticalmente por la mitad, las entradas en cada fila de la mitad izquierda son la imagen especular de las entradas en la misma fila de la mitad derecha.



La simetría vertical de las entradas en el triángulo de Pascal es el resultado del hecho de que

$$\text{un}_{\text{norte - j segundo =}} \frac{\text{¡norte!}}{\text{1n - j2!j!}}$$

$$= \frac{\text{¡norte!}}{\text{j!1n - j2!}} = \text{a ñj b j}$$

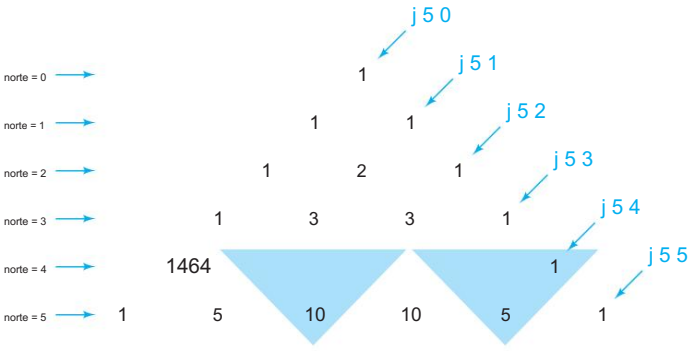


Figura 12 El triángulo de Pascal

Esta visualización se llama triángulo de Pascal y lleva el nombre de Blaise Pascal (1623-1662), un matemático francés.

El triángulo de Pascal tiene unos en los lados. Para obtener cualquier otra entrada, agregue las dos entradas más cercanas en la fila superior. Los triángulos sombreados en la Figura 12 ilustran esta característica del triángulo de Pascal. Con base en esta característica, la fila correspondiente a n = 6 se encuentra de la siguiente manera:

$$\text{norte} \cdot 5 \text{ S } 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1$$

$$\text{R ㄱ R ㄱ R ㄱ ㄱ R ㄱ}$$

$$\text{R norte} \cdot 6 \text{ S } 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1$$

Esta suma siempre funciona (consulte el teorema en la página 889).

Aunque el triángulo de Pascal ofrece una muestra interesante y organizada de la

símbolo a ñj b, en la práctica no es tan útil. Por ejemplo, si quieres el valor de a 12 5 b,

necesitarás 13 filas del triángulo antes de ver la respuesta. Es mucho
más rápido de usar la definición (1).

2 Utilice el teorema del binomio

TEOREMA Teorema del binomio

Sean x y a números reales. Para cualquier entero positivo n,

$$\text{1x + a2 norte} \quad \text{xn-j a0 bxn + a n1 baxn-1 + g + a n baj jxn-j + g + a n nban = a n baj}$$

$$= \text{un}_{j=0} \text{ n j} \qquad (2)$$

Por eso fue necesario introducir el símbolo a n b; los números $\frac{\text{¡norte!}}{\text{j!1n - j2!}}$
son los coeficientes numéricos en el desarrollo de 1x + a2 n . Debido a esto, el

El símbolo ja n b se llama coeficiente binomial.

EJEMPLO 2 Expandiendo un binomio

Usa el teorema del binomio para expandir $1x + 22^{5}$.

Solución

En el teorema del binomio, sean a = 2 y n = 5. Entonces

$$1x + 22^{5} = \text{a 50 bx5 + a 51 b2x4 + a 52 b22x3 + a 53 b23x2 + a 54 b24x + a 55 b25}$$

c Utilice la ecuación (2).

$$= 1 \# x5 + 5 \# 2x4 + 10 \# 4x3 + 10 \# 8x2 + 5 \# 16x + 1 \# 32c$$

Utilice la fila n · 5 del triángulo de Pascal o la definición (1) para a ñj b.

$$= x5 + 10x4 + 40x3 + 80x2 + 80x + 32$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Expandiendo un binomio

Ampliar 12 años - 32 ^{4} usando el teorema del binomio.

Solución Primero, reescribe la expresión ^{4} como 32y + 1 - 3) 4 ^{4}. Ahora usa el binomio. Teorema 12y - 32 con n = 4, x = 2y y a = - 3.

$$32 \text{ años} + 1 - 32\ 4^4 = un\ 40\ b\ 12y2^4 + un\ 41\ b\ 1 - 32\ 12y2^3 + un\ 42b\ 1 - 32^2\ 12y2^2$$

$$+ a\ 43b\ 1 - 32^3\ 12y2 + un\ 4\ 4b\ 1 - 32^4$$

$$= 1 \# 16y4 + 41 - 328y3 + 6 \# 9 \# 4y2 + 41 - 2722y + 1 \# 81$$

c

Utilice la fila n · 4 del triángulo de Pascal o la definición (1) para una jnb.

$$= 16y4 - 96y3 + 216y2 - 216y + 81$$

En esta expansión, observe que los signos se alternan porque a = - 3 6 0.

Ahora resuelve el problema 2 1

EJEMPLO 4 Encontrar un coeficiente particular en una expansión binomial

Encuentra el coeficiente de y8 en la expansión de 12y + 32 10.

Solución Ampliar 12y + 32 ^{10} usando el teorema del binomio.

$$12 \text{ años} + 32^{10} = un\ 10\ 0\ b\ 12y2^{10} + un\ 10\ b\ 12y2^9\ 132^1 + un\ 12b\ 12y2^8\ 132^2 + un\ 10\ 3b12y2^7\ 132^3$$

$$+ a\ 104b\ 12y2^6\ 132^4 + g + un\ 10\ 9b\ 12y2\ 132^9 + a\ 10\ 10b\ 132^{10}$$

A partir del tercer término del desarrollo, el coeficiente de y8 es

$$un\ 2cb\ 122^8\ 132^2 = \frac{10!}{2!\ 8!} \# 28 \# 9 \quad \frac{10 \# 9 \# 8!}{2 \# 8!} \# 28 \# 9 = 103{,}680$$

Como demuestra esta solución, el teorema del binomio se puede utilizar para encontrar un término particular en el desarrollo de 1ax + b2 n sin escribir el desarrollo completo.

El término que contiene xj en el desarrollo de 1ax + b2 n es

$$un_{orte - j}\ bbn-j\ 1ax2\ j \qquad (3)$$

El ejemplo 4 se puede resolver usando la fórmula (3) con n = 10, a = 2, b = 3, y j = 8. Entonces el término que contiene y8 es

$$un10\ 10 - 8\ b310-8\ 12y2^8 = un\ 10\ 2b \# 32 \# 28 \# y8 = \frac{10!}{2!\ 8!} \# 9 \# 28y8$$

$$= \frac{10 \# 9 \# 8!}{2 \# 8!} \# 9 \# 28\ y8 = 103{,}680y8$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Encontrar un término particular en una expansión binomial

Encuentra el sexto término en la expansión de $1x + 22^{9}$.

Solución A Expande usando el teorema del binomio hasta alcanzar el sexto término.

$$1x + 22^{9} = a\,90\,bx9 + a\,91\,bx8\,\#\,2 + a\,92\,bx7\,\#\,22 + a\,9\,3\,bx6\,\#\,23 + a\,9\,4\,bx5\,\#\,24 + a\,9\,5\,bx4\,\#\,25 + g$$

El sexto término es

$$a\,9\,5\,bx4\,\#\,25 = \frac{9!}{5!\,4!}\,\#\,x4\,\#\,32 = 4032x4$$

Solución B El sexto término en la expansión de $1x + 22^{9}$, que tiene 10 términos en total, contiene $x4$. (¿Ves por qué?) Por la fórmula (3), el sexto término es

$$a\,94\,b29-4\,x4 = a\,9\,5\,b25\,x4 \qquad \frac{9!}{5!\,4!}\,\#\,32x4 = 4032x4$$

Ahora resuelve los problemas 2 9 y 3 5

El siguiente teorema muestra que la característica de suma triangular del triángulo de Pascal ilustrado en la Figura 12 siempre funciona.

TEOREMA Si n y j son números enteros con $1 \le j \le n$, entonces

$$\text{un segundo} + \text{un norte segundo} = \text{un norte} + 1\ \text{segundo} \tag{4}$$

Prueba

$$a\,nj\,b + a\,n\,b\,j-1 = \frac{n!}{1j - 12!\,3n - 1j - 12\,4\,!} + \frac{n!}{j!1n - j2!}$$

$$= \frac{n!}{1j - 12!1n - j + 12!} + \frac{n!}{j!1n - j2!}$$

$$= \frac{jn!}{j1j - 12!1n - j + 12!} + \frac{1n - j + 12n!\,j!}{1n - j + 12\,1n - j2!}$$

Multiplica el primer término por $\frac{j}{j}$ y $\frac{n \cdot 1 \text{ el}}{n \cdot 1 \text{ para}}$ segundo término por igualar los denominadores.

$$= \frac{jn!}{j!1n - j + 12!} + \frac{1n - j + 12n!\,j!}{1n - j + 12!}$$

$$= \frac{jn! + 1n - j + 12n!\,j!1n - j + 12!}{}$$

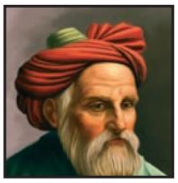
$$= \frac{n!1j + n - j + 12\,j!1n}{- j + 12!}$$

$$= \frac{n!1n + 12\,j!}{1n - j + 12!} = \frac{1n + 12!}{j![1n + 12 - j]!} = \text{una norte} + j\ \text{segundo}$$

■

Machine Translated by Google

Característica histórica



El caso n = 2 del Teorema del Binomio, 1a + b2 2, era conocido por Euclides en el año 300 a.C., pero la ley general parece haber sido descubierta por el matemático y astrónomo persa Omar Khayyám (1048-1131), también conocido como el autor del Rubáiyát, una colección de poemas de cuatro versos en los que Omar Khayyám hace observaciones sobre la condición humana. . Omar (1048-1131) Khayyám no enunció explícitamente el teorema del binomio, pero afirmó tener un método para extraer raíces tercera, cuarta, quinta, etc. Un pequeño estudio muestra que es necesario conocer el teorema del binomio para crear un método de este tipo.

El corazón del teorema del binomio es la fórmula de los coeficientes numéricos y, como vimos, se pueden escribir en forma triangular simétrica. El triángulo de Pascal aparece por primera vez en los libros de Yang Hui (alrededor de 1270) y Chu Shih-chieh (1303). El nombre de Pascal está asociado al triángulo debido a las muchas aplicaciones que le hizo, especialmente al conteo y la probabilidad. Al establecer estos resultados, fue uno de los primeros usuarios de la inducción matemática.

Mucha gente trabajó en la demostración del teorema del binomio, que finalmente completó Niels Abel (1802-1829) para todos los n (incluidos los números complejos).

12.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Los _____ es una visualización triangular del binomio coeficientes.

2. un nombre 0 b = _____ y un 1 segundo = _____ .

3. Verdadero o Falso j segundo = j! / 1n - j2! ¡norte!

4. El _____ Se puede utilizar para expandir expresiones. como 12x + 32 6.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 5 a 16, evalúe cada expresión.

5. un 5

6. un 3b

7. un 9

8. un 7segundo

b 9. a 9

10.a 50 49b

b 11. a 1000

12. un 1000 1000b

13.a 60 20b

14.a 55 23b

15. a 37 19b

16. a 47 25b

En los problemas 17 a 28, expanda cada expresión usando el teorema del binomio.

17. 1x - 12 5

18. 1x + 12 5

19. 1x + 32

23. 1x2 - y2 2

22. 12x + 32 5

20. 1x - 22 6

21. 13x + 12 4

+ 222

27. 1 1x - 232 4

26. 1 1x 6

24. 1x2 + y2 2

25. 1ax - por2 6

28. 1ax + by2 4

En los problemas 29 a 42, utilice el teorema del binomio para encontrar el coeficiente o término indicado.

29. El coeficiente de x6 en el desarrollo de 1x + 32 10

30. El coeficiente de x3 en el desarrollo de 1x - 32 10

31. El coeficiente de x3 en el desarrollo de 12x + 12 12

32. El coeficiente de x7 en el desarrollo de 12x - 12 12

33. El coeficiente de x2 en el desarrollo de 12x - 32 9

34. El coeficiente de x7 en el desarrollo de 12x + 32 9

35. El quinto término en el desarrollo de 1x + 7

36. El tercer término en el desarrollo de 1x - 7

32 37. El sexto término en el desarrollo de 13x + 22 8

32 38. El tercer término en el desarrollo de 13x - 22 9

39. El coeficiente de x0 en el desarrollo de ¢x - x2 ≤ 9

40. El coeficiente de x0 en el desarrollo de ax2 + 1/x b 12

41. El coeficiente de x2 en el desarrollo de a 1x + 3/1x b 8

42. El coeficiente de x4 en el desarrollo de ax - 1x b 2 10

Aplicaciones y extensiones

43. Usa el teorema del binomio para encontrar el valor numérico 5 de 11.0012 correcto con cinco decimales.
[Pista: 11.0012 5 = 11 + 10-3 2 5]

44. Usa el teorema del binomio para encontrar el valor numérico. de 10.9982 6 correcto con cinco decimales.

Machine Translated by Google

45. Demuestre que a-nnb = n y a n nb = 1.

46. Fórmula de Stirling Una aproximación para n!, cuando n es grande, viene dada por

$$n! \approx 22\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n - 1}\right)$$

¡Calcula 12!, 20! y 25! en tu calculadora. Luego use la fórmula de Stirling para aproximar 12!, 20! y 25!.

47. Problema de desafío Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

48. Problema de desafío Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

[Pista: 2n = 11 + 12n ; ahora use el teorema del binomio.]

49. Problema de desafío Encuentra el valor de

$$\binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$+ \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5$$

50. Problema de desafío Figuras de Pascal Las entradas en el Triángulo de Pascal se pueden usar , para n Ú 2, para determinar el número de figuras de k lados que se pueden formar usando un conjunto de n puntos en un círculo. En general, la primera entrada de una fila indica el número de figuras de n lados que se pueden formar, la segunda entrada indica el número de figuras de 1n - 12@lados, y así sucesivamente. Por ejemplo, si un círculo contiene 4 puntos, la fila para n = 4 en el Triángulo de Pascal muestra el número de cuadriláteros posibles (1), el número de triángulos (4) y el número de segmentos de línea (6) que se pueden formar. formado usando los cuatro puntos.

(a) ¿Cuántos hexágonos se pueden formar usando 8 puntos que se encuentran sobre la circunferencia de un círculo?

(b) ¿Cuántos triángulos se pueden formar usando 10 puntos que se encuentran sobre la circunferencia de un círculo?

(c) ¿Cuántos dodecágonos se pueden formar usando 20 puntos que se encuentran en la circunferencia de un círculo?

51. Problema de desafío En el desarrollo de 3a + 1b + c2, $^{2}{}_{4}{}^{8}$, encuentre el coeficiente del término que contiene a5 b4 c2 .

52. Problema de desafío Encuentra el coeficiente de x4 en f 1x2 =

$$11 - x2\,2 + 11 - x2\,2^{2} + g + 11 - x2\,2^{10}$$

Conserve sus conocimientos Los problemas 53 a 62 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

53. Resuelve 6x = 5x+1 . Exprese la respuesta tanto en forma exacta como en forma decimal redondeada a tres decimales.

54. Para v = 2i + 3j y w = 3i - 2j: (a) Encuentre el producto escalar v # w. (b) Encuentre el ángulo entre v y w. (c) ¿Son los vectores paralelos, ortogonales o ninguno de los dos?

55. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ 4x + 2y - z = 12 \end{cases}$$

56. Grafique el sistema de desigualdades. Indica si la gráfica es acotada o ilimitada y etiqueta los puntos de las esquinas.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$$

57. Si f 1x2 = x2 - 6 y g1x2 = 2x + 2, encuentre g1f 1x2 2 y declarar su dominio.

58. Si y = $\frac{5}{3}x^3 + 2x + C$ e y = 5 cuando x = 3, encuentre la valor de C.

59. Establecer la identidad sen2 u + sen2 u tan2 u = tan2 u.

60. Simplifica: $\dfrac{1x3 + 12^{\frac{1}{3}}x - 2 > 3 - x1 > 3\,13x2\,2}{1x3 + 12^{2}}$

61. Encuentre las asíntotas verticales, si las hay, de la gráfica de

$$3x2\ f\ 1x2 = 1x - 32\,1x + 12$$

62. Si f 1x2 = $\dfrac{x2 + 1}{2x + 5}$, encuentre f 1 - 22. ¿Cuál es el valor correspondiente? punto en la gráfica de f ?

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Secuencia (pág. 852)	Una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos y cuyo rango es un subconjunto de los números reales.
Factoriales (pág. 854)	0! = 1, 1! = 1, norte! = n1n - 12 # g # 3 # 2 # 1 si n Ú 2 es un número entero a1
Secuencia aritmética (págs. 862 y 864)	= a, an = an-1 + d, donde a1 = a = primer término, d = diferencia común an = a1 + 1n - 12d
Suma de los primeros n términos de una aritmética secuencia (pág. 865)	$S_n = \frac{n}{2}32a1 + 1n - 12d4 = \frac{n}{2}1a1 + an2$

Machine Translated by Google

Secuencia geométrica (págs. 869 y 870)	$a_1 = a$, $a_n = ar^{n-1}$, donde $a_1 = a$ = primer término, r = razón común, $r \neq 0$
Suma de los primeros n términos de una secuencia geométrica (p. 871)	$S_n = a_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$ $r \neq 0, 1$
Serie geométrica infinita (p. 872)	$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$
Suma de una serie geométrica infinita convergente (p. 873)	Si $0 < \lvert r \rvert < 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1} = \dfrac{a_1}{1 - r}$
Importe de una anualidad (pág. 875)	$A = P \dfrac{(1 + i)^n - 1}{i}$, donde P = el depósito (en dólares) realizado al final de cada período de pago, i = tasa de interés por período de pago (como decimal), y A = el monto de la anualidad después de n depósitos.
Principio de inducción matemática (p. 881)	Si se cumplen las dos condiciones siguientes, Condición I: La afirmación es verdadera para el número natural 1. Condición II: Si el enunciado es verdadero para algún número natural k, y se puede demostrar que es verdadero para k + 1, entonces el enunciado es verdadero para todos los números naturales.
Coeficiente binomial (p. 886)	$\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$
El triángulo de Pascal (p. 887)	Ver Figura 12.
Teorema del binomio (p. 887)	$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \cdots + \binom{n}{j} x^{n-j} a^j + \cdots + \binom{n}{n} a^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} a^j$

Objetivos

Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplos	Ejercicios de revisión
12.1	1 Enumere los primeros términos de una secuencia (p. 852)	1–4	1, 2
	2 Enumerar los términos de una secuencia definida por una fórmula recursiva (p. 855)	5, 6	3, 4
	3 Usar notación de suma (p. 856)	7, 8	5, 6
	4 Encuentra la suma de una secuencia (p. 857)	9	13, 14
12.2	1 Determinar si una secuencia es aritmética (p. 862)	1–3	7-12
	2 Encuentra una fórmula para una secuencia aritmética (p. 863)	4, 5	17, 19–21, 34(a)
	3 Encuentra la suma de una secuencia aritmética (p. 865)	6–8	7, 10, 14, 34(b), 35
12.3	1 Determinar si una secuencia es geométrica (p. 869)	1–3	7-12
	2 Encuentra una fórmula para una secuencia geométrica (p. 870)	4	11, 18, 36(a)–(c), 38
	3 Encuentra la suma de una secuencia geométrica (p. 871)	5, 6	9, 11, 15, 16
	4 Determinar si una serie geométrica converge o diverge (p. 872)	7–9	22–25, 36(d)
	5 Resolver problemas de anualidades (p. 875)	10, 11	37
12.4	1 Demostrar afirmaciones mediante inducción matemática (p. 881)	1–4	26–28
12.5	1 Evaluar una $\binom{n}{j}$ (pág. 885)	1	29
	2 Utilice el teorema del binomio (p. 887)	2–5	30–33

Machine Translated by Google

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 a 4, enumere los primeros cinco términos de cada secuencia.

1. {an} = e 1 - 12 n a 2m + 1 novios
2. {cn} = b3n n3r _
3. a1 = 3; un = $\frac{2}{3}$ an-1
4. a1 = 2; un = 2 - un-1

5. Expandir $\sum_{k=1}^{4}$ 14k + 22.

6. Expresar 1 - 2 $\frac{1}{}$ + $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{4}$ + g + $\frac{1}{13}$ usando notación de suma.

En los problemas 7 a 12, determine si la secuencia dada es aritmética, geométrica o ninguna de las dos. Si la secuencia es aritmética, encuentre la diferencia común y la suma de los primeros n términos. Si la secuencia es geométrica, encuentre la razón común y la suma de los primeros n términos.

7. 5an 6 = 5n + 56
8. 5cn 6 = 52n36 3
9. 5sn6 = 523n6 _
10. 2, 10, 18, 26, c
11. 3, 2$\frac{3}{}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{}$, c (décimo)
12. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, c

En los problemas 13 a 16, encuentre cada suma.

13. $\sum_{k=1}^{30}$ un 1k2 + 22
14. $\sum_{k=1}^{40}$ un 1 - 2k + 82
15. $\sum_{k=1}^{7}$ un $\frac{k}{}$ (segundo) 1
16. $\sum_{k=1}^{10}$ un 1 - 22 k

En los problemas 17 a 19, encuentre el término indicado en cada secuencia. [Sugerencia: encuentre primero el término general.]

17. 11.º término de 1, 7, 13, 19, c
18. 11º término de 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, c
19. 9º término de 22, $\overline{222}$, $\overline{322}$, c _

En los problemas 20 y 21, encuentre una fórmula general para cada secuencia aritmética.

20. El séptimo término es 31; El vigésimo término es 96.
21. El octavo término es 15, el decimoquinto término es 29

En los problemas 22 a 25, determine si cada serie geométrica infinita converge o diverge. Si converge, encuentre su suma.

22. 3 + 1 + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{9}$ + g
23. 2 - 1 + $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$ + g
24. $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{4}$ + $\frac{9}{8}$ + g
25. $\sum_{k=1}^{q}$ un 4a $\frac{k-1}{}$ (segundo) 1

En los problemas 26 a 28, utilice el principio de inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es verdadero para todos los números naturales.

26. 7 + 14 + 21 + g + 7n = $\frac{7n}{2}$ 1n + 12
27. 4 + 20 + 100 + g + 4 # 5k = 5k+1 - 1
28. 1 + 42 + 72 + g + 13n - 22 2 = $\frac{1}{2}$ n16n2 - 3n - 12
29. Valorar: un 5 (segundo) 2

En los problemas 30 y 31, expande cada expresión usando el teorema del binomio.

30. 12x + 32 31. 1x - 72 6
5

---

32. Encuentra el coeficiente de x7 en el desarrollo de 1x + 22 9.
33. Encuentra el coeficiente de x2 en el desarrollo de 12x + 12 7.
34. Construyendo una escalera de ladrillos Una escalera de ladrillos tiene un total de 25 escalones. El paso inferior requiere 80 ladrillos. Cada paso posterior requiere tres ladrillos menos que el paso anterior.
    (a) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el escalón superior?
    (b) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir la escalera?
35. Crear un diseño de piso Un piso de mosaico está diseñado en forma de trapezoide de 26 pies de ancho en la base y 8 pies de ancho en la parte superior. Las baldosas, de 12 pulgadas por 12 pulgadas, deben colocarse de modo que cada fila sucesiva contenga dos baldosas menos que la fila de abajo. ¿Cuántas fichas se necesitarán?
36. Pelotas que rebotan Se deja caer una pelota desde una altura de 20 pies. Cada vez que golpea el suelo, rebota hasta tres cuartos de la altura del rebote anterior.
    (a) ¿ Hasta qué altura rebotará la pelota después de golpear? el suelo por tercera vez?
    (b) ¿ A qué altura rebotará después de tocar el suelo por enésima vez?
    (c) ¿ Cuántas veces debe golpear la pelota el suelo? antes de que su rebote sea inferior a 6 pulgadas?
    (d) ¿Qué distancia total recorre la pelota antes de dejar de rebotar?
37. Planificación de la jubilación A Chris le pagan una vez al mes y aporta $350 cada período de pago a su 401(k). Si Chris planea jubilarse en 20 años, ¿cuál será el valor de su 401(k) si la tasa de rendimiento anual del 401(k) es del 6,5% compuesto mensual?
38. Aumentos salariales A su amigo le acaban de contratar con un salario anual de 40.000 dólares. Si espera recibir aumentos anuales del 6%, ¿cuál será su salario al comenzar su séptimo año?

Machine Translated by Google

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

En los problemas 1 y 2, enumera los primeros cinco términos de cada secuencia.

1. 5sn6 = bn2 - 1norte + 8 r

2. a1 = 4, an = 3an-1 + 2

En los problemas 3 y 4, expande cada suma. Evalúa cada suma.

3. $\sum_{k=1}^{3}$ un 1 - 12 k+1 ¢ k +k2 ≤

4. $\sum_{k=1}^{4}$ un c a2 3 b -kd _ _

5. Escribe la siguiente suma usando notación sumatoria.

$$-\frac{2}{5}+\frac{3}{6}-\frac{4}{7}+g+\frac{11}{14}$$

En los problemas 6 a 11, determine si la secuencia dada es aritmética, geométrica o ninguna de las dos. Si la secuencia es aritmética, encuentre la diferencia común y la suma de los primeros n términos. Si la secuencia es geométrica, encuentre la razón común y la suma de los primeros n términos.

6. 6, 12, 36, 144,. . .

7. mi - $\frac{1}{2}$ # 4nf _

8. - 2, - 10, - 18, - 26, c

9. mi - $\frac{\text{norte}}{2}$ + 7 f

10. 25, 10, 4, $\frac{8}{5}$, .

11. mi 2norte + 1f

12. Determina si la serie geométrica infinita

256 - 64 + 16 - 4 + g

converge o diverge. Si converge, encuentre su suma.

13. Expande 13m + 22 14. ^{5} usando el teorema del binomio.

Usa el principio de inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es verdadero para todos los números naturales.

$$a1+\frac{1}{1}b\,a1+\frac{1}{2}b\,a1+\frac{1}{3}bg\,a1+\frac{1}{\text{norte segundo}=\text{norte}+1}$$

15. Un auto nuevo se vendió por $31,000. Si el vehículo pierde el 15% de su valor cada año, ¿cuánto valdrá al cabo de 10 años?

16. Un levantador de pesas comienza su rutina haciendo press de banca con 100 libras y aumenta el peso en 30 libras por cada serie. Si hace 10 repeticiones en cada serie, ¿cuál es el peso total levantado después de 5 series?

Revisión acumulativa

1. Encuentra todas las soluciones, reales y complejas, de la ecuación.

0x2 0 = 9

2. (a) Grafique el círculo x2 + y2 = 100 y la parábola y = 3x2 .

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones: b x2 + y2 y = 100 = 3x2

(c) ¿Dónde se cruzan el círculo y la parábola?

3. Resuelve la ecuación: 2ex = 5

4. Encuentra una ecuación de la recta con pendiente 5 e intersección con el eje x 2.

5. Encuentra la ecuación estándar del círculo cuyo centro es el punto 1 - 1, 22 si 13, 52 es un punto del círculo.

6. f 1x2 = $\frac{3x}{x-2}$ y g1x2 = 2x + 1

Encontrar:

(a) 1f g2 (b) 1g f 2 142

122 (c) 1f (d) El dominio de 1f g2 1x2

g2 1x2 (e) 1g (f) El dominio de 1g f2 1x2

f2 1x2 (g) La función g-1 (h) La función f dominio $^{-1}$ y es y su dominio

7. Encuentre la ecuación de una elipse con centro en el origen, foco en 10, 32 y vértice en 10, 42.

8. Encuentra la ecuación de una parábola con vértice en 1 - 1, 22 y foco en 1 - 1, 32.

9. Encuentra la ecuación polar de un círculo con centro en 10, 42 que pasa por el polo. ¿Cuál es la ecuación rectangular?

10. Resuelve la ecuación

2 sen2 x - sen x - 3 = 0, 0 … x 6 2p

11. Encuentra el valor exacto de cos-1 1 - 0,52.

12. Si sen u = y $\frac{1}{4}$ u está en el segundo cuadrante, encuentre:

(a) cos u (b) tan tú

(c) sen12u2 (d) cos12u2

(e) pecado a2 1unidades

Machine Translated by Google

Proyectos del Capítulo

Proyecto basado en Internet

I. Crecimiento de la población El tamaño de la población de los Estados Unidos depende esencialmente de su población actual, las tasas de natalidad y mortalidad de la población y la inmigración.

Sea b la tasa de natalidad de la población estadounidense y d su tasa de mortalidad. Entonces r = b - d representa la tasa de crecimiento de la población, donde r varía de un año a otro. La población de EE. UU. después de n años se puede modelar utilizando la función recursiva

$$pn = 11 + r2pn-1 + yo$$

donde I representa la inmigración neta a los Estados Unidos.

1. Utilizando datos del CIA World Factbook en https://www.cia.gov/library/publications/resources/el-mundo-factbook/, determinar las tasas de natalidad y mortalidad en los Estados Unidos para el año más reciente en el que se registraron datos. están disponibles. Las tasas de natalidad y mortalidad se expresan como el número de nacidos vivos por cada 1000 habitantes. Cada uno debe calcularse como el número de nacimientos (muertes) por individuo. Por ejemplo, en 2017, la tasa de natalidad fue de 12,5 por 1000 y la tasa de mortalidad fue de 8,2 por 1000, por lo que

$$\text{segundo} = \frac{12.5}{1000} = 0.0125, \text{ mientras que } d = \frac{8.2}{1000} = 0.0082.$$

A continuación, utilizando datos del Servicio de Inmigración y Naturalización en https://fedstats.sites.usa.gov/, Determine la inmigración neta a los Estados Unidos para el mismo año utilizado para obtener b y d.

2. Determine el valor de r, la tasa de crecimiento de la población.
3. Encuentre una fórmula recursiva para la población de los Estados Unidos. Estados.
4. Utilice la fórmula recursiva para predecir la población de Estados Unidos el año siguiente. En otras palabras, si hay datos disponibles hasta el año 2018, prediga la población de EE. UU. en 2019.
5. ¿Parece razonable tu predicción? Explicar.
6. Repita los problemas 1 a 5 para Uganda utilizando el CIA World Factbook (en 2017, la tasa de natalidad fue de 42,9 por 1000 y la tasa de mortalidad fue de 10,2 por 1000).
7. ¿Sus resultados para Estados Unidos (un país desarrollado) y Uganda (un país en desarrollo) parecen estar en línea con el artículo al comienzo del capítulo? Explicar.
8. ¿Crees que la fórmula recursiva que se encuentra en el problema 3 será útil para predecir poblaciones futuras? ¿Por qué o por qué no?

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC):

II. Proyecto en Motorola Digital Wireless Communication Los teléfonos móviles toman la voz y la transforman en código digital usando sólo ceros y unos. Vea cómo se puede modelar la longitud del código mediante una secuencia matemática.

III. Economía Los economistas utilizan el precio actual de un bien y un modelo recursivo para predecir la demanda futura de los consumidores y determinar producción futura.

IV. Pruebas estandarizadas Muchas pruebas de inteligencia, aptitud y rendimiento contienen preguntas que preguntan sobre los términos de una ecuación matemática. secuencia.

Machine Translated by Google

13 Conteo y probabilidad

Comprar un billete de lotería

En los últimos años, los premios mayores de las dos loterías multiestatales más importantes del país, Mega Millions y Powerball, han alcanzado máximos históricos. Esto ha sucedido desde que Powerball (en octubre de 2015) y Mega Millions (en octubre de 2017) hicieron más difícil ganar sus premios mayores. La probabilidad de ganar el premio mayor de Mega Millions es ahora de aproximadamente 1 entre 303 millones, y la probabilidad de ganar el Powerball es de aproximadamente 1 entre 292 millones.

Con posibilidades tan improbables de ganar premios mayores, uno podría preguntarse si alguna vez llega un momento en el que vale la pena comprar un billete de lotería. Una consideración importante al hacer esta determinación es el valor esperado.
Para un juego de azar, el valor esperado es una medida de cuánto ganará o perderá un jugador si juega un gran número de veces.

El proyecto al final de este capítulo explora el valor esperado de jugar Mega Millions y Powerball y examina cómo se relaciona el valor esperado con el monto del premio mayor.

—Ver Capítulo Proyecto I—

Describir

13.1 Contando
13.2 Permutaciones y combinaciones
13.3 Probabilidad
Revisión del capítulo
Prueba de capítulo
Revisión acumulativa
Proyecto del Capítulo

Una mirada atras

Introdujimos conjuntos en el Apéndice A y los hemos estado usando para representar soluciones de ecuaciones y desigualdades y para representar el dominio y rango de funciones.

Una mirada hacia el futuro

Aquí analizamos métodos para contar el número de elementos de un conjunto y consideramos el papel de los conjuntos en la probabilidad.

Machine Translated by Google

13.1 Contando

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Conjuntos (Sección A.1, págs. A1–A3)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 901.

OBJETIVOS 1 Encontrar todos los subconjuntos de un conjunto (p. 897)

2 Cuente el número de elementos en un conjunto (p. 897)

3 Resuelva problemas de conteo usando el principio de multiplicación (p. 899)

Contar juega un papel importante en muchas áreas diversas, como la probabilidad, la estadística y la informática; Las técnicas de conteo son parte de una rama de las matemáticas llamada combinatoria.

1 Encuentra todos los subconjuntos de un conjunto

Comenzamos revisando las formas en que se pueden comparar dos conjuntos.

- Si dos conjuntos A y B tienen exactamente los mismos elementos, decimos que A y B son iguales y escribimos A = B.
- Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento de un conjunto B, decimos que A es un subconjunto de B y escribe A B.
- Si A B y A ≠ B, decimos que A es un subconjunto propio de B y escribimos A B.
- Si A B, cada elemento del conjunto A también está en el conjunto B, pero B puede tener o no elementos adicionales. Si A B, cada elemento en A también está en B, y B tiene al menos un elemento que no se encuentra en A.
- Finalmente, el conjunto vacío, , es un subconjunto de todo conjunto; eso es,

A para cualquier conjunto A

EJEMPLO 1 Encontrar todos los subconjuntos de un conjunto

Escribe todos los subconjuntos del conjunto 5a, b, c6.

Solución Para organizar el trabajo, anota todos los subconjuntos sin elementos, luego los de un elemento, luego los de dos elementos y finalmente los de tres elementos. Esto da todos los subconjuntos. ¿Ves por qué?

0 elementos	1 elemento	2 elementos	3 elementos
	5a6, 5b6, 5c6	5a, b6, 5b, c6, 5a, c6	5a, b, c6

Ahora trabaja el problema 9

2 Cuente el número de elementos en un conjunto

Al contar el número de estudiantes en un salón de clases o el número de monedas de un centavo en su bolsillo, lo que realmente está haciendo es relacionar, uno a uno, cada objeto que se va a contar con el conjunto de números para contar, 1, 2, 3, c, n, para algún número n. Si un conjunto A coincidiera de esta manera con el conjunto 51, 2, c, 256, concluirías que hay 25 elementos en el conjunto A. La notación n1A2 = 25 se usa para indicar que hay 25 elementos en el conjunto A.

En palabras

La notación n1A2 significa "el número de elementos en el conjunto A".

Como el conjunto vacío no tiene elementos, escribimos

n1 2 = 0

Si el número de elementos de un conjunto es un número entero no negativo, el conjunto es finito. De lo contrario, es infinito. Nos ocuparemos únicamente de los conjuntos finitos.

Machine Translated by Google

Mire nuevamente el ejemplo 1. Un conjunto con 3 elementos tiene 23 = 8 subconjuntos. Este resultado puede generalizarse.

Si A es un conjunto con n elementos, entonces A tiene 2n subconjuntos.

Por ejemplo, el conjunto 5a, b, c, d, e6 tiene 25 = 32 subconjuntos.

EJEMPLO 2 Análisis de datos de encuestas

En una encuesta de 100 estudiantes universitarios, 35 estaban matriculados en Álgebra universitaria, 52 estaban matriculados en Ciencias de la Computación I y 18 estaban matriculados en ambos cursos.

(a) ¿Cuántos estudiantes estaban matriculados en Álgebra universitaria o Ciencias de la computación I?

(b) ¿Cuántos se matricularon en ninguno de los cursos?

Solución (a) Primero, sea A = conjunto de estudiantes en álgebra universitaria

B = conjunto de estudiantes de Informática I

Entonces la información dada nos dice que

n1A2 = 35 n1B2 = 52 n1A ∩ B2 = 18

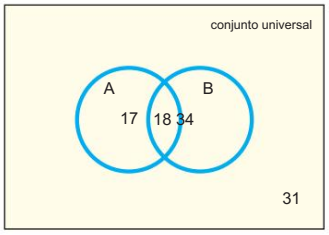


Figura 1

Consulte la Figura 1. Dado que n1A ∩ B2 = 18, la parte común de los círculos que representan el conjunto A y el conjunto B tiene 18 elementos. Además, la porción restante del círculo que representa el conjunto A tendrá 35 - 18 = 17 elementos. De manera similar, la porción restante del círculo que representa el conjunto B tiene 52 - 18 = 34 elementos.
Esto significa que 17 + 18 + 34 = 69 estudiantes estaban matriculados en Álgebra universitaria o Ciencias de la computación I.

(b) Dado que se encuestó a 100 estudiantes, se deduce que 100 - 69 = 31 no estaban matriculados en ningún curso.

Ahora resuelve los problemas 1 7 y 2 7

La solución del ejemplo 2 contiene la base para una fórmula de conteo general.
Si contamos los elementos en cada uno de los dos conjuntos A y B, necesariamente contamos dos veces los elementos que están tanto en A como en B, es decir, aquellos elementos en A ∩ B. Para contar correctamente los elementos que están en A o B: es decir, para encontrar n1A B2, reste aquellos en A ∩ B de n1A2 + n1B2.

TEOREMA Fórmula de conteo

Si A y B son conjuntos finitos,

$$n1A\ B2 = n1A2 + n1B2 - n1A \cap B2 \quad (1)$$

Consulte el ejemplo 2. Usando la fórmula (1), tenemos

$$n1A\ B2 = n1A2 + n1B2 - n1A \cap B2$$
$$= 35 + 52 - 18$$
$$= 69$$

Hay 69 estudiantes matriculados en Álgebra Universitaria o Informática I.

Un caso especial de la fórmula de conteo (1) ocurre si A y B no tienen elementos en común. En este caso, A ∩ B = , entonces n1A ∩ B2 = 0.

TEOREMA Principio de suma del conteo

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos en común, es decir,

$$\text{si } A \cap B = \text{, entonces } n1A\ B2 = n1A2 + n1B2 \quad (2)$$

Machine Translated by Google

La fórmula (2) se puede generalizar.

TEOREMA Principio general de suma del conteo

Si, para n conjuntos A1, A2, c, An, no hay dos que tengan elementos en común, entonces

$$n1A1 \quad A2 \quad g \quad An2 = n1A12 + n1A22 + g + n1An2 \qquad (3)$$

EJEMPLO 3 Contando

La Tabla 1 enumera el nivel de educación de todos los residentes de Estados Unidos de 25 años o más en 2017.

tabla 1

Nivel de educación	Número de residentes estadounidenses de al menos 25 años
No es un graduado de la escuela secundaria	22.540.000
Graduado de preparatoria	62.512.000
Algo de universidad, pero ningún título.	35.455.000
grado asociado	22.310.000
licenciatura	46.262.000
Grado avanzado	27.841.000

Fuente: Oficina del Censo de EE. UU.

(a) ¿Cuántos residentes estadounidenses de 25 años o más tenían un título de asociado o un ¿licenciatura?

(b) ¿Cuántos residentes estadounidenses de 25 años o más tenían un título de asociado, un ¿Título de licenciatura o un título avanzado?

Solución Sea A el conjunto de titulares de títulos de asociado, B el conjunto de titulares de títulos de licenciatura y C el conjunto de titulares de títulos avanzados. No hay dos conjuntos de los conjuntos A, B y C que tengan elementos en común (aunque el titular de un título avanzado ciertamente también posee un título de licenciatura, el individuo sería parte del conjunto para el cual se ha conferido el título más alto). Entonces

$$n1A2 = 22.310.000 \quad n1B2 = 46.262.000 \quad n1C2 = 27.841.000$$

(a) Usando la fórmula (2),

$$n1A \quad B2 = n1A2 + n1B2 = 22.310.000 + 46.262.000 = 68.572.000$$

Había 68.572.000 residentes estadounidenses de 25 años o más que tenían un título de asociado o una licenciatura.

(b) Usando la fórmula (3),

$$n1A \quad B \quad C2 = n1A2 + n1B2 + n1C2$$
$$= 22.310.000 + 46.262.000 + 27.841.000$$
$$= 96.413.000$$

Había 96.413.000 residentes estadounidenses de 25 años o más que tenían un título de asociado, una licenciatura o un título avanzado.

 Ahora resuelve el problema 3 1

3 Resuelva problemas de conteo utilizando el principio de multiplicación

EJEMPLO 4 Contando el número de posibles comidas

La cena de precio fijo en el Restaurante Mabenka ofrece las siguientes opciones:

Aperitivo: sopa o ensalada
Plato principal: pollo al horno, hamburguesa de ternera asada, hígado de res o rosbif en jugo
Postre: helado o tarta de queso

¿Cuántas comidas diferentes se pueden pedir?

Machine Translated by Google

Solución Ordenar una comida de este tipo requiere tres decisiones separadas:

Elige un aperitivo	Elige un plato principal	Elige un postre
2 opciones	4 opciones	2 opciones

Mire el diagrama de árbol en la Figura 2. Tenga en cuenta que para cada opción de aperitivo, hay 4 opciones de platos principales. Y por cada una de estas 2 # 4 = 8 opciones, hay 2 opciones de postre. Un total de

$$2 \# 4 \# 2 = 16$$

Se pueden pedir diferentes comidas.

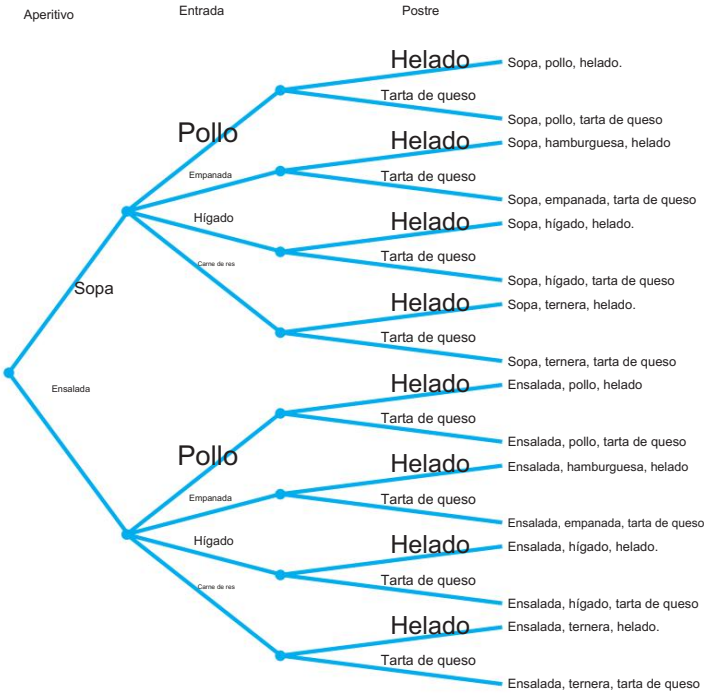


Figura 2

El ejemplo 4 demuestra un principio general de conteo.

TEOREMA Principio de multiplicación del conteo

Si una tarea consta de una secuencia de opciones en la que hay p selecciones para la primera opción, q selecciones para la segunda opción, r selecciones para la tercera opción, etc., la tarea de hacer estas selecciones se puede realizar en

$$p \# q \# r \# \cdots$$

diferentes caminos.

EJEMPLO 5 Formando códigos

¿Cuántas palabras clave de dos símbolos se pueden formar si el primer símbolo es una letra mayúscula y el segundo símbolo es un dígito?

Solución A veces resulta útil comenzar enumerando algunas de las posibilidades. El código consta de una letra mayúscula seguida de un dígito, por lo que algunas posibilidades son A1, A2, B3, X0, etc. La tarea consiste en hacer dos selecciones: la primera selección requiere elegir una letra mayúscula (26 opciones) y la segunda tarea requiere elegir un dígito (10 opciones). Según el principio de multiplicación, existen

$$26 \# 10 = 260$$

diferentes palabras de código del tipo descrito.

Ahora resuelve el problema 2 3

Machine Translated by Google

13.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado? Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. El _____ de A y B consta de todos los elementos en cualquiera de los dos A o B o ambos. (págs. A1–A3)

2. El _____ de A con B consta de todos los elementos en tanto A como B. (págs. A1–A3)

3. Verdadero o Falso La intersección de dos conjuntos es siempre un subconjunto de su unión. (págs. A1–A3)

4. Verdadero o Falso Si A es un conjunto, el complemento de A es el conjunto de todos los elementos del conjunto universal que no están en A. (págs. A1–A3)

Conceptos y vocabulario

5. Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento de un conjunto B, decimos que A es a de B y escribimos A _____ B.

6. Si el número de elementos de un conjunto es un entero no negativo, decimos que el conjunto es _____ .

7. Verdadero o Falso Si una tarea consta de una secuencia de tres opciones en la que hay p selecciones para la primera opción, q selecciones para la segunda opción y r selecciones para la tercera opción, entonces la tarea de hacer estas selecciones puede ser hecho en p # q # r diferentes maneras.

8. Elección múltiple La fórmula de conteo establece que si A y B son conjuntos finitos, entonces n1A B2 = (a) n1A2 + n1B2 (b) _____ .
n1A2 + n1B2 - n1A ∩ B2
(c) n1A2 # n1B2 (d) n1A2 - n1B2

Desarrollo de habilidades

9. Escribe todos los subconjuntos de 5a, b, c, d6.

10. Escribe todos los subconjuntos de 5a, b, c, d, e6.

11. Si n1A2 = 30, n1B2 = 40 y n1A B2 = 45, encuentre n1A ∩ B2.

12. Si n1A2 = 15, n1B2 = 20 y n1A ∩ B2 = 10, encuentre n1A B2.

13. Si n1A B2 = 60, n1A ∩ B2 = 40 y n1A2 = n1B2, encuentre n1A2.

14. Si n1A B2 = 50, n1A ∩ B2 = 10 y n1B2 = 20, encuentre n1A2.

En los problemas 15 a 22, utilice la información proporcionada en la figura.

15. ¿ Cuántos hay en el conjunto B?

16. ¿ Cuántos hay en el conjunto A?

17. ¿Cuántos hay en A o B?

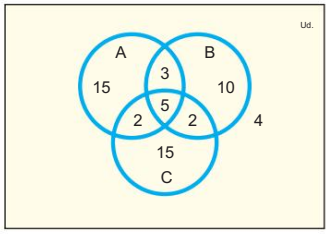
18. ¿ Cuántos hay en A y B?

19. ¿ Cuántos no están en A?

20. ¿ Cuántos hay en A pero no en C?

21. ¿Cuántos hay en A , B o C?

22. ¿Cuántos hay en A , B y C?



Aplicaciones y extensiones

23. Camisas y corbatas Un hombre tiene 10 camisas y 3 corbatas. ¿Cuántas combinaciones diferentes de camisa y corbata puede usar?

24. Blusas y faldas Una mujer tiene 5 blusas y 8 faldas. ¿Cuántos conjuntos diferentes puede usar?

25. Números de cuatro dígitos ¿Cuántos números diferentes de cinco dígitos se pueden formar usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si el primer dígito no puede ser 0? Se permiten dígitos repetidos.

26. Números de cinco dígitos ¿Cuántos números de cinco dígitos se pueden formar usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si el primer dígito no puede ser 0 o 1? Se permiten dígitos repetidos.

27. Análisis de los datos de una encuesta En una encuesta de consumidores realizada a 500 personas, 124 indicaron que comprarían un electrodoméstico importante durante el próximo mes, 70 indicaron que comprarían un automóvil y 24 dijeron que comprarían tanto un electrodoméstico importante como un auto. ¿Cuántos no comprarán ninguno de los dos? ¿Cuántos comprarán sólo un coche?

28. Análisis de los datos de la encuesta En una encuesta de estudiantes, 200 indicaron que asistirían a la Sesión de verano I y 150 indicaron la Sesión de verano II. Si 75 estudiantes planean asistir a ambas sesiones de verano y 275 indicaron que no asistirían a ninguna sesión, ¿cuántos estudiantes participaron en la encuesta?

29. Análisis de datos de encuestas En una encuesta de 100 inversores en el mercado de valores,
50 acciones propias en IBM
40 acciones propias en AT&T
45 acciones propias en GE
20 acciones propias tanto en IBM como en GE
15 acciones propias tanto en AT&T como en GE
20 acciones propias tanto en IBM como en AT&T
5 acciones propias en los tres
(a) ¿ Cuántos de los inversores encuestados no tenían acciones? en alguna de las tres empresas?
(b) ¿Cuántos poseían sólo acciones de IBM?
(c) ¿Cuántos poseían sólo acciones de GE?
(d) ¿Cuántos no eran dueños de IBM ni de GE?
(e) ¿Cuántos poseían IBM o AT&T pero no GE?

30. Clasificación de los tipos de sangre La sangre humana se clasifica como Rh+ o Rh-. La sangre también se clasifica por tipo: A, si contiene un antígeno A pero no un antígeno B; B, si contiene un antígeno B pero no un antígeno A; AB, si contiene antígenos A y B; y O, si no contiene ningún antígeno. Dibuja un diagrama de Venn que ilustre los distintos tipos de sangre. Según esta clasificación, ¿cuántos tipos diferentes de sangre existen?

Machine Translated by Google

31. Datos demográficos Los datos que se muestran a continuación representan el estado civil de los hombres de 18 años o más en un país. Utilice estos datos para determinar el número de estos machos en cada grupo que se describe a continuación.

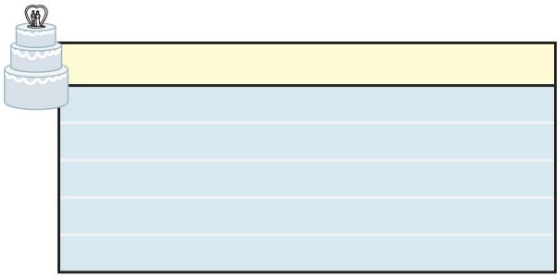
Estado civil	Número (en millones)
Casado	55,4
Viudo	2.8
Divorciado	11.2
Nunca casado	45.0

Fuente: Encuesta de población actual

(a) Determine el número de hombres de 18 años y mayores que están casados o nunca se casaron.

(b) Determine el número de hombres de 18 años y mayores que están casados, divorciados o nunca casados.

32. Datos demográficos Los siguientes datos representan el estado civil de mujeres de 18 años o más en los EE. UU. en 2017.



Fuente: Encuesta de población actual

(a) Determine el número de mujeres de 18 años y mayores que están divorciados o separados.

(b) Determine el número de mujeres de 18 años y más que están casadas, viudas o divorciadas.

33. Carteras de acciones Como planificador financiero, se le pide que seleccione una acción de cada uno de los siguientes grupos: 8 acciones locales, 6 acciones nacionales acciones y 12 acciones globales. ¿Cuántas carteras diferentes son posibles?

Explicar conceptos: discusión y escritura

34. Invente un problema diferente a cualquiera que se encuentre en el texto y que requiera el principio de suma de contar para resolverse. Dáselo a un amigo para que lo resuelva y lo critique.

35. Investigue la noción de contar en relación con conjuntos infinitos. Escribe un ensayo sobre tus hallazgos.

Conserve su conocimiento

Los problemas 36 a 45 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

36. Grafica 1x - 22 37. ^{2} + 1 año + 12 ^{2} = 9.

Si los lados de un triángulo son a = 2, b = 2 y c = 3, encuentra las medidas de los tres ángulos. Redondea a la décima más cercana.

38. Encuentra todos los ceros reales de la función:

f 1x2 = 1x - 22 1x2 - 3x - 102

39. Resuelve: log3 x + log3 2 = - 2

40. Resuelve: x3 = 72x

41. Resuelve el sistema: e x xy ÿ25= - 1

42. Multiplicar: 12x - 72 13x2 - 5x + 42

43. Determina si la serie infinita converge o diverge. Si converge, encuentre la suma. 12

$$4 + \frac{}{5} + \frac{36}{25} + \frac{108}{125} + \cdots$$

44. Si f ″1x2 = $\frac{2}{3}$1x - 22 -1>3 + $\frac{1}{3}$1x - 22 -2>3 , encontrar donde

(a) f ″1x2 = 0 (b) f ″1x2 no está definida

45. Encuentra la descomposición en fracciones $\frac{3x2 + 15x + 5}{\text{parciales: } x3 + 2x2 + x}$

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. unión 2. intersección 3. Verdadero 4. Verdadero

13.2 Permutaciones y combinaciones

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Factorial (Sección 12.1, págs. 854–855)
- Coeficiente binomial (Sección 12.5, págs. 885–887)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 909.

OBJETIVOS 1 Resolver problemas de conteo usando permutaciones Involucrando n objetos distintos (p. 903)

2 Resolver problemas de conteo usando combinaciones (p. 905)

3 Resuelva problemas de conteo usando permutaciones que involucran n objetos no distintos (p. 908)

Machine Translated by Google

1 Resolver problemas de conteo usando permutaciones Involucrando n objetos distintos

DEFINICIÓN Permutación

Una permutación es una disposición ordenada de r objetos elegidos entre n objetos.

Se analizan tres tipos de permutaciones:

- Los n objetos son distintos (diferentes), y se permite la repetición en la selección de r de ellos. [Distinto, con repetición]
- Los n objetos son distintos (diferentes), y no se permite la repetición en la selección. de r de ellos, donde r … n. [Distinto, sin repetición]
- Los n objetos no son distintos y todos ellos se utilizan en el arreglo. [No distinto]

Nos ocuparemos aquí de los dos primeros tipos y nos ocuparemos del tercero al final de esta sección.

El primer tipo de permutación (n objetos distintos, se permite la repetición) se maneja utilizando el principio de multiplicación.

EJEMPLO 1 Contando códigos de aeropuerto [Permutación: distintos, con repetición]

La Asociación Internacional de Transporte Aéreo (IATA) asigna códigos de tres letras para representar las ubicaciones de los aeropuertos. Por ejemplo, el código del aeropuerto de Ft. Lauderdale, Florida, es FLL. Tenga en cuenta que se permite la repetición al formar este código. ¿Cuántos códigos de aeropuerto son posibles?

Solución

Un código de aeropuerto se forma eligiendo 3 letras de 26 letras y organizándolas en orden. En el arreglo ordenado, se puede repetir una letra. Este es un ejemplo de una permutación con repetición en la que se eligen 3 objetos entre 26 objetos distintos.

La tarea de contar el número de dichos arreglos consiste en hacer tres selecciones. Cada selección requiere elegir una letra del alfabeto (26 opciones). Según el principio de multiplicación, existen

$$26 \# 26 \# 26 = 263 = 17{,}576$$

Posibles códigos de aeropuerto.

La solución dada al ejemplo 1 se puede generalizar.

TEOREMA Permutaciones: objetos distintos con repetición

El número de disposiciones ordenadas de r objetos elegidos entre n objetos, en las que los n objetos son distintos y se permite la repetición, es nr .

Ahora resuelve el problema 3 3

Ahora consideremos permutaciones en las que los objetos son distintos y no se permite la repetición.

EJEMPLO 2 Formar códigos [Permutación: distintos, sin repetición]

Supongamos que se va a formar un código de tres letras utilizando cualquiera de las 26 letras mayúsculas del alfabeto, pero que ninguna letra se debe utilizar más de una vez. ¿Cuántos códigos diferentes de tres letras hay?

Machine Translated by Google

Solución Algunas de las posibilidades son ABC, ABD, ABZ, ACB, CBA, etc. La tarea consiste en hacer tres selecciones. La primera selección requiere elegir entre 26 letras. Dado que ninguna letra se puede utilizar más de una vez, la segunda selección requiere elegir entre 25 letras. La tercera selección requiere elegir entre 24 letras. (¿Ves por qué?) Según el principio de multiplicación, hay

$$26 \# 25 \# 24 = 15{,}600$$

diferentes códigos de tres letras sin que se repita ninguna letra.

Para el segundo tipo de permutación, introducimos la siguiente notación.

La notación P1n, r2 representa el número de disposiciones ordenadas de r objetos elegidos entre n objetos distintos, donde r … n y la repetición no están permitidas.

Por ejemplo, la pregunta planteada en el ejemplo 2 pregunta sobre el número de formas en que se pueden ordenar las 26 letras del alfabeto, usando tres letras no repetidas. La respuesta es

$$P126, 32 = 26 \# 25 \# 24 = 15{,}600$$

EJEMPLO 3 **Alineando a la gente**

¿De cuántas maneras se pueden alinear 5 personas?

Solución Las 5 personas son distintas. Una vez que una persona está en la fila, esa persona no se repetirá en ningún otro lugar de la fila; y, al hacer fila a la gente, el orden es importante. Esta es una permutación de 5 objetos tomados de 5 a la vez, por lo que se pueden alinear 5 personas en

$$P15, 52 = 5 \# 4 \# 3 \# 2 \# 1 = 120 \text{ vías}$$

5 factores

Ahora resuelve el problema 3 5

Para llegar a una fórmula para P1n, r2, observe que la tarea de obtener una disposición ordenada de n objetos en los que sólo se utilizan r ... n de ellos, sin repetir ninguno de ellos, requiere hacer r selecciones. Para la primera selección, hay n opciones; para la segunda selección, hay n - 1 opciones; para la tercera selección, hay n - 2 opciones; . . . ; para la r-ésima selección, hay n - 1r - 12 opciones. Según el principio de multiplicación, esto significa

Primero segundo 3er rth

$$P1n, r2 = n \# 1n - 12 \# 1n - 22 \# g \# 3n - 1r - 12 4$$

$$= n \# 1n - 12 \# 1n - 22 \# g\# 1n - r + 12$$

RECORDAR
0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 # 1,c,
¡norte! = n1n - 12 # g # 3 # 2 # 1

Esta fórmula para P1n, r2 se puede escribir de forma compacta utilizando notación factorial.

$$P1n, r2 = n \# 1n - 12 \# 1n - 22 \# g\# 1n - r + 12$$

$$= n \# 1n - 12 \# 1n - 22 \# g\# 1n - r + 12 \# \frac{1n - r2 \# g\# 3 \# 2 \# 1}{1n - r2 \# g\# 3 \# 2 \# 1} = \frac{\text{¡norte!}}{1n - r2!}$$

Machine Translated by Google

TEOREMA Permutaciones de r objetos elegidos entre n objetos distintos sin repetición

El número de arreglos de n objetos usando r … n de ellos, en los cuales

- los n objetos son distintos
- no se permite la repetición de objetos
- el orden es importante

viene dado por la fórmula

$$P1n, r2 = 1n \frac{\text{¡norte!}}{\text{- r2!}} \quad (1)$$

EJEMPLO 4

Permutaciones informáticas

Evaluar: (a) P17, 32 (b) P16, 12 (c) P152, 52

Solución

Las partes (a) y (b) se trabajan de dos maneras.

(a) P17, 32 = 7 # 6 # 5 = 210
3 factores

o

$$P17, 32 = 17 \frac{7!}{\text{- 32!}} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \# 6 \# 5 \# 4!}{4!} = 210$$

(b) P16, 12 = 6 = 6
1 factor

o

$$P16, 12 = 16 \frac{6!}{\text{- 12!}} = \frac{6!}{5!} = \frac{\text{¡ sesenta y cinco!}}{5!} = 6$$

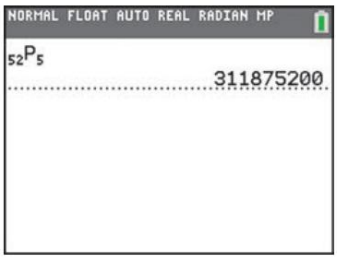


Figura 3 P152, 52

(c) La Figura 3 muestra la solución usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C. Entonces

P152, 52 = 311.875.200

Ahora trabaja el problema 7

EJEMPLO 5

El problema del cumpleaños

Todo lo que sabemos sobre Shannon, Patrick y Ryan es que tienen cumpleaños diferentes. Si se enumeraran todas las formas posibles en que esto podría ocurrir, ¿cuántas habrían? Supongamos que hay 365 días en un año.

Solución

Este es un ejemplo de una permutación en la que se seleccionan 3 cumpleaños de 365 días posibles y ningún cumpleaños puede repetirse. El número de formas en que esto puede ocurrir es

$$P1365, 32 = \frac{365!}{1365 - 32!} = \frac{365 \# 364 \# 363 \# 362!}{362!} = 365 \# 364 \# 363 = 48,228,180$$

Hay 48.228.180 formas en las que tres personas pueden tener cumpleaños diferentes.

Ahora problema de trabajo 4 7

2 Resolver problemas de conteo usando combinaciones

En una permutación, el orden es importante. Por ejemplo, los arreglos ABC, CAB, BAC, . . . Se consideran diferentes disposiciones de las letras A, B y C. Sin embargo, en muchas situaciones, el orden no es importante. Por ejemplo, en el juego de cartas de póquer, no importa el orden en que se reciben las cartas; lo que importa es la combinación de las cartas.

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Combinación

Una combinación es una disposición, sin tener en cuenta el orden, de r objetos seleccionados de n objetos distintos sin repetición, donde r … n. La notación C1n, r2 representa el número de combinaciones de n objetos distintos tomados r a la vez.

EJEMPLO 6 Combinaciones de listado

Enumere todas las combinaciones de los 4 objetos a, b, c, d tomados de 2 a la vez. ¿Qué es C14, 22?

Solución

Una combinación de a, b, c, d tomadas de 2 a la vez es

ab

Excluya ba de la lista porque el orden no es importante en una combinación (esto significa que no distinguimos ab de ba). La lista de todas las combinaciones de a, b, c, d tomadas de 2 en 2 es

ab, ac, anuncio, antes de cristo, bd, discos compactos

entonces

C14, 22 = 6

Se puede encontrar una fórmula para C1n, r2 observando que la única diferencia entre una permutación de r objetos elegidos entre n objetos distintos sin repetición y una combinación es que el orden no se tiene en cuenta en las combinaciones. Para determinar C1n, r2, elimine de la fórmula para P1n, r2 el número de permutaciones que son simplemente reordenamientos de un conjunto dado de r objetos. Esto se puede determinar a partir de la fórmula para P1n, r2 calculando P1r, r2 = r!. Entonces, ¡dividiendo P1n, r2 por r! da la fórmula deseada para C1n, r2:

$$C1n, r2 = r!\,\frac{P1n, r2}{} = \frac{\frac{¡norte!}{1n - r2!}}{r!} = \frac{¡norte!}{1n - r2!\ r!}$$

C

Utilice la fórmula (1).

Hemos demostrado el siguiente resultado:

TEOREMA Número de combinaciones de n objetos distintos Tomado r a la vez

El número de formas de seleccionar r objetos de n objetos distintos, r … n, en las que

- no se permite la repetición de objetos
- el orden no es importante

viene dada por la fórmula

$$C1n, r2 = 1n\ \frac{¡norte!}{- r2!\ r!} \qquad (2)$$

Con base en la fórmula (2), descubrimos que el símbolo C1n, r2 y el símbolo a n rb _ porque los coeficientes binomiales son, de hecho, los mismos. El triángulo de Pascal (ver Secciones 12.5) se puede utilizar para encontrar el valor de C1n, r2. Sin embargo, como es más práctico y conveniente, usaremos la fórmula (2).

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Usando la fórmula (2)

Utilice la fórmula (2) para encontrar el valor de cada combinación.

(a) C13, 12 (b) C16, 32 (c) C1n, n2 (d) C1n, 02 (e) C152, 52

Solución

(a) $C13, 12 = 13 - \frac{3!}{12!1!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \# 2 \# 1}{2 \# 1 \# 1} = 3$

(b) $C16, 32 = 16 - \frac{6!}{32!3!} = \frac{6 \# 5 \# 4 \# 3!}{3!\ 3!} = \frac{6 \# 5 \# 4}{6} = 20$

(c) $C1n, n2 = 1n - \frac{¡norte!}{n2!n!} = \frac{¡norte!}{0!n!} = \frac{1}{1} = 1$

(d) $C1n, 02 = 1n - \frac{¡norte!}{02!0!} = \frac{¡norte!}{¡norte!\ 0!} = \frac{1}{1} = 1$

(e) La Figura 4 muestra la solución usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C.

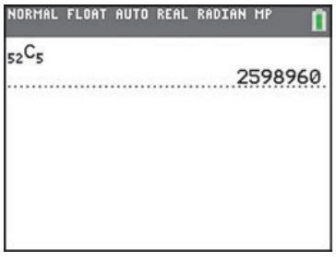


Figura 4 C152, 52

C152, 52 = 2.598.960

Ahora resuelve el problema 1 5

EJEMPLO 8 Formando comités

¿Cuántos comités diferentes de 3 personas se pueden formar a partir de un grupo de 7 personas?

Solución

Las 7 personas son distintas. Más importante, sin embargo, es la observación de que el orden de selección para un comité no es significativo. El problema pide el número de combinaciones de 7 objetos tomados de 3 a la vez.

$$C17, 32 = 4!\frac{7!}{3!} = \frac{7 \# 6 \# 5 \# 4!}{4!\ 3!} = \frac{7 \# 6 \# 5}{6} = 35$$

Se pueden formar treinta y cinco comités diferentes.

EJEMPLO 9 Formando comités

¿De cuántas maneras se puede formar un comité formado por 2 profesores y 3 estudiantes si 6 profesores y 10 estudiantes son elegibles para formar parte del comité?

Solución

El problema se puede dividir en dos partes: el número de formas en que se pueden elegir los profesores, C16, 22, y el número de formas en que se pueden elegir los estudiantes, C110, 32. Por el Principio de Multiplicación, el comité puede formarse en

$$C16, 22 \# C110, 32 = 4!2!\ \frac{6!}{7!3!} \cdot \frac{10!}{7!3!} = \frac{6 \# 5 \# 4!}{4!\ 2!} \cdot \frac{10 \# 9 \# 8 \# 7!}{7!\ 3!}$$

$$= \frac{30}{2} \cdot \frac{720}{6} = 1800 \text{ formas}$$

Ahora problema de trabajo 4 9

Machine Translated by Google

3 Resuelva problemas de conteo usando permutaciones Involucrando n objetos no distintos

EJEMPLO 10 Formar diferentes palabras

¿Cuántas palabras diferentes (significativas o no) se pueden formar usando todas las letras de la palabra REORDENAR?

Solución

Cada palabra formada tendrá 9 letras: 3 R, 2 A, 2 E, 1 N y 1 G. Para construir cada palabra, necesitamos llenar 9 posiciones con las 9 letras:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 _ _ _ _ _ _ _ _ _

El proceso de formación de una palabra consta de cinco tareas.

Tarea 1: Elige las posiciones para las 3 R.

Tarea 2: Elige las posiciones para las 2 A.

Tarea 3: Elige las posiciones para las 2 E.

Tarea 4: Elige la posición para el 1 N.

Tarea 5: Elige la posición para el 1 G.

La tarea 1 se puede realizar en C19, 32 formas. Quedan entonces 6 puestos por cubrir, por lo que la Tarea 2 se puede realizar en C16, de 22 maneras. Quedan 4 puestos por cubrir, por lo que la Tarea 3 se puede realizar en C14, de 22 maneras. Quedan 2 puestos por cubrir, por lo que la Tarea 4 se puede realizar en C12, de 12 maneras. La última posición se puede llenar en C11, 12 vías. Usando el principio de multiplicación, el número de palabras posibles que se pueden formar es

$$C19, 32 \# C16, 22 \# C14, 22 \# C12, 12 \# C11, 12 = 3! \# 6! \; \frac{9!}{} \cdot \frac{6!}{2! \# 4!} \cdot \frac{4!}{2! \# 2!} \cdot \frac{2!}{1! \# 1!} \cdot \frac{1!}{0! \# 1!}$$

$$= \frac{9!}{3! \# 2! \# 2! \# 1! \# 1!} = 15.120$$

Se pueden formar 15.120 palabras posibles.

La forma de la expresión antes de la respuesta al Ejemplo 10 sugiere un resultado general. Si todas las letras en REORDENAR hubieran sido diferentes, ¡habría sido P19, 92 = 9! posibles palabras formadas. Este es el numerador de la respuesta.
La presencia de 3 R, 2 A y 2 E reduce el número de palabras diferentes, como lo ilustran las entradas en el denominador. Esto conduce al siguiente resultado:

TEOREMA Permutaciones que involucran n objetos que no son distintos

El número de permutaciones de n objetos de los cuales n1 son de un tipo y n2 son de un segundo tipo. . . , y nk son de una clase k viene dada por

$$\frac{¡norte!}{n1! \# n2! \# g\# nk!} \qquad (3)$$

donde n = n1 + n2 + g+ nk .

EJEMPLO 11 Organizar banderas

¿Cuántas disposiciones verticales diferentes hay de 8 banderas si 4 son blancas, 3 son azules y 1 es roja?

Solución

Buscamos el número de permutaciones de 8 objetos, de los cuales 4 son de un tipo, 3 son de segundo tipo y 1 es de tercer tipo. Usando la fórmula (3), encontramos que hay

$$\frac{8!}{4! \# 3! \# 1!} = \frac{8 \# 7 \# 6 \# 5 \# 4!}{4! \# 3! \# 1!} = 280 \text{ arreglos diferentes}$$

Ahora resuelve el problema 5 1

Machine Translated by Google

13.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. 0! = _____; 1! = _____. (págs. 854–855)

2. Opción múltiple El coeficiente binomial a 6 4b es igual (págs. 885–887)

(a) $\frac{6!}{4!}$ (b) $\frac{6!}{4! \# 2!}$ (C) $\frac{6!}{2!}$ (d) $\frac{16-42!}{2!}$

Conceptos y vocabulario

3. A(n) es una disposición ordenada de r objetos elegidos entre n objetos.

4. A(n) es una disposición de r objetos elegidos entre n objetos distintos, sin repetición y sin tener en cuenta el orden.

5. P1n, r2 = _____

6. C1n, r2 = _____

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 14, encuentre el valor de cada permutación.

7. P16, 22 8. P17, 22 9. P18, 82 10. P14, 42

11. P19, 02 12. P17, 02 13. P18, 32 14. P18, 42

En los problemas 15 a 22, use la fórmula 122 para encontrar el valor de cada combinación.

15. C18, 22 16. C18, 62 17. C16, 22 18. C17, 42

19. C118, 12 20. C115, 152 21. C118, 92 22. C126, 132

Aplicaciones y extensiones

23. Enumere todos los arreglos ordenados de 5 objetos k, n, o, p y q eligiendo 3 a la vez sin repetición. ¿Qué es P15, 32?

24. Enumere todas las permutaciones de 5 objetos a, b, c, d y e eligiendo 2 a la vez sin repetición. ¿Qué es P15, 22?

25. Enumere todos los arreglos ordenados de 4 objetos 3, 4, 5 y 6 eligiendo 3 a la vez sin repetición. ¿Qué es P14, 32?

26. Enumere todas las permutaciones de 6 objetos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 eligiendo 3 a la vez sin repetición. ¿Qué es P16, 32?

27. Enumere todas las combinaciones de 7 objetos a, b, c, d, e, f y g tomados de 2 a la vez. ¿Qué es C17, 22?

28. Enumere todas las combinaciones de 5 objetos a, b, c, d y e tomados de 2 a la vez. ¿Qué es C15, 22?

29. Enumere todas las combinaciones de 4 objetos 1, 2, 3 y 4 tomados de 3 a la vez. ¿Qué es C14, 32?

30. Enumere todas las combinaciones de 6 objetos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 tomados de 3 a la vez. ¿Qué es C16, 32?

31. Formar códigos ¿Cuántos códigos de dos letras se pueden formar usando las letras A, B, C, D y E? Se permiten letras repetidas.

32. Formar códigos ¿Cuántos códigos de tres letras se pueden formar usando las letras A, B, C, D y E? Se permiten letras repetidas.

33. Formar números ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar usando los dígitos del 0 al 3? Se permiten dígitos repetidos.

34. Formar números ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9? Se permiten dígitos repetidos.

35. Alineando personas ¿ De cuántas maneras se pueden colocar 6 personas? ¿alineado?

36. Apilar cajas ¿ De cuántas maneras se pueden apilar 5 cajas diferentes? ¿apilados?

37. Formar códigos ¿ Cuántos códigos diferentes de cuatro letras hay si solo se pueden usar las letras A, B, C, D, E y F y ninguna letra se puede usar más de una vez?

38. Formar códigos ¿Cuántos códigos diferentes de dos letras hay si solo se pueden usar las letras A, B, C, D, E y F y ninguna letra se puede usar más de una vez?

39. Acciones de la Bolsa de Nueva York Las empresas cuyas acciones cotizan en una bolsa de valores tienen el nombre de la empresa representado por 3, 4 o 5 letras (se permite la repetición de letras). ¿Cuál es el número máximo de empresas que pueden cotizar?

40. Acciones en NASDAQ Las empresas cuyas acciones cotizan en la bolsa de valores NASDAQ tienen el nombre de la empresa representado por 4 o 5 letras (se permite la repetición de letras). ¿Cuál es el número máximo de empresas que pueden cotizar en el NASDAQ?

41. Establecimiento de comités ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de 3 profesores a partir de un departamento que tiene 8 profesores?

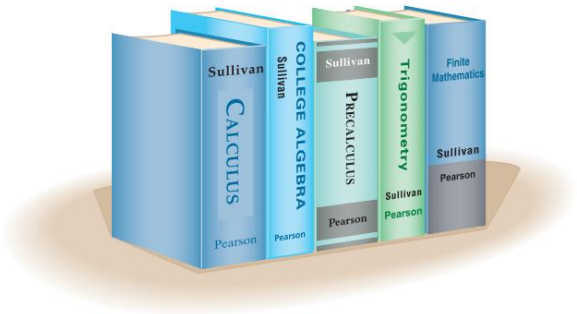
42. Establecimiento de comités ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de 2 estudiantes a partir de un grupo de 4 estudiantes?

43. Posibles respuestas en una prueba de verdadero/falso ¿ Cuántas combinaciones de respuestas son posibles para una prueba de verdadero/falso con 5 preguntas?

Machine Translated by Google

44. Posibles respuestas en un examen de opción múltiple ¿ Cuántos arreglos de respuestas son posibles en un examen de opción múltiple con 5 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 respuestas posibles?

45. Organizar libros Se van a colocar cinco libros de matemáticas diferentes en el escritorio de un estudiante. ¿Cuántos arreglos son posibles?



46. Formación de números de matrícula ¿ Cuántos números de matrícula diferentes se pueden formar usando 2 letras seguidas de 4 dígitos seleccionados de los dígitos del 0 al 9, si:
(a) ¿Se pueden repetir letras y dígitos?
(b) ¿ Se pueden repetir letras, pero no se pueden repetir dígitos?
(c) ¿No se pueden repetir letras ni dígitos?

47. Problema de cumpleaños ¿De cuántas maneras pueden 3 personas tener cumpleaños diferentes cada una? Supongamos que hay 365 días en un año.

48. Problema de cumpleaños ¿ De cuántas maneras pueden 5 personas tener cumpleaños diferentes? Supongamos que hay 365 días en un año.

49. Formación de un comité Se formará un comité de danza estudiantil compuesto por 3 niños y 2 niñas. Si los miembros van a ser elegidos entre 8 niños y 5 niñas, ¿cuántos comités diferentes son posibles?

50. Formar un comité El comité de relaciones estudiantiles de una universidad está formado por 2 administradores, 3 miembros del personal docente y 5 estudiantes. Cuatro administradores, 8 miembros del cuerpo docente y 20 estudiantes son elegibles para desempeñarse. ¿Cuántos comités diferentes son posibles?

51. Formar palabras ¿Cuántas palabras diferentes de 6 letras (reales o imaginarias) se pueden formar a partir de las letras de la palabra PLÁTANO?

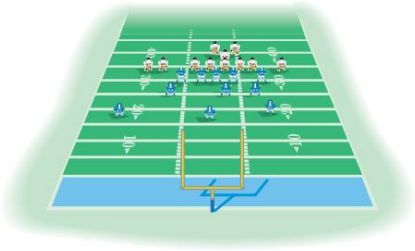
52. Formar palabras ¿Cuántas palabras diferentes de 11 letras (significativas o no) se pueden formar a partir de las letras de la palabra MATEMÁTICAS?

53. Seleccionar objetos Una urna contiene 15 bolas rojas y 10 bolas blancas. Se seleccionan cinco bolas. ¿De cuántas maneras se pueden sacar las 5 bolas de un total de 25 bolas?
(a) ¿Si las 5 bolas son rojas?
(b) ¿Si 3 bolas son rojas y 2 son blancas?
(c) ¿Si al menos 4 son bolas rojas?

54. Seleccionar objetos Una urna contiene 7 bolas blancas y 4 bolas rojas. Se seleccionan tres bolas. ¿De cuántas maneras se pueden sacar las 3 bolas de un total de 11 bolas?
(a) ¿Si 2 bolas son blancas y 1 es roja?
(b) ¿Si las 3 bolas son blancas?
(c) ¿Si las 3 bolas son rojas?

55. Comités del Senado El Senado de los Estados Unidos tiene 100 miembros. Supongamos que se desea colocar a cada senador exactamente en 1 de 7 comités posibles. El primer comité tiene 21 miembros, el segundo tiene 10, el tercero tiene 14, el cuarto tiene 6, el quinto tiene 13 y el sexto y séptimo tienen 18 cada uno. ¿De cuántas maneras se pueden formar estos comités?

56. Equipos de fútbol Un equipo de fútbol defensivo consta de 25 jugadores. De ellos, 10 son linieros, 10 son apoyadores y 5 son profundos. ¿Cuántos equipos diferentes de 5 linieros, 3 apoyadores y 3 profundos se pueden formar?



57. Béisbol En la Liga Nacional de Béisbol, el lanzador suele batear noveno. Si este es el caso, ¿cuántas órdenes de bateo puede usar un gerente?

58. Béisbol Una liga de béisbol infantil tiene equipos de 8 jugadores. ¿Cuántos órdenes de bateo puede utilizar el manager del equipo? (Los 8 jugadores pueden batear).

59. Equipos de béisbol Un equipo de béisbol tiene 23 miembros. De ellos, 3 son lanzadores y los 20 restantes pueden jugar en cualquier otra posición. ¿Cuántos equipos diferentes de 9 jugadores se pueden formar? Tenga en cuenta que un equipo de béisbol consta de 1 lanzador y otros 8 jugadores.

60. Serie Mundial En la Serie Mundial el equipo de la Liga Americana (A) y el equipo de la Liga Nacional (N) juegan hasta que un equipo gana cuatro juegos. Si la secuencia de ganadores se designa con letras (por ejemplo, NAAAA significa que el equipo de la Liga Nacional ganó el primer juego y la Liga Americana ganó los cuatro siguientes), ¿cuántas secuencias diferentes son posibles?

61. Equipos de baloncesto En un equipo de baloncesto de 12 jugadores, 2 juegan solo como centro, 3 juegan solo como guardia y el resto juega como delantero (5 jugadores en un equipo: 2 delanteros, 2 guardias y 1 centro). ¿Cuántos equipos diferentes son posibles, suponiendo que no sea posible distinguir un guardia izquierdo de un guardia derecho o un delantero izquierdo de un delantero derecho?

62. Equipos de baloncesto Un equipo de baloncesto tiene 6 jugadores que hacen de guardia (2 de 5 posiciones iniciales). ¿Cuántos equipos diferentes son posibles, suponiendo que las 3 posiciones restantes estén ocupadas y no sea posible distinguir un guardia izquierdo de un guardia derecho?

63. Cerraduras de combinación Una cerradura de combinación muestra 50 números. Para abrirlo, gire en el sentido de las agujas del reloj hasta el primer número de la "combinación", luego gire en el sentido contrario a las agujas del reloj hasta el segundo número y luego gire en el sentido de las agujas del reloj hasta el tercer número.
(a) ¿Cuántas combinaciones de cerraduras diferentes hay?
(b) Comente la descripción de dicha cerradura como cerradura de combinación .

64. Desafío de contraseñas problemáticas Supongamos que una contraseña debe tener al menos 8 caracteres, pero no más de 12 caracteres, compuesta por letras (sin distinción de mayúsculas y minúsculas) y dígitos. Si la contraseña debe contener al menos una letra y al menos un dígito, ¿cuántas contraseñas son posibles?

Machine Translated by Google

Explicar conceptos: discusión y escritura

65. Crea un problema diferente a cualquiera que se encuentre en el texto y que requiera una permutación para resolverse. Dáselo a un amigo para que lo resuelva y lo critique.

66. Crea un problema diferente a cualquiera que se encuentre en el texto y que requiera una combinación para resolverse. Dáselo a un amigo para que lo resuelva y lo critique.

67. Explique la diferencia entre una permutación y una combinación. Da un ejemplo para ilustrar tu explicación.

Conserve su conocimiento

Los problemas 68 a 77 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

68. Encuentra el área del sector de un círculo de radio 4 pies y ángulo central u si la longitud del arco subtendido por u es 5 pies.

69. Si f1x2 = 2x - 1 y g1x2 = x2 + x - 2, encuentre 1g f 2 1x2.

70. Dé valores exactos para sen 75° y cos 15°.

71. Encuentra el quinto término de la secuencia geométrica con el primer término a1 = 5 y razón común r = - 2.

72. Usa el teorema del binomio para expandir: 1x + 2y2 5

73. Resuelve el sistema: 5x3x2y4y 17 5

74. Multiplica, si es posible: J 4 2 0 3 1 - 1 3 1 CR 0 - 2 5 0S

75. Escribe - 23 + i en forma polar y en forma exponencial.

76. Encuentra la descomposición en fracciones $\frac{5x2 + 3x + 14}{\text{parciales: } x4 + 4x2 + 4}$

77. escribir $\frac{6x}{1x - 32\ 2>5} + 101x - 32\ 3>5$ como un cociente único en en el que solo aparecen exponentes positivos.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 1; 1 2.b _

13.3 Probabilidad

OBJETIVOS 1 Construir modelos de probabilidad (p. 911)
2 Calcular probabilidades de resultados igualmente probables (p. 914)
3 Encuentre probabilidades de la unión de dos eventos (p. 915)
4 Utilice la regla del complemento para encontrar probabilidades (p. 916)

La probabilidad es un área de las matemáticas que se ocupa de experimentos que producen resultados aleatorios, pero admiten cierta regularidad. Estos experimentos no siempre producen el mismo resultado, por lo que el resultado de cualquier observación no es predecible. Sin embargo, los resultados del experimento durante un largo período producen patrones regulares que nos permiten hacer predicciones con notable precisión.

EJEMPLO 1 Lanzar una moneda justa

Si se lanza una moneda justa, el resultado es cara o cruz. En cualquier lanzamiento en particular, no podemos predecir lo que sucederá, pero si lanzamos la moneda muchas veces, observamos que el número de veces que sale cara es aproximadamente igual al número de veces que sale cruz. Por lo tanto, parece razonable asignar una probabilidad de $\frac{1}{2}$ que salga cara y una probabilidad de que salga cruz. $\frac{1}{2}$

1 Construir modelos de probabilidad

La discusión en el Ejemplo 1 constituye la construcción de un modelo de probabilidad para el experimento de lanzar una moneda justa una vez. Un modelo de probabilidad tiene dos componentes: un espacio muestral y una asignación de probabilidades. Un espacio muestral S es un conju

Machine Translated by Google

Los elementos representan todas las posibilidades que pueden ocurrir como resultado del experimento. Cada elemento de S se llama resultado. A cada resultado se le asigna un número, llamado probabilidad de ese resultado, que tiene dos propiedades:

- La probabilidad asignada a cada resultado no es negativa.
- La suma de todas las probabilidades es igual a 1.

DEFINICIÓN Modelo de probabilidad

Un modelo de probabilidad con el espacio muestral.

$$S = 5e1, e2, c, en\ 6$$

donde e1, e2, c , en son los posibles resultados y P1e12, P1e22, c, P1en2 son las probabilidades respectivas de estos resultados, requiere que

$$P1e12 \text{ Ú } 0, P1e22 \text{ Ú } 0, c, P1en2 \text{ Ú } 0 \quad (1)$$

$$\sum_{yo=1}^{n} P1ei2 = P1e12 + P1e22 + g + P1en2 = 1 \quad (2)$$

EJEMPLO 2 Determinación de modelos de probabilidad

En una bolsa de M&Ms,TM los caramelos son de color rojo, verde, azul, marrón, amarillo y naranja. Se saca un caramelo de la bolsa y se registra el color. El espacio muestral de este experimento es {rojo, verde, azul, marrón, amarillo, naranja}. Determine cuáles de los siguientes son modelos de probabilidad.

(a)

Probabilidad de resultado	
rojo	0.3
verde	0,15
azul	0
marrón	0,15
amarillo	0,2
naranja	0,2

(b)

Probabilidad de resultado	
rojo	0.1
verde	0.1
azul	0.1
marrón	0,4
amarillo	0,2
naranja	0.3

(C)

Probabilidad de resultado	
rojo	0.3
verde	-0,3
azul	0,2
marrón	0,4
amarillo	0,2
naranja	0,2

(d)

Probabilidad de resultado	
rojo	0
verde	0
azul	0
marrón	0
amarillo	1
naranja	0

Solución (a) Este modelo es un modelo de probabilidad porque todos los resultados tienen probabilidades que son no negativos y la suma de las probabilidades es 1.

(b) Este modelo no es un modelo de probabilidad porque la suma de las probabilidades no es 1.

(c) Este modelo no es un modelo de probabilidad porque P(verde) es menor que 0. Recuerde que todas las probabilidades deben ser no negativas.

(d) Este modelo es un modelo de probabilidad porque todos los resultados tienen probabilidades que no son negativas y la suma de las probabilidades es 1. Observe que P(amarillo) = 1, lo que significa que este resultado ocurrirá con 100% de certeza cada vez que se repita el experimento. Esto significa que la bolsa de M&MsTM contiene sólo caramelos amarillos.

Ahora trabaja el problema 7

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3

Construyendo un modelo de probabilidad

Un experimento consiste en lanzar un dado justo una vez. Un dado es un cubo en el que cada cara tiene 1, 2, 3, 4, 5 o 6 puntos. Vea la Figura 5. Construya un modelo de probabilidad para este experimento.

Figura 5 Un dado de seis caras

Solución

Un espacio muestral S consta de todas las posibilidades que pueden ocurrir. Debido a que al lanzar el dado se mostrará una de las seis caras, el espacio muestral S consta de

$$S = 51, 2, 3, 4, 5, 66$$

Como el dado es justo, no es más probable que aparezca una cara que otra. Como resultado, nuestra asignación de probabilidades es

$$P112 = 6\ \frac{1}{} \qquad P122 = 6\ \frac{1}{}$$

$$P132 = 6\ \frac{1}{} \qquad P142 = 6\ \frac{1}{}$$

$$P152 = 6\ \frac{1}{} \qquad P162 = 6\ \frac{1}{}$$

Ahora supongamos que se carga (pesa) un dado de modo que las asignaciones de probabilidad son

$$P112 = 0\ P122 = 0\ P132 = 3\ \frac{1}{}\ P142 = 3\ \frac{2}{}\ P152 = 0\ P162 = 0$$

Esta asignación se haría si el dado estuviera cargado de modo que sólo pudiera ocurrir un 3 o un 4 y la probabilidad de que ocurriera el 4 fuera el doble que la del 3. Esta asignación es consistente con la definición, ya que cada asignación no es negativa y la suma de todas las asignaciones de probabilidad es igual a 1.

Ahora resuelve el problema 2 3

EJEMPLO 4

Construyendo un modelo de probabilidad

Un experimento consiste en lanzar una moneda al aire. La moneda se pesa de modo que la probabilidad de que salga cara (H) sea tres veces mayor que cruz (T). Construya un modelo de probabilidad para este experimento.

Solución

El espacio muestral S es S = 5H, T6. Si x denota la probabilidad de que ocurra una cola,

$$P1T2 = x \text{ y } P1H2 = 3x$$

La suma de las probabilidades de los posibles resultados debe ser igual a 1, por lo que

$$P1T2 + P1H2 = x + 3x = 1$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Asigna las probabilidades

$$P1T2 = \frac{1}{4} \qquad P1H2 = \frac{3}{4}$$

Ahora resuelve el problema 2 7

En palabras
P1S2 = 1 significa que uno de los resultados en el espacio muestral debe ocurrir en un experimento.

Al trabajar con modelos de probabilidad, el término evento se utiliza para describir un conjunto de posibles resultados del experimento. Un evento E es algún subconjunto del espacio muestral S. La probabilidad de un evento E, E ≠ , denotada por P1E2, se define como la suma de las probabilidades de los resultados en E. También podemos pensar en la probabilidad de un evento E como la probabilidad de que ocurra el evento E. Si E = , entonces P1E2 = 0; si E = S, entonces P1E2 = P1S2 = 1.

Machine Translated by Google

2 Calcular probabilidades de resultados igualmente probables

Cuando se asigna la misma probabilidad a cada resultado del espacio muestral, se dice que el experimento tiene resultados igualmente probables.

TEOREMA Probabilidad de resultados igualmente probables

Si un experimento tiene n resultados igualmente probables, y si el número de formas en que puede ocurrir un evento E es m, entonces la probabilidad de E es

$$P1E2 = \frac{\text{Número de formas en que E puede ocurrir}}{\text{Número de resultados posibles}} = \frac{\text{metro}}{\text{norte}} \quad (3)$$

Si S es el espacio muestral de este experimento,

$$P1E2 = \frac{n1E2}{n1S2} \quad (4)$$

EJEMPLO 5 Calcular probabilidades de eventos que involucran resultados igualmente probables

Calcula la probabilidad de que en una familia de 3 hijos haya 2 niños y 1 niña. Suponga resultados igualmente probables.

Solución

Comience por construir un diagrama de árbol para ayudar a enumerar los posibles resultados del experimento. Consulte la Figura 6, donde B significa "niño" y G, "niña". El espacio muestral de este experimento es

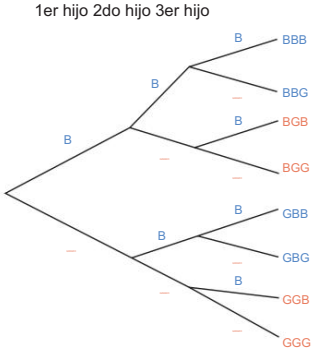


Figura 6

$$S = 5BBB, BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB, GGG6$$

entonces n1S2 = 8.

Deseamos saber la probabilidad del evento E: “tener dos niños y una niña”.
De la Figura 6, concluimos que E = 5BBG, BGB, GBB6, por lo que n1E2 = 3. Dado que los resultados son igualmente probables, la probabilidad de E es

$$P1E2 = \frac{n1E2}{n1S2} = \frac{3}{8}$$

Ahora resuelve el problema 3 7

Hasta ahora hemos calculado probabilidades de eventos únicos. Ahora calculamos probabilidades de múltiples eventos, que se denominan probabilidades compuestas.

EJEMPLO 6 Calcular probabilidades compuestas

Considere el experimento de lanzar un solo dado justo. Sea E el evento "obtenga un número impar" y F represente el evento "obtenga un 1 o un 2".

(a) Escriba el evento E y F. ¿Cuál es n1E ∩ F2?

(b) Escriba el evento E o F. ¿Qué es n1E F2?

(c) Calcule P1E2. Calcule P1F2.

(d) Calcule P1E ∩ F2.

(e) Calcule P1E F2.

Solución

El espacio muestral S del experimento es 51, 2, 3, 4, 5, 66, por lo que n1S2 = 6. Como el dado es justo, los resultados son igualmente probables. El evento E: “tira un número impar” es 51, 3, 56, y el evento F: “tira un 1 o 2” es 51, 26, entonces n1E2 = 3 y n1F2 = 2.

(a) En probabilidad, la palabra y significa la intersección de dos eventos. El evento E. y F es

$$mi \cap F = 51, 3, 56 \cap 51, 26 = 516 \quad n1E \cap F2 = 1$$

Machine Translated by Google

(b) En probabilidad, la palabra o significa la unión de los dos eventos. El evento E o F es

$$\text{mi} \quad F = 51, 3, 56 \quad 51, 26 = 51, 2, 3, 56 \; n1E \quad F2 = 4$$

(c) Utilice la fórmula (4). Entonces

$$P1E2 = \frac{n1E2}{n1S2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P1F2 = \frac{n1F2}{n1S2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(d) $P1E \cap F2 = \dfrac{n1E \cap F2}{n1S2 \; n1E} = \dfrac{1}{6}$

(e) $P1E \quad F2 = \dfrac{F2}{n1S2} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

3 Encuentre probabilidades de la unión de dos eventos

La siguiente fórmula se puede utilizar para encontrar la probabilidad de la unión de dos eventos.

TEOREMA

Para dos eventos cualesquiera E y F,

$$P1E \quad F2 = P1E2 + P1F2 - P1E \cap F2 \qquad (5)$$

Este resultado es consecuencia de la fórmula de conteo analizada anteriormente, en la Sección 13.1.

Por ejemplo, la fórmula (5) se puede utilizar para encontrar P1E F2 en el Ejemplo 6(e). Entonces

$$P1E \quad F2 = P1E2 + P1F2 - P1E \cap F2 = \frac{2}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

como antes.

EJEMPLO 7 Calcular probabilidades de la unión de dos eventos

Si P1E2 = 0,2, P1F2 = 0,3 y $P1E \cap F2 = 0,1$, encuentre la probabilidad de E o F.
Es decir, encuentre P1E F2.

Solución

Utilice la fórmula (5).

$$\text{Probabilidad de E o F} = P1E \quad F2 = P1E2 + P1F2 - P1E \cap F2$$
$$= 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,4$$

A veces se puede utilizar un diagrama de Venn para obtener probabilidades. Para construir un diagrama de Venn que represente la información del ejemplo 7, dibuje dos conjuntos E y F. Comience con el hecho de que $P1E \cap F2 = 0,1$. Consulte la Figura 7(a). Luego, como P1E2 = 0.2 y P1F2 = 0.3, completa E con 0.2 - 0.1 = 0.1 y completa F con 0.3 - 0.1 = 0.2. Véase la Figura 7(b). Como P1S2 = 1, completa el diagrama insertando 1 - 10,1 + 0,1 + 0,22 = 0,6 fuera de los círculos. Véase la Figura 7(c). Ahora es fácil ver, por ejemplo, que la probabilidad de F pero no de E es 0,2. Además, la probabilidad de que ni E ni F sea 0,6.

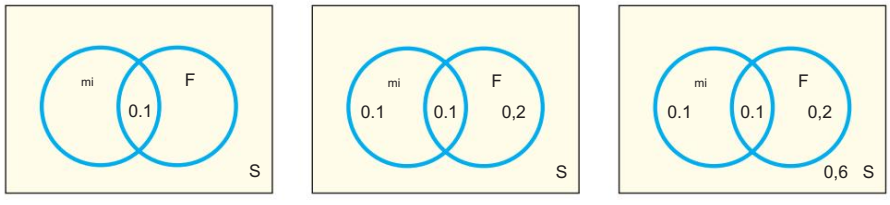


Figura 7 (a) (b) (C)

Ahora resuelve el problema 4 5

Machine Translated by Google

Si los eventos E y F son disjuntos de modo que E ∩ F = , decimos que son mutuamente exclusivo. En este caso, P1E ∩ F2 = 0, y la fórmula (5) toma la siguiente forma:

TEOREMA Eventos mutuamente excluyentes

Si E y F son eventos mutuamente excluyentes, es decir, si E ∩ F = , entonces

$$P1E \quad F2 = P1E2 + P1F2 \qquad (6)$$

EJEMPLO 8

Calcular las probabilidades de la unión de dos eventos mutuamente excluyentes Si P1E2 = 0,4 y P1F2 = 0,25, y E y F son mutuamente excluyentes, encuentre P1E F2.

Solución

Dado que E y F son mutuamente excluyentes, utilice la fórmula (6).

$$P1E \quad F2 = P1E2 + P1F2 = 0,4 + 0,25 = 0,65$$

Ahora problema de trabajo 4 7

4 Utilice la regla del complemento para encontrar probabilidades Recuerde que si A es un conjunto, el complemento de A, denotado A, es el conjunto de todos los elementos del conjunto universal U que no están en A. De manera similar definimos el complemento de un evento.

DEFINICIÓN Complemento de un Evento

Sea S el espacio muestral de un experimento y E un evento. El complemento de E, denotado E, es el conjunto de todos los resultados en el espacio muestral S que no son resultados en el evento E.

El complemento de un evento E (es decir, E) en un espacio muestral S tiene las dos propiedades siguientes:

$$mi \cap mi = \quad mi \quad mi = S$$

Dado que E y E son mutuamente excluyentes, de (6) se deduce que

$$P1E \quad E2 = P1S2 = 1\ P1E2 + P1\ E2 = 1\ P1\ E2 = 1 - P1E2$$

Tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA Cálculo de probabilidades de eventos complementarios

Si E representa cualquier evento y E representa el complemento de E, entonces

$$P1\ E2 = 1 - P1E2 \qquad (7)$$

EJEMPLO 9

Calcular probabilidades usando complementos En las noticias locales, el reportero meteorológico afirmó que la probabilidad de que llueva mañana es del 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva?

Solución

El complemento del evento “lluvia” es “no llueve”.

$$P1\text{sin lluvia2} = 1 - P1\text{lluvia2} = 1 - 0,4 = 0,6$$

Hay un 60% de posibilidades de que no llueva mañana.

Ahora resuelve el problema 5 1

Machine Translated by Google

EJEMPLO 10

problema de cumpleaños

¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 10 personas, al menos 2 personas tengan el mismo cumpleaños? Supongamos que un año tiene 365 días y que es tan probable que una persona nazca en un día como en otro, por lo que todos los resultados son igualmente probables.

Solución

Primero determine el número de resultados en el espacio muestral S. Hay 365 posibilidades para el cumpleaños de cada persona. Como hay 10 personas en el grupo, hay 36510 posibilidades para los cumpleaños. [Para una persona del grupo, hay 365 días en los que puede caer su cumpleaños; para dos personas, hay 13652 13652 = 3652
pares de días; y, en general, usando el Principio de Multiplicación, para n personas hay 365n posibilidades.] Entonces

$$n1S2 = 36510$$

Deseamos encontrar la probabilidad del evento E: "al menos dos personas tienen el mismo cumpleaños". Es difícil contar los elementos de este conjunto; es mucho más fácil contar los elementos del evento complementario $\overline{E}$: “no hay dos personas que cumplan años el mismo”.

Encuentre $n1\ \overline{E}2$ de la siguiente manera: Elija una persona al azar. Hay 365 posibilidades para su cumpleaños. Elija una segunda persona. Hay 364 posibilidades para este cumpleaños, si no hay dos personas que tengan el mismo cumpleaños. Elige una tercera persona. Quedan 363 posibilidades para este cumpleaños. Finalmente, llega a la décima persona. Quedan 356 posibilidades para este cumpleaños. Según el principio de multiplicación, el número total de posibilidades es

$$n1\ \overline{E}2 = 365 \# 364 \# 363 \# g \# 356$$

La probabilidad del evento $\overline{E}$ es

$$P1\ \overline{E}2 = \frac{n1\ \overline{E}2}{n1S2} = \frac{365 \# 364 \# 363 \# g \# 356}{36510} \approx 0{,}883$$

La probabilidad de que dos o más personas en un grupo de 10 personas tengan el mismo cumpleaños es entonces

$$P1E2 = 1 - P1\ \overline{E}2 \approx 1 - 0{,}883 = 0{,}117$$

El problema del cumpleaños se puede resolver para grupos de cualquier tamaño. La siguiente tabla muestra las probabilidades de que dos o más personas tengan el mismo cumpleaños en varios grupos. tamaños. Observe que la probabilidad es mayor que para cualquier grupo de 23 o más personas. $\frac{1}{2}$

Número de personas																									
	5	10	15	20	21	22	23	24	25	30	40	50	60	70	80	90
Probabilidad que dos o Más tener el Mismo cumpleaños	0,027	0,117	0,253	0,411	0,444	0,476	0,507	0,538	0,569	0,706	0,891	0,970	0,994	0,99916	0,99991	0,99999

Ahora problema de trabajo 7 1

Característica histórica

Blaise Pascal (1623-1662)

La teoría de conjuntos del cantar y la probabilidad tomó forma como una teoría sistemática en un intercambio de cartas de 1654 entre Pierre de Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662). Discutieron el problema de cómo dividir las apuestas en un juego que se interrumpe antes de finalizar, sabiendo cuántos puntos necesita cada jugador para ganar. Fermat resolvió el problema enumerando todas las posibilidades y contando los favorables, mientras que Pascal hizo uso del triángulo que ahora lleva su nombre. Como se menciona en el texto, las entradas en el triángulo de Pascal son equivalentes a C1n, r2. Este reconocimiento del papel de C1n, r2 en el conteo es la base de todos los desarrollos posteriores.

El primer libro sobre probabilidad, obra de Christiaan Huygens (1629-1695), apareció en 1657. En él se explora la noción de expectativa matemática. Esto permite calcular la ganancia o pérdida que un jugador podría esperar, conociendo las probabilidades involucradas en el juego (ver el Problema Histórico a continuación).

(continuado)

Machine Translated by Google

Aunque Girolamo Cardano (1501-1576) escribió un tratado sobre probabilidad, no se publicó hasta 1663 en las obras completas de Cardano, y esto fue demasiado tarde para haber tenido algún efecto en el desarrollo inicial de la teoría.

En 1713, el Ars Conjectandi de Jakob Bernoulli (1654-1705), publicado póstumamente, dio a la teoría la forma que tendría hasta 1900. Recientemente, tanto la combinatoria (conteo) como la probabilidad han experimentado un rápido desarrollo gracias al uso de las computadoras.

Un comentario final sobre la notación. Las notaciones C1n, r2 y P1n, r2 son variantes de una forma de notación desarrollada en Inglaterra después de 1830. La notación una nr b para C1n, r2 vuelve a Leonhard Euler (1707-1783), pero ahora está perdiendo terreno porque no tiene un simbolismo claramente relacionado del mismo tipo para las permutaciones. Los símbolos de conjunto y ∩ fueron introducidos por Giuseppe Peano (1858-1932) en 1888 en un contexto ligeramente diferente. El símbolo de inclusión fue introducido por E. Schroeder (1841—1902) alrededor de 1890. El tratamiento de la teoría de conjuntos en el texto se lo debemos a George Boole (1815—1864), quien escribió A + B para A B y AB para A ∩ B (los estadísticos todavía usan AB para A ∩ B).

Problema histórico

1. El problema discutido por Fermat y Pascal Un juego entre dos jugadores igualmente hábiles, A y B, se interrumpe cuando A necesita 2 puntos para ganar y B necesita 3 puntos. ¿En qué proporción deben dividirse las apuestas?

(a) Solución de Fermat Enumere todos los resultados posibles que pueden ocurrir como resultado de cuatro jugadas más. La comparación de las probabilidades de que A gane y de que B gane determina cuánto está en juego. debe dividirse.

(b) Solución de Pascal Utilice combinaciones para determinar el número de formas en que los 2 puntos necesarios para que A gane podrían ocurrir en cuatro jugadas. Luego use combinaciones para determinar la cantidad de formas en que podrían ocurrir los 3 puntos necesarios para que B gane. Esto es más complicado de lo que parece, ya que A puede ganar con 2 puntos en dos jugadas, en tres jugadas o en cuatro jugadas. Calcule las probabilidades y compárelas con los resultados del inciso (a).

13.3 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Cuando se asigna la misma probabilidad a cada resultado de un espacio muestral, se dice que el experimento tiene _____ resultados.
2. El de un evento E es el conjunto de todos los resultados en el espacio muestral S que no son resultados del evento E.
3. Verdadero o Falso La probabilidad de un evento nunca puede igual a 0.
4. Verdadero o Falso En un modelo de probabilidad, la suma de todas las probabilidades es 1.

Desarrollo de habilidades

5. En un modelo de probabilidad, ¿cuál de los siguientes números podría ser la probabilidad de un resultado?

1.5 $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ 0 - 4 $\frac{1}{}$

6. En un modelo de probabilidad, ¿cuál de los siguientes números podría ser la probabilidad de un resultado?

0 0,01 0,35 - 0,4 1 1,4

7. Determine si el siguiente es un modelo de probabilidad.

Resultado	Probabilidad
1	0,2
2	0.3
3	0.1
4	0,4

8. Determine si el siguiente es un modelo de probabilidad.

Resultado	Probabilidad
esteban	0,4
Beto	0.3
fay	0.1
patricia	0,2

9. Determine si el siguiente es un modelo de probabilidad.

Resultado	Probabilidad
erica	0.3
joanne	0,2
laura	0.1
donna	0,5
Ángela	-0,1

10. Determine si el siguiente es un modelo de probabilidad.

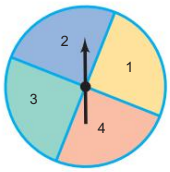
Resultado	Probabilidad
Linda	0.3
Vaquero	0,2
Conceder	0.1
Jim	0.3

Machine Translated by Google

En los problemas 11 a 16, (a) enumere el espacio muestral S de cada experimento y (b) construya un modelo de probabilidad para el experimento.

11. Lanzar dos monedas justas una vez
12. Lanzar una moneda justa dos veces
13. Lanzar una moneda justa, un dado justo y luego una moneda justa
14. Lanzar dos monedas justas y luego un dado justo.
15. Lanzar una moneda justa tres veces.
16. Lanzar tres monedas justas una vez

En los problemas 17 a 22, utilice los siguientes controles giratorios para construir un modelo de probabilidad para cada experimento.



hilandero yo
(4 áreas iguales)

Hilandero II
(3 áreas iguales)

Hilandero III
(2 áreas iguales)

17. Haga girar la ruleta III, luego la ruleta II. ¿Cuál es la probabilidad de salir adelante, seguido de amarillo o verde?
18. Gira la ruleta I, luego la ruleta II. ¿Cuál es la probabilidad de ¿Obtener un 2 o un 4, seguido del Rojo?
19. Gira la ruleta II, luego I, luego III. ¿Cuál es la probabilidad de obtener Amarillo, seguido de un 2 o un 4, seguido de Adelante?
20. Gira la ruleta I, luego II, luego III. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1, seguido de Rojo o Verde, seguido de Atrás?
21. Gire la ruleta III y luego la ruleta I dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener Adelante, seguido de un 1 o un 3, seguido de un 2 o un 4?
22. Gira la ruleta I dos veces y luego la ruleta II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2, seguido de un 2 o un 4, seguido de rojo o verde?

En los problemas 23 a 26, considere el experimento de lanzar una moneda dos veces. La tabla enumera seis posibles asignaciones de probabilidades para este experimento. Utilizando esta tabla, responda las siguientes preguntas.

Asignaciones	Espacio muestral			
	S.S	HT	TH	TT
A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
B	0	0	0	1
C	$\frac{3}{\text{dieciséis}}$	$\frac{5}{\text{dieciséis}}$	$\frac{5}{\text{dieciséis}}$	$\frac{3}{\text{dieciséis}}$
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
mi	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
F	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

23. ¿Cuál de las asignaciones de probabilidades es(son) consistente(s) con la definición de modelo de probabilidad?
24. ¿Cuál de las asignaciones de probabilidades debería usarse si se sabe que la moneda es justa?
25. ¿ Cuál de las asignaciones de probabilidades debería usarse si es dos veces más probable que ocurra cruz que cara?
26. ¿ Cuál de las asignaciones de probabilidades debería usarse si se sabe que la moneda siempre sale cruz?
27. Asignación de probabilidades Una moneda se pesa de modo que tenga cuatro veces más probabilidades de que salga cara que cruz. ¿Qué probabilidad se debe asignar a las caras? a colas?
28. Asignación de probabilidades Una moneda se pesa de modo que tenga el doble de probabilidad de que salga cruz que cara. ¿Qué probabilidad se debe asignar a las caras? a colas?
29. Asignación de probabilidades Un dado tiene el peso de manera que no pueda aparecer un seis. Todas las demás caras ocurren con la misma probabilidad. ¿Qué probabilidad se debe asignar a cada cara?
30. Asignación de probabilidades Un dado está ponderado de manera que una cara con un número impar tiene el doble de probabilidad de aparecer que una cara con un número par. ¿Qué probabilidad se debe asignar a cada cara?

Para los problemas 31 a 34, el espacio muestral es S = 51, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 106. Supongamos que los resultados son igualmente probables.

31. Calcule la probabilidad del evento F = 53, 5, 9, 106.
32. Calcule la probabilidad del evento E = 51, 2, 36.
33. Calcule la probabilidad del evento F: “un número impar”.
34. Calcule la probabilidad del evento E: “un número par”.

Para los problemas 35 y 36, una urna contiene 5 canicas blancas, 10 canicas verdes, 8 canicas amarillas y 7 canicas negras.

35. Si se selecciona una canica, determine la probabilidad de que sea negro.
36. Si se selecciona una canica, determine la probabilidad de que sea blanco.

En los problemas 37 a 40, suponga resultados igualmente probables.

37. Determina la probabilidad de tener 3 niños en un grupo de 3 hijos. familia.
38. Determina la probabilidad de tener 3 niñas en un hijo de 3. familia.
39. Determina la probabilidad de tener 2 niñas y 2 niños en una familia de 4 hijos.
40. Determina la probabilidad de tener 1 niña y 3 niños en una familia de 4 hijos.

Para los problemas 41 a 44, se lanzan dos dados justos.

41. Determina la probabilidad de que la suma de las caras sea 11.
42. Determina la probabilidad de que la suma de las caras sea 7.
43. Determina la probabilidad de que la suma de las caras sea 12.
44. Determina la probabilidad de que la suma de las caras sea 3.

En los problemas 45 a 48, encuentre la probabilidad del evento indicado si P1A2 = 0,25 y P1B2 = 0,45.

45. P1A B2 si P1A ∩ B2 = 0,15
46. P1A ∩ B2 si P1A B2 = 0,6

Machine Translated by Google

47. P1A B2 si A, B son mutuamente excluyentes

48. P1A ∩ B2 si A, B son mutuamente excluyentes

49. Si P1B2 = 0,30, P1A B2 = 0,65 y P1A ∩ B2 = 0,15, encuentre P(A).

50. Si P1A2 = 0,60, P1A B2 = 0,85 y P1A ∩ B2 = 0,05, encuentre P(B).

51. Robo de automóviles Según el Insurance Information Institute, en 2016 había un 13,3% de probabilidad de que un robo de automóvil en los Estados Unidos se solucionara mediante arrestos. Si se selecciona al azar un caso de robo de automóvil de 2016, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido resuelto mediante un arresto?

52. Propiedad de mascotas según el informe nacional de propietarios de mascotas 2017-2018 de la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Productos para Mascotas Encuesta, existe un 68% de probabilidad de que un hogar estadounidense tenga una mascota. Si se selecciona al azar un hogar estadounidense, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga una mascota?

53. Títulos de doctorado Según la Fundación Nacional de Ciencias, en 2016 había un 17,2% de probabilidad de que un título de doctorado otorgado en una universidad estadounidense fuera otorgado en ingeniería. Si se selecciona al azar a un doctorado estadounidense de 2016, ¿cuál es la probabilidad de que su título no sea de ingeniería?

54. Propiedad de gatos según el informe nacional de propietarios de mascotas 2017-2018 de la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Productos para Mascotas Encuesta, existe un 38% de probabilidad de que un hogar estadounidense tenga un gato. Si se selecciona al azar un hogar estadounidense, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga un gato?

55. Galletas Girl Scout Según Girl Scouts of America, el 19% de todas las galletas Girl Scout vendidas son Samoas/Caramel deLites. Si se selecciona al azar una caja de galletas Girl Scout, ¿cuál es la probabilidad de que no contenga Samoas/Caramel deLites?

56. Comportamiento en el juego Según una encuesta de Gallup de 2016, el 26% de los adultos estadounidenses visitaron un casino durante el último año. Si se selecciona al azar un adulto estadounidense, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visitado un casino durante el último año?

Para los problemas 57 a 60, se selecciona al azar una pelota de golf de un recipiente. Si el recipiente tiene 9 bolas blancas, 8 bolas verdes y 3 bolas naranjas, calcula la probabilidad de cada evento.

57. La pelota de golf es blanca o naranja.

58. La pelota de golf es blanca o verde.

59. La pelota de golf no es verde.

60. La pelota de golf no es blanca.

61. Otro juego de The Price Is Right requiere que el concursante haga girar una rueda con los números 5, 10, 15, 20,. . . , 100. ¿Cuál es la probabilidad de que el concursante obtenga 100 o 30?

62. En The Price Is Right, hay un juego en el que se llena una bolsa con 3 fichas de strike y 5 números. Digamos que los números en la bolsa son 0, 1, 3, 6 y 9. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una ficha de strike o el número 1?

Los problemas 63 a 66 se basan en una encuesta de ingresos anuales en 100 hogares. La siguiente tabla da los datos.

Ingreso	$0–24,999	$25,000–49,999	$50,000–74,999	$75,000–99,999	$100,000 o más
Número de hogares	22	23	17	12	26

63. ¿Cuál es la probabilidad de que un hogar tenga un ingreso anual entre $25 000 y $74 999, inclusive?

64. ¿ Cuál es la probabilidad de que un hogar tenga un ingreso anual de $75,000 o más?

65. ¿ Cuál es la probabilidad de que un hogar tenga un ingreso anual de $50,000 o más?

66. ¿Cuál es la probabilidad de que un hogar tenga un ingreso anual inferior a $50 000?

67. Encuestas En una encuesta sobre el número de televisores en una casa, se construyó la siguiente tabla de probabilidad:

Número de televisores	0	1	2	3	4 o más
Probabilidad	0,05	0,24	0,33	0,21	0,17

Encuentre la probabilidad de que una casa tenga:
(a) 1 o 2 televisores
(b) 1 o más televisores
(c) 3 o menos televisores
(d) 3 o más televisores
(e) Menos de 2 televisores
(f) Menos de 1 televisor
(g) 1, 2 o 3 televisores
h) 2 o más televisores

68. Filas de caja A través de la observación, se ha determinado que la probabilidad de que un número determinado de personas esperen en fila en la caja registradora de “5 artículos o menos” de un supermercado es la siguiente:

Número esperando en la fila	0	1	2	3	4 o más
Probabilidad	0,10	0,15	0,20	0,24	0,31

Encuentre la probabilidad de:
(a) Como máximo 2 personas en fila
(b) Al menos 2 personas en fila
(c) Al menos 1 persona en fila

69. En cierta clase de Precálculo, hay 18 estudiantes de primer año y 15 de segundo año. De los 18 estudiantes de primer año, 10 son hombres y de los 15 estudiantes de segundo año, 8 son hombres. Encuentre la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar sea:

(a) Un estudiante de primer año o una mujer

(b) Un estudiante de segundo año o un hombre

Machine Translated by Google

70. El cuerpo docente del departamento de matemáticas del Joliet Junior College está compuesto por 4 mujeres y 9 hombres. De las 4 mujeres, 2 tienen menos de 40 años y de los 9 hombres, 3 tienen menos de 40 años. Encuentre la probabilidad de que un miembro de la facultad seleccionado al azar sea:
(a) Mujer o menor de 40 años
(b) Hombre o mayor de 40 años

71. Problema de cumpleaños ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 personas en un grupo de 12 personas tengan el mismo cumpleaños? Supongamos que hay 365 días en un año.

72. Problema de cumpleaños ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 personas en un grupo de 35 personas tengan el mismo cumpleaños? Supongamos que hay 365 días en un año.

73. Ganar una lotería Lotto America es una lotería multiestatal en la que se seleccionan 5 bolas rojas de un tambor con 52 bolas y 1 bola estrella de un tambor con 10 bolas. Por un boleto de $1, los jugadores tienen una oportunidad de ganar el gran premio al acertar los 6 números. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar los números ganadores en una jugada de $1?

74. Problema de desafío Si se lanzan 3 dados de seis caras, encuentre la probabilidad de que exactamente 2 dados tengan la misma lectura.

Conserve su conocimiento

Los problemas 75 a 84 se basan en material aprendido anteriormente en el curso. El propósito de estos problemas es mantener el material fresco en su mente para estar mejor preparado para el examen final.

75. Para graficar g1x2 = 0 x + 2 0 - 3, desplaza la gráfica de f1x2 = 0 x 0 unidades _____ (número) unidades _____ (izquierda derecha) y luego _____ (número) _____ (arriba abajo).

76. Encuentra las coordenadas rectangulares del punto cuya polar las coordenadas son a6, 2p.

77. Resuelve: log5 1x + 32 = 2

78. Resuelva el sistema dado usando matrices.

$$2x - 2y + 5z = 5$$
$$3x + 3y + 2z = -9$$

- 8 0 5

79. Evaluar: 3 7 - 6 36 - 4 2 3

80. Simplifica: 2108 - 2147 + 2363

81. José conduce a 60 millas por hora hasta la casa de su amigo y a 40 millas por hora de regreso. ¿Cuál es su velocidad promedio?

82. Encuentra el término 85 de la secuencia 5, 12, 19, 26,. . . .

83. Encuentra el área delimitada por las gráficas de $y = \frac{12}{5}x + \frac{12}{5}$, y = - x + 4, y y = - 216 - x2 .

84. Encuentra la descomposición en fracciones parciales: $\frac{7x^2 - 5x + 30}{x^3 - 8}$

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Fórmula de conteo (p. 898)
n1A B2 = n1A2 + n1B2 - n1A ∩ B2

Principio de suma para contar (p. 898)
Si A ∩ B = , entonces n1A B2 = n1A2 + n1B2.

Principio de multiplicación del conteo (p. 900)
Si una tarea consta de una secuencia de elecciones en la que hay p selecciones para la primera elección, q selecciones para la segunda elección, etc., la tarea de realizar estas selecciones se puede realizar de p # q # g diferentes maneras.

Permutación (p. 903)
Una disposición ordenada de r objetos elegidos entre n objetos .

Número de permutaciones: Distintas, con repetición (p. 903)
n°

Los n objetos son distintos (diferentes), y se permite la repetición en la selección de r de ellos.

Número de permutaciones: Distintas, sin repetición (p. 905) P1n, r2 = n1n - 12 # g # 3n - 1r - 12 4 = $\frac{n!}{1n - r2!}$

Los n objetos son distintos (diferentes), y no se permite la repetición en la selección de r de ellos, donde r … n.

Combinación (pág. 906)
Una disposición, sin tener en cuenta el orden, de r objetos seleccionados entre n objetos distintos, donde r … n

Machine Translated by Google

Número de combinaciones (p. 906)	$C1n, r2 = \frac{P1n, r2}{r!} = \frac{¡norte!}{1n - r2!\ r!}$
Número de permutaciones: No distintas (p. 908)	$\frac{¡norte!}{n1!n2!\ ¡bueno!}$
	El número de permutaciones de n objetos de los cuales n1 son de un tipo y n2 son de un segundo tipo. . . , y nk son del tipo k-ésimo, donde n = n1 + n2 + g+ nk
Espacio muestral (págs. 911–912)	Conjunto cuyos elementos representan los posibles resultados que pueden ocurrir como resultado de un experimento.
Probabilidad (pág. 912)	Un número no negativo asignado a cada resultado de un espacio muestral; la suma de todas las probabilidades de los resultados es igual a 1.
Probabilidad de resultados igualmente probables (p. 914)	$P1E2 = \frac{n1E2}{n1S2}$
	Se asigna la misma probabilidad a cada resultado.
Probabilidad de la unión de dos eventos (p. 915)	P1E F2 = P1E2 + P1F2 - P1E ∩ F2
Probabilidad del complemento de un evento (p. 916)	$P1\overline{E2} = 1 - P1E2$

Objetivos

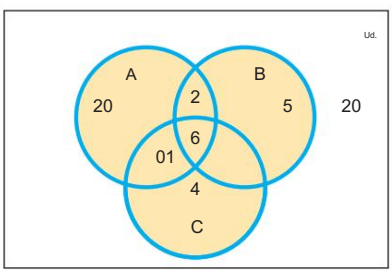
Sección	Deberias ser capaz de . . .	Ejemplos de ejercicios de repaso	
13.1	1 Encuentra todos los subconjuntos de un conjunto (p. 897)	1	1
	2 Cuente el número de elementos en un conjunto (p. 897)	2, 3	2–9
	3 Resuelve problemas de conteo usando la multiplicación. Principio (pág. 899)	4, 5	12, 13, 17, 18
13.2	1 Resolver problemas de conteo usando permutaciones que involucran n objetos distintos (p. 903)	1–5	10, 14, 15, 19, 22(a)
	2 Resolver problemas de conteo usando combinaciones (p. 905)	6–9	11, 16, 21
	3 Resolver problemas de conteo usando permutaciones que involucran n objetos no diferenciados (p. 908)	10, 11	20
13.3	1 Construir modelos de probabilidad (p. 911)	2–4	22(b)
	2 Calcular probabilidades de resultados igualmente probables (p. 914)	5, 6	22(b), 23(a), 24, 25
	3 Encuentra probabilidades de la unión de dos eventos (p. 915)	7, 8	26
	4 Utilice la regla del complemento para encontrar probabilidades (p. 916)	9, 10	22(c), 23(b)

Ejercicios de revisión

1. Escribe todos los subconjuntos del conjunto {Dave, Joanne, Erica}.
2. Si n1A2 = 8, n1B2 = 12 y n1A ∩ B2 = 3, encuentre n1A B2.
3. Si n1A2 = 12, n1A B2 = 30 y n1A ∩ B2 = 6, encuentre n1B2.

En los problemas 4 a 9, utilice la información proporcionada en la figura.

4. ¿Cuántos hay en A?
5. ¿Cuántos hay en A o B?
6. ¿Cuántos hay en A y C?
7. ¿ Cuántos no están en B?
8. ¿Cuántos hay ni en A ni en C?
9. ¿ Cuántos hay en B pero no en C?



En los problemas 10 y 11, calcule la expresión dada.

10. P18, 32 11. C18, 32

Machine Translated by Google

12. Abastecer una tienda Una tienda de ropa vende mezclilla y jeans de pana. Cada par de jeans viene en 4 colores y 6 tallas. ¿Cuántos pares de jeans se necesitan para tener un surtido completo?

13. Béisbol En un día determinado, la Liga Americana de Béisbol programa 7 juegos. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles, suponiendo que cada juego se juega hasta el final?

14. Elección de asientos Si 4 personas entran en un autobús que tiene 9 asientos libres, ¿de cuántas maneras se pueden sentar?

15. Elegir un equipo ¿De cuántas maneras se puede elegir un equipo de 4 corredores de relevos de un equipo de atletismo de 8 corredores?

16. Fútbol ¿De cuántas maneras se pueden elegir 2 equipos de 32 equipos en la Liga de Campeones de la UEFA sin importar cuál equipo esté en casa?

17. Números de teléfono Usando los dígitos 0, 1, 2, . . . , 9, ¿cuántos números de 7 cifras se pueden formar si la primera cifra no puede ser 0 ni 9 y si la última cifra es mayor o igual a 2 y menor o igual a 3? Se permiten dígitos repetidos.

18. Posibilidades de matrículas Una matrícula tiene 1 letra, excluyendo O e I, seguida de un número de 4 dígitos que no puede tener un 0 en la posición inicial. ¿Cuántas placas diferentes son posibles?

19. Códigos binarios Usando los dígitos 0 y 1, ¿cuántos números diferentes de 8 dígitos se pueden formar?

20. Disposición de las banderas ¿Cuántas disposiciones verticales diferentes hay de 15 banderas si 6 son blancas, 5 son azules, 3 son rojas y 1 es amarilla?

21. Formar comités Un grupo de 9 personas se va a formar en comités de 4, 3 y 2 personas. ¿Cuántos comités se pueden formar si:

(a) ¿Una persona puede formar parte de cualquier número de comités?
(b) ¿Ninguna persona puede formar parte de más de un comité?

22. Problema de cumpleaños Para este problema, suponga que un año tiene 365 días.

(a) ¿De cuántas maneras pueden 18 personas tener cumpleaños diferentes?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya dos personas en un grupo de 18 que tengan el mismo cumpleaños?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 personas de un grupo de 18 tengan el mismo cumpleaños?

23. Desempleo Según la Oficina de Estadísticas Laborales de EE. UU., el 3,8% de la fuerza laboral estadounidense estaba desempleada en mayo de 2018.

(a) ¿ Cuál es la probabilidad de que un miembro de la fuerza laboral estadounidense seleccionado al azar estuviera desempleado en mayo de 2018?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de la fuerza laboral estadounidense seleccionado al azar no estuviera desempleado en mayo de 2018?

24. Una caja de 200 bombillas eléctricas contiene 25 bombillas defectuosas. Si sacas una bombilla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté defectuosa?

25. Cada uno de los números, 1, 2, c , Se escribe 50 en una ficha y se barajan las cartas. Si se selecciona una carta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el número de la carta sea par? ¿Cuál es la probabilidad de que la carta seleccionada nombre un múltiplo de 4?

26. En el taller de puesta a punto y reparación de frenos de Milex, el gerente descubrió que un automóvil requerirá una puesta a punto con una probabilidad de 0,6, un trabajo de frenos con una probabilidad de 0,1 y ambos con una probabilidad de 0,02.

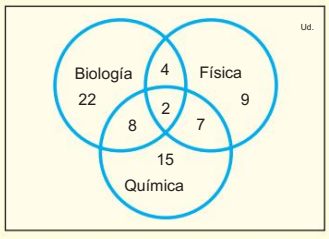
(a) ¿ Cuál es la probabilidad de que un automóvil requiera una puesta a punto o un cambio de frenos?
(b) ¿ Cuál es la probabilidad de que un automóvil requiera una puesta a punto pero no un cambio de frenos?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil no requiera ni afinación ni frenos?

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

En los problemas 1 a 4, una encuesta realizada a 70 estudiantes universitarios de primer año preguntó si los estudiantes planeaban estudiar biología, química o física durante su primer año. Utilice el diagrama para responder cada pregunta.



1. ¿Cuántos de los estudiantes encuestados planean estudiar física durante su primer año?
2. ¿Cuántos de los estudiantes encuestados no planean cursar biología, química o física durante su primer año?
3. ¿Cuántos de los estudiantes encuestados planean cursar solo biología y química durante su primer año?
4. ¿Cuántos de los estudiantes encuestados planean estudiar física o Química durante su primer año?

En los problemas 5 a 7, calcule el valor de la expresión dada.

5. 7!
6. P110, 62
7. C111, 52

8. M&M's® ofrece a los clientes la oportunidad de crear su propia combinación de colores de dulces. Hay 21 colores para elegir y los clientes pueden seleccionar hasta 6 colores diferentes.
¿Cuántas combinaciones de colores diferentes son posibles, suponiendo que no se selecciona ningún color más de una vez y que se seleccionan 6 colores diferentes? ¿elegido?

9. ¿ Cuántas palabras distintas de 8 letras (significativas o no) se pueden formar a partir de las letras de la palabra REDIMIDO?

10. En las carreras de caballos, una apuesta exacta requiere que el apostante elija los dos primeros caballos en el orden exacto. Si hay 8 caballos en un carrera, ¿de cuántas maneras podrías hacer una apuesta exacta?

11. El 20 de febrero de 2004, la Oficina de Vehículos Motorizados de Ohio dio a conocer el nuevo formato de matrícula del estado. La placa consta de tres letras (A–Z) seguidas de 4 dígitos (0–9).
Suponga que se pueden usar todas las letras y dígitos, excepto que la tercera letra no puede ser O, I o Z. Si se permiten repeticiones, ¿cuántas placas diferentes son posibles?

* Debido a restricciones de espacio, las respuestas a estos ejercicios se pueden encontrar en las Respuestas al final del texto.

Machine Translated by Google

12. Kiersten solicita la admisión a la Universidad del Sur de California (USC) y a la Universidad Estatal de Florida (FSU). Ella estima que tiene un 60% de posibilidades de ser admitida en la USC, un 70% de posibilidades de ser admitida en FSU y un 35% de posibilidades de ser admitida en ambas universidades.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea admitida en la USC o en la FSU?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea admitida en

    ¿Ex Unión Soviética?

13. Una hielera contiene 8 botellas de Pepsi, 5 botellas de Coca-Cola, 4 botellas de Mountain Dew y 3 botellas de IBC.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una botella elegida al azar

    Qué es la Coca-Cola?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que una botella elegida al azar sea Pepsi o IBC?

14. Un estudio sobre la distribución por edades de los estudiantes en una comunidad. La universidad arrojó los siguientes datos:

Edad	17 y menos	18–20	21–24	25–34	35–64	65 y más
Probabilidad	0,03	???	0,23	0,29	0,25	0,01

    ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de la universidad seleccionado al azar tenga entre 18 y 20 años?

15. En cierta lotería, hay diez bolas numeradas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. De ellas, cinco se sortean en orden. Si elige cinco números que coincidan con los extraídos en el orden correcto, ganará $1,000,000. ¿Cuál es la probabilidad de ganar tal lotería?

16. Si tiras un dado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que obtengas exactamente 2 cuatros?

Revisión acumulativa

1. Resuelve: 3x2 - 2x = - 1

2. Grafica f1x2 = x2 + 4x - 5 determinando si la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo y encontrando el vértice, el eje de simetría y las intersecciones.

3. Grafica f1x2 = 21x + 12 4. ^{2} - 4 usando transformaciones.

Resuelve: 0 x - 4 0 … 0.01

5. Encuentra los ceros complejos de

$$f1x2 = 5x4 - 9x3 - 7x2 - 31x - 6$$

6. Grafica g1x2 = 3x-1 + 5 usando transformaciones. Encuentre el dominio, el rango y la asíntota horizontal de g.

7. ¿Cuál es el valor exacto de log3 9?

8. Resuelva: log2 13x - 22 + log2x = 4

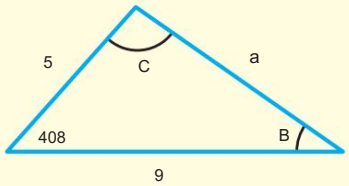
$$3x + y - 3z = - 8$$

9. Resuelve el sistema: c x - 2y + z = 4 y 15z = - 27

10. ¿Cuál es el término 33 de la secuencia: 3, 1, 5, 9, c? Qué Cuál es la suma de los primeros 20 términos?

11. Gráfica: y = 3 sen12x + p2

12. Resuelve el siguiente triángulo y encuentra su área.



Proyectos del Capítulo

I. La lotería y el beneficio esperado Cuando todos los resultados posibles en un modelo de probabilidad son cantidades numéricas, se pueden calcular estadísticas útiles para dichos modelos. El valor esperado, o media, de dicho modelo de probabilidad es se encuentra multiplicando cada resultado numérico posible por su probabilidad correspondiente y luego sumando estos productos.

Por ejemplo, la Tabla 2 proporciona el modelo de probabilidad para lanzar un dado justo de seis caras. El valor esperado, E1x2, es

$$E1x2 = 1 \# \frac{1}{6} + 2 \# \frac{1}{6} + 3 \# \frac{1}{6} + 4 \# \frac{1}{6} + 5 \# \frac{1}{6} + 6 \# \frac{1}{6} = 3,5$$

Cuando se lanza repetidamente un dado justo, el promedio de los resultados se aproximará a 3,5.

Mega Millions es una lotería multiestatal en la que un jugador selecciona cinco números “blancos” diferentes del 1 al 70 y uno número “oro” del 1 al 25. El modelo de probabilidad que se muestra en la Tabla 3 enumera los posibles premios en efectivo y sus probabilidades correspondientes.

1. Verifique que la Tabla 3 sea un modelo de probabilidad.

2. Para ganar el premio mayor, el jugador debe acertar los seis números. Verifique la probabilidad dada en la Tabla 3 de ganar el premio mayor.

Machine Translated by Google

Tabla 2

Probabilidad de resultado	
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

Tabla 3

Premio en efectivo	Probabilidad
Bote	0.00000000330
$1,000,000	0.00000007932
$10,000	0.00000107411
$500	0.00002577851
$200	0.00006874270
$10	0.00309316646
$4	0.01123595506
$2	0.02702702703
$0	0.95854817351

Para las preguntas 3 a 6, suponga que hay un solo ganador del premio mayor para que no sea necesario compartir el premio mayor.

3. Si el premio mayor es de $40.000.000, calcule el efectivo esperado.
premio.
4. Si un boleto cuesta $2, ¿cuál es el resultado financiero esperado al comprar un boleto? Interprete (dé el significado de) este resultado.
5. Si el premio mayor es de $250 000 000, ¿cuál es el premio en efectivo esperado? ¿Cuál es el resultado financiero esperado al comprar un boleto de $2? Interprete este resultado.
6. ¿ Qué cantidad debe ser el premio mayor para que se espere una ganancia de un boleto de $2?
7. Investigue la lotería Powerball y cree un modelo de probabilidad similar al de la Tabla 3. Repita las preguntas 3 a 6 para Powerball. Según lo que has aprendido, ¿a qué lotería preferirías jugar? Justifica tu decisión.

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC):

II. Proyecto de Motorola Probabilidad de error en las comunicaciones inalámbricas digitales Los errores de transmisión en las comunicaciones digitales a menudo se pueden detectar agregando un dígito adicional de código a cada señal transmitida. Investigue la probabilidad de identificar un código erróneo utilizando este sencillo método de codificación.

III. Encuestas Hacer encuestas (o realizar una encuesta) es un gran negocio en los Estados Unidos. Realizar y analizar una encuesta; luego considera por qué diferente los encuestadores podrían obtener resultados diferentes.

IV. Ley de los números grandes La probabilidad de que ocurra un evento, como por ejemplo que salga cara al lanzar una moneda, es la proporción de caras que se espera a largo plazo. Se utiliza una simulación para mostrar que a medida que se lanza una moneda más y más veces, la proporción de caras se acerca a 0,5.

V. Simulación La simulación electrónica de un experimento suele ser una forma económica de investigar una probabilidad teórica. Desarrollar un Teoría sin moverte de tu escritorio.

Machine Translated by Google

14

Una vista previa del cálculo: El límite, la derivada y Integral de una función

Thomas Malthus sobre el crecimiento demográfico

A finales del siglo XVIII, el economista británico Thomas Malthus presentó un informe en el que criticaba a quienes pensaban que la vida iba a seguir mejorando para los humanos. Malthus preparó rápidamente su informe y lo tituló Ensayo sobre el principio de la población como afecta a la mejora futura de la sociedad, con comentarios sobre las especulaciones del señor Godwin, el señor Condorcet y otros escritores.

Malthus argumentó que debido a que la población humana tiende a aumentar geométricamente (1, 2, 4, 16, etc.) y que los suministros de alimentos probablemente sólo aumentarán aritméticamente (1, 2, 3, 4, etc.), las poblaciones crecerán naturalmente. mantenerse bajo control debido a la escasez de alimentos. Malthus también sugirió que existen otros controles sobre el crecimiento de la población (y los consideró naturales y buenos). Sin embargo, le preocupa que la pobreza sea inevitable y continúe.

Malthus utilizó datos históricos para sugerir que el crecimiento de la población se ha estado duplicando cada veinticinco años en los Estados Unidos (aún en las primeras etapas de desarrollo allá por finales del siglo XVIII). Malthus supuso que la juventud del país, junto con la gran cantidad de áreas propicias para la agricultura, conducirían a una tasa de natalidad que superaría a la de la mayoría de los países del mundo.

Malthus creía que hay dos "controles" que controlan el crecimiento de la población. Un tipo se llama controles preventivos: son controles que disminuyen la tasa de natalidad. El segundo tipo se llama controles positivos: son controles que aumentan la tasa de mortalidad. Los controles positivos incluyen guerras, hambrunas y desastres naturales. Malthus creía que el miedo a la hambruna era una de las principales razones por las que la tasa de natalidad podía disminuir. Después de todo, ¿quién querría tener un hijo sabiendo que podría sufrir hambre o, peor aún, inanición?

—Ver Capítulo Proyecto I—

Describir

14.1 Investigación de límites mediante tablas y gráficos

14.2 Técnicas algebraicas para encontrar límites

14.3 Límites unilaterales; Continuidad

14.4 El problema de la tangente; La derivada

14.5 El problema del área; La integral

Revisión del capítulo

Prueba de capítulo

Proyectos del Capítulo

Una mirada atras

En este texto hemos estudiado una variedad de funciones: funciones polinómicas (incluidas funciones lineales y cuadráticas), funciones racionales, funciones exponenciales y logarítmicas, funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas. Para cada uno de ellos, encontramos su dominio y rango, interceptos, simetría, si las hubiera, y asíntotas, si las hubiera, y las graficamos. También discutimos si estas funciones eran pares, impares o ninguna de las dos y determinamos en qué intervalos aumentaban y disminuían. También discutimos la idea de su tasa de cambio promedio.

Una mirada hacia el futuro

En cálculo, se analizan otras propiedades, como encontrar límites de funciones, determinar dónde son continuas las funciones, encontrar la derivada de funciones y encontrar la integral de funciones. En este capítulo, damos una introducción a estas propiedades. Una vez que haya completado este capítulo, estará bien preparado para un primer curso de cálculo.

Machine Translated by Google

14.1 Investigación de límites mediante tablas y gráficos

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Funciones definidas por partes (Sección 2.4, págs. 127–129)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 930.

OBJETIVOS 1 Investigar un límite usando una tabla (p. 927)

2 Investiga un límite usando una gráfica (p. 929)

La idea de un límite

La idea de límite de una función es lo que conecta el álgebra y la geometría con las matemáticas del cálculo. Al trabajar con el límite de una función, encontramos notación de la forma

$$\lim_{x \to c} f(x) = N$$

¿Necesita revisar?
La notación de intervalos se analiza en la Sección A.9, págs. A72–A74.

Esto se lee como "el límite de f1x2 cuando x se aproxima a c es igual al número N" . Aquí f es una función definida en algún intervalo abierto que contiene el número c. Sin embargo, no es necesario definir f en c.

El significado de $\lim_{x \to c} f(x) = N$ se puede describir de la siguiente manera:

Para todo x aproximadamente igual al número c, con x · c, el valor correspondiente de f es aproximadamente igual al número N.

Otra descripción de $\lim_{x \to c} f(x) = N$ es

A medida que x se acerca a c, pero sigue siendo desigual a c, el valor correspondiente de f se acerca a N.

1 Investigar un límite usando una tabla

Las tablas generadas con la ayuda de una calculadora son útiles para investigar límites.

EJEMPLO 1

Investigar un límite usando una tabla

Investigar: $\lim_{x \to 3} (5x^2)$

Solución Aquí f1x2 = 5x2 yc = 3. Elija un valor para x cercano a 3, como 2,99 . Luego seleccione números adicionales que están más cerca de 3 pero siguen siendo menores que 3. Luego elija valores de x mayores que 3, como 3.01, que se acerquen a 3. Finalmente, evalúe f en cada elección para obtener la Tabla 1.

tabla 1

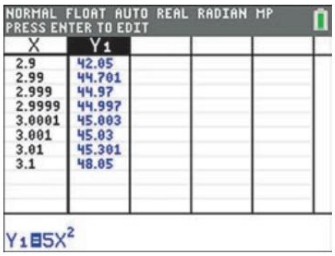
x	2,99	2,999	2,9999	S 3 días	3,0001	3.001	3.01
f 1x2 · 5x2	44,701	44,970	44,997	S d	45,003	45,030	45.301

Según la Tabla 1, a medida que x se acerca a 3, el valor de f1x2 = 5x2 parece acercarse a 45. Esto sugiere que

$$\lim_{x \to 3} (5x^2) = 45$$

Machine Translated by Google

Tabla 2



Al elegir los valores de x en una tabla, el número con el que comenzar y las entradas posteriores son arbitrarios. Sin embargo, las entradas deben elegirse de modo que la tabla deje claro a qué número se aproxima el valor de f .

COMENTARIO Se puede utilizar una utilidad gráfica con una función TABLA para generar las entradas. La Tabla 2 muestra el resultado del Ejemplo 1 usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C. ■

Ahora trabaja el problema 7

EJEMPLO 2 Investigar un límite usando una tabla

Investigar: (a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (b) $\lim_{x \to 2} 1x + 22$

Solución

(a) Aquí $f1x2 = \frac{x2 - 4}{x - 2 \text{ no}}$ y c = 2. Observe que el dominio de f es 5x· x · 26, entonces f está definido en 2. Elija valores de x cercanos a 2 en ambos lados y evalúe f en cada elección, como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3

x	1,99	1,999 1,9999 S 2 días 2,0001 2,001	2.01
$f\,1x2 \cdot \frac{x2 \cdot 4}{x \cdot 2}$	3,99	3,999 3,9999 S d 4,0001 4,001	4.01

La Tabla 3 sugiere que a medida que x se acerca a 2, el valor de $f1x2 = \frac{x2 - 4}{x - 2}$ se acerca a 4. Es decir,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

(b) Aquí g1x2 = x + 2 yc = 2. El dominio de g son todos los números reales. Ver Tabla 4.

Tabla 4

x	1,99	1,999 1,9999 S 2 días 2,0001 2,001	2.01
g 1x2 · x · 2 3,99		3,999 3,9999 S d 4,0001 4,001	4.01

La Tabla 4 sugiere que a medida que x se acerca a 2, el valor de g1x2 se acerca a 4. Es decir,

$$\lim_{x \to 2} 1x + 22 = 4$$

La conclusión de que $\lim_{x \to 2} 1x + 22 = 4$ podría obtenerse sin la Tabla 4; como x se pone más cerca de 2, se deduce que x + 2 se acerca a 2 + 2 = 4.

Además, para el inciso (a), tienes razón si haces la observación de que para x · 2,

$$f1x2 = \frac{x2 - 4}{x - 2} = \frac{1x - 22\,1x + 22}{x - 2} = x + 2\ x \cdot 2$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 1x + 22 = 4$$

Veamos un ejemplo en el que la técnica de factorización utilizada anteriormente no funciona.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Investigar un límite usando una tabla

Investigar: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{pecado } x}{X}$

Solución x Primero, observe que el dominio de la función f1x2 = calculadora $\frac{\text{sen}}{X}$ es 5x 0 x · 06. Utilice un para crear la Tabla 5, donde x se mide en radianes.

Tabla 5

x (radianes)	-0,03	-0,02	-0,01 S 0 d 0,01	0,02	0,03
1x2 · $\frac{\text{sen xf}}{X}$	0,99985	0,99993	0,99998 S d 0,99998	0,99993	0,99985

La Tabla 5 sugiere que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{pecado}}{X} x = 1.$

2 Investigar un límite usando una gráfica La gráfica de una función f también puede ser útil para investigar los límites. Consulte la Figura 1. En cada gráfico, observe que a medida que x se acerca a c, el valor de f se acerca al número N.
Esto sugiere que

$$\lim_{x \to c} f1x2 = N$$

Ésta es la conclusión independientemente del valor de f en c. En la Figura 1(a), f1c2 = N, y en la Figura 1(b), f1c2 · N. La Figura 1(c) sugiere que $\lim_{x \to c} f1x2 = N$, incluso si f no está definida en c.

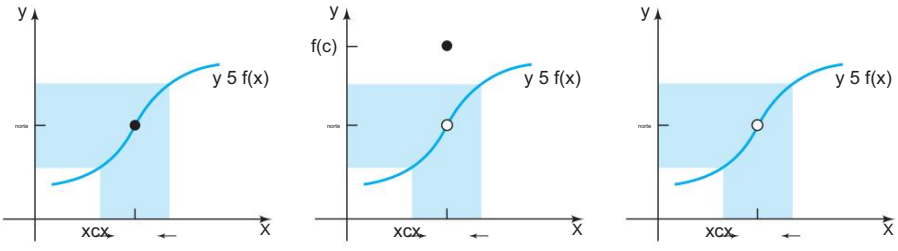


Figura 1

EJEMPLO 4 Investigar un límite mediante una gráfica

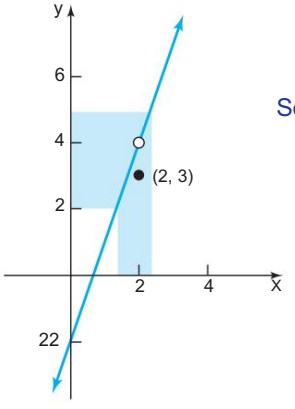


Figura 2

Investigar: $\lim_{x \to 2} f1x2$ si $f1x2 = \begin{cases} e\,3x - 2 & \text{si } x \cdot 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Solución La función f es una función definida por partes. Su gráfica se muestra en la Figura 2. La gráfica sugiere que $\lim_{x \to 2} f1x2 = 4.$

Observe en el ejemplo 4 que el valor de f en 2 (es decir, f122 = 3) no juega ningún papel en $\lim_{x \to 2} f1x2 = 4$. De hecho, incluso si f no estuviera definida en 2, aún así se concluiría que lím xS2 caso de que lim xS2 f1x2 = 4. sea el

Ahora resuelve los problemas 1 7 y 2 3

Machine Translated by Google

A veces no existe un único número al que se acerquen los valores de f cuando x obtiene más cerca de c. En este caso, decimos que f no tiene límite cuando x tiende a c o que lim no $_{xSc}$ f1x2 existe.

EJEMPLO 5 Una función que no tiene límite en 0

Investigar: lim $_{xS0}$ f1x2 si f1x2 = e x 1 si x ... 0 si x 7 0

Solución

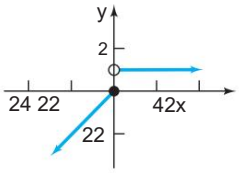


Figura 3 f(x) = e x si x 1. si x 7 0

Consulte la Figura 3. A medida que x se acerca a 0 pero sigue siendo negativo, el valor de f también se acerca a 0. A medida que x se acerca a 0 pero sigue siendo positivo, el valor de f siempre es igual a 1. Dado que no existe un único número que Los valores de f son cercanos a cuando x es cercano a 0, concluimos que lim f1x2 no existe. xS0

Ahora resuelve el problema 3 7

EJEMPLO 6 Uso de una utilidad gráfica para investigar un límite

Investigar: lim $_{xS2}$ $\frac{x3 - 2x2 + 4x - 8}{x4 - 2x3 + x - 2}$

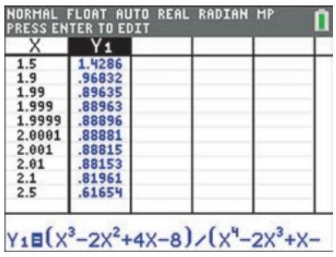
Solución

La tabla 6 muestra valores de la expresión racional para x cercanos a 2. La tabla sugiere que

$$\frac{x3 - 2x2 + 4x - 8}{x4 - 2x3 + x - 2} \text{ lím} = 0{,}889 \text{ xS2}$$

redondeado a tres decimales.

Tabla 6



Ahora resuelve el problema 4 3

En la siguiente sección, veremos cómo se puede utilizar el álgebra para obtener límites exactos de funciones.

14.1 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Grafica f1x2 = b 3x - 2 si x · 2 si x = 2 (págs. 127 y 129)

2. Si f1x2 = bx 1 si x ... 0 si x 7 0 ¿ Qué es f102? (págs. 127-129)

Conceptos y vocabulario

3. El límite de una función y = f1x2 cuando x tiende a c es denotado por el símbolo _____.

4. Si una función f no se aproxima a un solo número como x se aproxima a c, entonces decimos que lim $_{xSc}$ f1x2 _____ _____ _____.

5. Límite verdadero o falso lim $_{xSc}$ f1x2 = N puede describirse diciendo que el valor de f1x2 se acerca a N a medida que x se acerca a c pero sigue siendo desigual a c.

6. Límite verdadero o falso lim $_{xSc}$ f1x2 existe y es igual a algún número para cualquier función f siempre que c esté en el dominio de f.

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 16, utilice una tabla para investigar el límite indicado.

7. $\lim_{x \to 2} 14x^3 2$

8. $\lim_{x \to 3} 12x^2 + 12$

$\lim_{x \to 0} \frac{2 - x}{x^2 + 4}$ 9.

10. $\lim_{x \to 0} \frac{x + 1}{x^2 + 1}$

11. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x - 4}$ 12.

$\lim_{x \to 0} \frac{-x}{2}$ 13.

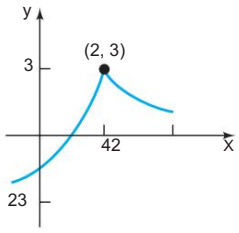
14. $\lim_{x \to 0} 1ex + 12$

15. $\lim_{x \to 0}$ bronceado x, x en radianes

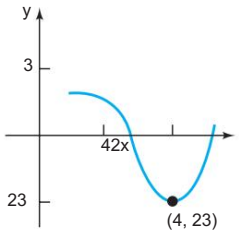
$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ 16., x en radianes

En los problemas 17 a 22, utilice la gráfica que se muestra para investigar el límite indicado.

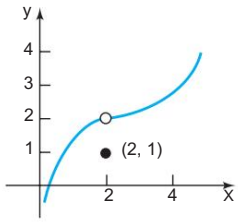
17. $\lim_{x \to 2} f1x2$



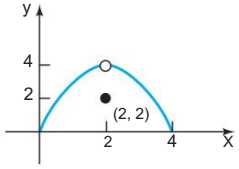
18. $\lim_{x \to 4} f1x2$



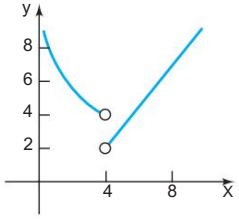
19. $\lim_{x \to 2} f1x2$



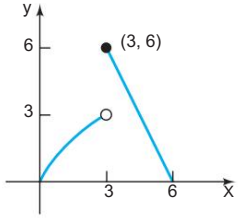
20. $\lim_{x \to 2} f1x2$



21. $\lim_{x \to 4} f1x2$



22. $\lim_{x \to 3} f1x2$



En los problemas 23 a 42, grafique cada función. Utilice la gráfica para investigar el límite indicado.

23. $\lim_{x \to 4} f1x2$, $f1x2 = 3x + 1$

24. $\lim_{x \to -1}$ $f1x2$, $f1x2 = 2x - 1$

25. $\lim_{x \to -1}$ $f1x2$, $f1x2 = x^3 - 1$

26. $\lim_{x \to 2} f1x2$, $f1x2 = 1 - x2$

27. $\lim_{x \to 4} f1x2$, $f1x2 = 31x$

28. $\lim_{x \to -3}$ $f1x2$, $f1x2 = 0\ 2x\ 0$

29. $\lim_{x \to p}$ $f1x2$, $f1x2 = \cos x$

$x \to p > 2\ 1$, $f1x2$, $f1x2 = \text{sen } x$ 30. lim

31. $\lim_{x \to 1}$ $f1x2$, $f1x2 = \ln x$

32. $\lim_{x \to 0} f1x2$, $f1x2 = ex$

33. $\lim_{x \to 2}$ $f1x2$, $f1x2 = x2$

34. $\lim_{x \to -1}$ 1 $f1x2$, $f1x2 = \frac{}{x}$

35. $\lim_{x \to 0} f1x2$, $f1x2 = b\ x - 1$ $3x$ 1 si x 6 0; si x Ú 0

36. $\lim_{x \to 0} f1x2$, $f1x2 = bx2$ $2x$ si x Ú 0; si x 6 0

37. $\lim_{x \to 1}$ $f1x2 = b\ 3x$ $f1x2$, $x + 1$ si x ... 1; si x 7 1

38. $\lim_{x \to 2}$ $f1x2$, $f1x2 = bx2$ $2x - 1$ si x ... 2; si x 7 2

39. $\lim_{x \to 0} f1x2 = b\ 1$ $f1x2$, $f1x2$ 1 si x 6 0; si x 7 0

40. $\lim_{x \to 0}$ $f1x2$, $f1x2 = c\ x$ 1 $3x$ si x 6 0; si x = 0; si x 7 0

41. $\lim_{x \to 0}$ $= b$ ex $1 - x$ si x 7 0; si x ... 0

42. $\lim_{x \to 0}$ $f1x2$, $f1x2 = b$ sen x^2 si x ... 0; si x 7 0

En los problemas 43 a 48, utilice una herramienta gráfica para investigar el límite indicado. Redondea las respuestas a dos decimales.

$x4 - x3 +$ $\frac{x3 - x2 + x - 1}{2x - 2}$ 43. $\lim_{x \to 1}$

44. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^4 + x^3 + 2x + 2}$

$+ 3x - 4$ $\frac{x3 - x2 + 3x - 3}{}$ 45. $\lim_{x \to 1}$ $x2$

46. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 6}$

47. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 3x^3 + x - 3}$

48. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 + x^3 + 2x + 2}$

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. Consulte la Figura 2 en la página 929.

2. $f102 = 0$

Machine Translated by Google

14.2 Técnicas algebraicas para encontrar límites

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Racionalizar un numerador (Sección A.10, págs. A85–A86)
- Tasa de cambio promedio (sección 2.3, págs. 115-117)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la pág. 937.

OBJETIVOS 1 Encontrar el límite de una suma, una diferencia y un producto (p. 933)
2 Encuentra el límite de un polinomio (p. 934)
3 Encuentra el límite de una potencia o una raíz (p. 935)
4 Encuentra el límite de un cociente (p. 936)
5 Encuentre el límite de una tasa de cambio promedio (p. 937)

En la sección 14.1 investigamos los límites usando tablas y gráficas, y afirmamos que a veces se puede usar el álgebra para encontrar el valor exacto de un límite. Enunciamos, sin pruebas, dos límites básicos y varias propiedades de los límites.

En palabras
El límite de una constante es el constante.

TEOREMA El límite de una constante

Si f1x2 = A, donde A es una constante, entonces para cualquier número real c,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} A = A \qquad (1)$$

En palabras El límite de x cuando x se aproxima a c es c.

TEOREMA El límite de la función de identidad

Si f1x2 = x, entonces para cualquier número real c,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c \qquad (2)$$

Dado que la gráfica de una función constante es una línea horizontal, se deduce que no importa qué tan cerca esté x de c, el valor correspondiente de f es igual a A. Es decir, $\lim_{x \to c} A = A$. Ver Figura 4.

Consulte la Figura 5. Para cualquier número c, a medida que x se acerca a c, el valor correspondiente de f es x, que es igual de cercano a c. Es decir, $\lim_{x \to c} x = c$.

Figura 4
límites $\lim_{x \to c} A = A$

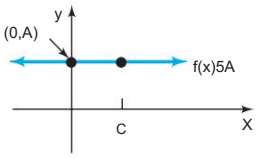
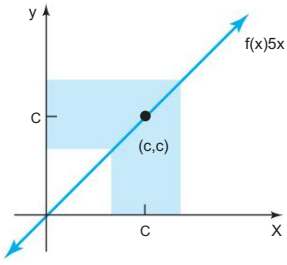


Figura 5
límites $\lim_{x \to c} x = c$



EJEMPLO 1 Usando los dos límites básicos

(a) $\lim_{x \to 3} 5 = 5$ (b) $\lim_{x \to 3} x = 3$ (c) $\lim_{x \to 0} 1 - 82 = -8$ (d) $\lim_{x \to -2^+} x = -2$

Ahora trabaja el problema 9

Machine Translated by Google

Las fórmulas (1) y (2), cuando se usan con las propiedades que siguen, nos permiten encontrar límites de funciones más complicadas.

1 Encuentre el límite de una suma, una diferencia y un producto En las siguientes propiedades, asumimos que f y g son dos funciones para las cuales existen tanto lim f1x2 como lim g1x2 .

xSc xSc

En palabras
El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites.

TEOREMA Límite de una suma

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

EJEMPLO 2 Encontrar el límite de una suma

Buscar: lim xS-3 1x + 42

Solución

El límite implica la suma de dos funciones: f1x2 = x y g1x2 = 4. A partir de los límites básicos (1) y (2),

límite xS-3 f1x2 = límite x = - 3 y lim xS-3 xS-3 g1x2 = límite 4 = 4xS-3

Luego, usando el teorema del límite de una suma, se deduce que

límite xS-3 1x + 42 = límite x + lím 4 = - 3 + 4 = 1 xS-3 xS-3

En palabras
El límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus límites.

TEOREMA Límite de una diferencia

$$\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$$

EJEMPLO 3 Encontrar el límite de una diferencia 16 - x2

Buscar: lim xS4

Solución

El límite implica la diferencia de dos funciones: f1x2 = 6 y g1x2 = x. Usando los dos límites básicos,

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} 6 = 6 \text{ y } \lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4} x = 4$$

Luego, usando el teorema del límite de una diferencia, se deduce que

$$\lim_{x \to 4} 16 - x^2 = \lim_{x \to 4} 6 - \lim_{x \to 4} x = 6 - 4 = 2$$

En palabras
El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.

TEOREMA Límite de un producto

$$\lim_{x \to c} [f(x) \# g(x)] = 3 \lim_{x \to c} f(x) 4 \, 3 \lim_{x \to c} g(x) 4$$

EJEMPLO 4 Encontrar el límite de un producto

Buscar: lim xS-5 1-4x2 _

Machine Translated by Google

Solución El límite involucra el producto de dos funciones: f1x2 = - 4 y g1x2 = x.

$$\lim_{x\to -5} f1x2 = \text{límite}_{x\to -5} 1 - 42 = - 4 \text{ y lím}_{x\to -5} g1x2 = \text{límite}_{x\to -5} x = - 5 \; xS-5$$

Ahora, usando el teorema del límite de un producto,

$$\lim_{x\to -5} 1 - 4x2 = 3 \text{ límites}_{x\to -5} 1 - 42 \; 4 \; 3 \text{ límites}_{x\to -5} x4 = 1 - 42 \; 1 - 52 = 20$$

EJEMPLO 5 Encontrar límites usando propiedades algebraicas

Encontrar: (a) $\lim_{x\to -2}$ 13x - 52 (b) límite$_{x\to 2}$ 15x22

Solución (a) límite$_{x\to -2}$ 13x - 52 = límite$_{x\to -2}$ 13x2 - límite$_{x\to -2}$ 5 = 3 límites$_{x\to -2}$ 34 3 límites$_{x\to -2}$ x4 - límite$_{x\to -2}$

= 3 # 1 - 22 - 5 = - 6 - 5 = - 11

lím$_{x\to 2}$ 54 3 lím$_{x\to 2}$ 15x22 = 3 lím$_{x\to 2}$ (b) x2 4 = 5 límxS2 1x # x2 = 53 lím$_{x\to 2}$ x4 3 límites$_{x\to 2}$ x4

= 5 # 2 # 2 = 20

Ahora resuelve el problema 1 5

Observe en la solución del inciso (b) que $\lim_{x\to 2}$ 15x22 = 5 # 22 .

TEOREMA Límite de un monomio

Si n Ú 1 es un número entero y a es una constante, entonces para cualquier número real c,

$$\lim_{x\to c} 1axn2 = acn \text{ lim}$$

Prueba $\lim_{x\to c}$ (axn) 5 [lim a][lim xn] 5 a[lim (x · x · x · · · · X)]

norte factores

5 a[lim x][lim x][lim x] . . . [lím x] Límite de un producto

cx→cx cx cx→ → → n

5 a · c · c · c · . . . factores · c 5 acn límxSc x · c

norte factores ■

EJEMPLO 6 Encontrar el límite de un monomio 1 - 4x32

Encontrar: $\lim_{x\to 2}$

Solución $\lim_{x\to 2}$ 1 - 4x32 = - 4 # 23 = - 4 # 8 = - 32

2 Encuentra el límite de un polinomio

Dado que un polinomio es una suma de monomios, usamos el límite de un monomio y el Límite de una Suma repetidamente para demostrar el siguiente teorema:

En palabras
Para encontrar el límite de un polinomio cuando x tiende a c, evalúa el polinomio en c.

TEOREMA Límite de un polinomio

Si P es una función polinómica, entonces

$$\lim_{x\to c} P1x2 = P1c2$$

para cualquier número c.

Machine Translated by Google

Prueba Si P es una función polinómica, es decir, si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

entonces

$$\lim_{x \to c} P(x) = \lim_{x \to c} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)$$

$$= \lim_{x \to c} a_n x^n + \lim_{x \to c} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \to c} a_1 x + \lim_{x \to c} a_0$$

$$= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

$$= P(c)$$

■

EJEMPLO 7 Encontrar el límite de un polinomio

Encontrar: $\lim_{x \to 2} (5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 4x - 24)$

Solución

$$\lim_{x \to 2} (5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 4x - 24) = 5 \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 2$$

$$= 5 \cdot 16 - 6 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 8 - 2$$

$$= 80 - 48 + 12 + 6 = 50$$

Ahora resuelve el problema 17

3 Encuentra el límite de una potencia o una raíz

TEOREMA Límite de una potencia o de una raíz

si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y si $n > 0$ es un número entero, entonces

$$\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$$

y

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$$

siempre que $f(x) > 0$ si n es par.

Mire cuidadosamente las propiedades de Límite de una potencia o de una raíz y compare cada lado.

EJEMPLO 8 Encontrar el límite de una potencia o una raíz

Encuentre: (a) $\lim_{x \to 1} (3x - 5)^4$ (b) $\lim_{x \to 0} \sqrt{5x^2 + 8}$ (c) $\lim_{x \to -1} \sqrt[4]{5x^3 - x + 32}$

Solución

(a) $\lim_{x \to 1} (3x - 5)^4 = 3 \lim_{x \to 1} (3x - 5)^4 = (1 - 2)^4 = 16$

(b) $\lim_{x \to 0} \sqrt{5x^2 + 8} = \sqrt{\lim_{x \to 0} (5x^2 + 8)} = \sqrt{28} = 2\sqrt{2}$

(c) $\lim_{x \to -1} \sqrt[4]{5x^3 - x + 32} = \sqrt[4]{\lim_{x \to -1} (5x^3 - x + 32)}$

$$= \sqrt[4]{\lim_{x \to -1} (5x^3 - x + 32)^4} = \sqrt[4]{(1 - 12)^4} = \sqrt[4]{1} = 1$$

Ahora resuelve el problema 27

Machine Translated by Google

4 Encuentra el límite de un cociente

En palabras
El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador sea no cero.

TEOREMA Límite de un cociente

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$$

siempre que $\lim_{x \to c} f(x)$ y $\lim_{x \to c} g(x)$, ambos existen y $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 9 Encontrar el límite de un cociente

Encontrar: $\lim_{x \to 1} \dfrac{5x^3 - x + 2}{3x + 4}$

Solución

El límite involucra el cociente de dos funciones polinómicas: $f(x) = 5x^3 - x + 2$ y $g(x) = 3x + 4$. Primero, encuentra el límite del denominador $g(x)$.

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (3x + 4) = 7$$

Como el límite del denominador no es cero, utilice el límite de un cociente.

$$\lim_{x \to 1} \frac{5x^3 - x + 2}{3x + 4} = \frac{\lim_{x \to 1} (5x^3 - x + 2)}{\lim_{x \to 1} (3x + 4)} = \frac{6}{7}$$

Ahora resuelve el problema 25

Cuando el límite del denominador es cero, el límite de un cociente no puede ser usado. En tales casos, se necesitan otras estrategias. Veamos dos ejemplos.

EJEMPLO 10 Encontrar el límite de un cociente

Encontrar: (a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$ (b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{13}}{x - 3}$

Solución

(a) El límite del denominador es igual a cero, por lo que no se puede utilizar el límite de un cociente. En cambio, observe que la expresión se puede factorizar como

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)}$$

Al calcular un límite cuando x tiende a 3, nos interesan los valores de la función cuando x está cerca de 3 pero no es igual a 3. Como $x \cdot 3$, podemos cancelar $(x - 3)$ >s. Entonces, se puede utilizar el Límite de un Cociente.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{\lim_{x \to 3} (x + 2)}{\lim_{x \to 3} (x + 3)} = \frac{5}{6}$$

(b) Nuevamente, el límite del denominador es cero. La estrategia aquí es racionalizar la numerador.

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{13}}{x - 3} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{13}}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{13}}{\sqrt{x} + \sqrt{13}} = \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{13})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{13}}$$

c
$x \cdot 3$

Ahora bien, como el límite del denominador no es igual a cero, podemos usar el límite de un cociente.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{13}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{13}} = \frac{\lim_{x \to 3} 1}{\lim_{x \to 3} (\sqrt{x} + \sqrt{13})} = \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{13}} = \frac{1}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 11 Encontrar límites usando propiedades algebraicas

Encontrar: $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^4 - 2x^3 + x - 2}$

Solución El límite del denominador es cero, por lo que no se puede utilizar el límite de un cociente. Factoriza la expresión y simplifica.

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^4 - 2x^3 + x - 2} = \frac{x^2(x - 2) + 4(x - 2)}{x^3(x - 2) + 1(x - 2)} = \frac{(x^2 + 4)(x - 2)}{(x^3 + 1)(x - 2)}$$

Factorizar por agrupación

Entonces

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^4 - 2x^3 + x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 4)(x - 2)}{(x^3 + 1)(x - 2)} = \frac{8}{9}$$

Compare la solución exacta anterior con la solución aproximada encontrada en Ejemplo 6 de la Sección 14.1.

Ahora resuelve el problema 37

5 Encuentre el límite de una tasa de cambio promedio

EJEMPLO 12 Encontrar el límite de una tasa de cambio promedio

Encuentre el límite cuando x se acerca a 2 de la tasa de cambio promedio de la función

$$f(x) = x^2 + 3x$$

de 2 a x.

Solución La tasa de cambio promedio de f de 2 a x es

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{(x^2 + 3x - 10)}{x - 2} = \frac{(x + 5)(x - 2)}{x - 2}$$

El límite de la tasa de cambio promedio es

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 5)(x - 2)}{x - 2} = 7$$

Ahora resuelve el problema 43

RESUMEN

Para encontrar valores exactos para $\lim_{x \to c} f(x)$, intente usar límites básicos y propiedades algebraicas de límites.

- Si f es una función polinómica, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.
- Si f es un polinomio elevado a una potencia o es la raíz de un polinomio, use el Límite de a Potencia o raíz con límite de polinomio.
- Si f es un cociente y el límite del denominador no es cero, utilice el límite de un cociente.
- Si f es un cociente y el límite del denominador es cero, pruebe otras técnicas, como factorización.

14.2 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Encuentre la tasa de cambio promedio de $f(x) = x^2$ de 2 a x. (págs. 115-117)

2. Racionaliza el numerador del cociente: $\dfrac{\sqrt{2x - 25}}{x - 5}$ (págs. A85-A86)

Machine Translated by Google

Conceptos y vocabulario

3. El límite del producto de dos funciones es igual a sus límites. _____ de

4. $\lim_{x \to c}$ Una = ____.

5. $\lim_{x \to c}$ x = ____.

6. Verdadero o Falso El límite de una función polinómica como x se acerca a 5 es igual al valor del polinomio en 5.

7. Verdadero o Falso El límite de una función racional en 5 es igual al valor de la función racional en 5.

8. Verdadero o Falso El límite de un cociente es igual al cociente de Los limites.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 42, encuentre cada límite algebraicamente.

9. $\lim_{x \to 1} 5$

10. $\lim_{x \to 1} 1 - 32$

11. $\lim_{x \to -3} x$

12. $\lim_{x \to 4} x$

13. $\lim_{x \to 4} 1 - 3x2$

14. $\lim_{x \to -2} 15x2$

15. $\lim_{x \to 2} 13x + 22$

16. $\lim_{x \to 3} 12\text{-}5x2$ _

17. $\lim_{x \to -1} 13x2 - 5x2$

18. $\lim_{x \to 2} 18x2 - 42$

19. $\lim_{x \to -1} 18x5 - 7x3 + 8x2 + x - 42$

20. $\lim_{x \to 1} 15x4 - 3x2 + 6x - 92$

21. límite $_{x \to 2} 13x - 42^{2}$

22. $\lim_{x \to 1} 1x2 + 12^{3}$

23. $\lim_{x \to 0} \frac{}{21\text{-}2x}$ _

24. $\lim_{x \to 1} \frac{}{25x + 4}$

25. $\lim_{x \to 0} \frac{x2 - 4}{x2 + 4}$

26. $\lim_{x \to 2} \frac{3x + 4}{x2 + x}$

27. $\lim_{x \to 2} 13x - 22\ 5>2$

28. $\lim_{x \to -1} 12x + 12\ 5>3$

29. $\lim_{x \to -1} \frac{x2 + x}{x2 - 1}$

30. $\lim_{x \to 2} \frac{x2 - 4}{x2 - 2x}$

31. $\lim_{x \to -3} \frac{x2 + x - 6}{x2 + 2x - 3}$

32. $\lim_{x \to -3} \frac{x2 - x - 12}{x2 - 9}$

33. $\lim_{x \to 1} \frac{x4 - 1}{x - 1}$

34. $\lim_{x \to 1} \frac{x3 - 1}{x - 1}$

35. $\lim_{x \to 2} \frac{x3 - 8}{x2 - 4}$

36. $\lim_{x \to -1} \frac{1x + 2}{12x2 - 1}$

37. $\lim_{x \to 2} \frac{x3 - 2x2 + 4x - 8}{x2 + x - 6}$

38. $\lim_{x \to 1} \frac{x3 - x2 + 3x - 3}{x2 + 3x - 4}$

39. $\lim_{x \to 3} \frac{x3 - 3x2 + 4x - 12}{x4 - 3x3 + x - 3}$

40. $\lim_{x \to -1} \frac{x3 + 2x2 + x}{x4 + x3 + 2x + 2}$

41. $\lim_{x \to 5} \frac{2x - 25}{x - 5}$

42. $\lim_{x \to 2} \frac{2x - 22}{x - 2}$

En los problemas 43 a 52, encuentre el límite cuando x tiende a c de la tasa de cambio promedio de cada función de c a x.

43. c = 2; f1x2 = 5x - 3

46. c =

44. c = - 2; f1x2 = 4 - 3x

47. c = -

45. c = 3; f1x2 = x3

3; f1x2 = x2

49. c = 0;

1; f1x2 = 2x2 - 3x

50. c = 0; f1x2 =

48. c = - 1; f1x2 = x2 + 2x

f1x2 = 4x3 - 5x + 8

3x3 - 2x2 + 4

51. c = 1; f1x2 = x2 $\frac{1}{}$

52. c = 1; f1x2 = $\frac{1}{x}$

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 53 a 56, utilice las propiedades de los límites y los hechos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{pecado } x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\text{porque } x - 1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \text{pecado } x = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \text{porque } x = 1$$

donde x está en radianes, para encontrar cada límite.

53. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{pecado}12x2}{x}$

54. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{bronceado } x}{x}$

[Sugerencia: utilice una fórmula de doble ángulo.]

55. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen2 } x + \text{sen } x1\cos x - 12}{x2}$

56. $\lim_{x \to 0} \frac{3 \text{ sen } x + \cos x - 1}{4x}$

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. $\frac{1x - 22\ 1x + 22}{x - 2}$

2. $\frac{1}{1x + 15}$

Machine Translated by Google

14.3 Límites unilaterales; Continuidad

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Biblioteca de funciones (Sección 2.4, págs. 122–126)
- Funciones definidas por partes (Sección 2.4, págs. 127–129)
- Funciones polinomiales (Sección 4.1, págs. 211–222)
- Propiedades de las funciones racionales (sección 4.3, págs. 234–241)
- La gráfica de una función racional (sección 4.4, págs. 245 y 255)
- Propiedades de la función exponencial (Sección 5.3, págs. 320 y 322)
- Propiedades de la función logarítmica (Sección 5.4, p. 334)
- Propiedades de las Funciones Trigonométricas (Sección 6.4, págs. 444 y 446, y Sección 6.5, págs. 458–462)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 943.

OBJETIVOS 1 Encontrar los límites unilaterales de una función (p. 939)
2 Determinar si una función es continua en un número (p. 941)

1 Encuentre los límites unilaterales de una función

Anteriormente describimos $\lim_{x \to c} f(x) = N$ diciendo que a medida que x se acerca al número c pero sigue siendo desigual a c, los valores correspondientes de f se acercan al número N.

Ya sea que usemos un argumento numérico o la gráfica de la función f, la variable x puede acercarse a c sólo de dos maneras: acercándose a c por la izquierda, usando números menores que c, o acercándose a c por la derecha, usando números. mayor que c.

Si nos aproximamos a c desde un solo lado, tenemos un límite unilateral. la notación

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

se llama límite izquierdo. Se lee “el límite de f(x) cuando x se aproxima a c por la izquierda es igual a L” y puede describirse mediante la siguiente afirmación:

En palabras
x S c- significa que x se aproxima a c por la izquierda, por lo que x 6 c.

A medida que x se acerca a c, pero permanece menor que c, el valor correspondiente de f se acerca a L.

La notación x S c- se utiliza para recordarnos que x es menor que c.

la notación

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = R$$

se llama límite derecho. Se lee “el límite de f(x) cuando x se aproxima a c por la derecha es igual a R” y puede describirse mediante la siguiente afirmación:

En palabras
x S c+ significa que x se aproxima a c por la derecha, por lo que x 7 c.

A medida que x se acerca a c, pero sigue siendo mayor que c, el valor correspondiente de f se acerca a R.

La notación x S c+ se utiliza para recordarnos que x es mayor que c.

Machine Translated by Google

La Figura 6 ilustra los límites izquierdo y derecho.

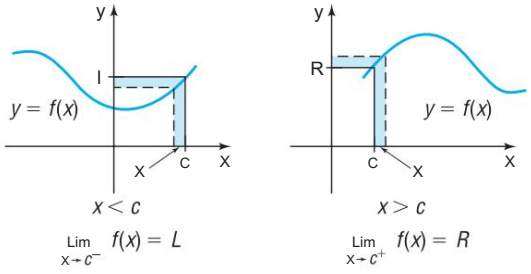


Figura 6 (a) (b)

Los límites izquierdo y derecho se pueden utilizar para determinar si existe lim. Ver Figura f1x2
xSc
7.

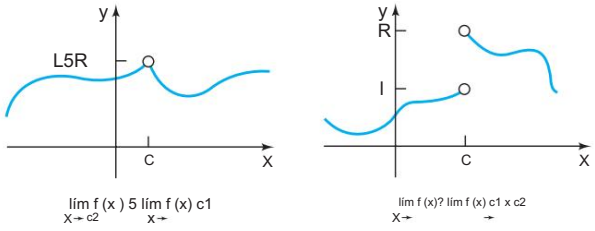


Figura 7 (a) (b)

Como ilustra la Figura 7(a), lim f1x2 existe y es igual al valor común de la
xSc
límite izquierdo y límite derecho 1L = R2. En la Figura 7(b), vemos que lim no existe porque L f1x2
xSc
· R. Esto lleva al siguiente resultado.

TEOREMA

El límite L de una función y = f1x2 cuando x se aproxima a un número c existe si y sólo si ambos límites unilaterales existen en c y son iguales. Eso es,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

En conjunto, los límites izquierdo y derecho de una función se denominan unilaterales. límites de la función.

EJEMPLO 1 Encontrar límites unilaterales de una función

para la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

encontrar: (a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (b) límite $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (c) límite $\lim_{x \to 2} f(x)$

Solución

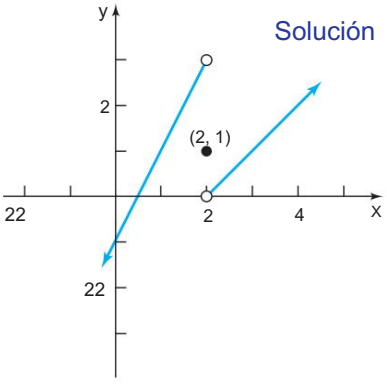


Figura 8

La figura 8 muestra la gráfica de f.

(a) Para encontrar $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, observe los valores de f cuando x está cerca de 2 pero es menor que 2.

Como f1x2 = 2x - 1 para tales números, concluimos que 12x - 12 = 3

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \text{límite}_{x \to 2^-}$$

(b) Para encontrar $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, observe los valores de f cuando x está cerca de 2 pero es mayor que 2.

Dado que f1x2 = x - 2 para tales números, concluimos que f1x2 =

$$\text{límite}_{x \to 2^+} \lim_{x \to 2^+} 1x - 22 = 0$$

(c) Como los límites izquierdo y derecho son desiguales, $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

Ahora resuelve los problemas 2 1 y 3 5

Machine Translated by Google

2 Determinar si una función es continua en un número

Hemos observado que f1c2, el valor de la función f en c, no juega ningún papel en la determinación de los límites unilaterales de f en c. ¿Cuál es el papel del valor de una función en c y sus límites unilaterales en c? Veamos algunas de las posibilidades.
Ver Figura 9.

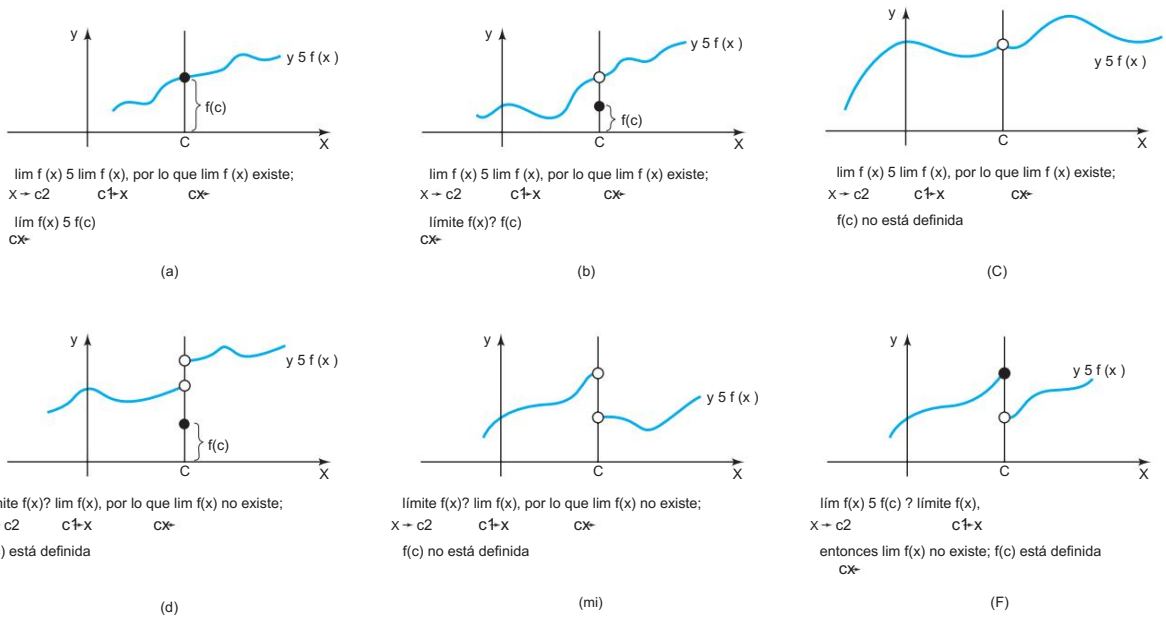


Figura 9

Mucho antes en este texto dijimos que una función f es continua si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. La Figura 9 revela que la única gráfica que tiene esta característica es la gráfica de la Figura 9(a), para la cual los límites unilaterales en c existen y son iguales al valor de f en c. Esto nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN Una función f es continua en c si y sólo si

- f se define en c; es decir, c está en el dominio de f de modo que f1c2 es igual a un número.
- $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$
- $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

En otras palabras, una función f es continua en c si y sólo si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Si f no es continua en c, decimos que f es discontinua en c. Cada función cuya gráfica aparece en las Figuras 9(b) a 9(f) es discontinua en c.

Ahora resuelve el problema 2 7

Mire nuevamente el teorema del límite de un polinomio en la página 934. Basado en el teorema, concluimos que una función polinómica es continua en todo número.

Mire el teorema del límite de un cociente en la página 936 y suponga que f y g son funciones polinómicas. Concluimos que una función racional es continua en todo número, excepto en cualquier número en el que no esté definida. En los números donde no se define una función racional, aparece un agujero en la gráfica o aparece una asíntota.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Determinar los números en los que una función racional es continua

(a) Determine los números en los cuales la función racional

$$R(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 6x + 8}$$

es continuo.

(b) Utilice límites para analizar la gráfica de R cerca de 2 y cerca de 4.

(c) Gráfica R.

Solución

(a) Dado que $R(x) = \frac{x - 2}{(x - 2)(x - 4)}$, el dominio de R es $\{x \mid x \neq 2, x \neq 4\}$.

R es una función racional y está definida en todos los números excepto 2 y 4. Concluimos que R es continua en todos los números excepto 2 y 4, ya que 2 y 4 no están en el dominio de R.

(b) Para analizar el comportamiento de la gráfica de R cerca de 2 y cerca de 4, observe $\lim_{x \to 2} R(x)$ y $\lim_{x \to 4} R(x)$.

- Para limpiar $\lim_{x \to 2} R(x)$, tenemos

$$\lim_{x \to 2} R(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x - 4)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 4} = -\frac{1}{2}$$

A medida que x se acerca a 2, la gráfica de R se acerca a $-\frac{1}{2}$. Como R no es definido en 2, la gráfica tendrá un agujero en $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$.

- Para limpiar $\lim_{x \to 4} R(x)$, tenemos

$$\lim_{x \to 4} R(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x - 2}{(x - 2)(x - 4)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{x - 4}$$

Si $x \neq 4$ y x se acerca a 4, el valor de $\frac{1}{x - 4}$ es negativo y se convierte en ilimitado; es decir, $\lim_{x \to 4^-} R(x) = -\infty$.

Si $x > 4$ y x se acerca a 4, el valor de $\frac{1}{x - 4}$ es positivo y se convierte en ilimitado; es decir, $\lim_{x \to 4^+} R(x) = \infty$.

Dado que $0 < R(x) < \infty$ para x cercano a 4, la gráfica de R tiene una asíntota vertical en $x = 4$.

(c) Es más fácil graficar R observando que si $x \neq 2$, entonces

$$R(x) = \frac{x - 2}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{1}{x - 4}$$

Por lo tanto, la gráfica de R es la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ desplazado hacia la derecha 4 unidades con un agujero en $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$. Ver Figura 10.

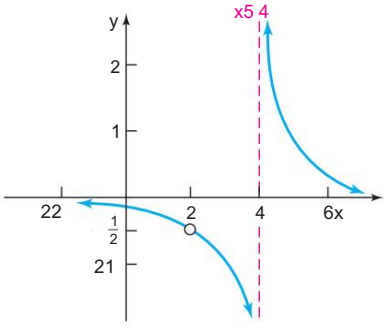


Figura 10 $R(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 6x + 8}$

Ahora problema de trabajo 73

Las funciones exponencial, logarítmica, seno y coseno son continuas en todos los números de su dominio. Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son continuas excepto en números para los cuales no están definidas, donde ocurren asíntotas. La función de raíz cuadrada y la función de valor absoluto son continuas en cada número en su dominio. La función $f(x) = \text{int}(x)$ es continua excepto $x =$ un número entero, donde se produce un salto en la gráfica.

Las funciones definidas por partes requieren una atención especial.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Determinar dónde es continua una función definida por partes

Determina los números en los que la siguiente función es continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 5 - x & \text{si } 2 < x < 5 \end{cases}$$

Solución

Las "piezas" de f, es decir, $y = x^2$, $y = x + 1$, y $y = 5 - x$, son continuos para cada número ya que son polinomios. En otras palabras, cuando graficamos las piezas, no levantaremos el lápiz. Sin embargo, cuando graficamos la función f, debemos tener cuidado, porque las piezas cambian en x = 0 y en x = 2. Entonces, los números que debemos investigar para f son x = 0 y x = 2.

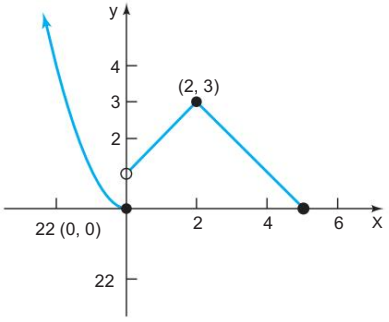


Figura 11

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 5 - x & \text{si } 2 < x < 5 \end{cases}$$

• En x = 0:

$$f(0) = 0^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 \qquad f(x) = x^2 \text{ si } x < 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1 \qquad f(x) = x + 1 \text{ si } 0 \le x \le 2$$

Desde $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$, f no es continua en x = 0.

• En x = 2:

$$f(2) = 5 - 2 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5 - x) = 3$$

Entonces f es continua en x = 2.

La gráfica de f, que se muestra en la Figura 11, demuestra las conclusiones extraídas anteriormente.

Ahora resuelve los problemas 5 3 y 6 1

RESUMEN

Biblioteca de funciones: propiedades de continuidad

Función	Dominio	Propiedad
Función polinómica	todos los números reales	Continuo en cada número del dominio.
Función racional $R(x) = \frac{P(x)}{T(x)}$, P, Q son polinomios	$\{x \mid Q(x) \neq 0\}$	Continuo en cada número del dominio. Agujero o asíntota vertical donde R no está definido
Funcion exponencial	todos los números reales	Continuo en cada número del dominio.
función logarítmica	Números reales positivos	Continuo en cada número del dominio.
Funciones seno y coseno	todos los números reales	Continuo en cada número del dominio.
Funciones tangentes y secantes	Todos los números reales, excepto múltiplos enteros impares de $\frac{\pi}{2}$	Continuo en cada número del dominio. Asíntotas verticales en múltiplos enteros impares de $\frac{\pi}{2}$
Funciones cotangentes y cosecantes	Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros de π.	Continuo en cada número del dominio. Asíntotas verticales en múltiplos enteros de π

14.3 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Para la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 5 - x & \text{si } 2 < x < 5 \end{cases}$, Encuentre f(0) y f(2). (págs. 127-129)

2. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $f(x) = \ln x$? (pág. 334)

3. Verdadero o Falso El dominio de cualquier función exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, son todos los números reales. (págs. 320, 322)

Machine Translated by Google

4. Nombra las funciones trigonométricas que tienen asíntotas. (págs. 444, 446, 458–462)

5. Verdadero o Falso Algunas funciones racionales tienen agujeros en sus grafico. (págs. 245-255)

6. Verdadero o Falso Las funciones $R(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ y $p(x) = x - 3$ son iguales. (págs. 234-237)

Conceptos y vocabulario

7. Si nos aproximamos a c desde un solo lado, entonces tenemos un límite(n). _____

8. La notación _____ se utiliza para describir el hecho de que a medida que x se acerca a c pero sigue siendo mayor que c, el valor de f(x) se acerca a R.

9. Si $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, entonces f es _____ en _____.

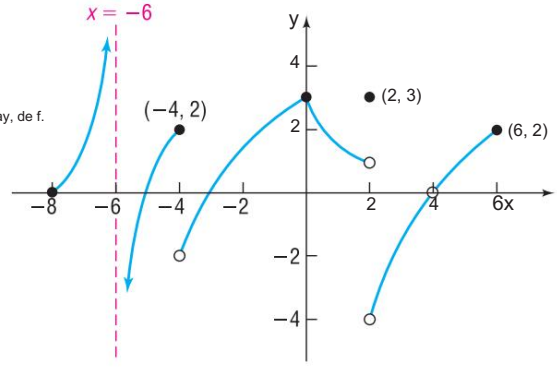
10. Verdadero o Falso Para cualquier función f, $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$.

11. Verdadero o Falso Si f es continua en c, $\lim_{x \to c^+}$ entonces $f(x) = f(c)$.

12. Verdadero o Falso Toda función polinómica es continua en cada número real.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 32, utilice la gráfica adjunta de y = f(x).



13. ¿ Cuál es el rango de f ?

14. ¿ Cuál es el dominio de f ?

15. Encuentre la (s) intersección(es) y, si las hay, de f.

16. Encuentre la (s) intersección(es) con el eje x, si las hay, de f.

17. Encuentra f(2) y f(6).

18. Encuentre f(−8) y f(−4).

19. Encuentra a $\lim_{x \to -6^+} f(x)$.

20. Encuentra a $\lim_{x \to -6^-} f(x)$

21. Encuentra a $\lim_{x \to -4^-} f(x)$.

22. Encuentra a $\lim_{x \to -4^+} f(x)$.

23. Encuentra a $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

24. Encuentra a $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

25. ¿$\lim_{x \to 0}$ ¿Existe f(x) ? Si es así, ¿qué es?

26. ¿$\lim_{x \to 4}$ ¿Existe f(x) ? Si es así, ¿qué es?

27. ¿ Es f continua en − 4?

28. ¿ Es f continua en − 6?

29. ¿Es f continua en 2?

30. ¿Es f continua en 0?

31. ¿Es f continua en 5?

32. ¿Es f continua en 4?

En los problemas 33 a 44, encuentre el límite unilateral.

33. $\lim_{x \to 2^-} 14 - 2x^2$

34. $\lim_{x \to 1^+} 12x + 32$

35. $\lim_{x \to 1^-} 12x^3 + 5x^2$

36. $\lim_{x \to -2^+} 13x^2 - 8$

37. $\lim_{x \to p^-} 13 \cos x^2$

38. $\lim_{x \to p/2^+}$ pecado

39. $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - x}{x - 1}$

40. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

41. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - x^2}{x^4 + x^2}$

42. $\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$

43. $\lim_{x \to -4^-} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 4x}$

44. $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x}$

En los problemas 45 a 60, determine si f es continua en c.

45. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ $c = -3$

46. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ $c = 2$

47. $f(x) = \frac{}{x^2 + 4}$ $c = 2$

48. $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 6}$ $c = 3$

49 $f(x) = x + \frac{x - 6}{6}$ $c = -6$

50. $f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}$ $c = 3$

51. $f(x) = x^2 + \frac{x^2 - 6x}{6x}$ $c = 0$

52. $f(x) = x^2 - \frac{x^3 + 3x}{3x}$ $c = 0$

53. $f(x) = cx^3 + \frac{}{x^2 - 3x}$ $\begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 3x & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $c = 0$

54. $f(x) = c\,x^2 - 6x^2 + \frac{}{x^2 + 6x}$ $\begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 0 \\ & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $c = 0$

55. $f(x) = c\,\frac{x^2 - 6x}{x^2 + 6x}$ $\begin{cases} -1 & \text{si } x \neq 0 \\ & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $c = 0$

56. $f(x) = cx^3 + 3x^1 - \frac{}{x^2 - 3x}$ $\begin{cases} & \text{si } x \neq 0 \\ & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $c = 0$

Machine Translated by Google

57. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \quad c = 2 \\ \frac{x-4}{\min(x^2, 2x)} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

58. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \geq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \quad c = 1 \\ \frac{3}{\min(x+1, -1)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

59. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^3 + 3x^2}{x^2} & \text{si } x = 0 \quad c = 0 \\ \text{d porque x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

60. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^3 + 2x^2}{x^2} & \text{si } x = 0 \quad c = 0 \\ \text{d 2ex} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En los problemas 61 a 72, encuentre los números en los que f es continua. ¿En qué números f es discontinua?

61. $f(x) = 2x + 3$

62. $f(x) = 4 - 3x$

63. $f(x) = -3x^3 + 7$

64. $f(x) = 3x^2 + x$

65. $f(x) = -2 \text{ porque } x$

66. $f(x) = 4 \text{ sen } x$

67. $f(x) = 4 \csc x$

68. $f(x) = 2 \tan x$

69. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

70. $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 - 4}$

71. $f(x) = \frac{\text{en } x}{x - 3}$

72. $f(x) = \frac{x - 3}{\text{en } x}$

En los problemas 73 a 76, analice si R es continua en cada número c. Utilice límites para analizar la gráfica de R en c. Gráfico R.

73. $R(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$, $c = -1$ y $c = 1$

74. $R(x) = \frac{3x + 6}{x^2 - 4}$, $c = -2$ y $c = 2$

75. $R(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 16}$, $c = -4$ y $c = 4$

76. $R(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$, $c = -1$ y $c = 1$

En los problemas 77 a 82, determine dónde cada función racional R no está definida. Determine si aparece una asíntota o un agujero en la gráfica de R en tales números.

77. $R(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^4 + x^3 + 2x + 2}$

78. $R(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - x^3 + 2x - 2}$

79. $R(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 + 3x - 4}$

80. $R(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 6}$

81. $R(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 3x^3 + x - 3}$

82. $R(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 + x^3 + 2x + 2}$

Para los problemas 83 a 88, utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente las funciones R dadas en los problemas 77 a 82. ¿Las gráficas respaldan las soluciones encontradas para los problemas 77 a 82?

Discusión y escritura

89. Nombra tres funciones que sean continuas en todo real. número.

90. Crea una función que no sea continua en el número 5.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. f102 = 0; f122 = 3 4.
Secante, cosecante, tangente, cotangente

2. Dominio: 5x· x 7 06; rango: 5y· - q 6 y 6 q 6

3. Verdadero

5. Verdadero

6. Falso

14.4 El problema de la tangente; La derivada

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Forma punto-pendiente de una línea (Sección 1.3, págs. 60 y 61)
- Tasa de cambio promedio (sección 2.3, págs. 115-117)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 951.

OBJETIVOS 1 Encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función (p. 946)
2 Encuentra la derivada de una función (p. 947)
3 Encuentre tasas de cambio instantáneas (p. 948)
4 Encuentra la velocidad instantánea de un objeto (p. 949)

Machine Translated by Google

El problema de la tangente

Una cuestión que motivó el desarrollo del cálculo fue un problema de geometría, el problema de la tangente. Este problema pregunta: "¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función y = f1x2 en un punto P de su gráfica?" Ver Figura 12.

Primero debemos definir qué se entiende por recta tangente . En geometría plana, la línea tangente a un círculo en un punto se define como la línea que cruza el círculo exactamente en ese punto. Mire la Figura 13. Observe que la línea tangente apenas toca la gráfica del círculo.

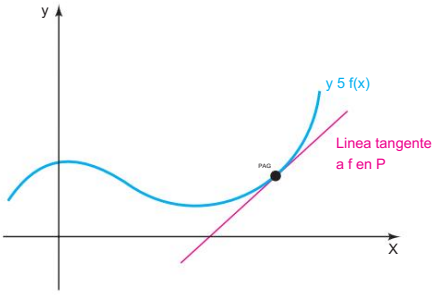


Figura 12

Figura 13

Esta definición, sin embargo, no funciona en general. Mire la Figura 14. Las líneas L1 y L2 intersectan la gráfica en un solo punto P, pero ninguna de ellas toca la gráfica en P. Además, la línea tangente LT que se muestra en la Figura 15 toca la gráfica de f en P pero también interseca la gráfica. en otra parte. Entonces, ¿cómo deberíamos definir la recta tangente a la gráfica de f en un punto P?

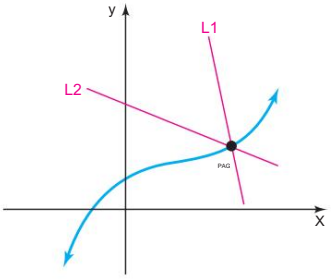


Figura 14

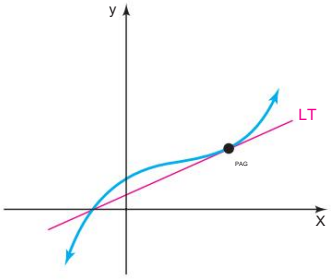


Figura 15

1 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función

¿Necesita revisar?

Las rectas secantes y sus pendientes se analizan en la sección 2.3, págs. 116 y 117.

La recta tangente LT a la gráfica de una función y = f1x2 en un punto P necesariamente contiene el punto P. Para encontrar una ecuación para LT usando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, necesitamos encontrar la pendiente mtan de la recta tangente.

Supongamos que las coordenadas del punto P son 1c, f1c2 2. Ubique otro punto Q = 1x, f1x2 2 en la gráfica de f. La recta que contiene P y Q es una recta secante.
La pendiente ms de la recta secante es

$$\text{mseg} = \frac{f1x2 - f1c2}{x - c}$$

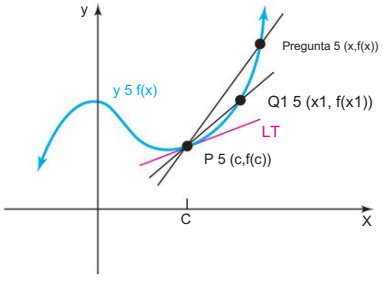


Figura 16 Rectas secantes

Ahora mire la Figura 16.

A medida que avanzamos a lo largo de la gráfica de f desde Q hacia P, obtenemos una sucesión de rectas secantes. Cuanto más nos acercamos a P, más cerca está la recta secante de la recta tangente LT. La posición límite de estas rectas secantes es la recta tangente LT. Por tanto, el valor límite de las pendientes de estas rectas secantes es igual a la pendiente de la recta tangente. Además, a medida que nos movemos de Q hacia P, los valores de x se acercan a c. Por lo tanto,

$$\text{mtan} = \lim_{x \to c} \text{mseg} = \lim_{x \to c} \frac{f1x2 - f1c2}{x - c}$$

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Línea tangente

La recta tangente a la gráfica de una función y = f1x2 en un punto P es la recta que contiene el punto P = 1c,f 1c2 2 y tiene la pendiente

$$\text{mtan} = \lim_{x \to c} \frac{f1x2 - f1c2}{x - c} \qquad (1)$$

siempre que exista el límite.

TEOREMA Ecuación de una recta tangente

Si mtan existe, una ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función y = f1x2 en el punto P = 1c,f 1c2 2 es

$$y - f1c2 = \text{mtan}\,1x - c2 \qquad (2)$$

EJEMPLO 1 Encontrar una ecuación de la recta tangente

x2 Encuentra una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f1x2 $\frac{}{4}$ en el punto a1, 1 4b.
= Grafica f y la recta tangente.

Solución

La recta tangente contiene el punto a1, 1 4 b. La pendiente de la recta tangente a a1, 1 4 b es
gráfica de f1x2 = $\frac{x2}{4}$

$$\text{mtan} = \lim_{x \to 1} \frac{f1x2 - f112}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x2}{4} - \frac{1}{4}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x2 - 1}{41x - 12}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1x - 12\,1x + 12\,4}{1x - 12} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{4} = \frac{1}{2}$$

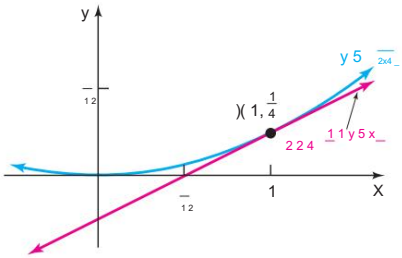


Figura 17

Una ecuación de la recta tangente es

$$y \cdot f(c) \cdot \text{mtan}(x \cdot c)$$

$$y = x - 2$$

La figura 17 muestra la gráfica de y = $\frac{4x2}{4}$ y la recta tangente en a1, 1 4 b.

Ahora problema de trabajo 1 1

2 Encuentra la derivada de una función

El límite en la fórmula (1) tiene una generalización importante: se llama derivada de f en c.

DEFINICIÓN Derivada de una función en un número

Si y = f1x2 es una función y c está en el dominio de f, entonces la derivada de f en c, denotada por f'1c2 y leída "f prima de c", es el número

$$f'1c2 = \lim_{x \to c} \frac{f1x2 - f1c2}{x - c} \qquad (3)$$

siempre que exista este límite.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Encontrar la derivada de una función en un número

Encuentra la derivada de f1x2 = 2x2 - 5x en 2. Es decir, encuentra f'122.

Solución

Como f122 = 2 # 22 - 5 # 2 = - 2, tenemos

$$\frac{f1x2 - f122}{x - 2} = \frac{12x2 - 5x2 - 1 - 22}{x - 2} = \frac{2x2 - 5x + 2}{x - 2} = \frac{12x - 12\ 1x - 22}{x - 2}$$

La derivada de f en 2 es

$$f'122 = \lim_{xS2} \frac{f1x2 - f122}{x - 2} = \lim_{xS2} \frac{12x - 12\ 1x - 22}{x - 2} = 3$$

Ahora resuelve el problema 2 1

El ejemplo 2 proporciona una forma de encontrar analíticamente la derivada en 2. Las utilidades gráficas tienen procedimientos integrados para aproximar la derivada de una función a un número. Consulte el manual del usuario para conocer las pulsaciones de teclas adecuadas.

EJEMPLO 3 Encontrar la derivada de una función en un número usando una utilidad gráfica

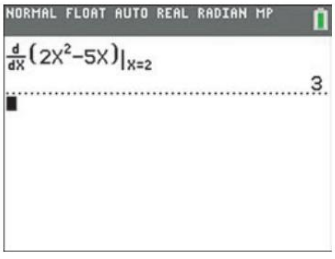


Figura 18

Utilice una herramienta gráfica para encontrar la derivada de f1x2 = 2x2 - 5x en 2. Es decir, encuentre f'122.

Solución La Figura 18 muestra la solución usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C.* Como se muestra, f'122 = 3.

Ahora resuelve el problema 3 3

EJEMPLO 4 Encontrar la derivada de una función en un número

Encuentre la derivada de f1x2 = x2 en c. Es decir, encuentre f'(c).

Solución

Dado que f1c2 = c2, tenemos

$$\frac{f1x2 - f1c2}{x - c} = \frac{x2 - c2}{x - c} = \frac{1x + c2\ 1x - c2}{x - c}$$

La derivada de f en c es

$$f'1c2 = \lim_{xSc} \frac{f1x2 - f1c2}{x - c} = \lim_{xSc} \frac{1x + c2\ 1x - c2}{x - c} = 2c$$

Como ilustra el ejemplo 4, la derivada de f1x2 = x2 existe y es igual a 2c para cualquier número c. En otras palabras, la derivada es en sí misma una función y, usando x como variable independiente, podemos escribir f'1x2 = 2x. La función f' se llama función derivada de f o derivada de f. También decimos que f es derivable.
La instrucción "derivar f" significa "encontrar la derivada de f".

3 Encuentre tasas de cambio instantáneas

La tasa de cambio promedio de una función f de c a x es

$$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f1x2 - f1c2}{x - c} \quad x \cdot c$$

*La TI-84 Plus C utiliza una notación alternativa para la derivada de f en c, concretamente $\frac{d}{dx} f\ 1x2\ 0\ x=c.$

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Tasa de cambio instantánea

La tasa de cambio instantánea de f en c es

$$f'1c2 = \lim_{xSc} \frac{f1x2 - f1c2}{x - c} \qquad (4)$$

siempre que exista el límite.

La tasa de cambio instantánea de f en c es la derivada de f en c.

EJEMPLO 5 Encontrar la tasa de cambio instantánea

El volumen V de un cono circular recto de altura h = 6 pies y radio r pies es $V = V1r2 = h = 2pr\ pr\ 3\ \frac{1}{—}\ 2\qquad 2$. Si r está cambiando, encuentre la tasa de cambio instantánea del volumen V con respecto al radio r en r = 3.

Solución La tasa de cambio instantánea de V en r = 3 es la derivada V′(3).

$$V'132 = \lim_{RS3} \frac{V1r2 - V132}{r - 3} = \lim_{RS3} \frac{2\ 2pr \quad - 18p}{r - 3}$$

$$= \lim_{RS3} \frac{2p1r^{\ 2} - 92}{r - 3} = \lim_{RS3} \frac{2p1r - 32\ 1r + 32}{r - 3}$$

$$= \lim_{RS3} 32p1r + 32\ 4 = 12p$$

En el instante r = 3 pies, el volumen del cono cambia con respecto a r a una velocidad de 12p ≈ 37,699 pies cúbicos por cada cambio de 1 pie en el radio.

Ahora resuelve el problema 4 3

4 Encuentre la velocidad instantánea de un objeto

Si s = f1t2 es la posición de un objeto en el tiempo t, entonces la velocidad promedio del objeto de t0 a t1 es

$$\frac{\text{Cambio de posición}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f1t12 - f1t02}{t1 - t0} \qquad t0 \cdot t1 \qquad (5)$$

DEFINICIÓN Velocidad instantánea

Si s = f1t2 es la función de posición de un objeto en el tiempo t, los Δs instantáneos

La velocidad v del objeto en el tiempo t0 es el límite de la velocidad promedio como $\Delta t.\frac{}{\Delta t}$ se acerca a 0. Es decir,

$$v1t02 = f'1t02 = \lim_{tst0} \frac{f1t2 - f1t02}{t - t0} \qquad (6)$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 Encontrar la velocidad instantánea de un objeto

En física se muestra que la altura s de una pelota lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo (pies/seg) desde un tejado a 96 pies de altura es

$$s = s1t2 = - 16t^2 + 80t + 96$$

donde t es el tiempo transcurrido que la pelota está en el aire. La pelota no alcanza el tejado en su camino hacia abajo y finalmente golpea el suelo. Ver Figura 19.

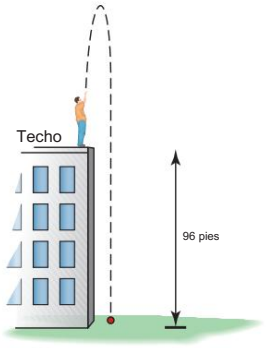


Figura 19

(a) ¿Cuándo golpea la pelota el suelo? Es decir, ¿cuánto tiempo permanece la pelota en el aire? (b) ¿En qué momento t la pelota pasará por el tejado en su camino hacia abajo? (c) ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota desde t = 0 hasta t = 2? (d) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota en el tiempo t0? (e) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota en t = 2? (f) ¿Cuándo es igual a cero la velocidad instantánea de la pelota? (g) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando pasa por el tejado en el camino? ¿abajo?

(h) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando golpea el suelo?

Solución (a) La pelota golpea el suelo cuando s = s1t2 = 0.

$$- 16 \text{ toneladas}^2 + 80t + 96 = 0$$

$$- 5t - 6 = 0$$

$$1t - 62\,1t + 12 = 0$$

$$t = 6 \text{ o } t = - 1$$

Descarta la solución t = - 1. La pelota golpea el suelo después de 6 seg.

(b) La pelota pasa por el tejado cuando s = s1t2 = 96.

$$- 16 \text{ toneladas}^2 + 80t + 96 = 96$$

$$- 5t = 0$$

$$t1t - 52 = 0$$

$$t = 0 \text{ o } t = 5$$

Descarta la solución t = 0. La pelota pasa por el tejado en su camino hacia abajo después de 5 segundos.

(c) La velocidad promedio de la pelota desde t = 0 hasta t = 2 es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s122 - s102}{2 - 0} = \frac{192 - 96}{2} = 48 \text{ pies/seg}$$

(d) La velocidad instantánea de la pelota en el instante t0 es la derivada s′1t02; eso es,

$$s'1t02 = \lim_{tst0} \frac{s1t2 - s1t02}{t - t0}$$

$$= \lim_{tSt0} \frac{1 - 16t^2 + 80t + 962 - 1 - 16t_0^2 + 80t0 + 962}{t - t0}$$

$$= \lim_{tSt0} \frac{- 163\,t^{2\,2 - t\,0} - 5t + 5t0\,4}{t - t0} \qquad \frac{- 163\,1t + t02\,1t - t02 - 51t - t02\,4 = \lim_{tSt0}}{t - t0}$$

$$\frac{- 163\,1t + t0 - 52\,1t - t02\,4 = \lim_{tSt0}}{t - t0} \lim_{tSt0} 3 - 161t + t0 - 52\,4 =$$

$$= - 1612t0 - 52 \text{ pies/seg}$$

Machine Translated by Google

(e) En t = 2 s, la velocidad instantánea de la pelota es

$$s'122 = - 1612 \# 2 - 52 = - 161 - 12 = 16 \text{ pies/seg}$$

(f) La velocidad instantánea de la pelota es cero cuando

$$s'1t2 = 0$$

$$- 1612t - 52 = 0$$

$$t = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ segundos}$$

(g) La pelota pasa por el tejado en su camino hacia abajo cuando t = 5. La instantánea la velocidad en t = 5 es

$$s'152 = - 16110 - 52 = - 80 \text{ pies/seg}$$

En t = 5 segundos, la pelota viaja - 80 pies/seg. Cuando la tasa de cambio instantánea es negativa, significa que la dirección del objeto es hacia abajo. La pelota viaja a 80 pies/seg en dirección descendente cuando t = 5 s.

(h) La pelota golpea el suelo cuando t = 6. La velocidad instantánea cuando t = 6 es

$$s'162 = - 16112 - 52 = - 112 \text{ pies/seg}$$

La velocidad de la pelota en t = 6 s es -112 pies/seg. Nuevamente, el valor negativo implica que la pelota viaja hacia abajo.

Exploración

Determine el vértice de la función cuadrática dada en el ejemplo 6. ¿Qué concluye acerca de la velocidad cuando s1t 2 es máxima?

RESUMEN

La derivada de una función y = f1x2 en c se define como

$$f'1c2 = \lim_{x \to c} \frac{f1x2 - f1c2}{x - c}$$

siempre que exista el límite.

En geometría, f'1c2 es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto 1c, f1c2 2.

En física, f'1t02 es igual a la velocidad instantánea de un objeto en el tiempo t0, donde s = f1t2 es la posición del objeto en el tiempo t.

En aplicaciones, si dos variables están relacionadas por la función y = f1x2, entonces f'1c2 es igual a la tasa de cambio instantánea de y en c.

14.4 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Encuentra una ecuación de la recta con pendiente 5 que contiene el punto 12, - 42. (págs. 60 y 61)

2. Verdadero o Falso La tasa de cambio promedio de una función f de a a b es

$$\frac{f1b2 + f1a2}{b + a}$$

(págs. 115-117)

Conceptos y vocabulario

3. Si $\lim_{x \to c} \frac{f1x2 - f1c2}{x - c}$ existe, es igual a la pendiente de la _____ _____ a la gráfica de f en el punto 1c, f1c2 2.

4. Si $\lim_{x \to c} \frac{f1x2 - f1c2}{x - c}$ existe, se llama _____ de f en c.

5. Si s = f1t2 denota la posición de un objeto en el tiempo t, la derivada f'1t02 es la posición del objeto en t0.

6. Verdadero o Falso La recta tangente a una función es la posición límite de una recta secante.

7. Verdadero o Falso La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en 1c, f1c2 2 es la derivada de f en c.

8. Verdadero o Falso La velocidad de un objeto cuya posición en el tiempo t es s1t2 es la derivada s'1t2.

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 9 a 20, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado. Grafique f y la recta tangente.

9. f1x2 = - 2x + 1 en 1 - 1, 32 10. f1x2 = 3x + 5 en 11, 82 11. f1x2 = x2 + 2 en 1 - 1, 32
12. f1x2 = = 3 - x2 en 11, 22 13. f1x2 = = - 4x2 en 1 - 2, - 162 14. f1x2 = 3x2 en 12, 122
15. f1x2 = 3x2 - x en 10, 02 16. f1x2 = 2x2 + x en 11, 32 17. f1x2 = - 2x2 + x - 3 en 11, - 42
18. f1x2 = x2 - 2x + 3 en 1 - 1, 62 19. f1x2 = x3 - x2 en 11, 02 20. f1x2 = x3 + x en 12, 102

En los problemas 21 a 32, encuentre la derivada de cada función en el número dado.

21. f1x2 = - 4x + 5 en 3 22. f1x2 = - 4 + 3x en 1 23. f1x2 = 2x2 + 1 en - 1
24. f1x2 = x2 - 3 en 0 25. f1x2 = 3x2 - 4x en 2 26. f1x2 = 2x2 + 3x en 1
27. f1x2 = 2x3 - x2 en 2 28. f1x2 = x3 + 4x en - 1 29. f1x2 = x3 - 2x2 + x en - 1
30. f1x2 = x3 + x2 - 2x en 1 31. f1x2 = cos x en 0 32. f1x2 = sen x en 0

En los problemas 33 a 42, utilice una herramienta gráfica para aproximar la derivada de cada función en el número dado.

33. f1x2 = 3x3 - 6x2 + 2 en - 2 - 5x4 + 9x
34. f1x2 = - 5x4 + 6x2 - 10 a las 5
35. $f1x2 = x3 \dfrac{+ 3}{+ 5x2 - 6}$ a las 3
36. $f1x2 = x2 \dfrac{- x3 + 1}{+ 5x + 7}$ a las 8
37. f1x2 = x sen x en $\frac{pag}{}$
38. f1x2 = x sen x en 3 $\frac{pag}{}$
39. f1x2 = x2 sen x en $\frac{pag}{4}$
40. f1x2 = x2 sen x en $\frac{pag}{3}$
41. f1x2 = ex sen x en 2
42. f1x2 = ex sen x en 2

Aplicaciones y extensiones

43. Tasa de cambio instantánea El volumen V de un cilindro circular recto de 6 pies de altura y radio r pies es V = V1r2 = 6pr el volumen con respecto al radio r en ^{2}. Encuentre la tasa de cambio instantánea de r = 9.

44. Tasa de cambio instantánea El área de superficie S de una esfera. Encuentra de radio r pies es S = S1r2 = 4pr tasa de ^{2}el instantáneo cambio del área de la superficie con respecto al radio r en r = 2.

45. Tasa de cambio instantánea El volumen V de un cubo de lado x metros es V = V1x2 = x3 . Encuentre la tasa de cambio instantánea del volumen con respecto al lado x en x = 3.

46. Tasa de cambio instantánea El volumen V de una esfera de el radio r pies es V = V1r2 = $\frac{4}{3}$ pr ^{3}. Encuentra el instantáneo tasa de cambio del volumen con respecto al radio r en r = 5.

47. Velocidad instantánea de una pelota En física se muestra que la altura s de una pelota lanzada hacia abajo con una velocidad inicial de 48 pies/s desde un tejado a 160 pies de altura es

$$s = s1t2 = - 16t^2 - 48t + 160$$

donde t es el tiempo transcurrido que la pelota está en el aire.

(a) ¿Cuándo golpea la pelota el suelo? Es decir, ¿cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

(b) ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota desde t = 0 hasta t = 1?

(c) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota en el tiempo t?

(d) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota en t = 1?

(e) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando golpea el suelo?

48. Velocidad instantánea de una pelota En física se muestra que la altura s de una pelota lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 128 pies/s desde el nivel del suelo es

$$s = s1t2 = - 16t^2 + 128 \text{ toneladas}$$

donde t es el tiempo transcurrido que la pelota está en el aire.

(a) ¿Cuándo golpea la pelota el suelo? Es decir, ¿cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

(b) ¿Cuál es la rapidez promedio de la pelota desde t = 0 hasta t = 2?

(c) ¿Cuál es la rapidez instantánea de la pelota en el tiempo t?

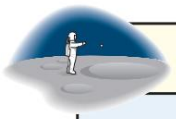
(d) ¿Cuál es la rapidez instantánea de la pelota en t = 2?

(e) ¿Cuándo es la rapidez instantánea de la pelota igual a ¿cero?

(f) ¿Qué altura tiene la pelota cuando su rapidez instantánea es igual a ¿cero?

(g) ¿Cuál es la rapidez instantánea de la pelota cuando golpea el suelo?

49. Velocidad en la Luna Un astronauta lanza una pelota hacia un cráter de la Luna. La altura s (en pies) de la pelota desde el fondo del cráter después de t segundos se da en la siguiente tabla:



tiempo, t (en segundos)	altura, s (en pie)
0	1000
1	987
2	969
3	945
4	917
5	883
6	843
7	800
8	749

Machine Translated by Google

(a) Encuentre la velocidad promedio desde t = 1 hasta t = 4 segundos.
(b) Encuentre la velocidad promedio desde t = 1 hasta t = 3 segundos.
(c) Encuentre la velocidad promedio desde t = 1 hasta t = 2 segundos.
(d) Utilizando una herramienta gráfica, encuentre la función cuadrática de mejor ajuste.
(e) Usando la función encontrada en el inciso (d), determine la velocidad instantánea en t = 1 segundo.

50. Tasa de cambio instantánea Los datos de la derecha representan el ingreso total R (en dólares) recibido por la venta de x bicicletas en Tunney's Bicycle Shop.
(a) Encuentre la tasa de cambio promedio en los ingresos a partir de x = 25 a x = 150 bicicletas.
(b) Encuentre la tasa de cambio promedio en el ingreso a partir de x = 25 a x = 102 bicicletas.
(c) Encuentre la tasa de cambio promedio en los ingresos a partir de x = 25 a x = 60 bicicletas.
(d) Utilizando una herramienta gráfica, encuentre la función cuadrática de mejor ajuste.
(e) Utilizando la función encontrada en el inciso (d), determine la tasa de cambio instantánea del ingreso en x = 25 bicicletas.

Número de bicicletas, x	Ingresos totales, R (en dolares)
0	0
25	28.000
60	45.000
102	53.400
150	59.160
190	62.360
223	64.835
249	66.525

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. y = 5x - 14 2. Falso

14.5 El problema del área; La integral

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Fórmulas de geometría (Sección A.2, págs. A15–A16)
- Notación sumatoria (Sección 12.1, págs. 856–858)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 958.

OBJETIVOS 1 Aproximar el área bajo la gráfica de una función (p. 954)
2 Integrales aproximadas usando una utilidad gráfica (p. 958)

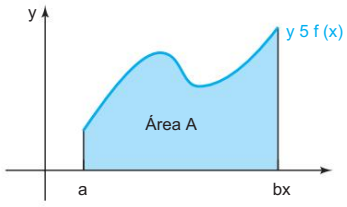
El problema del área

El desarrollo de la integral, al igual que el de la derivada, estuvo originalmente motivado en gran medida por un problema de geometría: el problema del área.

Problema de área

Supongamos que una función f es no negativa y continua en un intervalo cerrado 3a, b4.
Encuentre el área encerrada por la gráfica de f, el eje x y las líneas verticales x = a y x = b.

La Figura 20 ilustra el problema del área. Nos referimos al área A que se muestra como el área bajo la gráfica de f desde a hasta b.



Área A 5 área debajo del gráfico de f de a a b

Figura 20 Problema de área

Machine Translated by Google

Para una función constante f1x2 = k y para una función lineal f1x2 = mx + B, podemos resolver el problema de área usando fórmulas de geometría. Véanse las Figuras 21(a) y (b).

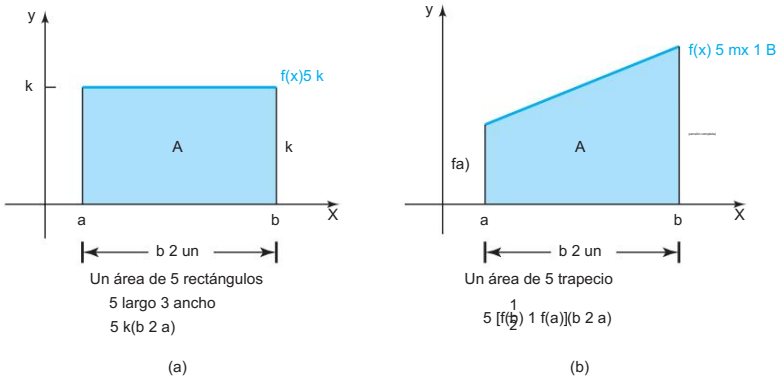


Figura 21

Para la mayoría de las demás funciones, no hay fórmulas de geometría disponibles.

Comenzamos analizando una manera de aproximar el área bajo la gráfica de una función f desde a hasta b.

1 Aproximar el área bajo la gráfica de una función

Usamos rectángulos para aproximar el área bajo la gráfica de una función f. Hacemos esto dividiendo o dividiendo el intervalo 3a, b4 en subintervalos de igual ancho.

En cada subintervalo, formamos un rectángulo cuya base es el ancho del subintervalo y cuya longitud es f1u2 para algún número u en el subintervalo. Mire la Figura 22.

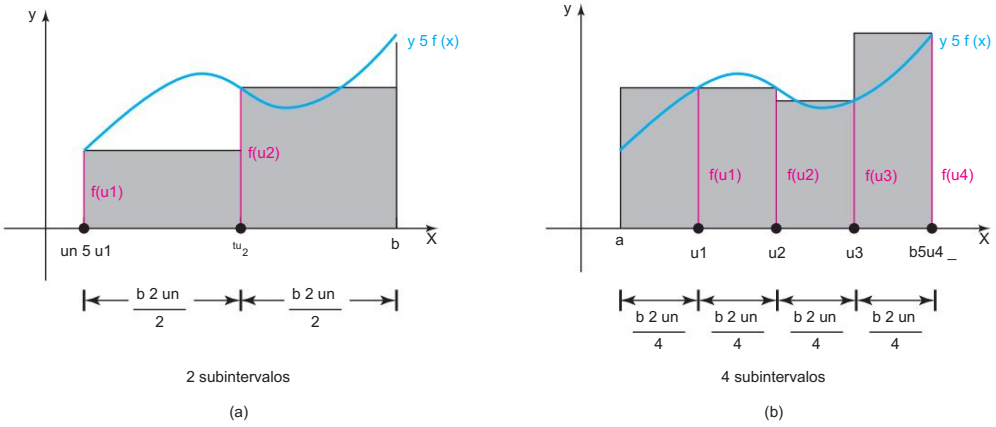


Figura 22

En la Figura 22(a), el intervalo 3a, b4 se divide en dos subintervalos, cada uno de ancho $\frac{\text{segundo - un}}{2}$, y el número u se elige como el punto final izquierdo de cada subintervalo.

En la Figura 22(b), el intervalo 3a, b4 se divide en cuatro subintervalos, cada uno de ancho $\frac{\text{segundo - un}}{4}$, y el número u se elige como el punto final derecho de cada subintervalo.

El área A bajo f de a a b se aproxima sumando las áreas de la rectángulos formados por la partición.

Usando la Figura 22(a),

Área A ≈ área del primer rectángulo + área del segundo rectángulo

$$= f1u12 + f1u22 \frac{\text{segundo - un}}{2} \quad \frac{\text{segundo - un}}{2}$$

Machine Translated by Google

Usando la Figura 22(b),

Área A ≈ área del primer rectángulo + área del segundo rectángulo

+ área del tercer rectángulo + área del cuarto rectángulo

$$= f1u12 + \frac{\text{segundo - un}}{4} f1u22 + f1u32 + \frac{\text{segundo - un}}{4} f1u42 \quad \frac{\text{segundo - un}}{4} \quad \frac{\text{segundo - un}}{4}$$

Al aproximar el área bajo la gráfica de una función f desde a hasta b, la elección del número u en cada subintervalo es arbitraria. Por conveniencia, siempre elegiremos u como el punto final izquierdo de cada subintervalo o como el punto final derecho. La elección de cuántos subintervalos utilizar también es arbitraria. En general, cuantos más subintervalos se utilicen, mejor será la aproximación. Veamos un ejemplo específico.

EJEMPLO 1 Aproximación del área bajo la gráfica de f(x) · 2x de 0 a 1

Calcule el área A bajo la gráfica de f1x2 = 2x de 0 a 1 de la siguiente manera:

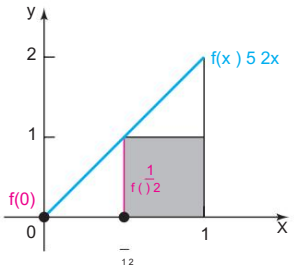
(a) Divida 30, 14 en dos subintervalos de igual ancho y elija u como el de la izquierda. punto final.

(b) Divida 30, 14 en dos subintervalos de igual ancho y elija u como el derecho punto final.

(c) Divida 30, 14 en cuatro subintervalos de igual ancho y elija u como el de la izquierda punto final.

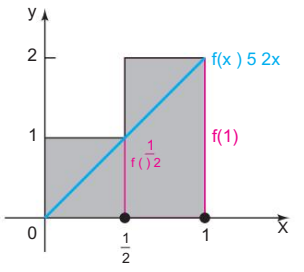
(d) Divida 30, 14 en cuatro subintervalos de igual ancho y elija u como el derecho punto final.

(e) Compare las aproximaciones encontradas en los incisos (a) a (d) con el área real.



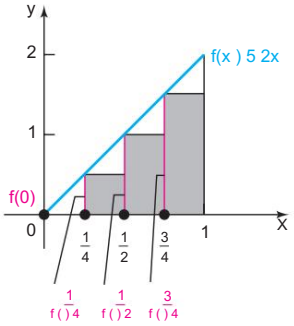
2 subintervalos; los u son puntos finales izquierdos

(a)



2 subintervalos; ustedes son puntos finales correctos

(b)



4 subintervalos; los u son puntos finales izquierdos

(C)

Figura 23

Solución

(a) Divida 30, 14 en dos subintervalos, cada uno de ancho $\frac{1}{2}$, y elegirte como la izquierda punto final. Ver Figura 23(a). El área A se aproxima como

$$A \approx f102 \# 2^{\frac{1}{2}} + f un\frac{1}{2} b \frac{1}{2}$$

$$= 0 \# \frac{1}{2} + 1 \# \frac{1}{2} \quad \# f(0) \cdot 2 \sim 0 \cdot 0; f un\frac{1}{2} b \cdot 2 \sim \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2} = 0{,}5$$

(b) Divida 30, 14 en dos subintervalos, cada uno de ancho $\frac{1}{2}$, y elegirte como el correcto punto final. Véase la Figura 23(b). El área A se aproxima como

$$A \approx f a 1 \frac{1}{2} b \# \frac{1}{2} + f112 \# \frac{1}{2}$$

$$= 1 \# \frac{1}{2} \# 2 \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

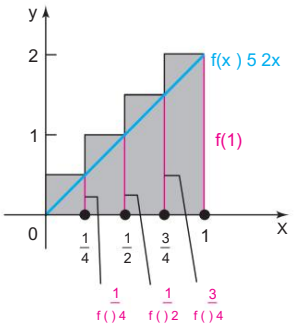
(c) Divida 30, 14 en cuatro subintervalos, cada uno de ancho $\frac{1}{4}$, y elegirte como la izquierda punto final. Ver Figura 23(c). El área A se aproxima como

$$A \approx f102 \# 4^{\frac{1}{4}} + f un\frac{1}{4} b \# \frac{1}{4} + f un\frac{1}{2} b \# \frac{1}{4} + f un\frac{3}{4} b \# \frac{1}{4}$$

$$= 0 \# \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \# \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

(continuado)

Machine Translated by Google



4 subintervalos; ustedes son puntos finales correctos

(d)

Figura 23 (continuación)

(d) Divida 30, 14 en cuatro subintervalos, cada uno de ancho 4 $\frac{1}{}$, y elegirte como el correcto punto final. Véase la Figura 23(d). El área A se aproxima como

$$A \approx f\,a\,1\,\frac{}{4}b\,\#\,\frac{1}{4} + f\,un\,\frac{}{2}b\,\#\,\frac{1}{4} + f\,un\,\frac{}{4}b\,\#\,\frac{1}{4} + f112\,\#\,\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + 1\,\#\,\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + 2\,\#\,\frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

(e) El área real bajo la gráfica de f1x2 = 2x de 0 a 1 es el área de un triángulo rectángulo cuya base tiene una longitud de 1 y cuya altura es 2. Por lo tanto, el área real A es

$$A = \text{base} * \text{altura} = \#\,1\,\#\,2 = 1\frac{1}{2}$$

Ahora mire la Tabla 7, que muestra las aproximaciones al área bajo la gráfica de f1x2 = 2x de 0 a 1 para n = 2, 4, 10 y 100 subintervalos. Observe que las aproximaciones al área real mejoran a medida que aumenta el número de subintervalos.

Tabla 7

Usando puntos finales izquierdos:	norte	2	4	10	100
	Área	0,5	0,75	0,9	0,99
Usando puntos finales correctos:	norte	2	4	10	100
	Área	1.5	1.25	1.1	1.01

Se le pide que confirme las entradas de la Tabla 7 del Problema 31.

Hay otra observación útil sobre el Ejemplo 1. Observe nuevamente las Figuras 23(a)–(d) y la Tabla 7. Dado que la gráfica de f1x2 = 2x aumenta en 30, 14,
la elección de u como punto final izquierdo proporciona una estimación del límite inferior del área real, mientras que la elección de u como punto final derecho proporciona una estimación del límite superior. ¿Ves por qué?

Ahora trabaja el problema 9

EJEMPLO 2

Aproximación del área bajo la gráfica de f(x) · x2

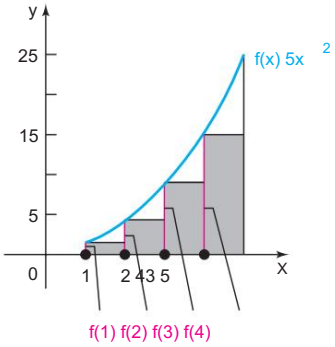
Aproxima el área bajo la gráfica de f1x2 = x2 de 1 a 5:

(a) Usando cuatro subintervalos de igual ancho

(b) Usando ocho subintervalos de igual ancho

En cada caso, elija el número u como punto final izquierdo de cada subintervalo.

Solución



4 subintervalos; cada uno de ancho 1

Figura 24

(a) Consulte la Figura 24. Usando cuatro subintervalos de igual ancho, el intervalo 31, 54 es 5 - 1 dividido en subintervalos de ancho = 1 de la siguiente manera: $\frac{}{4}$

31, 24 32, 34 33, 44 34, 54

Al elegir u como punto final izquierdo de cada subintervalo, el área A bajo la gráfica de f1x2 = x2 se aproxima por

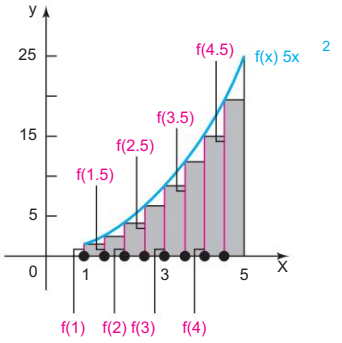
$$\text{Área } A \approx f112\,\#\,1 + f122\,\#\,1 + f132\,\#\,1 + f142\,\#\,1$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

(b) Consulte la Figura 25. Usando ocho subintervalos de igual ancho, el intervalo 31, 54 es 5 - 1 dividido en subintervalos de ancho = 0,5 de la siguiente manera: $\frac{}{8}$

31, 1,54 31,5, 24 32, 2,54 32,5, 34 33, 3,54 33,5, 44 34, 4,54 34,5, 54

Machine Translated by Google



8 subintervalos; cada uno de ancho 1/2

Figura 25

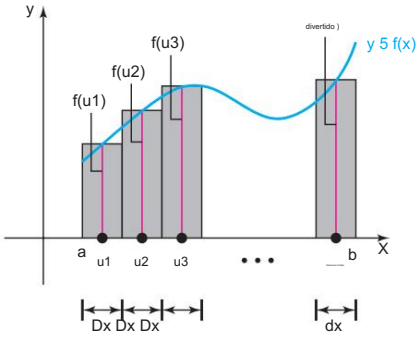


Figura 26

Al elegir u como punto final izquierdo de cada subintervalo, el área A bajo la gráfica de f1x2 = x2 se aproxima por

$$\text{Área } A \approx f112 \# 0.5 + f11.52 \# 0.5 + f122 \# 0.5 + f12.52 \# 0.5$$
$$+ f132 \# 0,5 + f13,52 \# 0,5 + f142 \# 0,5 + f14.520.5$$
$$= 3\ f112 + f11,52 + f122 + f12,52 + f132 + f13,52 + f142 + f14,524 \# 0,5$$
$$= 31 + 2,25 + 4 + 6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,254 \# 0,5$$
$$= 35,5$$

En general, aproxime el área A bajo la gráfica de una función y = f1x2 de a a b de la siguiente manera:

1. Divida el intervalo 3a, b4 en n subintervalos de igual ancho. El ancho Δx de cada subintervalo es entonces
$$\Delta x = \frac{\text{segundo - un}}{\text{norte}}$$
2. En cada subintervalo, elige un número u y evalúa la función f en cada u. Esto da como resultado n números u1 , u2 , c, un yn valores funcionales f1u12, f1u22, c, f1un2.
3. Forme n rectángulos con un ancho igual a Δx, el ancho de cada subintervalo, y con longitud igual al valor funcional f1ui2, i = 1, 2, c, n. Ver Figura 26.
4. Suma las áreas de los n rectángulos.

$$A1 + A2 + g + An = f1u12\Delta x + f1u22\Delta x + g + f1un2\Delta x$$
$$= \sum_{yo=1}^{\text{norte}} f1ui2\Delta x$$

Este número es la aproximación al área A bajo la gráfica de f de aa b.

Definición de área

Hemos observado que cuanto mayor sea el número n de subintervalos utilizados, mejor será la aproximación al área bajo la gráfica de f de a a b. Si dejamos que n sea ilimitado, obtenemos el área exacta bajo la gráfica de f desde a hasta b.

DEFINICIÓN Área bajo la gráfica de una función de a a b

Supongamos que una función f es no negativa y continua en un intervalo cerrado 3a, b4. Divida 3a, b4 en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = \frac{\text{segundo - un}}{\text{norte}}$. En cada subintervalo, elija un número ui , i = 1, 2, c, n, y evaluar f1ui2. Forme el productos f1ui2Δx y los sumamos, obteniendo la suma

$$\sum_{yo=1}^{\text{norte}} f1ui2\Delta x$$

Si el límite de esta suma existe como n S q, es decir, si

$$\lim_{n \to q} \sum_{yo=1}^{\text{norte}} f1ui2\Delta x$$

existe, se define como el área bajo la gráfica de f de a a b y se denota por

$$\int_a^b f1x2\ dx$$

que se lee como “la integral de aab de f1x2 ” .

Machine Translated by Google

2 Integrales aproximadas usando una utilidad gráfica

EJEMPLO 3 Uso de una utilidad gráfica para aproximar una integral

Utilice una herramienta gráfica para aproximar el área bajo la gráfica de f1x2 = x2 de 1 a 5. Es decir, evalúe la integral

$$\int_1^5 x^2\,dx$$

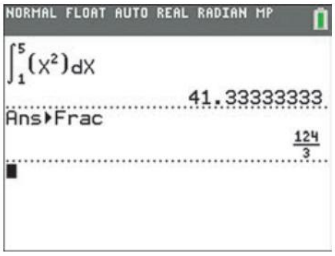


Figura 27

Solución La Figura 27 muestra el resultado usando una calculadora TI-84 Plus C. Consulte el manual del usuario para conocer las pulsaciones de teclas adecuadas.

El área bajo la gráfica de f1x2 = x2 del 1 al 5 es $\frac{124}{3}$.

En cálculo, se dan técnicas para evaluar integrales para obtener respuestas exactas algebraicamente.

14.5 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. La fórmula para el área A de un rectángulo de longitud l y ancho w es _____

2. $\sum_{k=1}^{4} 12k + 12 =$ ____. (págs. 857–858)

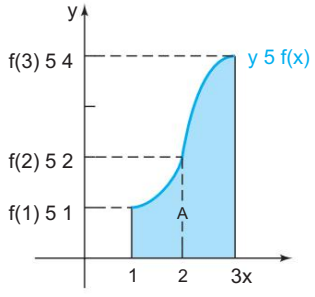
Conceptos y vocabulario

3. La integral de a a b de f1x2 se denota por _____.

4. El área bajo la gráfica de f de a a b se denota por _____.

Desarrollo de habilidades

En los problemas 5 y 6, consulte la figura. El intervalo 31, 34 se divide en dos subintervalos 31, 24 y 32, 34.

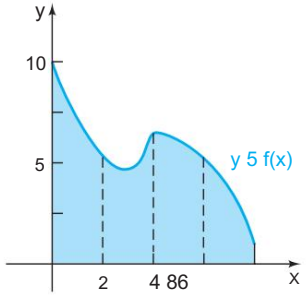


f(1) 5 1, f(2) 5 2, f(3) 5 4

5. Calcule el área A, eligiendo u como el punto final derecho de cada subintervalo.

6. Calcule el área A, eligiendo u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.

En los problemas 7 y 8, consulte la figura. El intervalo 30, 84 se divide en cuatro subintervalos 30, 24, 32, 44, 34, 64 y 36, 84.



f(0) 5 10, f(2) 5 6, f(4) 5 7, f(6) 5 5, f(8) 5 1

7. Calcule el área A, eligiendo u como el punto final derecho de cada subintervalo.

8. Calcule el área A, eligiendo u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.

9. La función f1x2 = 3x está definida en el intervalo 30, 64.
   (a) Gráfica f.
   En (b)–(e), aproxime el área A bajo f de 0 a 6 de la siguiente manera:
   (b) Divida 30, 64 en tres subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.
   (c) Divida 30, 64 en tres subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final derecho de cada subintervalo.
   (d) Divida 30, 64 en seis subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.
   (e) Divida 30, 64 en seis subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final derecho de cada subintervalo.
   (f) ¿Cuál es el área real A?

10. Repita el Problema 9 para f1x2 = 4x.

11. La función f1x2 = - 3x + 9 se define en el intervalo 30, 34.
   (a) Gráfica f.
   En (b)–(e), aproxime el área A bajo f de 0 a 3 de la siguiente manera:
   (b) Divida 30, 34 en tres subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.
   (c) Divida 30, 34 en tres subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final derecho de cada subintervalo.
   (d) Divida 30, 34 en seis subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.
   (e) Divida 30, 34 en seis subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final derecho de cada subintervalo.
   (f) ¿Cuál es el área real A?

Machine Translated by Google

12. Repita el problema 11 para f1x2 = - 2x + 8.

En los problemas 13 a 22, una función f no es negativa y es continua en un intervalo 3a, b4.

(a) Grafique f, indicando el área A bajo f desde a hasta b.
(b) Calcule el área A dividiendo 3a, b4 en cuatro subintervalos de igual ancho y eligiendo u como el punto extremo izquierdo de cada subintervalo.
(c) Calcule el área A dividiendo 3a, b4 en ocho subintervalos de igual ancho y eligiendo u como el punto extremo izquierdo de cada subintervalo.
(d) Exprese el área A como una integral.
(e) Utilice una herramienta gráfica para aproximar la integral.

13. f1x2 = x2 - 4, 32, 64 15. f1x2 = x3 , 31, 54

14. f1x2 = x2 + 2, 30, 44

16. f1x2 = x3 , 30, 44

17. f1x2 = 1x, 30, 44

18. f1x2 = $\frac{1}{x}$, 31, 54

19. f1x2 = ln x, 33, 74

20. f1x2 = ex , 3 - 1, 34

21. f1x2 = porque x, c 0, $\frac{\text{pag}}{\text{2 días}}$

22. f1x2 = sen x, 30, p4

En los problemas 23 a 30 se da una integral.

(a) ¿Qué área representa la integral?
(b) Grafique la función y sombree la región representada por la integral.
(c) Utilice una herramienta gráfica para aproximar esta área.

23. L$_{1}^{3}$ 1 - 2x + 72 dx

24. yo$_{0}^{4}$ 13x + 12dx

25. yo$_{0}^{4}$ 116- x2 2 dx

26. L$_{2}^{5}$ 1x2 - 12 dx

27. L$_{-p>4}^{p>4}$ porque xdx

28. yo$_{0}^{p>2}$ pecado xdx

29. L$_{mi}^{2e}$ en xdx

30. yo$_{0}^{2}$ ex dx

31. Confirme las entradas en la Tabla 7.

[Sugerencia: revise la fórmula para la suma de una secuencia aritmética.]

32. Considere la función f1x2 = 21 - x2 cuyo dominio es el intervalo 3 - 1, 14.

(a) Gráfica f.
(b) Calcule el área bajo la gráfica de f de - 1 a 1 dividiendo 3 - 1, 14 en cinco subintervalos, cada uno de igual ancho.
(c) Calcule el área bajo la gráfica de f de - 1 a 1 dividiendo 3 - 1, 14 en diez subintervalos, cada uno de igual ancho.
(d) Exprese el área como una integral.
(e) Evalúe la integral utilizando una herramienta gráfica.
(f) ¿Cuál es el área real?

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. A = lw 2. 24

Revisión del capítulo

Cosas que saber

Límite (pág. 927)

$\lim_{x \to c} f(x) = N$ A medida que x se acerca a c, x·c, el valor de f se acerca a N.

Límites básicos (p. 932)

$\lim_{x \to c} \text{Una} = \text{Una}$ El límite de una constante es la constante.

$\lim_{x \to c} x = c$ El límite de x cuando x se aproxima a c es c.

Propiedades límite (págs. 933, 935, 936)

$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$ El límite de una suma es igual a la suma de los límites.

$\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$ El límite de una diferencia es igual a la diferencia de los límites.

$\lim_{x \to c} [f(x) \# g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \# \lim_{x \to c} g(x)$ El límite de un producto es igual al producto de los límites.

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ 1lim g1x2 · 02 El límite de un cociente es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador no sea cero.

$\lim_{x \to c} [3f(x)]^n = 3 \lim_{x \to c} f(x)]^n$ límite proporcionado $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, n Ú 2 un número entero.

$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ Proporcionado 2 n f1x2 y 2 n $\lim_{x \to c} f(x)$ están ambos definidos, n Ú 2 un número entero.

Límite de un polinomio (p. 934) $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$, donde P es una función polinómica.

Derivada de una función (p. 947) $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$, siempre que exista el límite.

Función continua (pág. 941) Una función f es continua en c si $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Área bajo una gráfica (p. 957) Si una función f es no negativa y continua en el intervalo 3a, b4, entonces el área bajo el gráfica de f de a a b es $L = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x$, siempre que exista el límite.

Machine Translated by Google

Objetivos

Sección	Deberías poder N	Ejemplo(s)	Ejercicios de repaso
14.1	1 Investiga un límite usando una tabla (p. 927)	1–3	1–11
	2 Investiga un límite usando una gráfica (p. 929)	4–6	21-27
14.2	1 Encuentra el límite de una suma, una diferencia y un producto (p. 933)	2–6	1
	2 Encuentra el límite de un polinomio (p. 934)	7	1, 2
	3 Encuentra el límite de una potencia o una raíz (p. 935)	8	2, 3, 5
	4 Encuentra el límite de un cociente (p. 936)	9-11	6-11
	5 Encuentre el límite de una tasa de cambio promedio (p. 937)	12	30–32
14.3	1 Encuentra los límites unilaterales de una función (p. 939)	1	4, 21-24
	2 Determinar si una función es continua en un número (p. 941)	2, 3	12–15, 26–29
14.4	1 Encuentra una ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función (p. 946)	1	30–32
	2 Encuentra la derivada de una función (p. 947)	2–4	33–37
	3 Encuentre tasas de cambio instantáneas (p. 948)	5	39
	4 Encuentra la velocidad instantánea de un objeto (p. 949)	6	38
14.5	1 Aproxima el área bajo la gráfica de una función (p. 954)	1, 2	40–42
	2 Integrales aproximadas usando una utilidad gráfica (p. 958)	3	41(e), 42(e), 43(c), 44(c)

Ejercicios de revisión

En los problemas 1 al 11, encuentre el límite.

1. $\lim_{x \to 3} 17x2 - x + 42$

2. $\lim_{x \to -2} 1x2 + 12^{2}$

3. $\lim_{x \to 5} \sqrt{2x2 + 11}$

4. $\lim_{x \to 4} \sqrt{216 - x2}$

5. $\lim_{x \to 2} 15x + 62\ 3>2$

6. $\lim_{x \to -1} \frac{x2 + x + 2}{x2 - 9}$

7. $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x2 - 25}$

8. $\lim_{x \to 5} \frac{x2 - 25}{x2 - x - 20}$

9. $\lim_{x \to -1} \frac{x2 - 1}{x3 - 1}$

10. $\lim_{x \to 3} \frac{x2 - 9}{2x3 - 6x2 + 5x - 15}$

11. $\lim_{x \to 3} \frac{3x4 - 6x3 + 2x - 4}{x3 - 2x2 + x - 2}$

En los problemas 12 a 15, determine si f es continua en c.

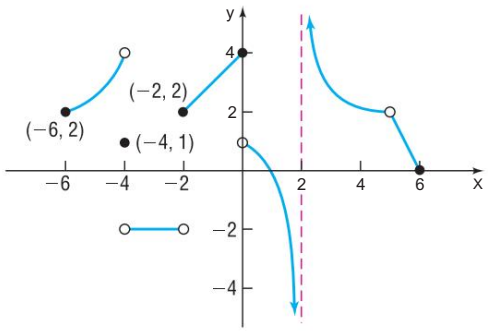
12. f1x2 = 2x3 + x2 - 5x + 3 c = 3

13. $f1x2 = \frac{x2 - 4}{x + 2}$ c = - 2

14. $f1x2 = c\ \sqrt{x + 2}$ si x · - 2; $\frac{x2 - 4}{x + 2}$ si x = - 2; c = - 2

15. $f1x2 = c\ \sqrt{x + 3}$ si x · - 3; $\frac{x2 - 9}{x + 3}$ si x = - 3; c = - 3

En los problemas 16 a 27, utilice la gráfica adjunta de y = f1x2.



16. ¿ Cuál es el dominio de f ?

17. ¿ Cuál es el rango de f ?

18. Encuentra la (s) intersección(es) con el eje x, si las hay, de f.

19. Encuentre la (s) intersección(es) y, si las hay, de f.

20. Encuentre f1 - 62 y f1 - 42.

21. Encuentra a $\lim_{x \to -4^-}$ f1x2.

22. Encuentra a $\lim_{x \to -4^+}$ f1x2.

23. Encuentra a $\lim_{x \to 2^-}$ f1x2.

24. Encuentra a $\lim_{x \to 2^+}$ f1x2.

25. ¿$\lim_{x \to 0}$ ¿Existe f1x2 ? Si es así, ¿qué es?

26. ¿Es f continua en 0?

27. ¿Es f continua en 4?

Machine Translated by Google

28. Analice si R1x2 = es continua en $\frac{x + 4}{x2 - 16}$ c = - 4 y c = 4. Utilice límites para analizar la gráfica de R en c.

29. Determina dónde la función racional R1x2 = no está definida. Determina si es una asíntota o un hueco $\frac{x3 - 2x2 + 4x - 8}{x2 - 11x + 18}$ aparece en tales números.

En los problemas 30 a 32, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado. Grafique f y la recta tangente.

30. f1x2 = 2x2 + 8x en 11, 102

31. f1x2 = x2 + 2x - 3 en 1 - 1, - 42

32. f1x2 = x3 + x2 en 12, 122

En los problemas 33 a 35, encuentre la derivada de cada función en el número indicado.

33. f1x2 = - 3x2 + 7 en x = 2

34. f1x2 = x2 - 3x + 2 en x = 1

35. f1x2 = 3x2 - 7x + 6 en x = 3

En los problemas 36 y 37, aproxime la derivada de cada función al número dado usando una herramienta gráfica.

36. f1x2 = 4x4 - 3x3 + 6x - 9 en - 2

37. f1x2 = x3 tan x en $\frac{\text{pag}}{6}$

---

38. Velocidad instantánea de una pelota En física se muestra que la altura s de una pelota lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 96 pies/s desde un tejado a 112 pies de altura es

$$s = s1t2 = - 16t^2 + 96t + 112$$

donde t es el tiempo transcurrido que la pelota está en el aire. La pelota no alcanza el tejado en su camino hacia abajo y finalmente golpea el suelo.

(a) ¿Cuándo golpea la pelota el suelo? Es decir, ¿cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

(b) ¿ En qué momento t la pelota pasará por el tejado en su camino? ¿abajo?

(c) ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota desde t = 0 hasta t = 2?

(d) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota en el tiempo t?

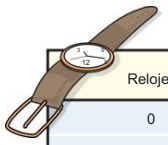
(e) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota en t = 2?

(f) ¿Cuándo es la velocidad instantánea de la pelota igual a ¿cero?

(g) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota al pasar? ¿La azotea al bajar?

(h) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando golpea el suelo?

39. Tasa de cambio instantánea Los siguientes datos representan los ingresos R (en dólares) recibidos por la venta de x relojes de pulsera en Wilk's Watch Shop.



Relojes de pulsera, x	Ingresos, R
0	0
25	2340
40	3600
50	4375
90	6975
130	8775
160	9600
200	10.000
220	9900
250	9375

(a) Encuentre la tasa de cambio promedio del ingreso a partir de x = 25 a x = 130 relojes de pulsera.

(b) Encuentre la tasa de cambio promedio del ingreso a partir de x = 25 a x = 90 relojes de pulsera.

(c) Encuentre la tasa de cambio promedio del ingreso a partir de x = 25 a x = 50 relojes de pulsera.

(d) Utilizando una herramienta gráfica, encuentre la función cuadrática de mejor ajuste.

(e) Utilizando la función encontrada en el inciso (d), determine la tasa de cambio instantánea del ingreso en x = 25 relojes de pulsera.

40. La función f1x2 = 2x + 3 no es negativa y es continua en el intervalo 30, 44.

(a) Gráfica f.

En (b)–(e), aproxime el área A bajo f desde x = 0 hasta x = 4 de la siguiente manera:

(b) Divida 30, 44 en cuatro subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.

(c) Divida 30, 44 en cuatro subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final derecho de cada subintervalo.

(d) Divida 30, 44 en ocho subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.

(e) Divida 30, 44 en ocho subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final derecho de cada subintervalo.

(f) ¿Cuál es el área real A?

En los problemas 41 y 42, cada función f es no negativa y continua en el intervalo dado.

(a) Grafique f, indicando el área A bajo f desde a hasta b.

(b) Calcule el área A dividiendo 3a, b4 en tres subintervalos de igual ancho y eligiendo u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.

(c) Calcule el área A dividiendo 3a, b4 en seis subintervalos de igual ancho y eligiendo u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.

(d) Exprese el área A como una integral.

(e) Utilice una herramienta gráfica para aproximar la integral.

41. f1x2 = 4- x2 , 3 - 1, 24

42. f1x2 = x2, $\frac{1}{\quad}$ 31, 44

En los problemas 43 y 44 se da una integral.

(a) ¿Qué área representa la integral?

(b) Grafique la función y sombree la región representada por el integral.

(c) Utilice una herramienta gráfica para aproximar esta área.

43. $\int_{-1}^{3} 19 - x2\,2dx$

44. $\int_{-1}^{1} ex\,dx$

Machine Translated by Google

Prueba de capítulo

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de preparación para exámenes de capítulos incluyen soluciones paso a paso para todos los ejercicios de exámenes de capítulos. Estos videos están disponibles en MyLab™ Math o en el canal de YouTube de este texto. Consulte el Prefacio para obtener un enlace al canal de YouTube.

En los problemas 1 a 6, encuentre cada límite.

1. $\lim_{x \to 3} 1 - x2 + 3x - 52$

2. $\lim_{x \to 2^+} \frac{0\ x - 2\ 0}{3x - 6}$

3. $\lim_{x \to -6} \sqrt{27 - 3x}$

4. $\lim_{x \to -1} \frac{x2 - 4x - 5}{x3 + 1}$

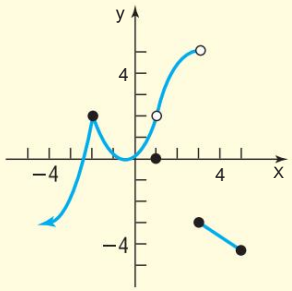
5. $\lim_{x \to 5} 3\ 13x2\ 1x - 22\ 2\ 4$

6. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{bronceado } x}{1 + \cos 2x}$

7. Determine el valor de k que hará que la función continuo en c = 4.

$$f1x2 = c\ x2 - 3 \quad \frac{\sqrt{x + 3}}{kx + 5} \quad \begin{matrix} \text{si } x \ldots 4 \\ \text{si } x\ 7\ 4 \end{matrix}$$

En los problemas 8 a 12, utilice la gráfica de y = f1x2.



8. Investigar $\lim_{x \to 3^+} f1x2$

9. Investigar $\lim_{x \to 3^-} f1x2$

10. Investigar $\lim_{x \to -2} f1x2$

11. ¿El gráfico sugiere que $\lim_{x \to 1} f1x2$ existe? Si es así, ¿qué es? Si no, explica por qué no.

12. Determina si f es continua en cada uno de los siguientes números. Si no es así, explique por qué no.

(a) x = - 2 (c) x = 3 (b) x = 1 (d) x = 4

13. Determinar dónde está la función racional.

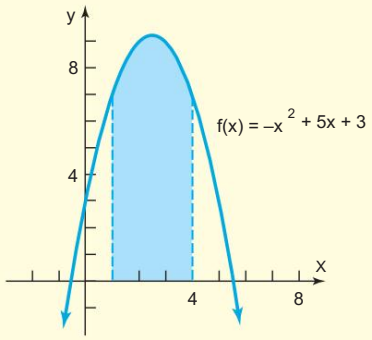
$$R1x2 = \frac{x3 + 6x2 - 4x - 24}{x2 + 5x - 14}$$

es indefinido. Determine si aparece una asíntota o un agujero en tales números.

14. Para la función f1x2 = 4x2 - 11x - 3:
(a) Encuentre la derivada de f en x = 2.
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto12, - 92.
(c) Grafique f y la recta tangente.

15. La función f1x2 = 216 - x2 no es negativa y es continua en el intervalo 30, 44.
(a) Gráfica f.
(b) Divida 30, 44 en ocho subintervalos de igual ancho y elija u como el punto final izquierdo de cada subintervalo.
Utilice la partición para aproximar el área bajo la gráfica de f desde x = 0 hasta x = 4.
(c) Encuentre el área exacta de la región y compárela con la aproximación del inciso (b).

16. Escribe la integral que representa el área sombreada. No intento de evaluar.



17. Un objeto se mueve en línea recta según alguna función de posición s = s1t2. La distancia s (en pies) del objeto desde su punto inicial después de t segundos se proporciona en la tabla. Encuentre la tasa de cambio promedio de la distancia desde t = 3 hasta t = 6 segundos.

t	s
0	0
1	2.5
2	14
3	31
4	49
5	89
6	137
7	173
8	240

Machine Translated by Google

Proyectos del Capítulo

I. Población mundial Thomas Malthus creía que “la población, cuando no se la controla, aumenta en una progresión geométrica de tal naturaleza que se duplica cada veinticinco años”. Sin embargo, el crecimiento de la población es limitado porque los recursos disponibles para nosotros son limitados. Si la conjetura de Malthus fuera cierta, el crecimiento geométrico de la población mundial implicaría que

$$\frac{\text{punto}}{\text{Parte 1}} = r + 1, \text{ donde } r \text{ es la tasa de crecimiento}$$

1. Utilizando datos de la población mundial y una utilidad gráfica, encuentre la función de crecimiento logístico que mejor se ajuste, tratando el año como la variable independiente. Sea t = 0 el año 1950, t = 1 representan 1951, y así sucesivamente, hasta haber ingresado todos los años y las poblaciones correspondientes hasta el año actual.
2. Grafique Y1 = f1t2, donde f1t2 representa la función de crecimiento logístico de mejor ajuste encontrada en 1.
3. Calcule la tasa instantánea de crecimiento de la población en 1960 utilizando la función derivada en una herramienta gráfica.
4. Usa el resultado de 3 para predecir la población en 1961. ¿Cuál era la población real en 1961?
5. Calcule el crecimiento instantáneo de la población en 1970, 1980, 1990, 2000 y 2010. ¿Qué sucede con la tasa de crecimiento instantáneo a medida que pasa el tiempo? ¿Es exacta la afirmación de Malthus sobre una tasa de crecimiento geométrica?
6. Utilizando la función MÁXIMO de su herramienta gráfica, determine el año en el que la tasa de crecimiento de la población es mayor. ¿Qué está pasando con la tasa de crecimiento en los años posteriores al máximo? Encuentre este punto en la gráfica de Y1 = f1t2.
7. Evaluar límite $_{tSq}$ f1t2. Este valor límite es el valor de transporte capacidad de la Tierra. ¿Cuál es la capacidad de carga de la Tierra?
8. ¿Qué crees que pasará si la población de la Tierra excede la capacidad de carga? ¿Cree que la producción agrícola seguirá aumentando al mismo ritmo que el crecimiento demográfico? ¿Qué efecto tendrá la expansión urbana sobre la producción agrícola?

Los siguientes proyectos están disponibles en el Centro de recursos para instructores (IRC).

II. Proyecto en Motorola: Tasas de curado Los ingenieros de Motorola utilizan el cálculo para encontrar la tasa de curado de un sellador.

III. Cómo encontrar el nivel de producción que maximiza las ganancias Un fabricante utiliza el cálculo para maximizar las ganancias.

Machine Translated by Google

Esta página se ha dejado en blanco intencionalmente

Machine Translated by Google

Revisar

Describir

A.1 Conceptos básicos de álgebra
A.2 Fundamentos de la geometría
A.3 Polinomios
A.4 División sintética
A.5 Expresiones racionales
A.6 Resolución de ecuaciones
A.7 Números Complejos; Cuadrático Ecuaciones en el número complejo Sistema
A.8 Resolución de problemas: solicitudes de empleo de interés, mezcla, movimiento uniforme y tasa constante
A.9 Notación de intervalos; Resolver desigualdades
A.10 enésimas raíces; Exponentes racionales

A.1 Conceptos básicos de álgebra

OBJETIVOS 1 Trabajar con conjuntos (p. A1)
2 Graficar desigualdades (pág. A4)
3 Encuentra la distancia en la recta de números reales (pág. A5)
4 Evaluar expresiones algebraicas (p. A6)
5 Determinar el dominio de una variable (p. A7)
6 Utilice las leyes de los exponentes (p. A7)
7 Evaluar raíces cuadradas (pág. A9)
8 Utilice una calculadora para evaluar exponentes (p. A10)

1 Trabajar con conjuntos

Un conjunto es una colección bien definida de objetos distintos. Los objetos de un conjunto se llaman elementos. Por bien definido queremos decir que existe una regla que nos permite determinar si un objeto dado es un elemento del conjunto. Si un conjunto no tiene elementos, se llama conjunto vacío o conjunto nulo y se denota con el símbolo .

Por ejemplo, el conjunto de dígitos consta del conjunto de números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Si usamos el símbolo D para denotar el conjunto de dígitos, entonces podemos escribir

$$D = 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 96$$

En esta notación, las llaves 5 6 se utilizan para encerrar los objetos o elementos del conjunto. Este método de denotar un conjunto se llama método de lista. Una segunda forma de denotar un conjunto es utilizar la notación generadora de conjuntos, donde el conjunto D de dígitos se escribe como

re = 5c X · x es un dígito6
c c
$%++& $%& $%&

Se lee como "D es el conjunto de todos los x tales que x es un dígito".

EJEMPLO 1 Uso de la notación de creación de conjuntos y el método de lista

(a) E = 5x 0 x es un dígito par6 = 50, 2, 4, 6, 86
(b) O = 5x 0 x es un dígito impar6 = 51, 3, 5, 7, 96

Como los elementos de un conjunto son distintos, nunca repetimos elementos. Por ejemplo, nunca escribiríamos 51, 2, 3, 26; la lista correcta es 51, 2, 36. Como un conjunto es una colección, el orden en que se enumeran los elementos es irrelevante. 51, 2, 36, 51, 3, 26, 52, 1, 36, etc., representan todos el mismo conjunto.

Machine Translated by Google

Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento de un conjunto B, entonces A es un subconjunto de B, que se denota A B. Si dos conjuntos A y B tienen los mismos elementos, entonces A es igual a B, que se denota A = B.

Por ejemplo, 51, 2, 36 51, 2, 3, 4, 56 y 51, 2, 36 = 52, 3, 16.

DEFINICIÓN Intersección y Unión de Dos Conjuntos

Si A y B son conjuntos, la intersección de A con B, denotada A ∩ B, es el conjunto formado por elementos que pertenecen tanto a A como a B. La unión de A con B, denotada A B, es el conjunto formado por elementos que pertenecen a A o B, o a ambos.

EJEMPLO 2 Encontrar la intersección y unión de conjuntos

Sea A = 51, 3, 5, 86, B = 53, 5, 76 y C = 52, 4, 6, 86. Encuentre:

(a) A ∩ B (b) A B (c) B ∩ 1A C2

Solución

(a) A ∩ B = 51, 3, 5, 86 ∩ 53, 5, 76 = 53, 56

(b) A B = 51, 3, 5, 86 53, 5, 76 = 51, 3, 5, 7, 86

(c) B ∩ 1A C2 = 53, 5, 76 ∩ 3 51, 3, 5, 86 52, 4, 6, 86 4

= 53, 5, 76 ∩ 51, 2, 3, 4, 5, 6, 86 = 53, 56

Ahora resuelve el problema 1 5

Generalmente, cuando trabajamos con conjuntos, designamos un conjunto universal U, el conjunto que consta de todos los elementos que deseamos considerar. Una vez que se ha designado un conjunto universal, podemos considerar elementos del conjunto universal que no se encuentran en un conjunto determinado.

DEFINICIÓN Complemento de un conjunto

Si A es un conjunto, el complemento de A, denotado $\overline{A}$, es el conjunto que consta de todos los elementos del conjunto universal que no están en A.*

EJEMPLO 3 Encontrar el complemento de un conjunto

Si el conjunto universal es U = 51, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 96 y si A = 51, 3, 5, 7, 96, entonces $\overline{A}$ = 52, 4, 6, 86.

De la definición de complemento se deduce que A $\overline{A}$ = U y A ∩ $\overline{A}$ = .
¿Ves por qué?

Ahora problema de trabajo 1 9

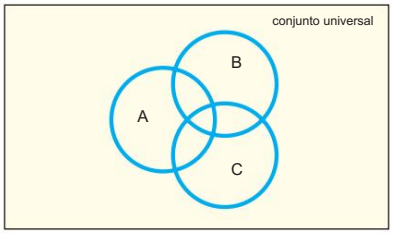


Figura 1 diagrama de Venn

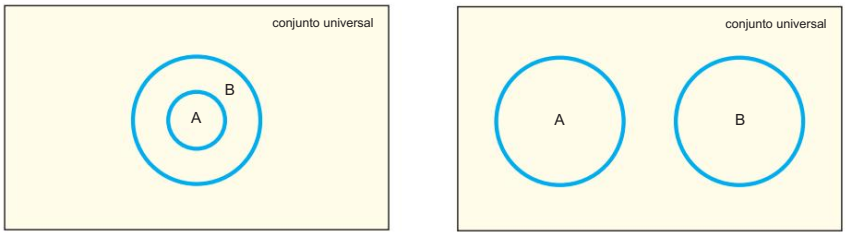
A menudo resulta útil hacer dibujos de conjuntos. Estas imágenes, llamadas diagramas de Venn, representan conjuntos como círculos encerrados en un rectángulo, que representa el conjunto universal. Estos diagramas suelen ayudarnos a visualizar diversas relaciones entre conjuntos.
Ver Figura 1.

Si sabemos que A B, podríamos usar el diagrama de Venn en la Figura 2(a). Si sabemos que A y B no tienen elementos en común, es decir, si A ∩ B = , podríamos usar el diagrama de Venn de la Figura 2(b). Se dice que los conjuntos A y B en la Figura 2(b) son disjuntos.

*Algunos textos utilizan la notación A′ o Ac para el complemento de A.

Machine Translated by Google

Figura 2

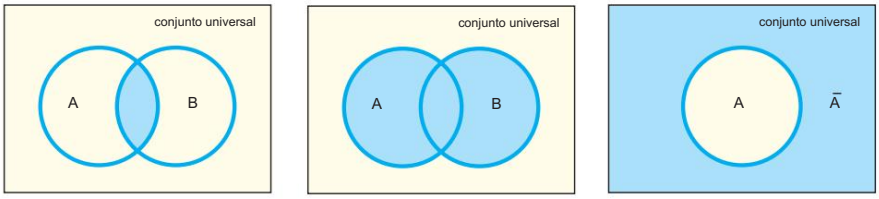


(a) A 8 B
subconjunto

(b) A ¨ B = [
conjuntos disjuntos

Las figuras 3(a), 3(b) y 3(c) utilizan diagramas de Venn para ilustrar la intersección, la unión y el complemento, respectivamente.

figura 3



(a) AB ∩
intersección

(b) AB ∪
Unión

(c) Un
complementar

Numeros reales

Los números reales se representan mediante símbolos como

$$25,\ 0,\ -3,\ \frac{1}{2},\ -\frac{5}{4},\ 0{,}125,\ 22,\ p,\ \sqrt{23},\ -2,\ 0.666c$$

El conjunto de números naturales, o números naturales, contiene los números del conjunto 51, 2, 3, 4, c 6. (Los tres puntos, llamados puntos suspensivos, indican que el patrón continúa indefinidamente). El conjunto de números enteros contiene los números naturales. números del conjunto 5 c - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, c 6. Un número racional es un número que puede ser expresado como un cociente $\frac{a}{b}$ de dos números enteros, donde el número entero b no puede ser 0. Ejemplos de los números racionales son $\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{0}{4}$, y $-\frac{2}{3}$. Desde $\frac{a}{1}$ = a para cualquier número entero a, cada número entero también es un número racional. Los números reales que no son racionales se llaman irracionales. Ejemplos de números irracionales son $\sqrt{22}$ y p (la letra griega pi), que equivale a la relación constante entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Ver Figura 4.

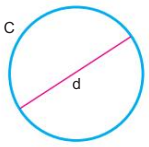


Figura 4 p = $\frac{C}{d}$

Los números reales se pueden representar como decimales. Los números reales racionales tienen representaciones decimales que terminan o no terminan con números repetidos. bloques de dígitos. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ = 0,75, que termina; y $\frac{2}{3}$ = 0,666c, en el que el dígito 6 se repite indefinidamente. Los números reales irracionales tienen representaciones decimales que no se repiten ni terminan. Por ejemplo, $\sqrt{22}$ = 1,414213c yp = 3,14159c. En la práctica, la representación decimal de un número irracional se da como aproximación. Usamos el símbolo ≈ (leído como “aproximadamente igual a”) para escribir $\sqrt{22}$ ≈ 1.4142 y p ≈ 3.1416.

A continuación se dan dos propiedades de los números reales utilizadas con frecuencia.

Supongamos que a, byc son números reales.

Propiedad distributiva

$$a \# 1b + c2 = ab + ac$$
$$1a + b2 \# c = a \# c + b \# c$$

Machine Translated by Google

En palabras

Si un producto es igual a 0,
entonces uno o ambos factores son 0.

Propiedad de producto cero

Si ab = 0, entonces a = 0, b = 0, o ambos son iguales a 0.

La Propiedad Distributiva se puede utilizar para eliminar paréntesis:

$$21x + 32 = 2x + 2 \# 3 = 2x + 6$$

La propiedad del producto cero se utilizará para resolver ecuaciones (Sección A.6). Para Por ejemplo, si 2x = 0, entonces 2 = 0 o x = 0. Como 2 · 0, se deduce que x = 0.

La recta numérica real

Los números reales se pueden representar mediante puntos en una recta llamada recta de números reales. Existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de una recta.
Es decir, cada número real corresponde a un punto de la recta, y cada punto de la recta tiene un número real único asociado.

Elija un punto en una línea en algún lugar del centro y etiquételo O. Este punto, llamado origen, corresponde al número real 0. Vea la Figura 5. El punto 1 unidad a la derecha de O corresponde al número 1. El La distancia entre 0 y 1 determina la escala de la recta numérica. Por ejemplo, el punto asociado con el número 2 está dos veces más lejos de O que 1. Observe que una punta de flecha en el extremo derecho de la línea indica la dirección en la que aumentan los números. Los puntos a la izquierda del origen corresponden a los números reales - 1, - 2, etc. La figura 5 también muestra los puntos 1

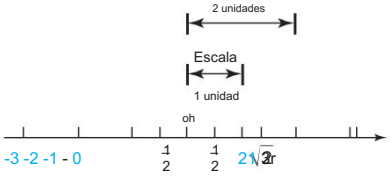


Figura 5 Recta de números reales

asociado con los números racionales - y 2 — $\frac{1}{2}$ y con los números irracionales 12 — y P.

DEFINICIÓN Coordenada; Recta de números reales

El número real asociado con un punto P se llama coordenada de P, y la recta a cuyos puntos se les han asignado coordenadas se llama recta de números reales.

Ahora resuelve el problema 2 3

La recta de números reales consta de tres clases de números reales, como se muestra en la Figura 6.

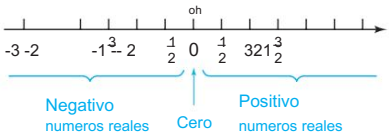


Figura 6

- Los números reales negativos son las coordenadas de los puntos a la izquierda del origen O.
- El número real cero es la coordenada del origen O.
- Los números reales positivos son las coordenadas de los puntos a la derecha de la origen O.

2 Graficar desigualdades

Una propiedad importante de la recta numérica real se desprende del hecho de que, dados dos números a y b, o a está a la izquierda de b, o a está en la misma ubicación que b, o a está a la derecha de b. Ver Figura 7.

Si a está a la izquierda de b, entonces “a es menor que b”, que se escribe a 6 b. Si a está a la derecha de b, entonces “a es mayor que b”, que se escribe a 7 b. Si a está en el mismo lugar que b, entonces a = b. Si a es menor o igual que b, entonces a ... b. De manera similar, a Ú b significa que a es mayor o igual que b. En conjunto, los símbolos 6, 7,…,
y Ú se llaman símbolos de desigualdad.

Tenga en cuenta que a 6 b y b 7 a significan lo mismo. No importa si escribimos 2 6 3 o 3 7 2.

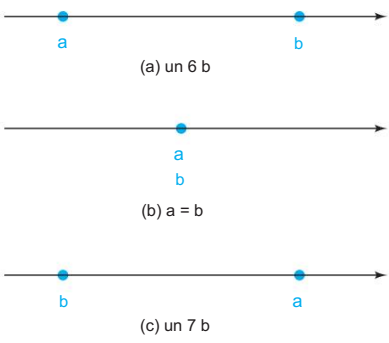


Figura 7

Además, si a 6 b o si b 7 a, entonces la diferencia b - a es positiva. ¿Ves por qué?

Machine Translated by Google

Una desigualdad es un enunciado en el que dos expresiones están relacionadas por un símbolo de desigualdad. Las expresiones se denominan lados de la desigualdad.
Las desigualdades de la forma a 6 b o b 7 a se llaman desigualdades estrictas, mientras que las desigualdades de la forma a … bo b Ú a se llaman desigualdades no estrictas.

Con base en la discusión hasta el momento, concluimos que

- a 7 0 es equivalente a a es positivo
- a 6 0 es equivalente a a es negativo

A veces leemos un 7 0 diciendo que "a es positivo". Si un Ú 0, entonces un 7 0 o a = 0, y podemos leer esto como "a no es negativo".

Ahora resuelve los problemas 2 7 y 3 7

EJEMPLO 4 Graficar desigualdades

(a) En la recta de números reales, grafique todos los números x para los cuales x 7 4.

(b) En la recta de números reales, grafique todos los números x para los cuales x ... 5.

Solución

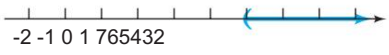


Figura 8 x 7 4

Figura 9 x … 5

(a) Vea la Figura 8. Observe que usamos un paréntesis izquierdo para indicar que el número 4 no es parte del gráfico.

(b) Vea la Figura 9. Observe que usamos un corchete derecho para indicar que el número 5 es parte del gráfico.

Ahora resuelve el problema 4 3

3 Encontrar la distancia en la recta numérica real

El valor absoluto de un número a es la distancia de 0 a a en la recta numérica.

Por ejemplo, - 4 está a 4 unidades de 0 y 3 está a 3 unidades de 0. Consulte la Figura 10. Es decir, el valor absoluto de - 4 es 4 y el valor absoluto de 3 es 3.

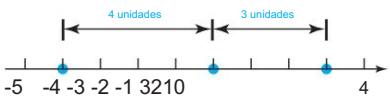


Figura 10

A continuación se ofrece una definición más formal de valor absoluto.

DEFINICIÓN Valor Absoluto

El valor absoluto de un número real a, denotado por el símbolo 0 a 0 , según se define las reglas

0 a 0 = a si a Ú 0 y 0 a 0 = - a si a 6 0

Por ejemplo, como - 4 6 0, se debe utilizar la segunda regla para obtener

0 - 4 0 = - 1 - 42 = 4

EJEMPLO 5 Calcular el valor absoluto

(a) 0 8 0 = 8 (b) 0 0 0 = 0 (c) 0 - 15 0 = - 1 - 152 = 15

Mire nuevamente la Figura 10. La distancia de - 4 a 3 es 7 unidades. Esta distancia es la diferencia 3 - 1 - 42, obtenida restando la coordenada menor de la mayor. Sin embargo, dado que 0 3 - 1 - 42 0 = 0 7 0 = 7 y 0 - 4 - 3 0 = 0 - 7 0 = 7, podemos usar el valor absoluto para calcular la distancia entre dos puntos sin preocuparnos de cuál es menor. .

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Distancia entre dos puntos

Si P y Q son dos puntos en la recta numérica real con coordenadas a y b, respectivamente, la distancia entre P y Q, denotada por d1P, Q2, es

d1P, Q2 = 0 b - a 0

Como 0 b - a 0 = 0 a - b 0 , se deduce que d1P, Q2 = d1Q, P2.

EJEMPLO 6 Encontrar la distancia en una recta numérica

Sean P, Q y R puntos en la recta numérica real con coordenadas - 5, 7 y - 3, respectivamente. Encuentra la distancia

(a) entre P y Q (b) entre Q y R

Solución Ver Figura 11.

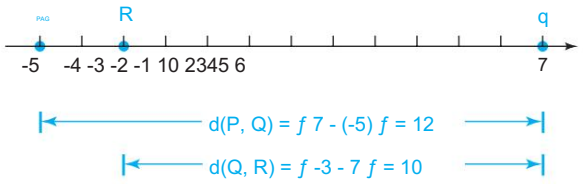


Figura 11

(a) d1P, Q2 = 0 7 - 1 - 52 0 = 0 12 0 = 12

(b) d1Q, R2 = 0 - 3 - 7 0 = 0 - 10 0 = 10

Ahora problema de trabajo 4 9

4 Evaluar expresiones algebraicas

Recuerde, en álgebra usamos letras como x, y, a, b y c para representar números. Si una letra utilizada es para representar cualquier número de un conjunto dado de números, se llama variable. Una constante es un número fijo, como 5 o 13, o una letra que representa un número fijo (posiblemente no especificado).

Las constantes y variables se combinan mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para formar expresiones algebraicas. Ejemplos de expresiones algebraicas incluyen

$$x + 3 \qquad \frac{3}{1 - t} \qquad 7x - 2y$$

Para evaluar una expresión algebraica, sustituya un valor numérico por cada variable.

EJEMPLO 7 Evaluación de una expresión algebraica

Evalúe cada expresión si x = 3 e y = - 1.

(a) x + 3y (b) 5xy (C) $\frac{3 \text{ años}}{2 - 2x}$ (d) 0 - 4x + y 0

Solución (a) Sustituya x por 3 y y por - 1 en la expresión x + 3y.

x + 3y = 3 + 31 - 12 = 3 + 1 - 32 = 0
C
x·3, y· ·1

Machine Translated by Google

(b) Si x = 3 e y = - 1, entonces

$$5xy = 5 \# 3 \# 1 - 12 = - 15$$

(c) Si x = 3 e y = - 1, entonces

$$\frac{3 \text{ años}}{2 - 2x} = \frac{31 - 12}{2 - 2 \# 3} = \frac{- 3}{2 - 6} = \frac{- 3}{- 4} = \frac{3}{4}$$

(d) Si x = 3 e y = - 1, entonces

$$0 - 4x + y\,0 = 0 - 4 \# 3 + 1 - 12\,0 = 0 - 12 + 1 - 12\,0 = 0 - 13\,0 = 13$$

Ahora resuelva los problemas 5 1 y 5 9

5 Determinar el dominio de una variable

Al trabajar con expresiones o fórmulas que involucran variables, se puede permitir que las variables tomen valores de solo un cierto conjunto de números. Por ejemplo, en la fórmula para el área A de un círculo de radio r, $A = pr^2$, la variable r es necesariamente restringido a los números reales positivos. En la expresión $\frac{1}{x}$, la variable x no puede tomar el valor 0, ya que la división entre 0 no está definida.

DEFINICIÓN Dominio de una variable

El conjunto de valores que puede asumir una variable se denomina dominio de la variable.

EJEMPLO 8

Encontrar el dominio de una variable

El dominio de la variable x en la expresión.

$$\frac{5}{x - 2}$$

es 5x 0 x · 26 ya que, si x = 2, el denominador pasa a ser 0, lo cual no está definido.

EJEMPLO 9

Circunferencia de un círculo

En la fórmula para la circunferencia C de un círculo de radio r,

$$C = 2pr$$

el dominio de la variable r, que representa el radio del círculo, es el conjunto de números reales positivos, 5r0r 7 06. El dominio de la variable C, que representa la circunferencia del círculo, es también el conjunto de números reales positivos, 5C 0 C 7 06.

Al describir el dominio de una variable, podemos utilizar notación de conjuntos o palabras, lo que sea más conveniente.

Ahora problema de trabajo 6 9

6 Utilice las leyes de los exponentes

Los exponentes enteros proporcionan una notación abreviada para representar multiplicaciones repetidas de un número real. Por ejemplo,

$$34 = 3 \# 3 \# 3 \# 3 = 81$$

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN un norte

Si a es un número real y n es un entero positivo, entonces el símbolo an representa el producto de n factores de a. Eso es,

$$un = un \quad \underbrace{a\#\ \cdots\ \#a}_{\text{norte factores}} \qquad (1)$$

ADVERTENCIA Tenga cuidado con los signos menos y los exponentes.

$$-24 = -1\#24 = -16$$

mientras

$$1-224 = 1-221-221-221-22 = 16$$ j

En la definición se entiende que a1 = a. Además, a2 = a # a, a3 = a # a # a, etcétera. En la expresión un , a se llama base y n se llama exponente o potencia. Leemos an como "a elevado a la potencia n" o como "a a la enésima potencia". Generalmente leemos a2 como "un cuadrado" y a3 como "un cubo".

Al trabajar con exponentes, se realiza la operación de elevar a una potencia. antes de cualquier otra operación. Como ejemplos,

$$4\#32 = 4\#9 = 36 \qquad 22 + 32 = 4 + 9 = 13$$

$$-24 = -16 \qquad 5\#32 + 2\#4 = 5\#9 + 2\#4 = 45 + 8 = 53$$

Los paréntesis se utilizan para indicar las operaciones que se realizarán primero. Por ejemplo,

$$1 - 22^{4} = 1 - 22\ 1 - 22\ 1 - 22\ 1 - 22 = 16 \qquad 12 + 32^{2} = 52 = 25$$

DEFINICIÓN un 0

Si a · 0, entonces

$$a0 = 1$$

DEFINICIÓN a·n

Si a · 0 y si n es un entero positivo, entonces

$$un = un^{1}$$

Siempre que encuentre un exponente negativo, piense en "recíproco".

EJEMPLO 10 Evaluación de expresiones que contienen exponentes negativos

(a) $2-3 = \frac{1}{23} = \frac{1}{8}$ (b) $x-4 = \frac{1}{x4}$ (c) $un\ 1^{-2}_{\text{segundo}} = \frac{1}{un\ 1^{2}_{\text{segundo}}} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

Ahora resuelva los problemas 8 7 y 1 0 7

Las siguientes propiedades, denominadas leyes de los exponentes, se pueden demostrar utilizando las definiciones anteriores. En la lista, a y b son números reales y myn son números enteros.

TEOREMA Leyes de los exponentes

$$aman = am+n \quad 1am2^{\text{norte}} = amn \quad 1ab2n = anbn$$

$$\frac{\text{soy}}{un} = un^{\text{Minnesota}} = \frac{1}{an-m} \text{ si un} \cdot 0 \qquad \left(\frac{un}{b}\right)^{n} = \frac{un}{mn} \text{ si b} \cdot 0$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 11 Usando las leyes de los exponentes

Escribe cada expresión de modo que todos los exponentes sean positivos.

(a) $\frac{x5y-2}{x3y}$ x · 0, y · 0 (b)¢ $\frac{x-3}{3y-1}$ ≤ -2 x · 0, y · 0

Solución

(a) $\frac{x5y-2}{x3y} = \frac{x5}{x3} \cdot \frac{y-2}{y} = x5-3 \# y-2-1 = x2y-3 = x2 \# y3 \frac{1}{} = \frac{x2}{y3}$

NOTA Escribe siempre la respuesta final usando exponentes positivos.

(b)¢ $\frac{x-3}{3y-1}$ ≤ -2 $= \frac{1x-32-2}{13a-12-2} = \frac{x6}{3-2\ 1a-12-2} = \frac{x6}{\frac{1}{9}y2} = \frac{9x6}{y2}$

Ahora resuelve los problemas 8 9 y 9 9.

7 Evaluar raíces cuadradas

Un número real se eleva al cuadrado cuando se eleva a la potencia 2. Lo inverso de elevar al cuadrado es encontrar una raíz cuadrada. Por ejemplo, como $62 = 36$ y $(-6)^2 = 36$, los números 6 y - 6 son raíces cuadradas de 36.

En palabras
$\sqrt{36}$ significa "¿cuál es el número no negativo cuyo cuadrado es 36?"

El símbolo $\sqrt{\ }$, llamado signo radical, se utiliza para denotar la raíz cuadrada principal o no negativa. Por ejemplo, $\sqrt{36} = 6$.

DEFINICIÓN Raíz cuadrada principal

Si a es un número real no negativo, el número no negativo b para el cual $b2 = a$ es la raíz cuadrada principal de a y se denota por $b = \sqrt{a}$.

Cabe destacar los siguientes comentarios:

- Los números negativos no tienen raíces cuadradas (en el sistema de números reales), porque el cuadrado de cualquier número real no es negativo. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no es un número real, porque no existe ningún número real cuyo cuadrado sea -4.
- La raíz cuadrada principal de 0 es 0, ya que $02 = 0$. Es decir, $\sqrt{0} = 0$.
- La raíz cuadrada principal de un número positivo es positiva.
- Si c Ú 0, entonces $(\sqrt{c})^2 = c$. Por ejemplo, $(\sqrt{22})^2 = 2$ y $(\sqrt{32})^2 = 3$.

EJEMPLO 12 Evaluación de raíces cuadradas

(a) $\sqrt{64} = 8$ (b) Un $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$ c) $\sqrt{21,42}$ = 1,4

Los ejemplos 12(a) y (b) son ejemplos de raíces cuadradas de cuadrados perfectos, ya que $64 = 82$ y $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$.

Considere la expresión $\sqrt{2a^2}$. Dado que $a2$ Ú 0, la raíz cuadrada principal de $a2$ se define si es 7 0 o 6 0. Sin embargo, dado que la raíz cuadrada principal no es negativa, necesitamos un valor absoluto para garantizar el resultado no negativo. Eso es,

$$\sqrt{2a^2} = |a| \text{ a cualquier número real} \quad (2)$$

Machine Translated by Google

EJEMPLO 13 Usando la ecuación (2)

(a) $\sqrt{212,32}\ 2 = 0\ 2,3\ 0 = 2,3$ (c) (b) $\sqrt{21 - 2,32^{2}} = 0 - 2,3\ 0 = 2,3$

$2x2 = 0 \times 0$

Ahora problema de trabajo 9 5

Calculadoras y utilidades gráficas

Las calculadoras no pueden mostrar decimales que contengan una gran cantidad de dígitos. Por ejemplo, algunas calculadoras son capaces de mostrar sólo ocho dígitos. Cuando un número requiere más de ocho dígitos, la calculadora trunca o redondea.
Para ver cómo tu calculadora maneja los decimales, divide 2 entre 3. ¿Cuántos dígitos ves? ¿El último dígito es un 6 o un 7? Si es un 6, tu calculadora trunca; si es un 7, tu calculadora redondea.

Hay diferentes tipos de calculadoras. Una calculadora aritmética sólo puede sumar, restar, multiplicar y dividir números; por lo tanto, este tipo no es adecuado para este curso. Las calculadoras científicas tienen todas las capacidades de las calculadoras aritméticas y también contienen teclas de función etiquetadas como ln, log, sin, cos, tan, xy. , inv, etc. Graficando
Las calculadoras tienen todas las capacidades de las calculadoras científicas y contienen una pantalla en la que se pueden mostrar gráficos. Usamos el término utilidad gráfica para referirnos genéricamente a todas las calculadoras gráficas y paquetes de software de computadora y usamos el símbolo siempre que sea necesario utilizar una utilidad gráfica. En este texto el uso de una utilidad gráfica es opcional.

8 Utilice una calculadora para evaluar exponentes

Su calculadora tiene una tecla de intercalación, ^, o una tecla xy , que se utiliza para cálculos que involucran exponentes.

EJEMPLO 14 Exponentes en una calculadora gráfica

Evaluar: 12.32^{5}

Solución La Figura 12 muestra el resultado usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C.

Ahora resuelve el problema 1 2 5

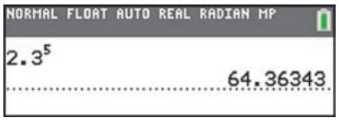


Figura 12

A.1 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. A(n) es una letra que se usa en álgebra para representar cualquier número de un conjunto determinado de números.
2. En la recta de números reales, el número real cero es la coordenada del _____ .
3. Una desigualdad de la forma a 7 b se llama desigualdad(n). _____
4. En la expresión 24 , el numero 2 se llama _____ y 4 se llama el _____ .
5. Elección múltiple Si a es un número real no negativo, ¿qué enunciado de desigualdad describe mejor a?
   (a) a 6 0 (b) a 7 0 (c) a … 0 (d) a Ú 0
6. Opción múltiple Sean a y b números reales distintos de cero y m y n números enteros. ¿Cuál de las siguientes no es una ley de exponentes?
   (a) una una $\frac{}{}$ b n = $\frac{un}{mn}$ (b) 1 a.m.2 norte = soy+n
   (C) $\frac{soy}{un}$ = am-n (d) 1ab2 n = an bn
7. Opción múltiple El conjunto de valores que una variable puede asumir de la se llama (a) _____ variable.
   dominio (b) rango (c) coordenada (d) origen
8. Verdadero o Falso La distancia entre dos puntos distintos en la recta de números reales es siempre mayor que cero.
9. Verdadero o Falso El valor absoluto de un número real siempre es mayor que cero.
10. Verdadero o Falso Lo inverso de elevar al cuadrado es encontrar un cuadrado raíz.

Machine Translated by Google

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 22, utilice U = conjunto universal = 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 96, A = 51, 3, 4, 5, 96, B = 52, 4, 6, 7, 86 y C = 51, 3, 4, 66 para encontrar cada conjunto.

11. A B
12. A C
13. A∩B _ _
14. A∩C _ _
15. 1A B2∩C _ _ _
16. 1A∩B2 C _ _ _
17. Un
18.c _
19. A∩B _ _
20. B C
21. A B
22. B ∩ C

23. En la recta de números reales, etiqueta los puntos con coordenadas 0, 1, - 1, 2. $\frac{5}{}$, - 2,5, $\frac{3}{4}$, y 0,25.

24. Repita el problema 23 para las coordenadas 0, - 2, 2, - 1,5, 2 $\frac{3}{}$, $\frac{1}{3}$, y 3 $\frac{2}{}$.

En los problemas 25 a 34, reemplace el signo de interrogación por 6, 7 o =, lo que sea correcto.

25. $\frac{1}{2}$? 0
26. 5 ? 6
27. - 1 ? - 2
28. - 3 ? - 2 $\frac{5}{}$
29. pag? 3.14
30. 22 ? 1.41
31. $\frac{1}{2}$? 0,5
32. $\frac{1}{3}$? 0,33
33. $\frac{2}{3}$? 0,67
34. $\frac{1}{4}$? 0,25

En los problemas 35 a 40, escribe cada enunciado como una desigualdad.

35. x es positivo
36. z es negativo
39. x es menor o igual a 1
37. x es menor que 2
38. y es mayor que - 5
40. x es mayor o igual a 2

En los problemas 41 a 44, grafica los números x en la recta numérica real.

41. x Ú - 2
42. x 6 4
43.x7-1 _ _
44. x … 7

En los problemas 45 a 50, utilice la recta numérica real dada para calcular cada distancia.

45. d1C, D2
46. d1C, A2
47. d1D, E2
48. d1C, E2
49. d1A, E2
50. d1D, B2

En los problemas 51 a 58, evalúe cada expresión si x = - 2 e y = 3.

51. x + 2y
52. 3x + y
53. 5xy + 2 2x
54. - 2x + xy
55. $\frac{}{x - y}$
56. $\frac{x + y}{x - y}$
57. $\frac{3x + 2y}{2 + años}$
58. $\frac{2x - 3}{y}$

En los problemas 59 a 68, encuentre el valor de cada expresión si x = 3 e y = - 2.

59. 0 x + y 0 0
60. 0 x - y 0
61. 0 x 0 + 0 y 0
62. 0 x 0 - 0 y 0
63. $\frac{0x0 _ _}{X}$
64. $\frac{y\ 0}{y}$
65. 0 4x - 5y 0
66. 0 3x + 2y 0
67. 0 0 4x 0 - 0 5y 0 0
68. 3 0 x 0 + 2 0 y 0

En los problemas 69 a 76, determine cuál de los valores (a) a (d), si corresponde, debe excluirse del dominio de la variable en cada expresión.

(a) x = 3 x2 (b) x = 1 (c) x = 0x2 (d) x = - 1

69. $\frac{- 1}{X}$
70. $\frac{+ 1}{X}$
71. $\frac{X}{x2 - 9}$
72. $\frac{X}{x2 + 9}$
73. $\frac{x2}{x2 + 1}$
74. $\frac{x3}{x2 - 1}$
75. $\frac{x2 + 5x - 10}{x3 - x}$
76. $\frac{- 9x2 - x + 1}{x3 + x}$

En los problemas 77 a 80, determine el dominio de la variable x en cada expresión.

77. $\frac{4}{x - 5}$
78. $\frac{- 6}{x + 4}$
79. $\frac{X}{x + 4}$
80. $\frac{x - 2}{x - 6}$

Machine Translated by Google

En los problemas 81 a 84, use la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para convertir grados Fahrenheit a grados Celsius para encontrar la medida Celsius de cada temperatura Fahrenheit.

81. $F = 32°$ 82. $F = 212°$ 83. $F = 77°$ 84. $F = -4°$

En los problemas 85 a 96, simplifica cada expresión.

85. $1 - 42^2$ 86. -42 87. $4-2$ 88. $-4-2$ 89. $3-6 \# 34$ 90. $4-2 \# 43$

91. $13-2\,2^{-1}$ 92. $12-1\,2^{-3}$ 93. $\sqrt{225}$ 94. $\sqrt[3]{236}$ 95. $\sqrt{21 - 42^2}$ 96. $\sqrt{21 - 32^2}$

En los problemas 97 a 106, simplifique cada expresión. Expresa la respuesta de modo que todos los exponentes sean positivos. Siempre que un exponente sea 0 o negativo, supongamos que la base no es 0.

97. $18x3\,2^2$ 98. $1 - 4x2\,2^{-1}$ 99. $1x2y-1\,2^2$ 100. $1x-1y2^3$ 101. $\frac{x2y3}{xy4}$

102. $\frac{x-2y}{xy2}$ 103. $\frac{1 - 22\ 3x4\ 1yz2^2}{32xy3z}$ 104. $\frac{4x-2\ 1yz2^{-1}}{23x4y}$ 105. $\sqrt[4\text{ años}-1]{3x-1} \le -2$ 106. $\sqrt[6y-2]{5x-2} \le -3$

En los problemas 107 a 118, encuentre el valor de cada expresión si $x = 2$ e $y = -1$.

107. $2xy-1$ 108. $-3x-1y$ 109. $x2 + y2$ 110. $x2y2$

111. $1xy2^2$ 112. $1x + y2^2$ 113. $\sqrt[3]{2x2}$ 114. $1\,1x2\,\sqrt{2}$

115. $\sqrt{2x2 + y2}$ 116. $\sqrt{2x2 + 2y2}$ 117. xy 118. yx

119. Encuentra el valor de la expresión $2x3 - 3x2 + 5x - 4$ si $x = 2$. ¿Cuál es el valor si $x = 1$?

120. Encuentra el valor de la expresión $4x3 + 3x2 - x + 2$ si $x = 1$. ¿Cuál es el valor si $x = 2$?

121. ¿Cuál es el valor de $\frac{16662^4}{12222^4}$?

122. ¿Cuál es el valor de $10,12$? $\sqrt[3]{1202\ 3}$?

En los problemas 123 a 130, use una calculadora para evaluar cada expresión. Redondea tu respuesta a tres decimales.

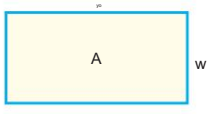
123. 18.22^6 124. 13.72^5 125. 16.12^{-3} 126. 12.22^{-5}

127. $1 - 2{,}82^6$ 128. -12.82^6 129. $1 - 8.112^{-4}$ 130. -18.112^{-4}

Aplicaciones y extensiones

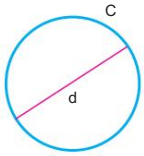
En los problemas 131 a 140, exprese cada enunciado como una ecuación que incluya las variables indicadas.

131. Área de un rectángulo El área A de un rectángulo es el producto de su longitud l y su ancho w.

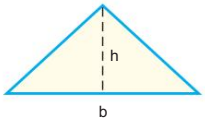


132. Perímetro de un rectángulo El perímetro P de un rectángulo es el doble de la suma de su longitud l y su ancho w.

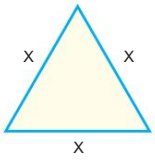
133. Circunferencia de un círculo La circunferencia C de un círculo es el producto de p y su diámetro d.



134. Área de un triángulo El área A de un triángulo es la mitad del producto de su base by su altura h.



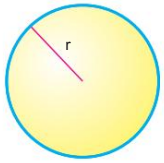
135. Área de un triángulo equilátero El área A de un triangulo equilatero es multiplicado por el cuadrado de la longitud x de un lado.



Machine Translated by Google

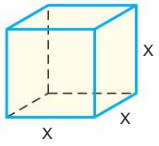
136. Perímetro de un triángulo equilátero El perímetro P de un triángulo equilátero es 3 veces la longitud x de un lado.

137. Volumen de una esfera El volumen V de una esfera es multiplicado por p multiplicado por el cubo del radio r.



138. Área de superficie de una esfera El área de superficie S de una esfera es 4 veces p por el cuadrado del radio r.

139. Volumen de un cubo El volumen V de un cubo es el cubo del longitud x de un lado.



140. Área de superficie de un cubo El área de superficie S de un cubo es 6 multiplicado por el cuadrado de la longitud x de un lado.

141. Costo de fabricación El costo de producción semanal C de fabricación x relojes viene dada por la fórmula C = 4000 + 2x, donde la variable C está en dólares.
(a) ¿Cuál es el costo de producir 1000 relojes?
(b) ¿Cuál es el costo de producir 2000 relojes?

142. Saldo de una cuenta corriente A principios de mes, Mike tenía un saldo de $210 en su cuenta corriente.
Durante el mes siguiente, depositó $80, hizo un retiro en cajero automático por $120, hizo otro depósito de $25 y realizó dos pagos electrónicos: uno por $60 y otro por $32.
También se le impuso un cargo por servicio mensual de 5 dólares. ¿Cuál era su saldo al final del mes?

En los problemas 143 y 144, escribe una desigualdad usando un valor absoluto para describir cada afirmación.

143. x es al menos 6 unidades de 4.

144. x es más de 5 unidades de 2.

145. Voltaje estadounidense En los Estados Unidos, el voltaje doméstico normal es de 110 voltios. Es aceptable que el voltaje real x difiera del normal en como máximo 5 voltios. Una fórmula que describe esto es

$$0\ x - 110\ 0 \ldots 5$$

(a) Demuestre que un voltaje de 108 voltios es aceptable.
(b) Demuestre que un voltaje de 104 voltios no es aceptable.

146. Voltaje extranjero En otros países, el voltaje doméstico normal es de 220 voltios. Es aceptable que el voltaje real x difiera del normal en como máximo 8 voltios. Una fórmula que describe esto es

$$0\ x - 220\ 0 \ldots 8$$

(a) Demuestre que un voltaje de 214 voltios es aceptable.
(b) Demuestre que un voltaje de 209 voltios no es aceptable.

147. Fabricación de rodamientos de bolas de precisión FireBall Company fabrica rodamientos de bolas para equipos de precisión. Uno de sus productos es un rodamiento de bolas con un radio indicado de 3 centímetros (cm). Sólo se aceptan rodamientos de bolas con un radio dentro de 0,01 cm de este radio indicado. Si x es el radio de un rodamiento de bolas, una fórmula que describe esta situación es

$$0\ x - 3\ 0 \ldots 0{,}01$$

(a) ¿Es aceptable un rodamiento de bolas con radio x = 2,999?
(b) ¿Es aceptable un rodamiento de bolas con radio x = 2,89?

148. Temperatura corporal La temperatura normal del cuerpo humano es 98,6°F. Una temperatura x que difiere de la normal en al menos 1,5 °F se considera no saludable. Una fórmula que describe esto es

$$0\ x - 98{,}6\ 0\ \acute{U}\ 1{,}5$$

(a) Demuestre que una temperatura de 97°F no es saludable.
(b) Demuestre que una temperatura de 100°F no es dañina para la salud.

149. ¿Es igual a 0,333? Si no, ¿cuál es más grande? ¿Por cuanto?

150. ¿Es igual a 0,666? Si no, ¿cuál es más grande? ¿Por cuanto?

Explicar conceptos: discusión y escritura

151. ¿Existe un número real positivo “más cercano” a 0?

152. Juego de números ¡Estoy pensando en un número! Se encuentra entre 1 y 10; su cuadrado es racional y se encuentra entre 1 y 10. El número es mayor que p. Corrija a dos decimales (es decir, truncado a dos decimales), nombre el número. Ahora piensa en tu propio número, descríbelo y desafía a un compañero de estudios a que lo nombre.

153. Escribe un breve párrafo que ilustre las similitudes y diferencias entre “menor que” 162 y “menor o igual a” 1…2.

154. Da una razón por la cual la afirmación 5 6 8 es verdadera.

Machine Translated by Google

A.2 Fundamentos de la geometría

OBJETIVOS 1 Usar el teorema de Pitágoras y su recíproco (p. A14)

2 Conozca las fórmulas de geometría (p. A15)

3 Comprender los triángulos congruentes y los triángulos semejantes (pág. A16)

1 Utilice el teorema de Pitágoras y su recíproco

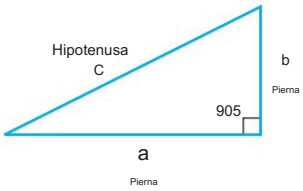


Figura 13 Un triángulo rectángulo

El teorema de Pitágoras es un enunciado sobre triángulos rectángulos. Un triángulo rectángulo es aquel que contiene un ángulo recto , es decir, un ángulo de 90°. El lado del triángulo opuesto al ángulo de 90° se llama hipotenusa ; los dos lados restantes se llaman patas. En la Figura 13 hemos utilizado c para representar la longitud de la hipotenusa y a
y b para representar las longitudes de los catetos. Observe el uso del símbolo para mostrar el ángulo de 90°. Ahora enunciamos el teorema de Pitágoras.

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. Es decir, en el triángulo rectángulo que se muestra en la Figura 13,

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (1)$$

EJEMPLO 1 Encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo, un cateto tiene longitud 4 y el otro tiene longitud 3. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

Solución Como el triángulo es rectángulo, usamos el teorema de Pitágoras con a = 4 y b = 3 para encontrar la longitud c de la hipotenusa. De la ecuación (1),

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$c = \sqrt{225} = 5$$

Ahora resuelve el problema 1 5

Lo contrario del teorema de Pitágoras también es cierto.

CONVERSO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo, si el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, el triángulo es un triángulo rectángulo. El ángulo de 90° está opuesto al lado más largo.

EJEMPLO 2 Verificar que un triángulo es rectángulo

Demuestre que un triángulo cuyos lados tienen longitudes 5, 12 y 13 es un triángulo rectángulo. Identifica la hipotenusa.

Solución Cuadra las longitudes de los lados.

$$5^2 = 25 \qquad 12^2 = 144 \qquad 13^2 = 169$$

Machine Translated by Google

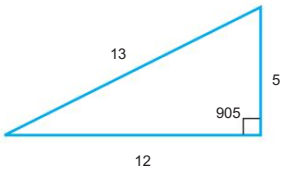


Figura 14

Observe que la suma de los dos primeros cuadrados 125 y 1442 es igual al tercer cuadrado 11692. Es decir, porque 52 + 122 = 132 , el triángulo es un triángulo rectángulo. El lado más largo, 13, es la hipotenusa. Ver Figura 14.

Ahora resuelve el problema 2 3

EJEMPLO 3

Aplicando el teorema de Pitágoras

El edificio más alto del mundo es el Burj Khalifa en Dubai, Emiratos Árabes Unidos, con 2717 pies y 163 pisos. La plataforma de observación está a 1483 pies sobre el nivel del suelo. ¿Hasta dónde puede ver una persona que se encuentre en la plataforma de observación (con la ayuda de un telescopio)? Utilice 3960 millas para el radio de la Tierra y suponga que la Tierra es una esfera.
Fuente: Consejo de Edificios Altos y Hábitat Urbano

Solución Desde el centro de la Tierra, dibuja dos radios: uno a través de Burj Khalifa y el otro hasta el punto más lejano que una persona puede ver desde la plataforma de observación. Vea la Figura 15. Aplique el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo.

Dado que 1 milla = 5280 pies, $1483 \text{ pies} = \frac{1483}{5280} \text{ millas}$. Entonces

$$d^2 + 139602^2 = a3960 + \frac{1483}{5280}b^2$$

$$d^2 = a3960 + \frac{1483}{5280}b^2 - 139602^2 \approx 2224{,}58$$

$$re \approx 47{,}17$$

Una persona puede ver a más de 47 millas desde la plataforma de observación.

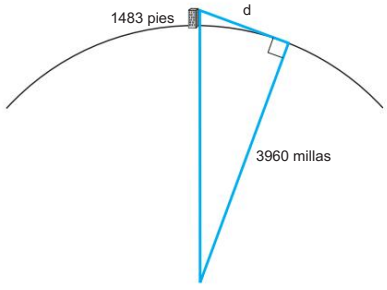


Figura 15

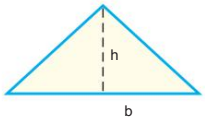
Ahora resuelve el problema 5 5

2 Conozca las fórmulas de geometría

Ciertas fórmulas de geometría son útiles para resolver problemas de álgebra.
Para un rectángulo de largo l y ancho w,

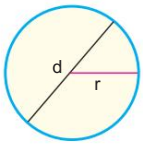
Área = lw Perímetro = 2l + 2w

Para un triángulo con base b y altura h,



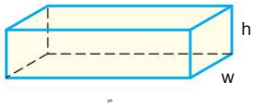
$$\text{Área} = bh\,\frac{1}{2}$$

Machine Translated by Google



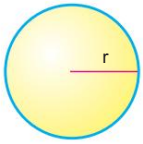
Para un círculo de radio r (diámetro d = 2r),

$$\text{Área} = \pi r^2 \qquad \text{Circunferencia} = 2\pi r = \pi d$$



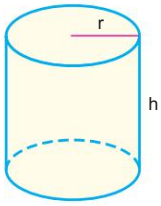
Para una caja rectangular cerrada de largo l, ancho w y alto h,

$$\text{Volumen} = lwh \qquad \text{Área de superficie} = 2lh + 2wh + 2lw$$



Para una esfera de radio r,

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{Área de superficie} = 4\pi r^2$$



Para un cilindro circular recto cerrado de altura h y radio r,

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h \qquad \text{Área de superficie} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Ahora resuelve el problema 3 1

EJEMPLO 4 Usar fórmulas geométricas

Un adorno para árbol de Navidad tiene la forma de un semicírculo encima de un triángulo. ¿Cuántos centímetros cuadrados (cm2) de cobre se necesitan para hacer el adorno si la altura del triángulo es de 6 cm y la base de 4 cm?

Solución

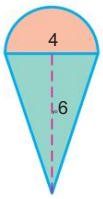


Figura 16

Vea la Figura 16. La cantidad de cobre requerida es igual al área sombreada. Esta área es la suma de las áreas del triángulo y del semicírculo. El triángulo tiene altura h = 6 y base b = 4. El semicírculo tiene diámetro d = 4, por lo que su radio es r = 2.

Área total = Área del triángulo + Área del semicírculo

$$= \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6 + \frac{1}{2}\pi\cdot 2^2 \qquad b = 4;\ h = 6;\ r = 2$$

$$= 12 + 2\pi \approx 18{,}28 \text{ cm}^2$$

Se necesitan unos 18,28 cm2 de cobre.

Ahora problema de trabajo 4 9

3 Comprender triángulos congruentes y triángulos semejantes

En palabras
Dos triángulos son congruentes si tienen el mismo tamaño y forma.

A lo largo del texto haremos referencia a los triángulos. Comenzamos con una discusión sobre triángulos congruentes . Según Dictionary.com, la palabra congruente significa "coincidir exactamente cuando se superpone". Por ejemplo, dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida y dos segmentos de recta son congruentes si tienen la misma longitud.

DEFINICIÓN Triángulos congruentes

Dos triángulos son congruentes si cada par de ángulos correspondientes tiene la misma medida y cada par de lados correspondientes tiene la misma longitud.

En la Figura 17, los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes tienen la misma longitud: a = d, b = e y c = f. Como resultado, estos triángulos son congruentes.

Machine Translated by Google

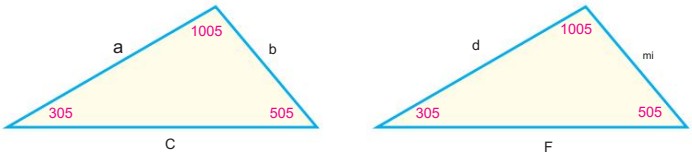


Figura 17 Triángulos congruentes

No es necesario verificar que los tres ángulos y los tres lados tengan la misma medida para determinar si dos triángulos son congruentes.

Determinar triángulos congruentes

- Caso Ángulo-Lado-Ángulo Dos triángulos son congruentes si dos de los ángulos son iguales y las longitudes de los lados correspondientes entre los dos ángulos son iguales.

  Por ejemplo, en la Figura 18(a), los dos triángulos son congruentes porque dos ángulos y el lado incluido son iguales.

- Caso Lado-Lado-Lado Dos triángulos son congruentes si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos son iguales.

  Por ejemplo, en la Figura 18(b), los dos triángulos son congruentes porque los tres lados correspondientes son todos iguales.

- Caso Lado-Ángulo-Lado Dos triángulos son congruentes si las longitudes de dos lados correspondientes son iguales y los ángulos entre los dos lados son iguales.

  Por ejemplo, en la Figura 18(c), los dos triángulos son congruentes porque dos lados y el ángulo incluido son iguales.

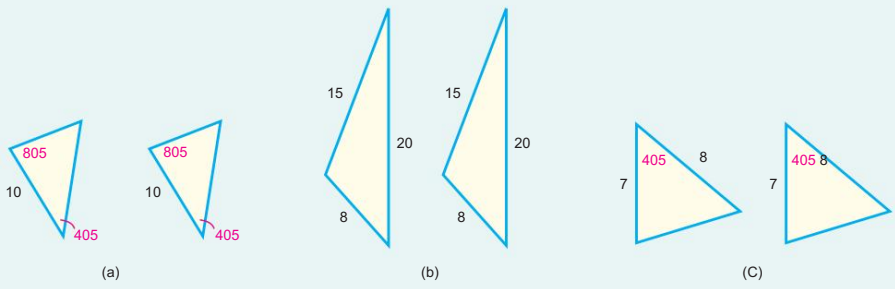


Figura 18

Contrastamos triángulos congruentes con triángulos semejantes .

DEFINICIÓN Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si los ángulos correspondientes son iguales y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.

Por ejemplo, los triángulos de la Figura 19 (en la página siguiente) son similares porque los ángulos correspondientes son iguales. Además, las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales porque cada lado del triángulo de la derecha es dos veces más largo que cada lado correspondiente del triángulo de la izquierda. Es decir, la relación de la

los lados correspondientes son una constante: $\frac{d}{a} = \frac{mi}{b} = \frac{F}{C} = 2.$

En palabras

Dos triángulos son similares si tienen la misma forma, pero (posiblemente) diferentes tamaños.

Machine Translated by Google

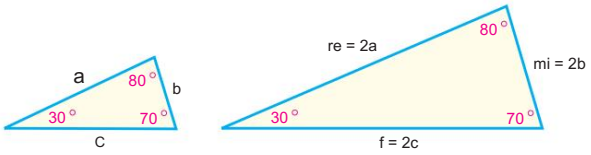


Figura 19 Triángulos similares

No es necesario verificar que los tres ángulos sean iguales y los tres lados sean proporcional para determinar si dos triángulos son semejantes.

Determinar triángulos semejantes

- Caso ángulo-ángulo Dos triángulos son semejantes si dos de los ángulos correspondientes son iguales.

  Por ejemplo, en la Figura 20(a), los dos triángulos son similares porque dos ángulos son iguales.

- Caso Lado-Lado-Lado Dos triángulos son similares si las longitudes de los tres Los lados de cada triángulo son proporcionales.

  Por ejemplo, en la Figura 20(b), los dos triángulos son similares porque

$$\frac{10}{30} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

- Caso Lado-Ángulo-Lado Dos triángulos son similares si dos lados correspondientes son proporcionales y los ángulos entre los dos lados son iguales.

  Por ejemplo, en la Figura 20(c), los dos triángulos son similares porque

$\frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ y los ángulos entre los lados son iguales.

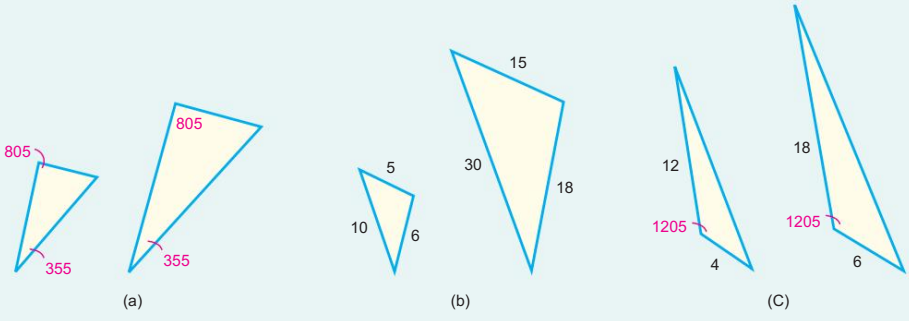


Figura 20

EJEMPLO 5 Usando triángulos similares

Dado que los triángulos de la Figura 21 son similares, encuentre la longitud x que falta y los ángulos A, B y C.

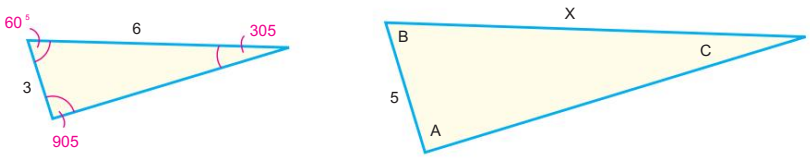


Figura 21

Machine Translated by Google

Solución Como los triángulos son semejantes, los ángulos correspondientes son iguales. Entonces A = 90°, B = 60° y C = 30°. Además, los lados correspondientes son proporcionales. Es decir, $\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$. Resolvemos esta ecuación para x.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$$

$5x \# \frac{3}{5} = 5x \# \frac{6}{x}$ Multiplica ambos lados por 5x.

$3x = 30$ Simplificar.

$x = 10$ Divide ambos lados por 3.

La longitud que falta es de 10 unidades.

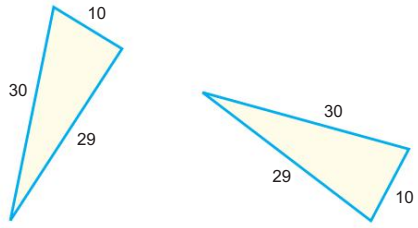
Ahora resuelve el problema 4 3

A.2 Evalúe su comprensión

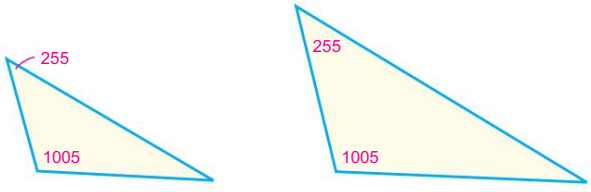
Conceptos y vocabulario

1. A(n) de _____ triangulo es aquel que contiene un angulo 90 grados. El lado más largo se llama _____.
2. Para un triángulo con base b y altura h, una fórmula para la el área A es _____.
3. La fórmula para la circunferencia C de un círculo de radio r es _____.
4. Dos triángulos son _____ si los ángulos correspondientes son iguales y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.
5. Opción múltiple ¿ Cuál de los siguientes no es un caso para determinar triángulos congruentes?
   (a) Ángulo–Lado–Ángulo (b) Lado–Ángulo–Lado
   (c) Ángulo–Ángulo–Ángulo (d) Lado–Lado–Lado
6. Opción múltiple Elige la fórmula para el volumen de una esfera de radio r.

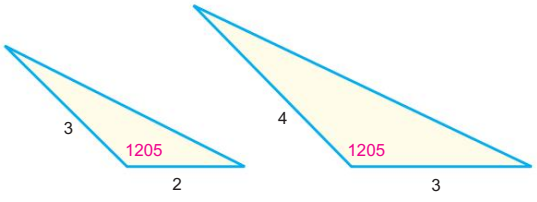
   (a) $\frac{4}{3}2\,pr$ $3\,(b)\,pr\frac{4}{3}$ (c) $4pr^3$ (d) $4pr^2$
7. Verdadero o Falso En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud del lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados.
8. Verdadero o Falso El triángulo con lados de longitudes 6, 8 y 10 es un triángulo rectángulo.
9. Verdadero o Falso El área de superficie de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}pr^2$.
10. Verdadero o Falso Los triángulos mostrados son congruentes.



11. Verdadero o Falso Los triángulos mostrados son similares.



12. Verdadero o Falso Los triángulos mostrados son similares.



Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 18, se dan las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo. Encuentra la hipotenusa.

13. a = 5, b = 12
14. a = 6, b = 8
15. a = 10, b = 24
16. a = 4, b = 3
17. a = 7, b = 24
18. a = 14, b = 48

En los problemas 19 a 26 se dan las longitudes de los lados de un triángulo. Determina cuáles son triángulos rectángulos. Para aquellos que lo son, identifica la hipotenusa.

19. 3, 4, 5
20. 6, 8, 10
21. 4, 5, 6
22. 2, 2, 3
23. 7, 24, 25
24. 10, 24, 26
25. 6, 4, 3
26. 5, 4, 7

Machine Translated by Google

27. Encuentra el área A de un rectángulo con una longitud de 6 pulgadas y un ancho de 7 pulgadas.

28. Encuentra el área A de un rectángulo con una longitud de 9 centímetros y un ancho de 4 centímetros.

29. Encuentra el área A de un triángulo con una altura de 14 pulgadas y una base de 4 pulgadas.

30. Encuentra el área A de un triángulo con una altura de 9 centímetros y una base de 4 centímetros.

31. Encuentra el área A y la circunferencia C de un círculo de radio 5 metros.

32. Encuentra el área A y la circunferencia C de un círculo de radio 2 pies.

33. Encuentra el volumen V y el área de superficie S de una caja rectangular cerrada con una longitud de 6 pies, un ancho de 8 pies y una altura de 5 pies.

34. Encuentra el volumen V y el área de superficie S de una caja rectangular cerrada con una longitud de 9 pulgadas, un ancho de 4 pulgadas y una altura de 8 pulgadas.

35. Encuentra el volumen V y el área de superficie S de una esfera de 5 centímetros de radio.

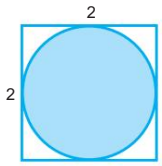
36. Encuentra el volumen V y el área de superficie S de una esfera de 3 pies de radio.

37. Encuentre el volumen V y el área de superficie S de un cilindro circular recto cerrado con radio de 9 pulgadas y altura de 8 pulgadas.

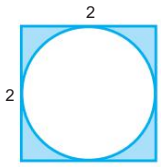
38. Encuentra el volumen V y el área de superficie S de un cilindro circular recto cerrado con radio de 8 pulgadas y altura de 9 pulgadas.

En los problemas 39 a 42, encuentre el área de la región sombreada.

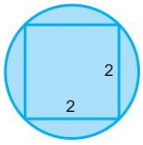
39.



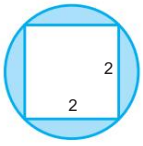
40.



41.

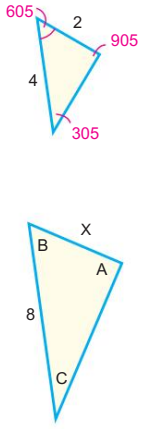


42.

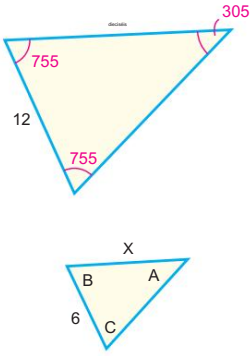


En los problemas 43 a 46, los triángulos de cada par son similares. Encuentre la longitud x faltante y los ángulos faltantes A, B y C.

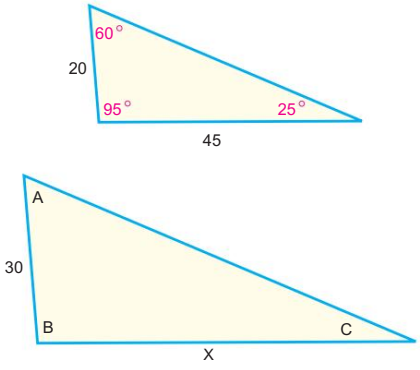
43.



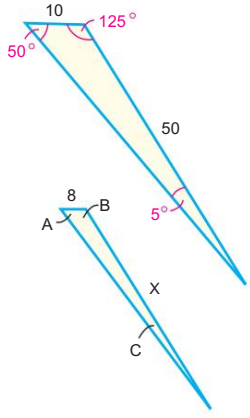
44.



45.



46.

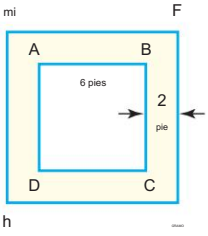


Aplicaciones y extensiones

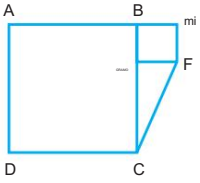
47. ¿Cuántos pies tiene una rueda con un diámetro de 16 pulgadas? viajó después de cuatro revoluciones?

48. ¿Cuántas revoluciones habrá completado un disco circular con un diámetro de 4 pies después de haber rodado 20 pies?

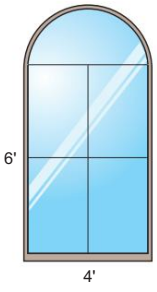
49. En la figura que se muestra, ABCD es un cuadrado, cada lado mide 6 pies de largo. El ancho de la frontera (parte sombreada) entre el cuadrado exterior EFGH y ABCD es 2 pies. Encuentra el área de la frontera.



50. Consulte la figura. Cuadrado ABCD tiene una superficie de 100 pies cuadrados; El BEFG cuadrado tiene una superficie de 16 pies cuadrados. ¿Cuál es el área del triángulo CGF?

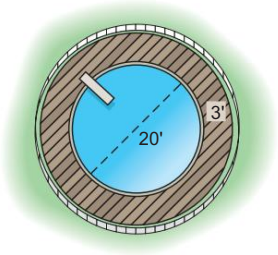


51. Arquitectura Una ventana normanda Consta de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentra el área del normando. ventana que se muestra en la figura. ¿Cuánto marco de madera se necesita para encerrar el ¿ventana?



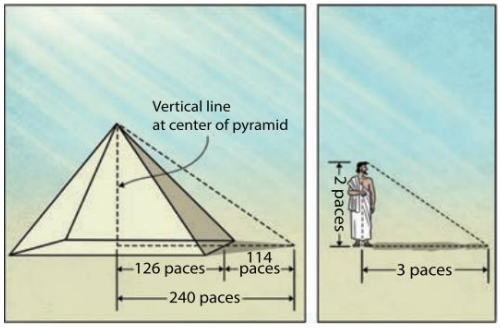
Machine Translated by Google

52. Construcción Una piscina circular de 20 pies de diámetro está rodeada por una plataforma de madera de 3 pies de ancho. ¿Cuál es el área de la plataforma? ¿Cuánta valla se necesita para cerrar la plataforma?



53. ¿Qué altura tiene la Gran Pirámide? Se dice que el antiguo filósofo griego Tales de Mileto visitó Egipto en una ocasión y calculó la altura de la Gran Pirámide de Keops mediante cálculos de sombras. Tales sabía que cada lado de la base de la pirámide tenía 252 pasos y que su propia altura era de 2 pasos. Midió la longitud de la sombra de la pirámide en 114 pasos y determinó que la longitud de su sombra era de 3 pasos. Ver la figura. Usando triángulos semejantes, determina la altura de la Gran Pirámide en términos del número de pasos.

Fuente: Diggins, Julie E, Cuerda, regla y sombra: la historia de la geometría, 2003, Whole Spirit Press, http://wholespiritpress.com.



54. El Triángulo de las Bermudas Karen está investigando el Triángulo de las Bermudas, que ella define aproximadamente como Hamilton, Bermuda; San Juan, Puerto Rico; y Fort Lauderdale, Florida. En su atlas, Karen mide las distancias en línea recta de Hamilton a Fort Lauderdale, de Fort Lauderdale a San Juan y de San Juan a Hamilton en aproximadamente 57 milímetros (mm), 58 mm y 53,5 mm, respectivamente.

Si la distancia real de Fort Lauderdale a San Juan es 1046 millas, aproxime las distancias reales de San Juan a Hamilton y de Hamilton a Fort Lauderdale.

En los problemas 55 a 57, utilice los hechos de que el radio de la Tierra es 3960 millas y 1 milla = 5280 pies.

55. ¿Hasta dónde puedes ver? La torre de mando del USS Silversides, un submarino de la Segunda Guerra Mundial ahora estacionado permanentemente en Muskegon, Michigan, se encuentra aproximadamente a 20 pies sobre el nivel del mar. ¿A qué distancia puedes ver desde la torre de mando?

56. ¿Hasta dónde puedes ver? Una persona que mide 6 pies de altura está parada en la playa de Fort Lauderdale, Florida, y mira hacia el Océano Atlántico. De repente, aparece un barco en el horizonte. ¿A qué distancia está el barco de la costa?

57. ¿Hasta dónde puedes ver? La cubierta de un destructor está a 100 pies sobre el nivel del mar. ¿A qué distancia puede ver una persona desde la cubierta? ¿A qué distancia puede ver una persona desde el puente, que está a 150 pies sobre el nivel del mar?

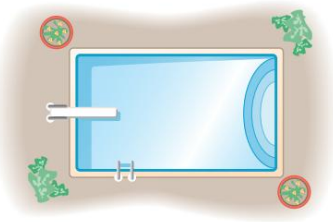
58. Supongamos que m y n son números enteros positivos con m 7 n. Si a = m2 - n2 , b = 2mn, y c = m2 + n2 , Demuestre que a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. (Esta fórmula se puede usar para encontrar los lados de un triángulo rectángulo que son números enteros, como 3, 4, 5; 5, 12, 13, etc. Estos tripletes de números enteros se llaman terrones pitagóricos).

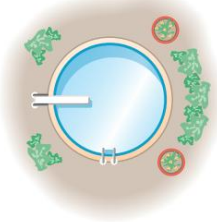
Explicar conceptos: discusión y escritura

59. Si el radio de un círculo se duplica, ¿se duplica también el área del círculo? Explicar.

60. Si se duplica el radio de una esfera, ¿se duplica también el volumen de la esfera? Explicar.

61. Tiene 1000 pies de revestimiento flexible para piscina y tiene la intención de construir una piscina. Experimente con piscinas de forma rectangular con perímetros de 1000 pies. ¿Cómo varían sus áreas? ¿Cuál es la forma del rectángulo con el área más grande? Ahora calcula el área encerrada por una piscina circular con un perímetro (circunferencia) de 1000 pies. ¿Cuál sería la forma que elegirías para la piscina? Si es rectangular, ¿Cuál es tu preferencia por las dimensiones? Justifica tu elección. Si su única consideración es tener una piscina que abarque la mayor superficie, ¿qué forma debería utilizar?





Machine Translated by Google

62. El faro de Gibb's Hill, Southampton, Bermuda, en funcionamiento desde 1846, se encuentra a 117 pies de altura sobre una colina de 245 pies de altura, por lo que su haz de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz misma se puede ver en el horizonte a unas 42 millas de distancia. Verifique la exactitud de esta información. El folleto afirma además que los barcos que se encuentran a 40 millas de distancia pueden ver la luz y que los aviones que vuelan a 10,000 pies pueden verla a 120 millas de distancia. Verifique la exactitud de estas declaraciones. ¿Qué suposición hacía el folleto sobre la altura del barco?

A.3 Polinomios

OBJETIVOS 1 Reconocer monomios (p. A22)

2 Reconocer polinomios (p. A23)

3 Conozca fórmulas para productos especiales (p. A24)

4 Dividir polinomios mediante división larga (p. A25)

Polinomios de 5 factores (p. A27)

6 Completa el cuadrado (p. A29)

Hemos descrito el álgebra como una generalización de la aritmética en la que se utilizan letras para representar números reales. De ahora en adelante, usaremos las letras al final del alfabeto, como x, y y z, para representar variables y usaremos las letras al principio del alfabeto, como a, byc , para representar constantes. En las expresiones 3x + 5 y ax + b, se entiende que x es una variable y que a y b son constantes, aunque las constantes a y b no están especificadas. Como descubrirá, el contexto suele aclarar el significado deseado.

1 Reconocer monomios

NOTA Los números enteros no negativos son los números enteros 0, 1, 2, 3,…. j

DEFINICIÓN Monomio

Un monomio en una variable es el producto de una constante y una variable elevada a una potencia entera no negativa. Un monomio es de la forma

hacha

donde a es una constante, x es una variable y k Ú 0 es un número entero. La constante a se llama coeficiente del monomio. Si a · 0, entonces k se llama grado del monomio.

EJEMPLO 1 Ejemplos de monomios

Monomio	Coeficiente	Grado	
6x2	6	2	
- 22x3	- 22	3	
3	3	0	Desde 3·3 # 1·3x0, x 3 0
- 5x	- 5	1	Desde ·5x··5x1
x4	1	4	Desde x4·1 # x4

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Ejemplos de expresiones que no son monomios

(a) $3x^{1}>2$ no es un monomio, ya que el exponente de la variable x es $\frac{1}{2}$, y no es un entero no negativo.

(b) $4x^{-3}$ no es un monomio, ya que el exponente de la variable x es - 3 y - 3 no es un entero no negativo.

Ahora resuelve el problema 1 5

2 Reconocer polinomios

Dos monomios con la misma variable elevada a la misma potencia se llaman términos semejantes. Por ejemplo, $2x^4$ y $-5x^4$ son términos semejantes. Por el contrario, los monomios $2x^3$ y $2x^5$ son no términos semejantes.

Podemos sumar o restar términos semejantes usando la propiedad distributiva. Por ejemplo,

$$2x^2 + 5x^2 = 12 + 52x^2 = 7x^2 \text{ y } 8x^3 - 5x^3 = 18 - 52x^3 = 3x^3$$

La suma o diferencia de dos monomios de diferente grado se llama binomio. La suma o diferencia de tres monomios con tres grados diferentes se llama trinomio. Por ejemplo,

- $x^2 - 2$ es un binomio.
- $x^3 - 3x + 5$ es un trinomio.
- $2x^2 + 5x^2 + 2 = 7x^2 + 2$ es un binomio.

DEFINICIÓN Polinomio

Un polinomio en una variable es una expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + g + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

donde $a_n, a_{n-1}, c, a_1, a_0$ son constantes*, llamadas coeficientes del polinomio, n Ú 0 es un número entero y x es una variable. Si $a_n \cdot 0$, se llama coeficiente principal, $a_n x^n$ se llama término principal y n es el grado del polinomio.

En palabras

Un polinomio es una suma de monomios.

Los monomios que forman un polinomio se llaman términos. Si todos los coeficientes son 0, el polinomio se llama polinomio cero y no tiene grado.

Los polinomios generalmente se escriben en forma estándar, comenzando con el término distinto de cero de mayor grado y continuando con los términos en orden descendente según el grado. Si falta una potencia de x es porque su coeficiente es cero.

EJEMPLO 3 Ejemplos de polinomios

Polinomio -	Coeficientes	Grado
$8x^3 + 4x^2 - 6x + 2$	- 8, 4, - 6, 2	3
$3x^2 - 5 = 3x^2 + 0 \# x - 5$	3, 0, - 5	2
$8 - 2x + x^2 = 1 \# x^2 - 2x + 8$	1, - 2, 8	2
$5x + 22 = \overline{5x1 + 22}\ 3 = 3 \#$	$5, 22\ \overline{3}$	1
$1 = 3 \# x0$		0
0	0	No graduado

* La notación a_n se lee como “a sub n”. El número n se llama subíndice y no debe confundirse con un exponente. Usamos subíndices para distinguir una constante de otra cuando se requiere una cantidad grande o indeterminada de constantes.

Machine Translated by Google

Aunque hemos estado usando x para representar la variable, letras como y y z también se utilizan comúnmente.

- 3x4 - x2 + 2 es un polinomio (en x) de grado 4.
- 9y3 - 2y2 + y - 3 es un polinomio (en y) de grado 3.
- z5 + p es un polinomio (en z) de grado 5.

Expresiones algebraicas como

$$\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{x2 + 1}{x + 5}$$

no son polinomios. El primero no es un polinomio porque no $\frac{1}{x} = x\text{-}1$ tiene exponente es un número entero no negativo. La segunda expresión no es un polinomio porque el cociente no se puede simplificar a una suma de monomios.

Ahora resuelve el problema 2 5

3 Conozca Fórmulas para Productos Especiales

Ciertos productos, que llamamos productos especiales, aparecen con frecuencia en álgebra. Podemos calcularlos fácilmente usando el método FOIL (Primero, Exterior, Interior, Último) para multiplicar dos binomios.

Exterior
Primero
Primero Exterior Interior Último
1ax + b2 1cx + d2 = hacha # cx + hacha # d + b # cx + b # d
2222
Interno
= acx2 + adx + bcx + bd
Último
= acx2 + 1ad + bc2x + bd

EJEMPLO 4

Usando papel de aluminio

(a) 1x - 32 1x + 32 = x2 + 3x - 3x - 9 = x2 - 9
información sobre información

(b) $(1x + 22)^2 = 1x + 22\ 1x + 22 = x2 + 2x + 2x + 4 = x2 + 4x + 4$

(c) $(1x - 32)^2 = 1x - 32\ 1x - 32 = x2 - 3x - 3x + 9 = x2 - 6x + 9$

(d) 1x + 32 1x + 12 = x2 + x + 3x + 3 = x2 + 4x + 3

(e) 12x + 12 13x + 42 = 6x2 + 8x + 3x + 4 = 6x2 + 11x + 4

Observe los factores del inciso (a). El primer binomio es una diferencia y el segundo es una suma. Ahora observe que el producto exterior O y el producto interior I son inversos aditivos; su suma es cero. Entonces el producto es una diferencia de dos cuadrados.

Ahora resuelve el problema 4 5

A algunos productos se les han dado nombres especiales debido a su forma. El especial Los productos de las ecuaciones (2), (3a) y (3b) se basan en los ejemplos 4(a), (b) y (c).

Diferencia de dos cuadrados

$$1x - a2\ 1x + a2 = x2 - a2 \qquad (2)$$

Machine Translated by Google

Cuadrados de binomios o cuadrados perfectos

$$1x + a2^{2} = x2 + 2ax + a2 \quad (3a)$$

$$1x - a2^{2} = x2 - 2ax + a2 \quad (3b)$$

Cubos de binomios o cubos perfectos

$$1x + a2^{3} = x3 + 3ax2 + 3a2x + a3 \quad (4a)$$

$$1x - a2^{3} = x3 - 3ax2 + 3a2x - a3 \quad (4b)$$

Diferencia de dos cubos

$$1x - a2\,1x2 + ax + a22 = x3 - a3 \quad (5)$$

Suma de dos cubos

$$1x + a2\,1x2 - ax + a22 = x3 + a3 \quad (6)$$

Ahora problemas de trabajo 4 9 , 5 3 , y 5 7

4 Dividir polinomios usando división larga

El procedimiento para dividir dos polinomios es similar al procedimiento para dividir dos números enteros.

EJEMPLO 5 Dividir dos números enteros

Divide 842 entre 15.

Solución

Divisor S

```
      56      d cociente
15·842        dividendo _
      75      re 5 # 15
      92      d Resta y baja el 2.
      90      re 6 # 15
       2      d Restar; el resto son 2.
```

Entonces $\frac{842}{15} = 56 + \frac{2}{15}$.

En el problema de división detallado en el ejemplo 5, el número 15 se llama divisor, el número 842 se llama dividendo, el número 56 se llama cociente y el número 2 se llama resto.

Para comprobar la respuesta obtenida en un problema de división, multiplica el cociente por el divisor y suma el resto. La respuesta debería ser el dividendo.

Cociente # Divisor + Resto = Dividendo

Por ejemplo, podemos comprobar los resultados obtenidos en el Ejemplo 5 de la siguiente manera:

$$56 \# 15 + 2 = 840 + 2 = 842$$

Machine Translated by Google

NOTA Recuerde, un polinomio está en forma estándar cuando sus términos se escriben en potencias descendentes de x.

Para dividir dos polinomios, primero escribimos cada polinomio en forma estándar. Luego, el proceso sigue un patrón similar al del Ejemplo 5. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 6 Dividir dos polinomios

Encuentra el cociente y el resto cuando

$$3x3 + 4x2 + x + 7 \text{ se divide por } x2 + 1$$

Solución Cada polinomio está en forma estándar. El dividendo es 3x3 + 4x2 + x + 7, y el divisor es x2 + 1.

Paso 1: Divida el término principal del dividendo, 3x3, por el término principal del divisor, x2. Ingrese el resultado, 3x, sobre el término 3x3, siguiente:

$$\begin{array}{r} 3x \\ x2 + 1 \overline{)\,3x3 + 4x2 + x + 7} \end{array}$$

Paso 2: multiplica 3x por x2 + 1 e ingresa el resultado debajo del dividendo.

$$\begin{array}{r} 3x \\ x2 + 1 \overline{)\,3x3 + 4x2 + x + 7} \\ 3x3 \quad + 3x \end{array}$$

re 3x # (x2 · 1) · 3x3 · 3x

C

Alinee el término 3x debajo de la x para facilitar el siguiente paso.

Paso 3: Resta y reduce los términos restantes.

$$\begin{array}{r} 3x \\ x2 + 1 \overline{)\,3x3 + 4x2 + x + 7} \\ 3x3 \quad + 3x \\ \hline 4x2 - 2x + 7 \end{array}$$

d Restar (cambiar los signos y sumar).

d Derriba el 4x2 y el 7.

Paso 4: repita los pasos 1 a 3 usando 4x2 - 2x + 7 como dividendo.

$$\begin{array}{r} 3x + 4 \\ x2 + 1 \overline{)\,3x3 + 4x2 + x + 7} \\ 3x3 \quad + 3x \\ \hline 4x2 - 2x + 7 \\ 4x2 \quad + 4 \\ \hline - 2x + 3 \end{array}$$

d

d Divide 4x2 entre x2 para obtener 4.

d Multiplica (x2 · 1) por 4; sustraer.

COMENTARIO Cuando el grado del divisor es mayor que el grado del dividendo, el proceso termina.

Dado que x2 no divide - 2x uniformemente (es decir, el resultado no es un monomio), el finaliza el proceso. El cociente es 3x + 4 y el resto es - 2x + 3.

✓ Verificar: Cociente # Divisor + Resto

$$= 13x + 42\ 1x2 + 12 + 1 - 2x + 32$$

$$= 3x3 + 3x + 4x2 + 4 - 2x + 3$$

$$= 3x3 + 4x2 + x + 7 = \text{Dividendo}$$

Entonces

$$\frac{3x3 + 4x2 + x + 7}{x2 + 1} = 3x + 4 + \frac{- 2x + 3}{x2 + 1}$$

El siguiente ejemplo combina los pasos involucrados en la división larga.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Dividir dos polinomios

Encuentra el cociente y el resto cuando

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 5 \text{ se divide por } x^2 - x + 1$$

Solución Al plantear este problema de división, es necesario dejar un espacio para el x^2 que falta.
plazo en el dividendo.

$$\begin{array}{rll} & x^2 - 2x - 3 & \text{d cociente} \\ \text{Divisor S} \quad x^2 - x + 1 \cdot & x^4 - 3x^3 \quad + 2x - 5 & \text{dividendo} \\ \text{Restar S} & -x^3 + x^2 & \\ & -2x^3 - x^2 + 2x - 5 & \\ \text{Restar S} & -2x^3 + 2x^2 - 2x & \\ & -3x^2 + 4x - 5 & \\ \text{Restar S} & -3x^2 + 3x - 3 & \\ & x - 2 & \text{d Resto} \end{array}$$

✓ Verificar: Cociente # Divisor + Resto

$$= 1x^2 - 2x - 32\ 1x^2 - x + 12 + x - 2$$
$$= x^4 - x^3 + x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3x^2 + 3x - 3 + x - 2$$
$$= x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = \text{Dividendo}$$

Como resultado,

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 5}{x^2 - x + 1} = x^2 - 2x - 3 + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$

El proceso de dividir dos polinomios conduce al siguiente resultado:

TEOREMA

Sea Q un polinomio de grado positivo y sea P un polinomio cuyo grado es mayor o igual que el grado de Q. El resto después de dividir P por Q es el polinomio cero o un polinomio cuyo grado es menor que el grado del divisor Q.

Ahora resuelve el problema 6 5

Polinomios de 5 factores

Considere el siguiente producto:

$$12x + 32\ 1x - 42 = 2x^2 - 5x - 12$$

Los dos polinomios del lado izquierdo se llaman factores del polinomio del lado derecho. Expresar un polinomio dado como producto de otros polinomios (es decir, encontrar los factores de un polinomio) se llama factorización.

Restringimos nuestra discusión aquí a factorizar polinomios de una variable en productos de polinomios de una variable, donde todos los coeficientes son números enteros. A esto lo llamamos factorizar sobre los números enteros.

Cualquier polinomio se puede escribir como el producto de 1 por sí mismo o como -1 por su inverso aditivo. Si un polinomio no se puede escribir como producto de otros dos polinomios (excluyendo 1 y - 1), entonces el polinomio es primo. Cuando un polinomio se escribe como un producto formado únicamente por factores primos, se factoriza por completo. Ejemplos de polinomios primos (sobre números enteros) son

$$2, 3, 5, x, x + 1, x - 1, 3x + 4, x^2 + 4$$

COMENTARIO Sobre los números reales, $3x + 4$ se factorizan en $3x + 4$. Es el fracción $\frac{4}{3}$ que hace que $3x + 4$ sea primo sobre los números enteros.

Machine Translated by Google

El primer factor a buscar en un problema de factorización es un factor monomio común presente en cada término del polinomio. Si hay uno presente, usa la propiedad distributiva para factorizarlo. Continúe factorizando factores monomios hasta que no quede ninguno.

EJEMPLO 8 Identificación de factores monomios comunes

Polinomio	Común Monomio Factor	Restante Factor	Forma factorizada
2x + 4	2	x + 2	2x + 4 = 21x + 22
3x - 6	3	x - 2	3x - 6 = 31x - 22
2x2 - 4x + 8	2	x2 - 2x + 4	2x2 - 4x + 8 = 21x2 - 2x + 42
8x - 12	4	2x - 3	8x - 12 = 412x - 32
x2 + x	x	x + 1	x2 + x = x1x + 12
x3 - 3x2	x2	x - 3	x3 - 3x2 = x2 1x - 32
6x2 + 9x	3x	2x + 3	6x2 + 9x = 3x12x + 32

Observe que una vez que se han eliminado todos los factores monomios comunes de un polinomio, el factor restante es un polinomio primo de grado 1 o un polinomio de grado 2 o superior. (¿Ves por qué?)

La lista de productos especiales (2) a (6) proporcionada anteriormente proporciona una lista de fórmulas de factorización cuando las ecuaciones se leen de derecha a izquierda. Por ejemplo, la ecuación (2) establece que si el polinomio es la diferencia de dos cuadrados, $x2 - a2$ se puede factorizar en $1x - a2\ 1x + a2$. El siguiente ejemplo ilustra varias técnicas de factorización.

EJEMPLO 9 Factorizar polinomios

Factoriza completamente cada polinomio.

(a) x4 - 16 (b) x3 - 1 (c) 9x2 - 6x + 1

(d) x2 + 4x - 12 (e) 3x2 + 10x - 8 (f) x3 - 4x2 + 2x - 8

Solución (a) x4 - 16 = 1x2 - 42 1x2 + 42 = 1x - 22 1x + 22 1x2 + 42
cc
Diferencia de cuadrados Diferencia de cuadrados

(b) x3 - 1 = 1x - 12 1x2 + x + 12
c
diferencia de cubos

(c) 9x2 - 6x + 1 = 13x - 12 2
c
Cuadrado perfecto

(d) x2 + 4x - 12 = 1x + 62 1x - 22
cc
La suma de 6 y ·2 es 4. El producto de 6 y ·2 es ·12.

12x · 2x · 10x
c c c c

(e) 3x2 + 10x - 8 = 13x - 22 1x + 42
c c c 3x2 c
·8

(f) x3 - 4x2 + 2x - 8 = 1x3 - 4x22 + 12x - 82c

COMENTARIO La técnica utilizada en la parte (f) se llama factorización por agrupación. j

Términos de grupo

= x2 1x - 42 + 21x - 42 = 1x2 + 22 1x - 42
c c
Propiedad distributiva Propiedad distributiva

Ahora problemas de trabajo 8 5 , 1 0 1 , y 1 3 5

Machine Translated by Google

6 Completar el cuadrado La idea

detrás de completar el cuadrado en una variable es "ajustar" una expresión de la forma x2 + bx para convertirla en un cuadrado perfecto. Los cuadrados perfectos son trinomios de la forma

$$x2 + 2ax + a2 = 1x + a2 \quad ^2 \quad \text{o} \quad x2 - 2ax + a2 = 1x - a2 \quad ^2$$

Por ejemplo, x2 + 6x + 9 es un cuadrado perfecto porque x2 + 6x + 9 = 1x + 32 2. Y p2 - 12p + 36 es un cuadrado perfecto porque p2 - 12p + 36 = 1p - 62 2.

Entonces, ¿cómo "ajustamos" x2 + bx para convertirlo en un cuadrado perfecto? Lo hacemos sumando un número. Por ejemplo, para hacer de x2 + 6x un cuadrado perfecto, suma 9. Pero, ¿cómo sabemos que debemos sumar 9? Si dividimos el coeficiente del término de primer grado, 6, por 2, y luego elevamos el resultado al cuadrado, obtenemos 9. Este método funciona en general.

Completar el cuadrado de x2 · bx

- Identificar el coeficiente del término de primer grado, es decir b.
- Multiplica b por 2 — y luego elevar al cuadrado el resultado. Es decir, calcular un1 2 bb 2.
- Añade 1 2 bb 2 a x2 + bx para obtener x2 + bx + a 1 2 bb 2 = hacha + 2 b b 2

ADVERTENCIA Para usar 1 12 b22 para completar el cuadrado, el coeficiente del término x2 debe ser 1.

EJEMPLO 10 Completar el cuadrado

Determina el número que se debe sumar a cada expresión para completar el cuadrado. Luego factoriza la expresión.

Comenzar	Agregar	Resultado	Forma factorizada
y2 + 8y	un 2 # 8b 2 = 16	y2 + 8y + 16	(y + 4)2
x2 + 12x	un 2 # 12b 2 = 36	x2 + 12x + 36	(x+6)2
a2 - 20a	1 un 2 # (-20)b 2 = 100	a2 - 20a + 100	(un - 10)2
p2 - 5p	un 2 # (-5)b 2 = 25 4	p2 - 5p + 25 4	ap - 2b 5 2

Observe que la forma factorizada de un cuadrado perfecto es

$$x2 + bx + a\,b\,2\,\overline{b}^{\,2} = \text{hacha} + 2\,\overline{b}\,b^{\,2} \quad \text{o} \quad x2 - bx + a\,b\,2\,b\,\overline{}^{\,2} = \text{hacha} - 2\,\overline{b}\,b^{\,2}$$

= hacha - 2 segundo

Ahora resuelve el problema 1 2 5

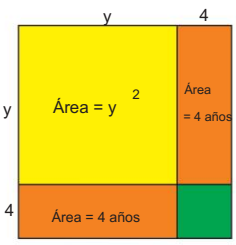


Figura 22

¿Te preguntas por qué nos referimos a hacer de una expresión un cuadrado perfecto como "completando el cuadrado"? Mire el cuadrado en la Figura 22. Su área es 1y + 42 El 2. área amarilla es y2 y cada área naranja es 4y (para un área total de 8y). La suma de estas áreas es y2 + 8y. Para completar el cuadrado, necesitamos sumar el área de la región verde, que es 4 # 4 = 16. Como resultado, y2 + 8y + 16 = 1y + 42 2.

Machine Translated by Google

A.3 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. El polinomio 3x4 - 2x3 + 13x2 - 5 es de grado . El El coeficiente principal ____.

es 2. 1x2 - 42 1x2 + 42 = 3. _____.

1x - 22 1x2 + 2x + 42 = 4. _____.

Verdadero o Falso 4x-2 es un monomio de grado - 2.

5. Verdadero o Falso 1x + a2 1x2 + ax + a2 = x3 + a3 .

6. Verdadero o Falso El polinomio x2 + 4 es primo.

7. Verdadero o Falso 3x3 - 2x2 - 6x + 4 = 13x - 22 1x2 + 22.

8. Para completar el cuadrado de la expresión x2 + 5x, tendrías que _____ el número _____.

9. Para comprobar la división, la expresión que se está dividiendo, el dividendo, debe ser igual al producto de y el más el _____ _____ _____.

10. Opción múltiple Los monomios que forman un polinomio ¿Cuál de los siguientes se llama?
(a) términos (b) variables (c) factores (d) coeficientes

11. Opción múltiple Elige el grado del monomio 3x4 .
(un) 3 (b) 7 (c) 4 (d) 2

12. Opción múltiple Elija la mejor descripción de x2 - 64.
(a) Prima (b) Diferencia de dos cuadrados
(c) Diferencia de dos cubos (d) Cuadrado perfecto

13. Opción múltiple Elige la factorización completa de 4x2 - 8x - 60

(a) 21x + 32 1x - 52 (c) (b) 41x2 - 2x - 152
12x + 62 12x - 102 (d) 41x + 32 1x - 52

14. Opción múltiple Para completar el cuadrado de x2 + bx, ¿cuál de los siguientes utiliza?

(a) 12b2 ^{2} (b) 2b2 (c) un $\frac{1}{2}$ bb ^{2} (d) $\frac{1}{2}$b2

Desarrollo de habilidades

En los problemas 15 a 24, indique si la expresión es un monomio. Si es así, nombra la variable y el coeficiente y da el grado del monomio. Si no es un monomio, indique por qué no.

15. 2x3 16. - 4x2 17. $\frac{8}{x}$ 18. - 2x-3 19. - 2x3 + 5x2

20. 6x5 - 8x2 21. $\frac{8x}{x2 - 1}$ 22. - $\frac{2x2}{x3 + 1}$ 23. x2 + 2x - 5 24. 3x2 + 4

En los problemas 25 a 34, indique si la expresión es un polinomio. Si es así, indique su grado. Si no es así, indique por qué no.

25. 3x2 - 5 26. 1 - 4x 27. 5 28. -pag 29. 3x2 - $\frac{5}{x}$

30. $\frac{3}{x}$ + 2 31. 2y3 - 22 32. 10z2 + z 33. $\frac{x2 + 5}{x3 - 1}$ 34. $\frac{3x3 + 2x - 1}{x2 + x + 1}$

En los problemas 35 a 60, sume, reste o multiplique, como se indica. Exprese su respuesta como un polinomio único en forma estándar.

35. 1x2 + 4x + 52 + 13x - 32 36. 1x3 + 3x2 + 22 + 1x2 - 4x + 42

37. 1x3 - 2x2 + 5x + 102 - 12x2 - 4x + 32 38. 1x2 - 3x - 42 - 1x3 - 3x2 + x + 52

39. 61x3 + x2 - 32 - 412x3 - 3x2 2 40. 814x3 - 3x2 - 12 - 614x3 + 8x - 22

41. 91y2 - 3y + 42 - 611 - y2 2 42. 811 - y3 2 + 411 + y + y2 + y3 2

43. x1x2 + x - 42 44. 4x2 1x3 - x + 22 45. 1x + 22 1x + 42

46. 1x + 32 1x + 52 47. 12x + 52 1x + 22 48. 13x + 12 12x + 12

49. 1x - 72 1x + 72 50. 1x - 12 1x + 12 51. 12x + 32 12x - 32

52. 13x + 22 13x - 22 53. 1x + 42 54. 1x - 52 ^{2}

55. 12x - 32 ^{2} 56. 13x - 42 ^{2} 57. 1x - 22 ^{3}

58. 1x + 12 ^{3} 59. 12x + 12 ^{3} 60. 13x - 22 ^{3}

En los problemas 61 a 76, encuentre el cociente y el resto. Revisa tu trabajo verificando que Cociente # Divisor + Resto = Dividendo

61. 4x3 - 3x2 + x + 1 dividido por x + 2 62. 3x3 - x2 + x - 2 dividido por x + 2

63. 4x3 - 3x2 + x + 1 dividido por x2 64. 3x3 - x2 + x - 2 dividido por x2

65. 5x4 - 3x2 + x + 1 dividido por x2 + 2 66. 5x4 - x2 + x - 2 dividido por x2 + 2

67. 4x5 - 3x2 + x + 1 dividido por 2x3 - 1 68. 3x5 - x2 + x - 2 dividido por 3x3 - 1

69. 2x4 - 3x3 + x + 1 dividido por 2x2 + x + 1 70. 3x4 - x3 + x - 2 dividido por 3x2 + x + 1

71. - 4x3 + x2 - 4 dividido por x - 1 72. - 3x4 - 2x - 1 dividido por x - 1

Machine Translated by Google

73. 1 - x2 + x4 dividido por x2 + x + 1 75. x3 - a3 dividido por x - a

74. 1 - x2 + x4 dividido por x2 - x + 1

76. x5 - a5 dividido por x - a

En los problemas 77 a 124, factoriza completamente cada polinomio. Si el polinomio no se puede factorizar, digamos que es primo.

77. x2 - 36
78. x2 - 9
79. 2 - 8x2
80. 3 - 27x2
81. x2 + 11x + 10
82. x2 + 5x + 4
83. x2 - 10x + 21
84. x2 - 6x + 8
85. 4x2 - 8x + 32
86. 3x2 - 12x + 15
87. x2 + 4x + 16
88. x2 + 12x + 36
89. 15 + 2x - x2
90. 14 + 6x - x2
91. 3x2 - 12x - 36
92. x3 + 8x2 - 20x
93. y4 + 11y3 + 30y2
94. 3y3 - 18y2 - 48y
95. 4x2 + 12x + 9
96. 9x2 - 12x + 4
97. 6x2 + 8x + 2
98. 8x2 + 6x - 2
99. x4 - 81
100. x4 - 1
101. x6 - 2x3 + 1
102. x6 + 2x3 + 1
103. x7 - x5
104. x8 - x5
105. 16x2 + 24x + 9
106. 9x2 - 24x + 16
107. 5 + 16x - 16x2
108. 5 + 11x - 16x2
109. 4y2 - 16y + 15
110. 9y2 + 9y - 4
111. 1 - 8x2 - 9x4
112. 4 - 14x2 - 8x4
113. x1x + 32 - 61x + 32
114. 513x - 72 + x13x - 72
115. 1x + 22 ^{2} - 51x + 22
116. 1x - 12
119. 31x2 ^{2} - 21x - 12 13x - 22
120. ^{3} - 27 71x2 - 6x + 92 + 51x - 32
123. x4 - x3 + x - 1
118. 15x + 12 ^{3} - 1 + 10x + 252 - 41x + 52
121. x3 + 2x2 - x - 2
122. x3 - 3x2 - x + 3
124. x4 + x3 + x + 1

En los problemas 125 a 130, determine el número que se debe sumar para completar el cuadrado de cada expresión. Luego factoriza cada expresión.

125. x2 + 10x
127. y2 - 6y
126. p2 + 14p
128. x2 - 4x _
129. x2 - x2 _ $\frac{1}{}$
130. x2 + $\frac{1}{3}$x

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 131 a 140 se dan expresiones que aparecen en cálculo. Factoriza completamente cada expresión.

131. 213x + 42 ^{2} + 12x + 32 # 213x + 42 # 3 + 15x - 62 # 212x + 12 # 2
132. 512x + 12 ^{2}
133. 2x12x + 52 + x2 # 2
134. 3x2 18x - 32 + x3 # 8
135. 21x + 32 1x - 22 ^{3} + 1x + 32 ^{2} # 31x - 22 ^{2}
136. 41x + 52 ^{3} 1x - 12 ^{2} + 1x + 52 ^{4} # 21x - 12
137. 14x - 32 ^{2} + x # 214x - 32 # 4
138. 3x2 13x + 42 ^{2} + x3 # 213x + 42 # 3
139. 213x - 52 # 312x + 12 ^{3} + 13x - 52 ^{2} # 312x + 12 ^{2} # 2
140. 314x + 52 ^{2} # 415x + 12 ^{2} + 14x + 52 ^{3} # 215x + 12 # 5
141. Demuestra que x2 + 4 es primo.
142. Demuestra que x2 + x + 1 es primo.

Explicar conceptos: discusión y escritura

143. Explique por qué el grado del producto de dos polinomios distintos de cero es igual a la suma de sus grados.
144. Explique por qué el grado de la suma de dos polinomios de diferentes grados es igual al mayor de sus grados.
145. Haz una declaración cuidadosa sobre el grado de la suma de dos polinomios del mismo grado.
146. ¿Prefieres memorizar la regla del cuadrado de a o utilizar FOIL binomio 1x + a2 ^{2} para obtener el producto? Escribe un breve documento de posición defendiendo tu elección.
147. Inventa un polinomio que se factorice en un cuadrado perfecto.
148. Explícale a un compañero de estudios qué buscas primero cuando se te presenta un problema de factorización. ¿Qué vas a hacer después?

A.4 División sintética

OBJETIVO 1 Dividir polinomios mediante división sintética (p. A31)

1 Dividir polinomios mediante división sintética

Para encontrar el cociente y el resto cuando un polinomio de grado 1 o superior se divide por x - c, una versión abreviada de la división larga, llamada división sintética, simplifica la tarea.

Machine Translated by Google

Para ver cómo funciona la división sintética, primero considere la división larga para dividir el polinomio 2x3 - x2 + 3 por x - 3.

```
                2x2 + 5x + 15          d cociente
          ____________________
x - 3·2x3 - x2 2x3          + 3
      - 6x2
      ______
           5x2
           5x2 - 15x
           _________
                15x · 3
                15x - 45
                ________
                     48    d Resto
```

✓ Verificar: Divisor # Cociente + Resto

= 1x - 32 12x2 + 5x + 152 + 48

= 2x3 + 5x2 + 15x - 6x2 - 15x - 45 + 48

= 2x3 - x2 + 3

El proceso de división sintética surge al reescribir la división larga en una forma más compacta, utilizando una notación más simple. Por ejemplo, en la división larga anterior, los términos en azul no son realmente necesarios porque son idénticos a los términos directamente encima de ellos. Con estos términos eliminados, tenemos

```
                2x2 + 5x + 15
          ____________________
x - 3·2x3 - x2 - 6x2        + 3

      ______
           5x2
         - 15x
         _____
           15x
         - 45
         ____
           48
```

La mayoría de las x que aparecen en este proceso también se pueden eliminar, siempre que tengamos cuidado al posicionar cada coeficiente. En este sentido, necesitaremos usar 0 como coeficiente de x en el dividendo, porque falta esa potencia de x . Ahora tenemos

```
                2x2 + 5x + 15
          ____________________
x - 3·2 - 1 - 6      0      3

      ______
           5
         - 15
         ____
           15
         - 45
         ____
           48
```

Podemos hacer esta visualización más compacta moviendo las líneas hacia arriba hasta que Los números en azul se alinean horizontalmente.

```
                2x2 + 5x + 15          Fila 1
          ____________________
x - 3·2 - 1 - 6 -      0      3       Fila 2
      ______________________
           15 - 45                     Fila 3
      ______________________
      ○    5    15 48                 Fila 4
```

Debido a que el coeficiente principal del divisor es siempre 1, el coeficiente principal del dividendo también será el coeficiente principal del cociente. Entonces colocamos el coeficiente principal del cociente, 2, en la posición del círculo. Ahora bien, los primeros tres números de la fila 4 son precisamente los coeficientes del cociente, y el último número

Machine Translated by Google

en la fila 4 está el resto. Dado que la fila 1 no es realmente necesaria, podemos comprimir el proceso en tres filas, donde la fila inferior contiene tanto los coeficientes del cociente como el resto.

x - 3·2 - 1 - 6 - 0 3 Fila 1
15 - 45 Fila 2 (resta)
2 5 15 48 Fila 3

Recuerde que las entradas de la fila 3 se obtienen restando las entradas de la fila 2 de las de la fila 1. En lugar de restar las entradas de la fila 2, podemos cambiar el signo de cada entrada y sumar. Con esta modificación, nuestra pantalla quedará así:

x - 3·2 - 1 0 3 Fila 1
6 15 45 Fila 2 (añadir)
2 5 15 48 Fila 3

Observe que las entradas en la fila 2 son tres veces las entradas anteriores en la fila 3. Nuestra última modificación en la pantalla reemplaza x - 3 por 3. Las entradas en la fila 3 dan el cociente y el resto, como se muestra a continuación.

3·2 - 1 0 3 Fila 1
6 15 45 Fila 2 (añadir)
2 5 15 48 Fila 3
5 a
6cociente b Resto
2x2 + 5x + 15 48

Veamos un ejemplo paso a paso.

EJEMPLO 1 Usar la división sintética para encontrar el cociente y el resto

Usa división sintética para encontrar el cociente y el resto cuando

x3 - 4x2 - 5 se divide entre x - 3

Solución

Paso 1: Escribe el dividendo en potencias descendentes de x. Luego copia los coeficientes, recordando insertar un 0 para las potencias de x que falten.

1 - 4 0 - 5 Fila 1

Paso 2: inserta el símbolo de división habitual. En la división sintética, el divisor tiene la forma x - c, y c es el número colocado a la izquierda del símbolo de división. Aquí, dado que el divisor es x - 3, inserte 3 a la izquierda del símbolo de división.

3·1 - 4 0 - 5 Fila 1

Paso 3: Baje el 1 dos filas e introdúzcalo en la fila 3.

3·1 - 4 0 - 5 Fila 1
t Fila 2
1 Fila 3

Paso 4: Multiplique la última entrada en la fila 3 por 3 y coloque el resultado en la fila 2, una columna a la derecha.

3·1 - 4 0 - 5 Fila 1
3 Fila 2
1 Fila 3

Paso 5: agregue la entrada en la fila 2 a la entrada que está arriba en la fila 1 e ingrese la suma en fila 3.

3·1 - 4 0 - 5 Fila 1
3 Fila 2
1 1 Fila 3

(continuado)

Machine Translated by Google

Paso 6: repita los pasos 4 y 5 hasta que no haya más entradas disponibles en la fila 1.

3·1 - 4	0 - 5	Fila 1
	3 - 3 - 9	Fila 2
1	- 1 3 - 14	Fila 3

Paso 7: La entrada final en la fila 3, el - 14, es el resto; las otras entradas de la fila 3, 1, - 1 y - 3, son los coeficientes (en orden descendente) de un polinomio cuyo grado es 1 menor que el del dividendo. Este es el cociente. Eso es,

Cociente = x2 - x - 3 Resto = - 14

✓ Verificar: Divisor # Cociente + Resto

= 1x - 32 1x2 - x - 32 + 1 - 142
= 1x3 - x2 - 3x - 3x2 + 3x + 92 + 1 - 142
= x3 - 4x2 - 5 = Dividendo

Hagamos un ejemplo en el que se combinan los siete pasos.

EJEMPLO 2 Usar división sintética para verificar un factor

Utilice división sintética para demostrar que x + 3 es un factor de

2x5 + 5x4 - 2x3 + 2x2 - 2x + 3

Solución

El divisor es x + 3 = x - 1 - 32, así que coloca - 3 a la izquierda del símbolo de división. Luego, las entradas de la fila 3 se multiplicarán por - 3, se ingresarán en la fila 2 y se agregarán a la fila 1.

- 3·2	5 - 2 2 - 2 3				Fila 1
	- 6	3 - 3	3 - 3		Fila 2
2 - 1	1 - 1	1 0			Fila 3

Como el resto es 0, tenemos

Divisor # Cociente + Resto

= 1x + 32 12x4 - x3 + x2 - x + 12 = 2x5 + 5x4 - 2x3 + 2x2 - 2x + 3

Como vemos, x + 3 es factor de 2x5 + 5x4 - 2x3 + 2x2 - 2x + 3.

Como ilustra el ejemplo 2, el resto después de la división proporciona información sobre si el divisor es o no un factor. Hablamos más sobre esto en el Capítulo 4.

Ahora resuelva los problemas 9 y 1 9

A.4 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Para comprobar la división, la expresión que se está dividiendo, el dividendo, debe ser igual al producto de la _____ y el _____ más el _____.
2. Para dividir 2x3 - 5x + 1 entre x + 3 usando división sintética, el primer paso es escribir___ _____.
3. Opción múltiple Elija el problema de división que no se puede resolver usando división sintética.

(a) 2x3 - 4x2 + 6x - 8 se divide entre x - 8 (c) x5 + 3x2 - 9x + 2 se divide entre x + 10 4.

(b) x4 - 3 se divide por x + 1

(d) x4 - 5x3 + 3x2 - 9x + 13 se divide por x2 + 5

Opción múltiple Elija la conclusión correcta basándose en la siguiente división sintética: - 5· 2

	3 - 38 - 15	
	- 10 35	15
2 - 7 - 3		0

(a) x + 5 es un factor de 2x3 + 3x2 - 38x - 15 (c) x + 5 no es un factor de 2x3 + 3x2 - 38x - 15

(b) x - 5 es un factor de 2x3 + 3x2 - 38x - 15

(d) x - 5 no es factor de 2x3 + 3x2 - 38x - 15

Machine Translated by Google

5. Verdadero o Falso Al utilizar la división sintética, el divisor es siempre un polinomio de grado 1, cuyo coeficiente principal es 1.

6. Verdadero o Falso
$$\begin{array}{r|rrr} -2\cdot 5 & 3 & 2 & 1 \\ & -10 & 14 & -32 \\ \hline & 5 & -7 & 16 \quad -31 \end{array}$$
medio $\dfrac{5x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x + 2} = 5x^2 - 7x + 16 + \dfrac{-31}{x + 2}$.

Desarrollo de habilidades

En los problemas del 7 al 18, utilice la división sintética para encontrar el cociente y el resto cuando:

7. $x^3 - 7x^2 + 5x + 10$ se divide por $x - 2$
8. $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ se divide por $x + 1$
9. $3x^3 + 2x^2 - x + 3$ se divide por $x - 3$
10. $-4x^3 + 2x^2 - x + 1$ se divide entre $x + 2$
11. $x^5 - 4x^3 + x$ se divide por $x + 3$
12. $x^4 + x^2 + 2$ se divide entre $x - 2$
13. $4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5$ se divide por $x - 1$
14. $x^5 + 5x^3 - 10$ se divide entre $x + 1$
15. $0{,}1x^3 + 0{,}2x$ se divide por $x + 1{,}1$
16. $0{,}1x^2 - 0{,}2$ se divide entre $x + 2{,}1$
17. $x^5 - 32$ se divide por $x - 2$
18. $x^5 + 1$ se divide entre $x + 1$

En los problemas 19 a 28, utilice la división sintética para determinar si $x - c$ es un factor del polinomio dado.

19. $4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$; $x - 2$
20. $-4x^3 + 5x^2 + 8$; $x + 3$
21. $2x^4 - 6x^3 - 7x + 21$; $x - 3$
22. $4x^4 - 15x^2 - 4$; $x - 2$
23. $5x^6 + 43x^3 + 24$; $x + 2$
24. $2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9$; $x + 3$
25. $x^5 - 16x^3 - x^2 + 19$; $x + 4$
26. $x^6 - 16x^4 + x^2 - 16$; $x + 4$
27. $3x^4 - x^3 + 6x - 2$; $x - \frac{1}{3}$
28. $3x^4 + x^3 - 3x + 1$; $x + \frac{1}{3}$

Aplicaciones y extensiones

29. Calcula la suma de a, b, c y d si
$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 5}{x + 2} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x + 2}$$

Explicar conceptos: discusión y escritura

30. Al dividir un polinomio entre $x - c$, ¿prefieres usar división larga o división sintética? ¿El valor de c hace alguna diferencia? a usted en la elección? Dar razones.

A.5 Expresiones racionales

OBJETIVOS 1 Reducir una expresión racional a sus términos más bajos (p. A35)
2 Multiplicar y dividir expresiones racionales (p. A36)
2 Sumar y restar expresiones racionales (p. A37)
4 Utilice el método del mínimo común múltiplo (p. A39)
5 Simplificar expresiones racionales complejas (p. A40)

1 Reducir una expresión racional a los términos más bajos

Si formamos el cociente de dos polinomios, el resultado se llama expresión racional. Algunos ejemplos de expresiones racionales son

(a) $\dfrac{x^3 + 1}{x}$ (b) $\dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 5}$ (c) $\dfrac{x}{x^2 - 1}$ (d) $\dfrac{xy^2}{1x - y^2}$

Las expresiones (a), (b) y (c) son expresiones racionales en una variable, x, mientras que (d) es una expresión racional en dos variables, x e y.

Machine Translated by Google

Las expresiones racionales se describen de la misma manera que los números racionales. En la expresión (a), el polinomio x3 + 1 es el numerador y x es el denominador.
Cuando el numerador y el denominador de una expresión racional no contienen factores comunes (excepto 1 y - 1), decimos que la expresión racional se reduce a sus términos más bajos o se simplifica.

El polinomio en el denominador de una expresión racional no puede ser igual a 0 porque la división por 0 no está definida. Por ejemplo, para la expresión $\frac{x3 + 1}{x}$, x no puedo toma el valor 0. El dominio de la variable x es 5x 0 x · 06.

Una expresión racional se reduce a sus términos más bajos factorizando el numerador y el denominador completamente y cancelando cualquier factor común usando la propiedad de cancelación:

Propiedad de cancelación

$$\frac{c.A}{c.B} = \frac{a}{b} \qquad \text{si } b \cdot 0,\ c \cdot 0 \qquad (1)$$

EJEMPLO 1 Reducir una expresión racional a sus términos más bajos

Reducir a los términos más bajos: $\frac{x2 + 4x + 4}{x2 + 3x + 2}$

Solución

Comienza factorizando el numerador y el denominador.

$$x2 + 4x + 4 = 1x + 22\ 1x + 22$$

$$x2 + 3x + 2 = 1x + 22\ 1x + 12$$

ADVERTENCIA Utilice la propiedad de cancelación sólo con expresiones racionales escritas en forma factorizada. ¡Asegúrese de cancelar solo factores comunes, no términos comunes!

Dado que aparece un factor común, x + 2, la expresión original no está en el mínimo términos. Para reducirlo a los términos más bajos, utilice la Propiedad de Cancelación:

$$\frac{x2 + 4x + 4}{x2 + 3x + 2} = \frac{1x + 22\ 1x + 22}{1x + 22\ 1x + 12} = \frac{x + 2}{x + 1} \qquad x \cdot - 2, - 1$$

EJEMPLO 2 Reducir expresiones racionales a términos más bajos

Reduce cada expresión racional a sus términos más bajos.

(a) $\frac{x3 - 8}{x3 - 2x2}$ (b) $\frac{8\text{-}2x\ _}{x2 - x - 12}$

Solución

(a) $\frac{x3 - 8}{x3 - 2x2} = \frac{1x - 22\ 1x2 + 2x + 42}{x2\ 1x - 22} = \frac{x2 + 2x + 4}{x2} \qquad x \cdot 0, 2$

(b) $\frac{8\text{-}2x\ _}{x2 - x - 12} = \frac{214 - x2}{1x - 42\ 1x + 32} = \frac{21 - 12\ 1x - 42}{1x - 42\ 1x + 32} = \frac{- 2}{x + 3} \qquad x \cdot - 3, 4$

Ahora trabaja el problema 7

2 Multiplicar y dividir expresiones racionales

Las reglas para multiplicar y dividir expresiones racionales son las mismas que las reglas para multiplicar y dividir números racionales.

Machine Translated by Google

si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos expresiones racionales, entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{C.A}{bd} \qquad \text{si } b \cdot 0,\ d \cdot 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{\text{anuncio}}{\text{anuncio de Cristo}} \qquad \text{si } b \cdot 0,\ c \cdot 0,\ d \cdot 0 \qquad (3)$$

Al usar las ecuaciones (2) y (3) con expresiones racionales, asegúrese primero de factorizar cada polinomio por completo para poder cancelar los factores comunes. Deja tu respuesta en forma factorizada.

EJEMPLO 3 Multiplicar y dividir expresiones racionales

Realiza la operación indicada y simplifica el resultado. Deja tu respuesta en forma factorizada.

(a) $\frac{x2 - 2x + 1}{x3 + x} \cdot \frac{4x2 + 4}{x2 + x - 2}$ (b) $\frac{\frac{x + 3}{x2 - 4}}{\frac{x2 - x - 12}{x3 - 8}}$

Solución

(a) $\frac{x2 - 2x + 1}{x3 + x} \cdot \frac{4x2 + 4}{x2 + x - 2} = \frac{1x - 1^{2}}{12x1x2 + 12} \cdot \frac{41x2 + 12}{1x + 22\ 1x - 12}$

$$= \frac{1x - 12x\ ^{2}\ 142\ 1x2 + 12}{1x2 + 12\ 1x + 22\ 1x - 12}$$

$$= \frac{41x - 12}{x1x + 22} \qquad x \cdot -2, 0, 1$$

(b) $\frac{\frac{x + 3}{x2 - 4}}{\frac{x2 - x - 12}{x3 - 8}} = \frac{x + 3}{x2 - 4} \cdot \frac{x3 - 8}{x2 - x - 12}$

$$= \frac{x + 3}{1x - 22\ 1x + 22} \cdot \frac{1x - 22\ 1x2 + 2x + 42}{1x - 42\ 1x + 32}$$

$$= \frac{1x + 32\ 1x - 22\ 1x2 + 2x + 42}{1x - 22\ 1x + 22\ 1x - 42\ 1x + 32}$$

$$= \frac{x2 + 2x + 4}{1x + 22\ 1x - 42} \qquad x \cdot -3, -2, 2, 4$$

Ahora resuelve los problemas 1 5 y 2 1

En palabras
Para sumar (o restar) dos expresiones racionales con el mismo denominador, conserva el denominador común y suma (o resta) los numeradores.

3 Sumar y restar expresiones racionales

Las reglas para sumar y restar expresiones racionales son las mismas que las reglas para sumar y restar números racionales. Si los denominadores de dos expresiones racionales a sumar (o restar) son iguales, entonces suma (o resta) los numeradores y conserva el denominador común.

Machine Translated by Google

si $\frac{a}{b}$ y B $\frac{C}{}$ son dos expresiones racionales, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{C}{b} = \frac{a + c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{C}{b} = \frac{a - c}{b} \qquad \text{si } b \cdot 0 \qquad (4)$$

EJEMPLO 4 Sumar y restar expresiones racionales con denominadores iguales

Realiza la operación indicada y simplifica el resultado. Deja tu respuesta en forma factorizada.

(a) $\frac{2x2 - 4}{2x + 5} + \frac{x + 3}{2x + 5}$ $x \cdot -2$ $\frac{5}{}$ (b) $\frac{x}{x - 3} - \frac{3x + 2}{x - 3}$ $x \cdot 3$

Solución

(a) $$\frac{2x2 - 4}{2x + 5} + \frac{x + 3}{2x + 5} = \frac{12x2 - 42 + 1x + 32}{2x + 5}$$

$$= \frac{2x2 + x - 1}{2x + 5} = \frac{12x - 12\ 1x + 12}{2x + 5}$$

(b) $$\frac{x}{x - 3} - \frac{3x + 2}{x - 3} = \frac{x - 13x + 22}{x - 3} = \frac{x - 3x - 2}{x - 3}$$

$$= \frac{- 2x - 2}{x - 3} = \frac{- 21x + 12}{x - 3}$$

Ahora resuelve el problema 2 3

Si los denominadores de dos expresiones racionales a sumar o restar no son iguales, podemos utilizar las fórmulas generales para sumar y restar expresiones racionales.

Si $\frac{a}{b}$ y son $\frac{C}{d}$ dos expresiones racionales, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{C}{d} = \frac{un\ \#\ d}{b\ \#\ d} + \frac{antes\ de\ Cristo}{b\ \#\ d} = \frac{anuncio + antes\ de\ Cristo}{bd} \qquad \text{si } b \cdot 0, d \cdot 0 \qquad (5a)$$

$$\frac{a}{b} - \frac{C}{d} = \frac{un\ \#\ d}{b\ \#\ d} - \frac{antes\ de\ Cristo}{b\ \#\ d} = \frac{anuncio - antes\ de\ Cristo}{bd} \qquad \text{si } b \cdot 0, d \cdot 0 \qquad (5b)$$

EJEMPLO 5 Sumar y restar expresiones racionales con desigualdad Denominadores

Realiza la operación indicada y simplifica el resultado. Deja tu respuesta en forma factorizada.

(a) $\frac{x - 3}{x + 4} + \frac{x}{x - 2}$ $x \cdot -4, 2$ (b) $\frac{x2}{x2 - 4} - \frac{1}{x}$ $x \cdot -2, 0, 2$

Solución (a)

$$\frac{x - 3}{x + 4} + \frac{x}{x - 2} = \frac{x - 3}{x + 4} \cdot \frac{x - 2}{x - 2} + \frac{x + 4}{x + 4} \cdot \frac{x}{x - 2}$$

(5a)

$$= \frac{1x - 32\ 1x - 22 + 1x + 42\ 1x2}{1x + 42\ 1x - 22}$$

$$= \frac{x2 - 5x + 6 + x2 + 4x}{1x + 42\ 1x - 22} = \frac{2x2 - x + 6}{1x + 42\ 1x - 22}$$

Machine Translated by Google

$$\text{(b)}\quad \frac{x2}{x2-4} - \frac{1}{x} = \frac{x2}{x2-4}\cdot\frac{x}{x} - \frac{x2-4}{x2-4}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x2\ 1x2 - 1x2 - 42\ 112}{1x2\text{-}42\ \#\ x\ _}$$

ae

(5b)

$$= \frac{x3 - x2 + 4}{x1x - 22\ 1x + 22}$$

Ahora resuelve el problema 2 5

4 Utilice el método múltiplo menos común

Si los denominadores de dos expresiones racionales a sumar (o restar) tienen factores comunes, normalmente no utilizamos las reglas generales dadas por las ecuaciones (5a) y (5b). Al igual que con las fracciones, utilizamos el método del mínimo común múltiplo (MCM). El método LCM utiliza el polinomio de menor grado que tiene cada polinomio denominador como factor.

El método LCM para sumar o restar expresiones racionales

El método del mínimo común múltiplo (MCM) requiere cuatro pasos:

Paso 1: Factoriza completamente el polinomio en el denominador de cada expresión racional.

Paso 2: El MCM de los denominadores es el producto de cada factor único, con cada uno de estos factores elevado a una potencia igual al mayor número de veces que el factor ocurre en cualquier denominador.

Paso 3: Escribe cada expresión racional usando el MCM como denominador común.

Paso 4: Suma o resta las expresiones racionales usando la ecuación (4).

Comenzamos con un ejemplo que requiere sólo los pasos 1 y 2.

EJEMPLO 6 Encontrar el mínimo común múltiplo

Encuentra el mínimo común múltiplo del siguiente par de polinomios:

$$x1x - 12\ ^2\ 1x + 12 \text{ y } 41x - 12\ 1x + 12\ ^3$$

Solución Paso 1: Los polinomios ya están factorizados completamente como

$$x1x - 12\ ^2\ 1x + 12 \text{ y } 41x - 12\ 1x + 12\ ^3$$

Paso 2: Comienza escribiendo los factores del polinomio de la izquierda. (O podrías comenzar con el de la derecha).

$$x1x - 12\ ^2\ 1x + 12$$

Ahora mira el polinomio de la derecha. Su primer factor, 4, no aparece en nuestra lista, por lo que lo insertamos.

$$4x1x - 12\ ^2\ 1x + 12$$

El siguiente factor, x - 1, ya está en nuestra lista, por lo que no es necesario realizar ningún cambio. El factor final es $1x^3$ + 12. Como nuestra lista tiene x + 1 sólo a la primera potencia, reemplazamos x + 1 en la lista por $1x + 12\ ^3$. El LCM es

$$4x1x - 12\ ^2\ 1x + 12\ ^3$$

Observe que el MCM es, de hecho, el polinomio de menor grado que contiene x1x - 12 como factores.

^{2} 1x + 12 y 41x - 12 1x + 12 ^{3}

Machine Translated by Google

EJEMPLO 7 Usar el mínimo común múltiplo para sumar expresiones racionales

Realiza la operación indicada y simplifica el resultado. Deja tu respuesta en forma factorizada.

$$\frac{x}{x2 + 3x + 2} + \frac{2x - 3}{x2 - 1} \qquad x \cdot -2, -1, 1$$

Solución Paso 1: Factoriza completamente los polinomios en los denominadores.

$$x2 + 3x + 2 = 1x + 22\ 1x + 12$$

$$x2 - 1 = 1x - 12\ 1x + 12$$

Paso 2: El MCM es 1x + 22 1x + 12 1x - 12. ¿Ves por qué?

Paso 3: Escribe cada expresión racional usando el MCM como denominador.

$$\frac{x}{x2 + 3x + 2} = \frac{x}{1x + 22\ 1x + 12} = \frac{x}{1x + 22\ 1x + 12} \cdot \frac{x - 1}{x - 1} = \frac{x1x - 12}{1x + 22\ 1x + 12\ 1x - 12}$$

æ Multiplicar numerador y denominador por x · 1 para obtener el MCM en el denominador.

$$\frac{2x - 3}{x2 - 1} = \frac{2x - 3}{1x - 12\ 1x + 12} = \frac{2x - 3}{1x - 12\ 1x + 12} \cdot \frac{x + 2}{x + 2} = \frac{12x - 32\ 1x + 22}{1x - 12\ 1x + 12\ 1x + 22}$$

ae Multiplica el numerador y el denominador por x · 2 para obtener el MCM en el denominador.

Paso 4: Ahora suma usando la ecuación (4).

$$\frac{x}{x2 + 3x + 2} + \frac{2x - 3}{x2 - 1} = \frac{x1x - 12}{1x + 22\ 1x + 12\ 1x - 12} + \frac{12x - 32\ 1x + 22}{1x + 22\ 1x + 12\ 1x - 12}$$

$$= \frac{1x2 - x2 + 12x2 + x - 62}{1x + 22\ 1x + 12\ 1x - 12}$$

$$= \frac{3x2\text{-}6\ _}{1x + 22\ 1x + 12\ 1x - 12} = \frac{31x2 - 22}{1x + 22\ 1x + 12\ 1x - 12}$$

Ahora trabaja el problema 2 9

5 Simplifique expresiones racionales complejas

Cuando sumas y/o diferencias de expresiones racionales aparecen como numerador y/o denominador de un cociente, el cociente se llama expresión racional compleja. * Por ejemplo,

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \quad \text{y} \quad \frac{\frac{x2}{x2 - 4} - 3}{\frac{x - 3}{x + 2} - 1}$$

son expresiones racionales complejas. Simplificar una expresión racional compleja significa escribirla como una expresión racional reducida a sus términos más bajos . Esto se puede lograr de dos maneras.

*Algunos textos utilizan el término fracción compleja.

Machine Translated by Google

Simplificando una expresión racional compleja

Opción 1: Trate el numerador y el denominador de la expresión racional compleja por separado, realizando las operaciones que se indiquen y simplificando los resultados. Siga esto simplificando la expresión racional resultante.

Opcion 2: Encuentra el MCM de los denominadores de todas las expresiones racionales que aparecen en la expresión racional compleja. Multiplica el numerador y denominador de la expresión racional compleja por el MCM y simplifica el resultado.

Usamos ambas opciones en el siguiente ejemplo. Al estudiar cuidadosamente cada opción, usted Puede descubrir situaciones en las que uno puede ser más fácil de usar que el otro.

EJEMPLO 8 Simplificando una expresión racional compleja

Simplifica: $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{x}}{\frac{x+3}{4}}$ $x \cdot -3, 0$

Solución

Opción 1: Primero, realiza la operación indicada en el numerador y luego divide.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{x}}{\frac{x+3}{4}} = \frac{1\#x+2\#3}{\frac{2\#x}{x+3}} = \frac{\frac{x+6}{2x}}{\frac{x+3}{4}} = \frac{x+6}{2x}\cdot\frac{4}{x+3}$$

æRegla para sumar cocientes

æRegla para dividir cocientes

$$= \frac{1x+62\#4}{2\#x\#1x+32} = \frac{2\#2\#1x+62}{2\#x\#1x+32} = \frac{21x+62}{x1x+32}$$

æRegla para multiplicar cocientes

Opción 2: Las expresiones racionales que aparecen en la expresión racional compleja. son

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{x},\ \frac{x+3}{4}$$

El MCM de sus denominadores es 4x. Multiplica el numerador y denominador de la expresión racional compleja por 4x y luego simplifica.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{x}}{\frac{x+3}{4}} = \frac{4x\#\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{x}\right)}{4x\#\frac{x+3}{4}} = \frac{4x\#\frac{1}{2}+4x\#\frac{3}{x}}{\frac{4x\#1x+32}{4}}$$

æMultiplica el numerador y denominador por 4x.

æUtilice la propiedad distributiva en el numerador.

$$= \frac{2\#2x\#\frac{1}{2}+4x\#\frac{3}{x}}{\frac{4x\#1x+32}{4}} = \frac{2x+12}{x1x+32} = \frac{21x+62}{x1x+32}$$

æSimplificar.

æFactor.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 9 Simplificando una expresión racional compleja

Simplificar: $\dfrac{\dfrac{x2}{x-4}+2}{\dfrac{2x-2}{x}-1}$ $x \cdot 0, 2, 4$

Solución Usamos la opción 1.

$$\frac{\dfrac{x2}{x-4}+2}{\dfrac{2x-2}{x}-1} = \frac{\dfrac{x2}{x-4}+\dfrac{21x-42}{x-4}}{\dfrac{2x-2}{x}-\dfrac{x}{x}} = \frac{\dfrac{x2+2x-8}{x-4}}{\dfrac{2x-2-x}{x}}$$

$$= \frac{\dfrac{1x+42\ 1x-22}{x-4}}{\dfrac{x-2}{x}} = \frac{1x+42\ 1x-22}{x-4} \cdot \frac{x}{x-2}$$

$$= \frac{x1x+42}{x-4}$$

Ahora resuelve el problema 3 3

A.5 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Cuando el numerador y el denominador de una expresión racional no contienen factores comunes (excepto 1 y - 1), la expresión racional está en _____.
2. MCM es una abreviatura de _____ _____ _____ _____ _____.
3. Verdadero o Falso La expresión racional $\dfrac{2x3-4x}{x-2}$ se reduce a sus términos más bajos.
4. Verdadero o Falso El MCM de 2x3 + 6x2 y 6x4 + 4x3 es 4x3 1x + 12.
5. Opción múltiple Elige la afirmación que no es cierta. Supongamos b · 0, c · 0 y d · 0 según sea necesario.
   (a) $\dfrac{\text{C.A}}{\text{antes de Cristo}} = \dfrac{a}{b}$ (b) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$
   (C) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{\text{anuncio - antes de Cristo}}{bd}$ (d) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{\text{C.A}}{bd}$
6. Opción múltiple Elige la expresión racional que se simplifica a - 1.
   (a) $\dfrac{a-b}{\text{segundo - un}}$ (b) $\dfrac{a-b}{a-b}$ (C) $\dfrac{a+b}{a-b}$ (d) $\dfrac{\text{segundo - un}}{b+a}$

Desarrollo de habilidades

En los problemas 7 a 14, reduzca cada expresión racional a sus términos más bajos.

7. $\dfrac{3x+9}{x2-9}$ 8. $\dfrac{4x2+8x}{12x+24}$ 9. $\dfrac{x2-2x}{3x-6}$ 10. $\dfrac{15x2+24x}{3x2}$
11. $\dfrac{24x2}{12x2-6x}$ 12. $\dfrac{x2+4x+4}{x2-4}$ 13. $\dfrac{y2-25}{2y2-8y-10}$ 14. $\dfrac{3y2-y-2}{3y2+5y+2}$

En los problemas 15 a 36, realice la operación indicada y simplifique el resultado. Deja tu respuesta en forma factorizada.

15. $\dfrac{3x+6}{5x2} \cdot \dfrac{x}{x2-4}$ 16. $\dfrac{3}{2x} \cdot \dfrac{x2}{6x+10}$ 17. $\dfrac{4x2}{x2-16} \cdot \dfrac{x3-64}{2x}$ 18. $\dfrac{12}{x2+x} \cdot \dfrac{x3+1}{4x-2}$
19. $\dfrac{\dfrac{8x}{x2-1}}{\dfrac{10x}{x+1}}$ 20. $\dfrac{\dfrac{x-2}{4x}}{\dfrac{x2-4x+4}{12x}}$ 21. $\dfrac{\dfrac{4-x}{4+x}}{\dfrac{4x}{x2-16}}$ 22. $\dfrac{\dfrac{3+x}{3-x}}{\dfrac{x2-9}{9x3}}$
23. $\dfrac{x2}{2x-3}-\dfrac{4}{2x-3}$ 24. $\dfrac{3x2}{2x-1}-\dfrac{9}{2x-1}$ 25. $\dfrac{x}{x2-4}+\dfrac{1}{x}$ 26. $\dfrac{x-1}{x3}+\dfrac{x}{x2+1}$

Machine Translated by Google

27. $\frac{x}{x2 - 7x + 6} - \frac{x}{x2 - 2x - 24}$

28. $\frac{x}{x - 3} - \frac{x + 1}{x2 + 5x - 24}$

29. $\frac{4x}{x2 - 4} - \frac{2}{x2 + x - 6}$

30. $\frac{3x}{x - 1} - \frac{x - 4}{x2 - 2x + 1}$

31. $\frac{3}{1x - 12^2 1x + 12} + \frac{2}{1x - 12 1x + 12^2}$

32. $\frac{2}{1x + 22^2 1x - 12} - \frac{6}{1x + 22 1x - 12^2}$

33. $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

34. $\frac{4 + \frac{1}{x2}}{3 - \frac{1}{x2}}$

35. $\frac{\frac{x - 2}{x + 2} + \frac{x - 1}{x + 1}}{\frac{x}{x + 1} - \frac{2x - 3}{x}}$

36. $\frac{\frac{2x + 5}{x} - \frac{x}{x - 3}}{\frac{x2}{x - 3} - \frac{1x +}{12x + 3}^2}$

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 37 a 44 se dan expresiones que aparecen en cálculo. Reduce cada expresión a sus términos más bajos.

37. $\frac{12x + 32 \# 3 - 13x - 52 \# 2}{13x - 52\ 15x - 22^2}$

38. $\frac{14x + 12 \# 5 - 15x - 22 \# 4}{2}$

39. $\frac{x \# 2x - 1x2 + 12 \# 1}{1x2 + 12^2}$

40. $\frac{x \# 2x - 1x2 - 42 \# 1}{1x2 - 42^2}$

41. $\frac{13x + 12 \# 2x - x2 \# 3}{13x + 12^2}$

42. $\frac{12x - 52 \# 3x2 - x3 \# 2}{12x - 52^2}$

43. $\frac{1x2 + 12 \# 3 - 13x + 42 \# 2x}{1x2 + 12^2}$

44. $\frac{1x2 + 92 \# 2 - 12x - 52 \# 2x}{1x2 + 92^2}$

45. La ecuación del fabricante de lentes La distancia focal f de una lente con índice de refracción n es

$$\frac{1}{F} = 1norte - 12JR1 + \frac{1}{R2R}$$

donde R1 y R2 son los radios de curvatura de las superficies frontal y posterior de la lente. Exprese f como una expresión racional. Evalúe la expresión racional para n = 1,5, R1 = 0,1 metro, y R2 = 0,2 metros.

46. Circuitos eléctricos Un circuito eléctrico contiene tres resistencias conectadas en paralelo. Si la resistencia de cada uno es R1, R2 y R3 ohmios, respectivamente, su resistencia combinada R viene dada por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}$$

Exprese R como una expresión racional. Evalúe R para R1 = 5 ohmios, R2 = 4 ohmios y R3 = 10 ohmios.

Explicar conceptos: discusión y escritura

47. Las siguientes expresiones se llaman fracciones continuas:

$$1 + \frac{1}{x}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}},$$

Cada uno se simplifica a una expresión de la forma.

$$\frac{hacha + b}{bx + c}$$

Traza los valores sucesivos de a, byc a medida que “continúas” la fracción. ¿Puedes descubrir los patrones que siguen estos valores? Ve a la biblioteca e investiga los números de Fibonacci. Escribe un informe sobre tus hallazgos.

48. Explícale a un compañero de estudios cuándo usarías el método MCM para sumar dos expresiones racionales. Da dos ejemplos de suma de dos expresiones racionales, una en la que usas el MCM y la otra en la que no.

49. ¿Cuál de los dos métodos dados en el texto para simplificar expresiones racionales complejas prefieres? Escribe un breve párrafo exponiendo los motivos de tu elección.

Machine Translated by Google

A.6 Resolución de ecuaciones

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

- Factorizar polinomios (Sección A.3, págs. A27–A28)
- Propiedad de producto cero (Sección A.1, p. A4)
- Raíces cuadradas (Sección A.1, págs. A9–A10)
- Valor absoluto (Sección A.1, págs. A5–A6)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página A51.

OBJETIVOS 1 Resolver ecuaciones factorizando (p. A46)
2 Resolver ecuaciones que involucran valor absoluto (p. A46)
3 Resolver una ecuación cuadrática factorizando (p. A47)
4 Resuelve una ecuación cuadrática completando el cuadrado (p. A48)
5 Resuelve una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática (p. A49)

Una ecuación en una variable es una declaración en la que dos expresiones, al menos una que contiene la variable, son iguales. Las expresiones se llaman lados de la ecuación. Dado que una ecuación es un enunciado, puede ser verdadera o falsa, dependiendo del valor de la variable. A menos que se restrinja lo contrario, los valores admisibles de la variable son aquellos en el dominio de la variable. Estos valores admisibles de la variable, si los hay, que dan como resultado un enunciado verdadero se denominan soluciones o raíces de la ecuación. Resolver una ecuación significa encontrar todas las soluciones de la ecuación.

Por ejemplo, las siguientes son todas ecuaciones en una variable, x:

$$x + 5 = 9 \quad x2 + 5x = 2x - 2 \quad \frac{x2 - 4}{x + 1} = 0 \quad 2x2 + 9 = 5$$

La primera de estas afirmaciones, x + 5 = 9, es verdadera cuando x = 4 y falsa para cualquier otra elección de x. Es decir, 4 es la solución de la ecuación x + 5 = 9. También decimos que 4 satisface la ecuación x + 5 = 9, porque, cuando se sustituye x por 4, se obtiene un enunciado verdadero.

A veces una ecuación tendrá más de una solución. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{x2 - 4}{x + 1} = 0$$

tiene - 2 y 2 como soluciones.

Por lo general, escribimos las soluciones de una ecuación como un conjunto, llamado conjunto solución de la ecuación. Por ejemplo, el conjunto solución de la ecuación x2 - 9 = 0 es 5 - 3, 36.

Algunas ecuaciones no tienen solución real. Por ejemplo, x2 + 9 = 5 no tiene solución real, porque no existe un número real cuyo cuadrado, sumado a 9, sea igual a 5.

Una ecuación que se satisface para cada valor de la variable para la cual ambos lados están definidos se llama identidad . Por ejemplo, la ecuación

$$3x + 5 = x + 3 + 2x + 2$$

es una identidad, porque esta afirmación es cierta para cualquier número real x.

Un método para resolver una ecuación es reemplazar la ecuación original por una sucesión de ecuaciones equivalentes, ecuaciones que tienen el mismo conjunto de soluciones, hasta obtener una ecuación con una solución obvia.

Por ejemplo, considere la siguiente sucesión de ecuaciones equivalentes:

$$2x + 3 = 13$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

Concluimos que el conjunto solución de la ecuación original es 556.

Machine Translated by Google

¿Cómo obtenemos ecuaciones equivalentes? En general, hay cinco formas.

Procedimientos que dan como resultado ecuaciones equivalentes

- Intercambia los dos lados de la ecuación:

  Reemplazar 3 = x por x = 3

- Simplifica los lados de la ecuación combinando términos semejantes, eliminando paréntesis, etc.:

  Reemplazar 1x + 22 + 6 = 2x + 1x + 12
  por x + 8 = 3x + 1

- Sumar o restar la misma expresión en ambos lados de la ecuación:

  Sustituir 3x - 5 = 4
  por 13x - 52 + 5 = 4 + 5

- Multiplica o divide ambos lados de la ecuación por la misma expresión distinta de cero:

  Reemplazar $\frac{3x}{x-1} = \frac{6}{x-1}$ $x \cdot 1$
  por $\frac{3x}{x-1} \# 1x - 12 = \# 1x - \frac{6}{x-1}$ 12

- Si un lado de la ecuación es 0 y el otro lado se puede factorizar, entonces escribe como producto de factores:

  Sustituir x2 - 3x = 0
  por x1x - 32 = 0

ADVERTENCIA Elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación no necesariamente conduce a una ecuación equivalente. Por ejemplo, x = 3 tiene una solución, pero x2 = 9 tiene dos soluciones: 3 y 3. ¡

Siempre que sea posible resolver una ecuación en tu cabeza, hazlo. Por ejemplo,

- La solución de 2x = 8 es 4.
- La solución de 3x - 15 = 0 es 5.

Ahora resuelve el problema 1 5

EJEMPLO 1 Resolver una ecuación

Resuelve la ecuación: 3x - 5 = 4

Solución

Reemplace la ecuación original por una sucesión de ecuaciones equivalentes.

3x - 5 = 4

13x - 52 + 5 = 4 + 5 Suma 5 a ambos lados.

3x = 9 Simplifica.

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ x = Divide ambos lados por 3.

3 Simplificar.

La última ecuación, x = 3, tiene la solución 3. Todas estas ecuaciones son equivalentes, por lo que 3 es la única solución de la ecuación original, 3x - 5 = 4.

✓ Verificar: Verifique la solución sustituyendo x por 3 en la ecuación original.

3x - 5 = 3 # 3 - 5 = 9 - 5 = 4

La solución lo comprueba. El conjunto solución es 536.

Ahora resuelve los problemas 2 9 y 3 5

Machine Translated by Google

1 Resolver ecuaciones factorizando

Si una ecuación se puede escribir como un producto de factores igual a 0, use la propiedad del producto cero para igualar cada factor a 0 y resolver las ecuaciones resultantes.

EJEMPLO 2 Resolver ecuaciones factorizando

Resuelve las ecuaciones: (a) x3 = 4x (b) x3 - x2 - 4x + 4 = 0

Solución (a) Comience reuniendo todos los términos en un lado. Esto da como resultado 0 en un lado y un expresión que se va a factorizar en el otro.

x3 = 4x

x3 - 4x = 0

x1x2 - 42 = 0 x1x Factor.

- 22 1x + 22 = 0 Factorice nuevamente.

x = 0 o x - 2 = 0 o x + 2 = 0 Utilice la propiedad de producto cero.

x = 0 o x = 2 o x = - 2 Resuelve para x.

✓ Comprueba: x = - 2: 1 - 22 3 = - 8 y 41 - 22 = - 8 ·2 es una solución.

x = 0: 03 = 0 y 4 # 0 = 0 0 es una solución.

x = 2: 23 = 8 y 4 # 2 = 8 2 es una solución.

El conjunto solución es 5 - 2, 0, 26.

(b) Agrupe los términos de x3 - x2 - 4x + 4 = 0 de la siguiente manera:

1x3 - x22 - 14x - 42 = 0

Factoriza x2 del primer grupo y 4 del segundo.

x2 1x - 12 - 41x - 12 = 0

Esto revela el factor común 1x - 12, entonces

1x2 - 42 1x - 12 = 0 1x -

22 1x + 22 1x - 12 = 0 Factorice nuevamente.

x - 2 = 0 o x + 2 = 0 o x - 1 = 0 Utilice la propiedad del producto cero.

x = 2 x = - 2 x = 1 Resuelve para x.

✓ Controlar:

x = - 2: 1- 223 - 1- 222 - 41- 22 + 4 = - 8 - 4 + 8 + 4 = 0 ·2 es una solución.

3 x = 1: 1 2 - 1 - 4112 + 4 = 1 - 1 - 4 + 4 = 0 x = 2: 23 - 1 es una solución.

22 - 4122 + 4 = 8 - 4 - 8 + 4 = 0 2 es una solución.

El conjunto solución es 5 - 2, 1, 26.

Ahora resuelve los problemas 3 9 y 4 5

2 Resolver ecuaciones que involucran valor absoluto

En la recta numérica real, el valor absoluto de a es igual a la distancia desde el origen hasta el punto cuya coordenada es a. Por ejemplo, hay dos puntos cuya distancia desde el origen es 5 unidades, - 5 y 5. Entonces la ecuación 0 x 0 = 5 tiene el conjunto solución 5 - 5, 56.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3 Resolver una ecuación que involucra valor absoluto

Resuelve la ecuación: 0 x + 4 0 = 13

Solución Hay dos posibilidades:

$$x + 4 = 13 \text{ o } x + 4 = -13$$

$$x = 9 \text{ o } \qquad x = -17$$

El conjunto solución es 5 - 17, 96.

Ahora resuelve el problema 5 1

3 Resuelva una ecuación cuadrática factorizando

DEFINICIÓN Ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

donde a, b y c son números reales y a · 0.

Una ecuación cuadrática escrita en la forma ax2 + bx + c = 0 se dice que está en forma estándar.

A veces, una ecuación cuadrática se llama ecuación de segundo grado porque, cuando está en forma estándar, el lado izquierdo es un polinomio de grado 2.

Cuando una ecuación cuadrática se escribe en forma estándar, es posible factorizar la expresión del lado izquierdo en el producto de dos polinomios de primer grado. Luego, usando la propiedad del producto cero y estableciendo cada factor igual a 0, las ecuaciones lineales resultantes se pueden resolver para obtener las soluciones de la ecuación cuadrática.

EJEMPLO 4 Resolver una ecuación cuadrática mediante factorización

Resuelve la ecuación: 2x2 = x + 3

Solución Pon la ecuación 2x2 = x + 3 en forma estándar restando x y 3 de ambos lados.

$$2x2 = x + 3$$

$$2x2 - x - 3 = 0 \qquad \text{Resta x y 3 de ambos lados.}$$

El lado izquierdo ahora puede factorizarse como

$$12x - 32\ 1x + 12 = 0 \qquad \text{Factor.}$$

de modo que

$$2x - 3 = 0 \text{ o } x + 1 = 0 \qquad \text{Utilice la propiedad de producto cero.}$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad x = -1 \qquad \text{Resolver.}$$

El conjunto solución es e - 1, $\frac{3}{2}$ f.

Cuando el lado izquierdo se factoriza en dos ecuaciones lineales con la misma solución, se dice que la ecuación cuadrática tiene una solución repetida. Esta solución también se llama raíz de multiplicidad 2 o raíz doble.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 5 Resolver una ecuación cuadrática mediante factorización

Resuelve la ecuación: $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Solución Esta ecuación ya está en forma estándar y el lado izquierdo se puede factorizar.

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$(3x - 1)(3x - 1) = 0 \quad \text{Factorización.}$$

entonces

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{Solución para x.}$$

Esta ecuación tiene solo la solución repetida $\frac{1}{3}$. El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Ahora problema de trabajo 69

El método de la raíz cuadrada

Supongamos que queremos resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 = p \tag{2}$$

donde $p > 0$ es un número positivo. Procediendo como en los ejemplos anteriores,

$$x^2 - p = 0$$ Poner en forma estándar.

$$(x + \sqrt{p})(x - \sqrt{p}) = 0 \quad x = -\sqrt{p} \text{ o } x = \sqrt{p}$$ Factorizar (sobre los números reales).

$$= -\sqrt{p}$$ Resuelve.

Tenemos el siguiente resultado:

> Si $x^2 = p$ y $p > 0$, entonces $x = \sqrt{p}$ o $x = -\sqrt{p}$. (3)

Cuando se utiliza la afirmación (3), se denomina método de la raíz cuadrada. En el enunciado (3), observe que si $p > 0$ la ecuación $x^2 = p$ tiene dos soluciones, $x = \sqrt{p}$ y $x = -\sqrt{p}$. Generalmente abreviamos estas soluciones como $x = \pm\sqrt{p}$, que se lee como "x es igual a más o menos la raíz cuadrada de p".

Por ejemplo, las dos soluciones de la ecuación.

$$x^2 = 4$$

son

$$x = \pm\sqrt{4} \quad \text{Utilice el método de la raíz cuadrada.}$$

y, como $\sqrt{4} = 2$, tenemos

$$x = \pm 2$$

El conjunto solución es $\{-2, 2\}$.

Ahora problema de trabajo 83

4 Resuelve una ecuación cuadrática completando el cuadrado

EJEMPLO 6 Resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado

Resuelve completando el cuadrado: $2x^2 - 8x - 5 = 0$

Solución Primero, reescribe la ecuación de modo que la constante esté en el lado derecho.

$$2x^2 - 8x - 5 = 0$$

$$2x^2 - 8x = 5 \quad \text{Suma 5 a ambos lados.}$$

Machine Translated by Google

Luego, divide ambos lados entre 2 para que el coeficiente de x2 sea 1. (Esto nos permite completar el cuadrado en el siguiente paso).

$$x2 - 4x = 2\ \frac{5}{}$$

Finalmente, completa el cuadrado sumando c 1 2 1 - 42d 2 = 4 a ambos lados.

$$x2 - 4x + 4 = + 4\ 5 2$$ Agrega 4 a ambos lados.

$$1x - 22^{\ 2} = \frac{13}{2}$$ Factor de izquierda; simplificar a la derecha.

$$x - 2 = \{\text{Un } 13\ \overline{\ 2}$$ Utilice el método de la raíz cuadrada.

$$x - 2 = \{\ \frac{\sqrt{226}}{2\ \text{A } 13}\qquad \frac{\sqrt{\ }}{2} = \frac{\sqrt{113}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{113}}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{126}}{2}$$

$$x = 2\ \{\ \frac{\sqrt{226}}{2}$$

El conjunto solución es e 2 - $\frac{\sqrt{226}}{2}$, 2 + $\frac{\sqrt{226}}{2f.}$

NOTA Si quisiéramos una aproximación, digamos redondeada a dos decimales, De estas soluciones, usaríamos una calculadora para obtener {- 0,55, 4,55}.

Ahora problema de trabajo 8 7

5 Resuelve una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática

Podemos utilizar el método de completar el cuadrado para obtener una fórmula general para resolver cualquier ecuación cuadrática.

$$ax2 + bx + c = 0\ a \cdot 0$$

NOTA No hay pérdida en general al suponer que a 7 0, ya que si a 6 0 podemos multiplicar por - 1 para obtener una ecuación equivalente con un coeficiente principal positivo.

Como en el ejemplo 6, reorganice los términos como

$$ax2 + bx = - c \qquad \text{un } 7\ 0$$

Como a 7 0, divide ambos lados por a para obtener

$$x2 + \frac{b}{}x = - \text{un}\frac{c}{a}$$

Ahora el coeficiente de x2 es 1. Para completar el cuadrado del lado izquierdo, suma el cuadrado de $\frac{1}{2}$ veces el coeficiente de x; es decir, agregar

$$\text{un}\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\text{un segundo}}^{\ 2} = \frac{b2}{4a2}$$

a ambos lados. Entonces

$$x2 + \frac{b}{a}x + \frac{b2}{4a2} = \frac{b2}{4a2} - \frac{c}{a}$$

$$\text{hacha} + \frac{b}{2a\ b}^{\ 2} = \frac{b2 - 4ac}{4a2} \qquad \frac{b2}{4a2} - \frac{c}{a} = \frac{b2}{4a2} - \frac{4ac}{4a2} = \frac{b2 - 4ac}{4a2} \qquad (4)$$

Siempre que b2 - 4ac Ú 0, ahora podemos usar el método de la raíz cuadrada para obtener

$$x + \frac{b}{2a} = \{\ \text{Si } \sqrt{b2 - 4ac}\ a2$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\{\ \sqrt{2b2 - 4ac}}{2a}$$

La raíz cuadrada de un cociente es igual al cociente de las raíces cuadradas. Además, 24a2 · 2a desde a + 0.

(continuado)

Machine Translated by Google

$$x = -\frac{b}{2a} \{ \frac{\sqrt{2b2 - 4ac}}{2a}$$ Agrega $-\frac{b}{2a}$ ambos lados.

$$= \frac{- b \{ \sqrt{2b2 - 4ac}}{2a}$$ Combina los cocientes de la derecha.

¿Qué pasa si b2 - 4ac es negativo? Entonces la ecuación (4) establece que la expresión de la izquierda (un número real al cuadrado) es igual a la expresión de la derecha (un número negativo). Como esto es imposible para números reales, concluimos que si b2 - 4ac 6 0, la ecuación cuadrática no tiene solución real . (En la siguiente sección analizamos en detalle las ecuaciones cuadráticas para las cuales la cantidad b2 - 4ac 6 0).

TEOREMA Fórmula cuadrática

Considere la ecuación cuadrática

$$ax2 + bx + c = 0 \quad a \cdot 0$$

- Si b2 - 4ac 6 0, esta ecuación no tiene solución real.
- Si b2 - 4ac Ú 0, la(s) solución(es) real(es) de esta ecuación está(n) dada(s) por Fórmula cuadrática:

$$x = \frac{- b \{ \sqrt{2b2 - 4ac}}{2a} \qquad (5)$$

La cantidad b2 · 4ac se llama discriminante de la ecuación cuadrática porque su valor nos dice si la ecuación tiene soluciones reales. De hecho, también nos dice cuántas soluciones podemos esperar.

Discriminante de una ecuación cuadrática

Para una ecuación cuadrática ax2 + bx + c = 0, a · 0:

- Si b2 - 4ac 7 0, hay dos soluciones reales desiguales.
- Si b2 - 4ac = 0, hay una solución repetida, una raíz doble.
- Si b2 - 4ac 6 0, no hay una solución real.

Cuando se le pida que encuentre las soluciones reales de una ecuación cuadrática, siempre evalúe primero el discriminante para ver si hay soluciones reales.

EJEMPLO 7 Resolver una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática

Utilice la fórmula cuadrática para encontrar las soluciones reales, si las hay, de la ecuación.

$$3x2 - 5x + 1 = 0$$

Solución La ecuación está en forma estándar, así que compárala con ax2 + bx + c = 0 para encontrar a, b, y C.

$$3x2 - 5x + 1 = 0$$

$$ax2 + bx + c = 0 \quad a \cdot 3, b \cdot -5, c \cdot 1$$

Con a = 3, b = - 5 y c = 1, evalúe el discriminante b2 - 4ac.

$$b2 - 4ac = 1 - 52 \quad ^2 - 4132\ 112 = 25 - 12 = 13$$

Machine Translated by Google

Como b2 - 4ac 7 0, hay dos soluciones reales, que se pueden encontrar usando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \{ \sqrt{2b2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 - 52 \{\sqrt{213}}{2132} = \frac{5 \{\sqrt{213}}{6}$$

El conjunto solución es e $\frac{5 - \sqrt{213}}{6}$, $\frac{5 + \sqrt{213}}{6}$ F.

EJEMPLO 8 Resolver una ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática

Utilice la fórmula cuadrática para encontrar las soluciones reales, si las hay, de la ecuación.

$$3x2 + 2 = 4x$$

Solución La ecuación, tal como está dada, no está en forma estándar.

$$3x2 + 2 = 4x$$

$$3x2 - 4x + 2 = 0$$ Puesto en forma estándar.

$$ax2 + bx + c = 0$$ Comparar con la forma estándar.

Con a = 3, b = - 4 y c = 2, el discriminante es

$$b2 - 4ac = 1 - 42 \quad 2 - 4 \# 3 \# 2 = 16 - 24 = - 8$$

Como b2 - 4ac 6 0, la ecuación no tiene solución real.

Ahora resuelve los problemas 9 3 y 9 9.

RESUMEN

Pasos para resolver una ecuación cuadrática

Para resolver una ecuación cuadrática, primero póngala en forma estándar:

$$ax2 + bx + c = 0$$

Entonces:

Paso 1: Identifique a, b y c.

Paso 2: Evaluar el discriminante, b2 - 4ac.

Paso 3:
- Si el discriminante es negativo, la ecuación no tiene solución real.
- Si el discriminante es cero, la ecuación tiene una solución real repetida, una raíz doble.
- Si el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Si puedes identificar fácilmente los factores, utiliza el método de factorización para resolver la ecuación. En caso contrario, utiliza la fórmula cuadrática o el método de completar el cuadrado.

A.6 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Factorizar: x2 - 5x - 6 (págs. A27–A28)

2. Factorizar: 2x2 - x - 3 (págs. A27–A28)

3. El conjunto solución de la ecuación 1x - 32 13x + 52 = 0 . (pág. A4)
es _____

4. Verdadero o Falso $2\sqrt{x2} = 0$ x 0 . (págs. A9–A10)

Machine Translated by Google

Conceptos y vocabulario

5. Una ecuación que se satisface para cada elección de la variable para la cual ambos lados están definidos se llama(n) _____.

6. Verdadero o Falso La solución de la ecuación 3x - 8 = 0 es 8 $\frac{3}{}$.

7. Verdadero o Falso Algunas ecuaciones no tienen solución.

8. Para resolver la ecuación x2 + 5x = 0 completando el cuadrado, lo harías 9. _____ el número _____ a ambos lados.

La cantidad b2 - 4ac se llama de una ecuación cuadrática. Si es así, la ecuación no tiene solución real. _____,

10. Verdadero o Falso Las ecuaciones cuadráticas siempre tienen dos valores reales. soluciones.

11. Verdadero o Falso Si el discriminante de una ecuación cuadrática es positivo, entonces la ecuación tiene dos soluciones que son negativas entre sí.

12. Elección múltiple Un valor admisible para la variable que hace que la ecuación sea un enunciado verdadero se llama(n) de la ecuación. _____

(a) identidad (b) solución (c) grado (d) modelo

13. Opción múltiple Una ecuación cuadrática a veces se llama ecuación a _____ de grado.

(un primero (b) segundo (c) tercero (d) cuarto

14. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas está en forma estándar?

(a) x2 - 7x = 5 (b) 9 = x2

(c) 1x + 52 1x - 42 = 0 (d) 0 = 5x2 - 6x - 1

Desarrollo de habilidades

En los problemas 15 a 80, resuelve cada ecuación.

15. 3x = 21 16. 3x = - 24 17. 5x + 15 = 0 18. 3x + 18 = 0

19. 2x - 3 = 5 20. 3x + 4 = - 8 21. $\frac{1}{}_{x=3}\ \frac{5}{12}$ 22. $\frac{2}{}_{x=3}\ \frac{9}{2}$

23. 6- x = 2x + 9 24. 3 - 2x = 2 - x 25. 213 + 2x2 = 31x - 42 26. 312 - x2 = 2x - 1

27. 8x - 12x + 12 = 3x - 10 28. 5 - 12x - 12 = 10 29. $\frac{1}{}x - 4 = 2\ \frac{3}{4}x$ 30. $1 - \frac{1}{2}x = 5$

31. 0,9t = 0,4 + 0,1t 32. 0,9t = 1 + t 33. $\frac{2}{y} + \frac{4}{y} = 3$ 34. $\frac{4}{y} - 5 = 2\ \frac{5}{\text{años}}$

35. 1x + 72 1x - 12 = 1x + 12 36. 1x + 22 1x - 32 = 1x - 32 37. z1z2 + 12 = 3 + z3

38. w14 - w2 2 = 8 - w3 39. x2 = 9x 40. x3 = x2

41. $t^{3}{}_{2-9t__} = 0$ 42. 4z3 - 8z2 = 0 43. $\frac{3}{2x-3} = \frac{2}{x+5}$

44. $\frac{-2}{x+4} = \frac{-3}{x+1}$ 45. x3 + 2x2 - 4x - 8 = 0 46. x3 + 50 = 2x2 + 25x

47. $\frac{2}{x-2} = \frac{3}{x+5} + \frac{10}{1x+52\ 1x-22}$ 48. $\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{12x+32\ 1x-12}$ 49. 0 2x 0 = 6

50. 0 3x 0 = 12 51. 0 2x + 3 0 = 5 52. 0 3x - 1 0 = 2

53. 0 1 - 4t 0 = 5 54. 0 1 - 2z 0 = 3 55. 0 - 2x 0 = 8 56. 0 - x 0 = 1

57. 0 - 2 0 x = 4 58. 0 3 0 x = 9 59. 0 x - 2 0 = - 2 $\frac{1}{}$ 60. 0 2 - x 0 = - 1

61. 0 x2 - 4 0 = 0 62. 0 x2 - 9 0 = 0 63. 0 x2 - 2x 0 = 3 64. 0x2 + x0 = 12 _

65. 0 x2 + x - 1 0 = 1 66. 0 x2 + 3x - 2 0 = 2 67. x2 = 4x 68. x2 = - 8x

69. z2 + 4z - 12 = 0 v2 + 7v + 12 = 0 71. 2x2 - 5x - 3 = 0 72. 3x2 + 5x + 2 = 0

73. x1x - 72 + 12 = 0 74. x1x + 12 = 12 75. 4x2 + 9 = 12x 76. 25x2 + 16 = 40x

77. $6x - 5 = \frac{6}{x}$ 78. $x + \frac{12}{x} = 7$ 79. $\frac{41x-22}{x-3} + \frac{3}{x} = \frac{-3}{x1x-32}$ 80. $\frac{5}{x+4} = 4 + \frac{3}{x-2}$

En los problemas 81 a 86, resuelva cada ecuación mediante el método de la raíz cuadrada.

81. x2 = 25 82. x2 = 36 83. $1x - 12^{2} = 4$

84. $1x + 22^{2} = 1$ 85. 12 años + $32^{2} = 9$ 86. $13x - 22^{2} = 4$

Machine Translated by Google

En los problemas 87 a 92, resuelve cada ecuación completando el cuadrado.

87. $x^2 + 4x = 21$ 88. $x^2 - 6x = 13$ 89. $x^2 - 2\left(\frac{1}{\text{dieciséis}}\right)x - \frac{3}{\text{dieciséis}} = 0$

90. $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ 91. $3x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$ 92. $2x^2 - 3x - 1 = 0$

En los problemas 93 a 104, encuentre las soluciones reales, si las hay, de cada ecuación. Usa la fórmula cuadrática.

93. $x^2 - 4x + 2 = 0$ 94. $x^2 + 4x + 2 = 0$ 95. $x^2 - 5x - 1 = 0$

96. $x^2 + 5x + 3 = 0$ 97. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ 98. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

99. $4y^2 - y + 2 = 0$ 100. $4t^2 + t + 1 = 0$ 101. $4x^2 = 1 - 2x$

102. $2x^2 = 1 - 2x$ 103. $x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0$ 104. $x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 = 0$

En los problemas 105 a 110, utilice el discriminante para determinar si cada ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales desiguales, una solución real repetida o ninguna solución real sin resolver la ecuación.

105. $x^2 - 5x + 7 = 0$ 106. $x^2 + 5x + 7 = 0$ 107. $9x^2 - 30x + 25 = 0$

108. $25x^2 - 20x + 4 = 0$ 109. $3x^2 + 5x - 8 = 0$ 110. $2x^2 - 3x - 4 = 0$

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 111 a 116, resuelve cada ecuación. Las letras a, b y c son constantes.

111. $ax - b = c$, $a \neq 0$ 112. $1 - ax = b$, $a \neq 0$

113. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$ 114. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = c$, $c \neq 0$

115. $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x + a} = \frac{2}{x - 1}$ 116. $\frac{b + c}{x + a} = \frac{\text{antes de Cristo}}{x - a}$, $c \neq 0$, $a \neq 0$

Los problemas 117 a 122 enumeran algunas fórmulas que aparecen en las aplicaciones. Resuelve cada fórmula para la variable indicada.

117. Electricidad $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ para R 118. Finanzas $A = P_1 + rt^2$ para r

119. Mecánica $F = \frac{mv^2}{R}$ para R 120. Química $PV = nRT$ para T

121. Matemáticas $S = \frac{a}{1 - r}$ para r 122. Mecánica $v = -gt + v_0$ para t

---

123. Demuestre que la suma de las raíces de una ecuación cuadrática es $-\frac{b}{a}$.

124. Demuestre que el producto de las raíces de una ecuación cuadrática es $\frac{c}{a}$.

125. Encuentre k de modo que la ecuación $kx^2 + x + k = 0$ tenga una repetición verdadera solución.

126. Encuentre k para que la ecuación $x^2 - kx + 4 = 0$ tenga una repetición verdadera solución.

127. Demuestre que las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los negativos de las soluciones reales de la ecuación $ax^2 - bx + c = 0$. Suponga que $b^2 - 4ac \geq 0$.

128. Demuestre que las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los recíprocos de las soluciones reales de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$. Suponga que $b^2 - 4ac \geq 0$.

Explicar conceptos: discusión y escritura

129. ¿Cuál de los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes? Explicar.

(a) $x^2 = 9$; $x = 3$

(b) $x = 29$; $x = 3$

(c) $(x - 12)(x - 22) = (x - 12)^2$; $x - 2 = x - 1$

130. La ecuación

$$\frac{5}{x + 3} + 3 = \frac{8 + x}{x + 3}$$

no tiene solución, sin embargo, cuando realizamos el proceso de resolverlo, obtenemos $x = -3$. Escribe un breve párrafo para explicar qué causa que esto suceda.

Machine Translated by Google

131. Encuentra una ecuación que no tenga solución y dásela a un compañero para que la resuelva. Pídele al compañero de estudios que escriba una crítica de tu ecuación.

132. Describe tres formas en las que podrías resolver una ecuación cuadrática. Indique su método preferido; explica por qué lo elegiste.

133. Explique los beneficios de evaluar el discriminante de una ecuación cuadrática antes de intentar resolverla.

134. Encuentre tres ecuaciones cuadráticas: una que tenga dos soluciones distintas, otra que no tenga solución real y otra que tenga exactamente una solución real.

135. La palabra cuadrática parece implicar cuatro (quad), sin embargo, una ecuación cuadrática es una ecuación que involucra un polinomio de grado 2. Investigue el origen del término cuadrática tal como se usa en la expresión ecuación cuadrática. Escribe un breve ensayo sobre tus hallazgos.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 1x - 62 1x + 12 2. 12x - 32 1x + 12 3. mi - $\frac{5}{3}$' 3f 4. Verdadero

A.7 Números Complejos; Ecuaciones cuadráticas en el sistema numérico complejo*

OBJETIVOS 1 Sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos (p. A55)
2 Resolver ecuaciones cuadráticas en el sistema numérico complejo (p. A59)

Números complejos

Una propiedad de un número real es que su cuadrado no es negativo. Por ejemplo, no existe un número real x para el cual

$$x2 = - 1$$

Para remediar esta situación, introducimos un nuevo número llamado unidad imaginaria.

DEFINICIÓN La Unidad Imaginaria

La unidad imaginaria, que denotamos por i, es el número cuyo cuadrado es -1.
Eso es,

$$yo^2 = - 1$$

Esto no debería sorprenderte. Si nuestro universo estuviera formado sólo por números enteros, no habría ningún número x para el cual 2x = 1. Esto se solucionó introduciendo números como y 2 $\frac{1}{}$ $\frac{2}{3}$, los números racionales. Si nuestro universo estuviera formado únicamente por números racionales, no habría ningún número cuyo cuadrado fuera igual a 2. Es decir, no habría x para el cual x2 = 2. Para remediar esto, introdujimos números como 22 y 23 5, los números irracionales. Recuerde que los números reales están formados por los números racionales y los números irracionales. Ahora bien, si nuestro universo estuviera formado únicamente por números reales, entonces no habría ningún número x cuyo cuadrado sea -1. Para remediar esto, introducimos el número i, cuyo cuadrado es -1.

En la progresión descrita, cada vez que nos encontrábamos con una situación que no era adecuada, se introducía un nuevo sistema numérico para remediar la situación. El sistema numérico que resulta de introducir el número i se llama sistema numérico complejo.

*Esta sección podrá omitirse sin pérdida de continuidad.

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN El sistema numérico complejo

Los números complejos son números de la forma a · bi, donde a y b son números reales. El número real a se llama parte real del número a + bi; el número real b se llama parte imaginaria de a + bi; y i es la unidad imaginaria, 2 entonces i

= - 1.

Por ejemplo, el número complejo - 5 + 6i tiene la parte real - 5 y la parte imaginaria 6.

Cuando un número complejo se escribe en la forma a + bi, donde a y b son números reales, está en forma estándar. Sin embargo, si la parte imaginaria de un número complejo es negativa, como en el número complejo 3 + 1 - 22i, acordamos escribirlo en la forma 3 - 2i.

Además, el número complejo a + 0i normalmente se escribe simplemente como a. Esto sirve para recordarnos que los números reales son un subconjunto de los números complejos. De manera similar, el número complejo 0 + bi suele escribirse como bi. A veces el número complejo bi se llama número imaginario puro.

1 Sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos

La igualdad, la suma, la resta y la multiplicación de números complejos se definen de manera que se preserven las reglas familiares del álgebra para los números reales. Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Igualdad de números complejos

$$a + bi = c + di \quad \text{si y solo si} \quad a = c \text{ y } b = d \qquad (1)$$

Dos números complejos se suman formando el número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

Suma de números complejos

$$1a + bi2 + 1c + di2 = 1a + c2 + 1b + d2i \qquad (2)$$

Para restar dos números complejos, usa esta regla:

Diferencia de números complejos

$$1a + bi2 - 1c + di2 = 1a - c2 + 1b - d2i \qquad (3)$$

EJEMPLO 1 Sumar y restar números complejos

(a) 13 + 5i2 + 1 - 2 + 3i2 = 33 + 1 - 22 4 + 15 + 32i = 1 + 8i

(b) 16 + 4i2 - 13 + 6i2 = 16 - 32 + 14 - 62i = 3 + 1 - 22i = 3 - 2i

Ahora resuelve el problema 1 5

Machine Translated by Google

Los productos de números complejos se calculan como se ilustra en el Ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Multiplicar números complejos

$$15 + 3i2\ 12 + 7i2 = 512 + 7i2 + 3i12 + 7i2 \quad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$= 10 + 35i + 6i + 21i^2 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= 10 + 41i + 211 - 12 \quad i2 \cdot \cdot 1$$

$$= - 11 + 41i \quad \text{Simplificar.}$$

Con base en el procedimiento del Ejemplo 2, el producto de dos números complejos se define de la siguiente manera:

Producto de números complejos

$$1a + bi2\ 1c + di2 = 1ac - bd2 + 1ad + bc2i \qquad (4)$$

No te molestes en memorizar la fórmula (4). En cambio, siempre que sea necesario multiplicar dos números complejos, siga las reglas habituales para multiplicar dos binomios, como hicimos en el ejemplo 2. Sólo recuerde que $i^2 = - 1$. Por ejemplo,

$$12i2\ 12i2 = 4i^2 = 41 - 12 = - 4$$

$$12 + i2\ 11 - i2 = 2 - 2i + i - yo^2 = 3 - yo$$

Ahora resuelve el problema 2 1

Las propiedades algebraicas de la suma y la multiplicación, como las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, se aplican a los números complejos. La propiedad de que todo número complejo distinto de cero tiene un inverso multiplicativo o recíproco requiere una mirada más cercana.

Conjugados

En palabras
El conjugado de un número complejo se encuentra cambiando el signo de la parte imaginaria.

DEFINICIÓN Conjugado complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su conjugado, denotado por $\bar{z}$, se define como

$$\bar{z} = a + bi = a - bi$$

Por ejemplo, $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$ y $\overline{- 6 - 2i} = - 6 + 2i$.

EJEMPLO 3 Multiplicar un número complejo por su conjugado

Encuentra el producto del número complejo $z = 3 + 4i$ y su conjugado $\bar{z}$.

Solución Como $z = 3 - 4i$, tenemos

$$z\bar{z} = 13 + 4i2\ 13 - 4i2 = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

El resultado obtenido en el Ejemplo 3 tiene una generalización importante.

TEOREMA Producto de conjugados complejos

El producto de un número complejo y su conjugado es un número real no negativo. Es decir, si $z = a + bi$, entonces

$$z\bar{z} = a2 + b2 \qquad (5)$$

Machine Translated by Google

Prueba Si z = a + bi, entonces

$$z\bar{z} = 1a + bi2\,1a - bi2 = a2 - abi + abi - 1bi2 = a2 - b2\,1 - 12 = a2 + b2 = a^2 + b^2$$

■

Ahora problema de trabajo 8 9

Para expresar el recíproco de un número complejo z distinto de cero en forma estándar, multiplicar el numerador y el denominador de un $\frac{1}{z}$ por $\bar{z}$. Es decir, si z = a + bi es a número complejo distinto de cero, luego

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - bi}{a2 + b2c} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Utilice (5).

EJEMPLO 4 Escribir el recíproco de un número complejo en forma estándar

Escriba $\frac{1}{3+4i}$ en forma estándar; es decir, encuentre el recíproco de 3 + 4i.

Solución La idea es multiplicar el numerador y denominador por el conjugado de 3 + 4i, es decir, por el número complejo 3 - 4i. El resultado es

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

Para expresar el cociente de dos números complejos en forma estándar, multiplica el numerador y el denominador del cociente por el conjugado del denominador.

EJEMPLO 5 Escribir el cociente de dos números complejos en forma estándar

Escribe cada cociente en forma estándar.

(a) $\frac{1+4i}{5-12i}$ (b) $\frac{2-3i}{4-3i}$

Solución (a) $\frac{1+4i}{5-12i} = \frac{1+4i}{5-12i} \cdot \frac{5+12i}{5+12i} = \frac{5+12i+20i+48i^2}{25+144}$

$$= \frac{-43+32i}{169} = -\frac{43}{169} + \frac{32}{169}i$$

(b) $\frac{2-3i}{4-3i} = \frac{2-3i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{8+6i-12i-9i^2}{16+9} = \frac{17-6i}{25} = \frac{17}{25} - \frac{6}{25}i$

Ahora trabaja el problema 2 9

EJEMPLO 6 Escribir otras expresiones en forma estándar

Si z = 2 - 3i y w = 5 + 2i, escribe cada expresión en forma estándar.

(a) $\frac{z}{w}$ (b) $\overline{z + w}$ (c) $z + \bar{z}$

Solución (a) $\frac{z}{w} = \frac{z \# \bar{w}}{w \# \bar{w}} = \frac{12 - 3i2\,15 - 2i2}{15 + 2i2\,15 - 2i2} = \frac{10 - 4i - 15i + 6i^2}{25 + 4}$

$$= \frac{4-19i}{29} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$$

(b) $\overline{z + w} = \overline{12 - 3i2 + 15 + 2i2} = \overline{7 - i} = 7 + i$

(c) $z + \bar{z} = 12 - 3i2 + \overline{12 + 3i2} = 4$

Machine Translated by Google

El conjugado de un número complejo tiene ciertas propiedades generales que serán útiles más adelante.

Para un número real a = a + 0i, el conjugado es $\overline{a} = \overline{a + 0i} = a - 0i = a$.

TEOREMA

El conjugado de un número real es el número real mismo.

Otras propiedades que son consecuencias directas de la definición del conjugado se dan a continuación. En cada declaración, z y w representan números complejos.

TEOREMAS

- El conjugado del conjugado de un número complejo es el número complejo sí mismo.

$$\overline{\overline{z}} = z \tag{6}$$

- El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados.

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \tag{7}$$

- El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados.

$$\overline{z \# w} = \overline{z} \# \overline{w} \tag{8}$$

Las demostraciones de las ecuaciones (6), (7) y (8) se dejan como ejercicios.

poderes de i

Los poderes de i siguen un patrón que es útil conocer.

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \# i = -1 \# i = -i$

$i^4 = i^2 \# i^2 = -1 \# -1 = 1$

$i^5 = i^4 \# i = 1 \# i = i$

$i^6 = i^4 \# i^2 = -1$

$i^7 = i^4 \# i^3 = -i$

$i^8 = i^4 \# i^4 = 1$

Etcétera. Los poderes de i se repiten con cada cuarto poder.

EJEMPLO 7

Evaluación de potencias de i

(a) $i^{27} = i^{24} \# i^3 = 1 \# i^3 = -i$

(b) $i^{101} = i^{100} \# i = 1 \# i = i$

EJEMPLO 8

Escribir la potencia de un número complejo en forma estándar

Escribe $(2 + i)^3$ en forma estándar.

Solución

Utilice la fórmula especial del producto para $(x + a)^3$.

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

Machine Translated by Google

NOTA Otra forma de encontrar $(2 + i)^3$ es multiplicar $(2 + i)^2(2 + i)$.

Usando esta fórmula especial de producto,

$$12 + i2^3 = 23 + 3 \# yo \# 22 + 3 \# yo^2 \# 2 + yo$$
$$= 8 + 12i + 61 - 12 + 1 - i2$$
$$= 2 + 11i$$

Ahora resuelve los problemas 3 5 y 4 3

2 Resolver ecuaciones cuadráticas en el sistema numérico complejo

Las ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo no tienen solución de números reales. Sin embargo, si ampliamos nuestro sistema numérico para permitir números complejos, las ecuaciones cuadráticas siempre tienen soluciones. Dado que la solución de una ecuación cuadrática implica la raíz cuadrada del discriminante, comenzamos con una discusión sobre las raíces cuadradas de números negativos.

DEFINICIÓN Raíz cuadrada principal de $\cdot N$

Si N es un número real positivo, definimos la raíz cuadrada principal de $\cdot N$, denotada por $\sqrt{-N}$, como

$$\sqrt{-N} = \sqrt{N}\, i$$

donde i es la unidad imaginaria y $i^2 = -1$.

ADVERTENCIA Por escrito $\sqrt{-N} = \sqrt{N}\, i$, asegúrese de colocar i fuera del símbolo $\sqrt{\ }$.

EJEMPLO 9 Evaluación de la raíz cuadrada de un número negativo

(a) $\sqrt{-1} = \sqrt{21}\, i = i$

(b) $\sqrt{-16} = \sqrt{216}\, i = 4i$

(c) $\sqrt{-8} = \sqrt{28}\, i = \sqrt{222}\, i$

Ahora resuelve el problema 5 1

EJEMPLO 10 Resolver ecuaciones

Resuelve cada ecuación en el sistema de números complejos.

(a) $x2 = 4$ (b) $x2 = - 9$

Solución

(a) $x2 = 4$

$x = \{24 = \{2$

La ecuación tiene dos soluciones, - 2 y 2. El conjunto de soluciones es 5 - 2, 26.

(b) $x2 = - 9$

$x = \{ 2- 9 = \{ 29\, i = \{3i$

La ecuación tiene dos soluciones: 3i y 3i. El conjunto solución es 5 - 3i, 3i6.

Ahora problema de trabajo 5 9

ADVERTENCIA Cuando trabaje con raíces cuadradas de números negativos, no iguale la raíz cuadrada de un producto al producto de las raíces cuadradas (lo cual se puede hacer con números reales positivos). Para ver por qué, mire este cálculo: Sabemos que $\sqrt{100} = 10$. Sin embargo, también es cierto que $100 = (- 25)(- 4)$, entonces

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{(- 25)(- 4)} = \sqrt{- 25}\sqrt{- 4} = 25\, i \# 24\, i = 5i \# 2i = 10i^2 = - 10$$

C

Aquí está el error.

Machine Translated by Google

Como hemos definido la raíz cuadrada de un número negativo, ahora reexpresamos la fórmula cuadrática sin restricción.

TEOREMA Fórmula cuadrática

En el sistema de números complejos, las soluciones de la ecuación cuadrática ax2 + bx + c = 0, donde a, byc son números reales y a · 0 , vienen dadas por la fórmula

$$x = \frac{- b \{ 2b2 - 4ac}{2a} \qquad (9)$$

EJEMPLO 11 Resolver una ecuación cuadrática en el sistema numérico complejo

Resuelve la ecuación x2 - 4x + 8 = 0 en el sistema de números complejos.

Solución

Aquí a = 1, b = - 4, c = 8 y b2 - 4ac = 1 - 42 ecuación (9), ^{2} - 4 # 1 # 8 = - 16. Usando encontramos que

$$x = \frac{- 1 - 42 \{ 2 - 16}{2 \# 1} = \frac{4 \{ 216 \text{ yo}}{2} = \frac{4 \{ 4i}{2} = \frac{212 \{ 2i2}{2} = 2 \{ 2i$$

La ecuación tiene como solución el conjunto 52 - 2i, 2 + 2i6.

✓ Comprueba: 2 + 2i: 12 + 2i2 ^{2} - 412 + 2i2 + 8 = 4 + 8i + 4i 2 - 8 - 8i + 8

$= 4 + 4i^{2}$

$= 4 - 4 = 0$

2 - 2i: 12 - 2i2 ^{2} - 412 - 2i2 + 8 = 4 - 8i + 4i ^{2} - 8 + 8i + 8

$= 4 - 4 = 0$

Ahora resuelve el problema 6 5

El discriminante b2 - 4ac de una ecuación cuadrática todavía sirve como una forma de Determinar el carácter de las soluciones.

Carácter de las soluciones de una ecuación cuadrática

En el sistema de números complejos, considere una ecuación cuadrática ax2 + bx + c = 0, donde a · 0 y a, b y c son números reales.

- Si b2 - 4ac 7 0, la ecuación tiene dos soluciones reales desiguales.
- Si b2 - 4ac = 0, la ecuación tiene una solución real repetida, una raíz doble.
- Si b2 - 4ac 6 0, la ecuación tiene dos soluciones complejas que no son reales. Las soluciones son conjugadas entre sí.

La tercera conclusión en la pantalla es una consecuencia del hecho de que si b2 - 4ac = -N 6 0, entonces por la fórmula cuadrática, las soluciones son

$$x = \frac{- b + 2b2 - 4ac}{2a} = \frac{- \text{segundo} + 2\text{-norte}}{2a} = \frac{- b + 2N \text{ yo}}{2a} = - \frac{b}{2a} + \frac{2N}{2a} i$$

y

$$x = \frac{- b - 2b2 - 4ac}{2a} = \frac{- \text{segundo} - 2\text{-norte}}{2a} = \frac{- b - 2N \text{ yo}}{2a} = - \frac{b}{2a} - \frac{2N}{2a} i$$

que son conjugados entre sí.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 12 Determinar el carácter de las soluciones de una ecuación cuadrática

Sin resolver, determine el carácter de las soluciones de cada ecuación.

(a) 3x2 + 4x + 5 = 0 (b) 2x2 + 4x + 1 = 0 (c) 9x2 - 6x + 1 = 0

Solución

(a) Aquí a = 3, b = 4 y c = 5, entonces b2 - 4ac = 16 - 4 # 3 # 5 = - 44. Las soluciones son dos números complejos que no son reales y son conjugados entre sí.

(b) Aquí a = 2, b = 4 y c = 1, entonces b2 - 4ac = 16 - 8 = 8. Las soluciones son dos números reales desiguales.

(c) Aquí a = 9, b = - 6 y c = 1, entonces b2 - 4ac = 36 - 4 # 9 # 1 = 0. La solución es un número real repetido, es decir, una raíz doble.

Ahora problema de trabajo 7 9

A.7 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Verdadero o Falso El cuadrado de un número complejo a veces es negativo.
2. 12 + i2 12 - i2 = 3. ____.
3. Verdadero o Falso En el sistema de números complejos, una ecuación cuadrática tiene cuatro soluciones.
4. En el número complejo 5 + 2i, el número 5 se llama parte; el número 2 se _____ llama parte; el numero i se llama _____ _____ _____ _____.
5. Verdadero o Falso El conjugado de 2 + 5i es - 2 - 5i.
6. Verdadero o Falso Todos los números reales son números complejos.
7. Verdadero o Falso Si 2 - 3i es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales, entonces - 2 + 3i también es una solución.
8. Opción múltiple ¿ Cuál de las siguientes es la raíz cuadrada principal de - 4?
   (a) - 2i (b) 2i (c) - 2 (d) 2
9. Opción múltiple ¿Qué operación involucra complejas? ¿Los números requieren el uso de un conjugado?
   (a) división (b) multiplicación
   (c) resta (d) suma
10. Potencias de opción múltiple de i se repiten cada _____ fuerza.
    (a) segundo (b) tercio (c) cuarto (d) quinto

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 58, realice la operación indicada y escriba cada expresión en la forma estándar a + bi.

11. 12 - 3i2 + 16 + 8i2
12. 12 - 5i2 - 18 + 6i2
13. 14 + 5i2 + 1 - 8 + 2i2
14. 1 - 8 + 4i2 - 12 - 2i2
15. 3i1 - 3 + 4i2 - 6i2
16. 1 - 3 + 2i2 - 14 - 4i2
17. 312 - 6i2
18. 13 - 4i2 12 + i2
19. - 3i17 + 4i2
20. - 412 + 8i2
21. 13 - 4i2 12 + i2
22. 15 + 3i2 12 - i2
23. 1 - 5 - i2 1 - 5 + i2
24. 1 - 3 + i2 13 + i2
25. $\frac{10}{3-4i}$
26. $\frac{13}{5-12i}$
27. $\frac{2+yo}{i}$
28. $\frac{2-yo}{-2i}$
29. $\frac{6-yo}{1+yo}$
30. $\frac{2+3i}{1-yo}$
31. ¢1 $\frac{1}{2}$ + $\frac{23}{2 yo≤ 2}$
32. ¢ $\frac{23}{2}$ - $\frac{1}{2 yo≤ 2}$
33. 11 + i2 ^{2}
34. 11- i2 ^{2}
35. yo^{23}
36. yo^{14}
37. yo $^{-20}$
38. yo^{-23}
39. yo^6 - 5
40. 4 + yo ^{3}
41. 6i ^{3} -4i ^{5}
42. 4i ^{3} - 2i ^{2} + 1
43. 11 + i2 ^{3}
44. 13i2 ^{4} + 1
45. yo^7 11 + yo^2 $_2$
46. 2i ^{4} 11 + yo^2 $_2$
47. yo^8 6 + yo 4 - yo 2 - yo
48. yo^7 5 + yo 3 + yo + yo
49. 2- 4
50. 2- 9 55.
51. 2- 25 56.
52. 2- 64 53. 2- 12 57. 213 + 4i2 14i - 32 58.
54. 2-18

En los problemas 59 a 78, resuelva cada ecuación del sistema de números complejos.

59. x2 + 4 = 0
60. x2 - 4 = 0
61. x2 - 16 = 0
62. x2 + 25 = 0
63. x2 - 6x + 13 = 0
64. x2 + 4x + 8 = 0
65. x2 - 6x + 10 = 0
66. x2 - 2x + 5 = 0
67. 25x2 - 10x + 2 = 0
68. 10x2 + 6x + 1 = 0
69. 5x2 + 1 = 2x
70. 13x2 + 1 = 6x
71. x2 + x + 1 = 0
72. x2 - x + 1 = 0
73. x3 - 64 = 0
74. x3 + 27 = 0
75. x4 = 16
76. x4 = 1
77. x4 + 13x2 + 36 = 0
78. x4 + 3x2 - 4 = 0

Machine Translated by Google

En los problemas 79 a 84, sin resolver, determine el carácter de las soluciones de cada ecuación en el sistema de números complejos.

79. $3x^2 - 3x + 4 = 0$ 80. $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 81. $2x^2 + 3x = 4$

$x^2 + 6 = 2x$ $9x^2 - 12x + 4 = 0$ 84. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

85. $2 + 3i$ es una solución de una ecuación cuadrática con real coeficientes. Encuentra la otra solución.

86. $4 - i$ es una solución de una ecuación cuadrática con real coeficientes. Encuentra la otra solución.

En los problemas 87 a 90, $z = 3 - 4i$ y $w = 8 + 3i$. Escribe cada expresión en la forma estándar $a + bi$.

87. $z + \bar{z}$ 88. $w - \bar{w}$ 89. $z\bar{z}$ 90. $\overline{z - w}$

Aplicaciones y extensiones

91. Circuitos eléctricos La impedancia Z, en ohmios, de un elemento de circuito se define como la relación entre el voltaje fasor V, en voltios, a través del elemento y la corriente fasorial I, en amperios, a través de el elemento. Es decir, $Z = \frac{V}{I}$. Si el voltaje a través de un elemento del circuito es de $18 + i$ voltios y la corriente a través del elemento es de $3 a 4i$ amperios, encuentre la impedancia.

92. Circuitos paralelos En un circuito de CA con dos vías paralelas, la impedancia total Z, en ohmios, satisface la fórmula $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z2}$, donde Z1 es la impedancia de la primera vía y Z2 es la impedancia de la segunda vía. Encuentre la impedancia total si las impedancias de las dos vías son $Z1 = 2 + i$ ohmios y $Z2 = 4 - 3i$ ohmios.

93. Utilice $z = a + bi$ para demostrar que $z + \bar{z} = 2a$ $yz - \bar{z} = 2bi$.

94. Utilice $z = a + bi$ para demostrar que $\bar{\bar{z}} = z$.

95. Utilice $z = a + bi$ y $w = c + di$ para demostrar que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

96. Utilice $z = a + bi$ y $w = c + di$ para demostrar que $\overline{z \# w} = \bar{z} \# \bar{w}$.

A.8 Resolución de problemas: solicitudes de empleo de interés, mezcla, movimiento uniforme y tasa constante

OBJETIVOS 1 Traducir descripciones verbales en expresiones matemáticas (p. A63)

2 Resolver problemas de intereses (p. A63)

3 Resolver problemas de mezclas (p. A65)

4 Resolver problemas de movimiento uniforme (p. A66)

5 Resuelva problemas de trabajos de tasa constante (p. A67)

NOTA El ícono es Modelit! icono. Indica que la discusión o problema implica modelado.

Los problemas aplicados (enunciados) no vienen en la forma "Resuelve la ecuación". . . ." En cambio, proporcionan información mediante palabras, una descripción verbal del problema real. Entonces, para resolver problemas aplicados, debemos ser capaces de traducir la descripción verbal al lenguaje matemático. Esto se puede hacer usando variables para representar cantidades desconocidas y luego encontrando relaciones (como ecuaciones) que involucren estas variables. El proceso de hacer todo esto se llama modelado matemático. Una ecuación o desigualdad que describe una relación entre las variables se llama

Cualquier solución al problema matemático debe cotejarse con el problema matemático, la descripción verbal y el problema real. Consulte la Figura 23 para ver una ilustración del proceso de modelado.

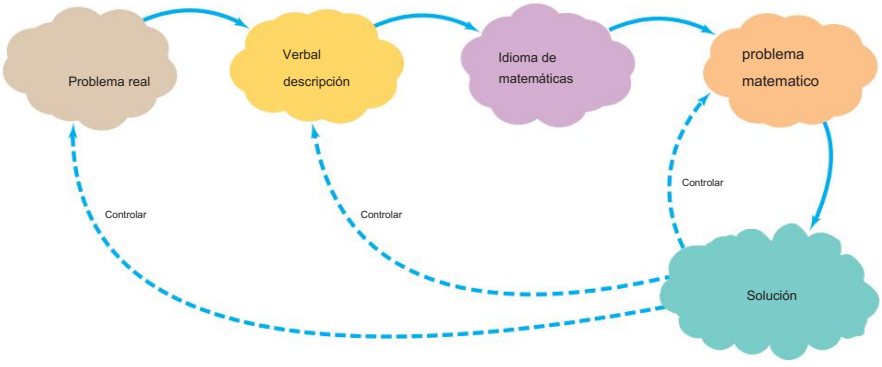


Figura 23 El proceso de modelado

Machine Translated by Google

1 Traducir descripciones verbales en expresiones matemáticas

EJEMPLO 1 Traducir descripciones verbales en expresiones matemáticas

(a) Para un movimiento uniforme, la rapidez promedio de un objeto es igual a la distancia recorrida dividido por el tiempo requerido.

Traducción: Si r es la velocidad, d la distancia y t el tiempo, entonces $r = \frac{d}{t}$.

(b) Sea x un número.

El número 5 veces mayor que x es 5x.
El número 3 menor que x es x - 3.

El número que excede x en 4 es x + 4.

El número que sumado a x da 5 es 5 - x.

Ahora trabaja el problema 9

Siempre verifique las unidades utilizadas para medir las variables de un problema aplicado. En el ejemplo 1(a), si r se mide en millas por hora, entonces la distancia d debe expresarse en millas y el tiempo t debe expresarse en horas. Es una buena práctica comprobar las unidades para asegurarse de que sean coherentes y tengan sentido.

Pasos para resolver problemas aplicados

Paso 1: Lea el problema con atención, quizás dos o tres veces. Preste especial atención a la pregunta que se hace para identificar lo que está buscando. Identifique cualquier fórmula relevante que pueda necesitar. Si puede, determine posibilidades realistas. 1d = rt, A = pr para ^{2}, etc.2 . la respuesta.

Paso 2: Asigne una letra (variable) para representar lo que está buscando y, si es necesario, exprese las cantidades desconocidas restantes en términos de esta variable.

Paso 3: haz una lista de todos los hechos conocidos y tradúcelos a expresiones matemáticas. Estos pueden tomar la forma de una ecuación o una desigualdad que involucre a la variable. Si es posible, dibuja un diagrama debidamente etiquetado para ayudarte. A veces, resulta útil crear una tabla o un gráfico.

Paso 4: Resuelva la variable y luego responda la pregunta.

Paso 5: Verifica la respuesta con los hechos del problema. Si está de acuerdo, ¡enhorabuena! Si no concuerda, revisa tu trabajo y vuelve a intentarlo.

2 Resolver problemas de intereses

El interés es dinero pagado por el uso del dinero. La cantidad total pedida prestada (ya sea por un individuo a un banco en forma de préstamo o por un banco a un individuo en forma de cuenta de ahorros) se denomina principal . La tasa de interés, expresada como porcentaje, es el monto cobrado por el uso del principal durante un período de tiempo determinado, generalmente anualmente (es decir, por año).

Fórmula de interés simple

Si se toma prestado un capital de P dólares por un período de t años a una tasa de interés anual r, expresada como decimal, el interés I cobrado es

$$\text{Yo} = \text{Prt} \qquad (1)$$

Machine Translated by Google

El interés cobrado según la fórmula (1) se denomina interés simple. Cuando utilice la fórmula (1), asegúrese de expresar r como decimal. Por ejemplo, si la tasa de interés es del 4%, entonces r = 0,04.

EJEMPLO 2 Finanzas: cálculo del interés de un préstamo

Supongamos que Juanita pide prestado $500 por 6 meses a una tasa de interés simple del 9% anual. ¿Cuál es el interés que le cobrarán a Juanita por el préstamo? ¿Cuánto debe Juanita después de 6 meses?

Solución

La tasa de interés se da por año, por lo que el tiempo real que se toma prestado el dinero debe expresarse en años. El interés cobrado sería el capital, $500, multiplicado por la tasa de interés 19, = 0,092, multiplicada por el tiempo en años ,: $\frac{1}{2}$

$$\text{Interés cobrado} = I = Prt = 500 \# 0{,}09 \# = \$22{,}50 \quad \frac{1}{2}$$

Después de 6 meses, Juanita deberá lo que pidió prestado más los intereses:

$$\$500 + \$22{,}50 = \$522{,}50$$

EJEMPLO 3 Planificacion Financiera

Candy tiene $70 000 para invertir y quiere un rendimiento anual de $2800, lo que requiere una tasa de rendimiento general del 4%. Puede invertir en un certificado de depósito seguro y asegurado por el gobierno, pero sólo paga el 2%. Para obtener el 4%, acepta invertir parte de su dinero en bonos corporativos no asegurados que pagan el 7%. ¿Cuánto se debe colocar en cada inversión para lograr su objetivo?

Solución

Paso 1: La pregunta solicita dos cantidades en dólares: el capital para invertir en los bonos corporativos y el capital para invertir en el certificado de depósito.

Paso 2: Sea b la cantidad (en dólares) que se invertirá en los bonos. Entonces 70.000 - b es la cantidad que se invertirá en el certificado. (¿Ves por qué?)

Paso 3: Montamos una mesa:

	Principal ($)	Tasa	Tiempo (año)	Interés ($)
Cautiverio	b	7, = 0,07	1	0,07b
Certificado	70.000 - b2, = 0,02		1	0,02(70.000 - b)
Total	70.000	4, = 0,04	1	0,04(70.000) = 2800

NOTA: También podríamos haber dejado c representan el monto invertido en el certificado y 70.000 - c el monto invertido en bonos. j

Dado que el interés combinado de las inversiones es igual al interés total, tenemos

$$\text{Interés del bono} + \text{interés del certificado} = \text{interés total}$$

$$0{,}07b + 0{,}02170.000 - b2 = 2800$$

(Tenga en cuenta que las unidades son consistentes: la unidad es dólares en ambos lados).

Paso 4: 0,07b + 1400 - 0,02b = 2800

$$0{,}05b = 1400 \quad \text{Simplificar.}$$

$$b = 28.000 \quad \text{Divide ambos lados por 0,05.}$$

Candy debe colocar $28 000 en los bonos y $70 000 - 28 000 = $42 000 en el certificado.

Paso 5: El interés de los bonos después de 1 año es 0,071$28,0002 = $1960; el interés del certificado después de 1 año es 0,021$42,0002 = $840. El interés anual total es de $2800, la cantidad requerida.

Ahora problema de trabajo 1 9

Machine Translated by Google

3 Resolver problemas de mezcla

Las refinerías de petróleo a veces producen gasolina que es una mezcla de dos o más tipos de combustible; Las panaderías ocasionalmente mezclan dos o más tipos de harina para su pan. Estos problemas se denominan problemas de mezcla porque implican combinar dos o más cantidades para formar una mezcla.

EJEMPLO 4

Mezclar cafés

El gerente de una tienda Starbucks decide experimentar con una nueva mezcla de café. Mezclará un poco de café colombiano de grado B que se vende a $5 la libra con un poco de café Arábica de grado A que se vende a $10 la libra para obtener 100 libras de la nueva mezcla. El precio de venta de la nueva mezcla será de $7 por libra y no habrá diferencia en los ingresos entre vender la nueva mezcla y vender los otros tipos por separado. ¿Cuántas libras de café colombiano grado B y cuántas libras de café Arábica grado A se necesitan?

Solución Sea c el número de libras de café colombiano grado B. Entonces 100 -c equivale al número de libras de café Arábica de grado A. Ver Figura 24.

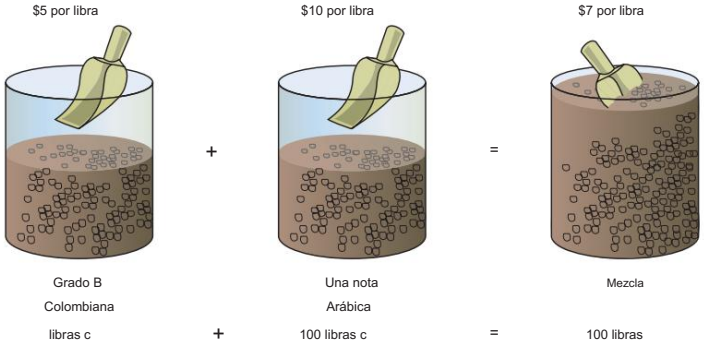


Figura 24

Dado que no habrá diferencia en los ingresos entre vender los grados A y B por separado y vender la mezcla, tenemos

Ingresos del grado B + Ingresos de grado A = Ingresos por mezcla

b Precio por libra r bLibras de Grado B r + b Precio por libra r bLibras de Grado A r = b Precio por libra r bLibras de mezcla r

$5 . c + $10 # (100- c) = $7 . 100

Ahora resuelve la ecuación:

5c + 101100 - c2 = 700

5c + 1000 - 10c = 700

- 5c = - 300

c = 60

El gerente debe mezclar 60 libras de café colombiano grado B con 100 - 60 = 40 libras de café Arábica grado A para obtener la mezcla deseada.

✓ Verifique: Las 60 libras de café grado B se venderían por 1$52 1602 = $300, y las 40 libras de café grado A se venderían por 1$102 1402 = $400. El ingreso total, $700, es igual al ingreso obtenido de la venta de la mezcla, como se desea.

Ahora resuelve el problema 2 3

Machine Translated by Google

4 Resolver problemas de movimiento uniforme

Se dice que los objetos que se mueven con rapidez constante tienen un movimiento uniforme. Cuando se conoce la velocidad promedio de un objeto, se puede interpretar como la velocidad constante de ese objeto. Por ejemplo, un ciclista que viaja a una velocidad promedio de 25 millas por hora se puede modelar como si estuviera en movimiento uniforme con una velocidad constante de 25 millas por hora.

Fórmula de movimiento uniforme

Si un objeto se mueve a una velocidad promedio (tasa) r, la distancia d recorrida en el tiempo t viene dada por la fórmula

$$d = rt \qquad (2)$$

Es decir, Distancia = Tarifa # Tiempo.

EJEMPLO 5 Física: movimiento uniforme

Tanya, que es corredora de largas distancias, corre a una velocidad promedio de 8 millas por hora (mi/h). Dos horas después de que Tanya salga de tu casa, sales en tu Honda y sigues la misma ruta. Si tu velocidad promedio es de 40 mi/h, ¿cuánto tiempo pasa antes de que alcances a Tanya? ¿A qué distancia está cada uno de ustedes de su casa?

Solución

Consulte la Figura 25. Usamos t para representar el tiempo (en horas) que le lleva alcanzar a Tanya. Cuando esto ocurre, el tiempo total transcurrido para Tanya es t + 2 horas porque se fue 2 horas antes.

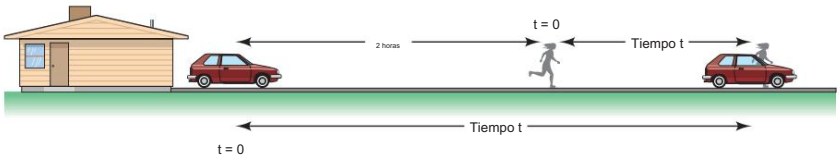


Figura 25

Configure la siguiente tabla:

	Velocidad (mi/h)	Tiempo (horas)	Distancia (millas)
tania	8	t+2	8(t+2)
honda	40	t	40t

La distancia recorrida es la misma para ambos, lo que lleva a la ecuación

$$81t + 22 = 40t$$

$$8t + 16 = 40t$$

$$32t = 16$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ hora}$$

Te lleva una hora $\frac{1}{2}$ alcanzar a Tanya. Cada uno de ustedes ha recorrido 20 millas.

✓ Verifique: En 2,5 horas, Tanya recorre una distancia de 2,5 # 8 = 20 millas. En hora, tu 2 $\frac{1}{2}$ recorrer una distancia de $\frac{1}{2}$ # 40 = 20 millas.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 Física: movimiento uniforme

Una lancha avanza río arriba una distancia de 24 millas en un río cuya corriente corre a 3 millas por hora (mi/h). El viaje de ida y vuelta dura 6 horas. Suponiendo que la lancha mantiene una velocidad constante con respecto al agua, ¿cuál es su velocidad?

Solución

Vea la Figura 26. Utilice r para representar la velocidad constante de la lancha con respecto al agua. Entonces la velocidad verdadera yendo río arriba es r - 3 mi/h, y la velocidad verdadera yendo Distancia aguas abajo es r + 3 mi/h. Dado que Distancia = Tarifa # Tiempo, entonces Tiempo = $\frac{\text{Distancia}}{\text{Tasa}}$. Configurar una mesa.

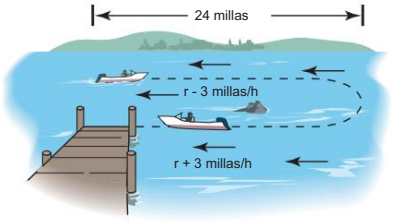


Figura 26

	Tasa (millas/h)	Distancia (mi)	Tiempo (h) · $\frac{\text{Distancia}}{\text{Tasa}}$
Río arriba	r - 3	24	$\frac{24}{r-3}$
Río abajo	r+3	24	$\frac{24}{r+3}$

El tiempo total de ida y vuelta es de 6 horas, lo que da la ecuación

$$\frac{24}{r-3} + \frac{24}{r+3} = 6$$

$$\frac{241r + 32 + 241r - 32}{1r - 32\ 1r + 32} = 6$$ Suma los cocientes de la izquierda.

$$\frac{48r}{2r - 9} = 6$$ Simplificar.

$$48r = 61r^{2} - 92$$ Multiplica ambos lados por r2 · 9.

$$2\ 6r - 48r - 54 = 0$$ Escribe en forma estándar.

$$2 - 8r - 9 = 0r$$ Dividir por 6.

$$1r - 92\ 1r + 12 = 0$$ Factor.

$$r = 9 \text{ o } r = -1$$ Utilice la propiedad del producto cero y resuelva.

Descarta la solución r = - 1 mi/h y concluye que la rapidez de la lancha con respecto al agua es 9 mi/h.

Ahora trabaja el problema 2 9

5 Resolver problemas laborales de tasa constante

Aquí nos fijamos en los trabajos que se realizan a un ritmo constante. La suposición es que

Si un trabajo se puede realizar en t unidades de tiempo, entonces el trabajo se realiza en $\frac{1}{t}$ unidad de tiempo. En

En otras palabras, si un trabajo toma 4 horas, entonces el trabajo se realiza en $\frac{1}{4}$ hora.

EJEMPLO 7 Trabajar juntos para hacer un trabajo

A las 10 am, su padre le pide a Danny que quite las malas hierbas del jardín. Por experiencia pasada, Danny sabe que esto le llevará 4 horas trabajando solo. Su hermano mayor Mike, cuando le toca hacer este trabajo, requiere 6 horas. Como Mike quiere ir a jugar golf con Danny y tiene una reserva para la 1 pm, acepta ayudar a Danny. Suponiendo que no haya ganancia ni pérdida de eficiencia, ¿cuándo terminarán si trabajan juntos? ¿Podrán asistir a la cita de golf?

Machine Translated by Google

Solución Prepare la Tabla 1. En 1 hora, Danny hace el trabajo y en 1 hora, Mike hace los 4. trabajo. Sea t el tiempo (en horas) que les lleva hacer el trabajo juntos. En 1 hora, entonces del trabajo se completa. Razonar de la siguiente manera:

tabla 1

	Horas para hacer trabajo	Parte de Trabajo realizado en 1 hora
danny	4	$\frac{1}{4}$
Miguel	6	$\frac{1}{6}$
Juntos	t	$\frac{1}{t}$

¢ Parte hecha por Danny en 1 hora ≤ + ¢ Parte hecha por Mike en 1 hora ≤ = ¢ Parte hecha en conjunto en 1 hora ≤

De la Tabla 1,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{t} \quad \text{El modelo}$$

$$\frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{t} \quad \text{LCD} \cdot 12 \text{ a la izquierda}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{t} \quad \text{Simplificar.}$$

$$5t = 12 \quad \text{Multiplica ambos lados por } 12t.$$

$$t = \frac{12}{5} \quad \text{Divide ambos lados por 5.}$$

Trabajando juntos, Mike y Danny pueden hacer el trabajo en horas, o 2 horas y 24 minutos. 5

Deberán agendar la fecha de golf, ya que finalizarán a las 12:24 pm.

Ahora resuelve el problema 3 5

El siguiente ejemplo es uno que probablemente volverás a ver en una forma ligeramente diferente si estudias cálculo.

EJEMPLO 8 Construyendo una caja

De cada esquina de una pieza cuadrada de chapa de metal, retire un cuadrado con lados de 9 centímetros de largo. Levante los bordes para formar una caja abierta. Si la caja debe contener 144 centímetros cúbicos (cm3), ¿cuáles deberían ser las dimensiones de la pieza de lámina de metal?

Solución Utilice la Figura 27 como guía. Hemos etiquetado con x la longitud de un lado de la pieza cuadrada de chapa. La caja tendrá una altura de 9 centímetros y su base cuadrada medirá x - 18 de cada lado. El volumen V 1 Largo * Ancho * Alto 2 de la caja es por lo tanto

$$V = 1x - 182\ 1x - 182\ \#\ 9 = 91x - 182^2$$

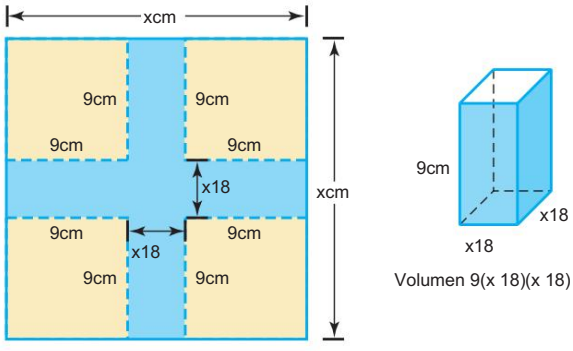


Figura 27

Machine Translated by Google

Dado que el volumen de la caja debe ser 144 cm3 , tenemos

$$91x - 182 \quad 2 = 144 \qquad V \cdot 144$$

$$1x - 182 \quad 2 = 16 \qquad \text{Divide ambos lados por 9.}$$

$$x - 18 = \{4 \qquad \text{Utilice el método de la raíz cuadrada.}$$

$$x = 18 \{ 4$$

$$x = 22 \text{ o } x = 14$$

Descarta la solución x = 14 (¿ves por qué?) y concluye que la chapa debe medir 22 centímetros por 22 centímetros.

✓ Comprobar: Si tomamos un trozo de chapa de 22 centímetros por 22 centímetros, recortamos un cuadrado de 9 centímetros en cada esquina y doblamos los bordes, obtenemos una caja cuyas dimensiones son 9 cm por 4 cm por 4 cm y cuyo el volumen es 9 # 4 # 4 = 144 cm3 , según sea necesario.

Ahora problema de trabajo 5 7

A.8 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. El proceso de utilizar variables para representar cantidades desconocidas y luego encontrar relaciones que involucren estas variables se conoce como _____ _____.
2. El dinero que se paga por el uso del dinero es 3. _____.
Se dice que los objetos que se mueven a velocidad constante están en _____ _____.
4. Verdadero o Falso La cantidad que se cobra por el uso del principal durante un período de tiempo determinado se llama tasa de interés.
5. Verdadero o Falso Si un objeto se mueve a una velocidad promedio r, la distancia d recorrida en el tiempo t viene dada por la fórmula d = rt.
6. Opción múltiple Supongamos que desea mezclar dos cafés para obtener 100 libras de una mezcla. Si x representa la cantidad de libras de café A, ¿qué expresión algebraica representa la cantidad de libras de café B?

(a) 100 - x (b) x - 100 (c) 100 x (d) 100 + x

7. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la fórmula de interés simple?

(a) yo = $\frac{rt}{PAG}$ (b) I = Prt (c) I = $\frac{PAG}{rt}$ (d) I = P + rt

8. Opción múltiple Si se necesitan 5 horas para completar un trabajo, ¿qué fracción del trabajo se hace en 1 hora?

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{4}$

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 9 a 18, traduce cada oración a una ecuación matemática. Asegúrese de identificar el significado de todos los símbolos.

9. Geometría El área de un círculo es el producto del número p y el cuadrado del radio.
10. Geometría La circunferencia de un círculo es el producto de la número p y el doble del radio.
11. Geometría El área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud de un lado.
12. Geometría El perímetro de un cuadrado es cuatro veces la longitud. de un lado.
13. Física La fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración.
14. Física La presión es la fuerza por unidad de área.
15. Física El trabajo es igual a fuerza por distancia.
16. Física La energía cinética es la mitad del producto de la masa. y el cuadrado de la velocidad.
17. Negocios El costo variable total de fabricar x lavavajillas es $150 por lavavajillas multiplicado por el número de lavavajillas fabricados.
18. Negocios El ingreso total derivado de la venta de x lavavajillas es $250 por lavavajillas multiplicado por el número de lavavajillas vendidos.
19. Planificación financiera Betsy, una jubilada reciente, necesita $6000 por año en ingresos adicionales. Tiene $50 000 para invertir y puede invertir en bonos con calificación B que pagan el 15% anual o en un certificado de depósito (CD) que paga el 7% anual. ¿Cuánto dinero debería invertir Betsy en cada uno para obtener exactamente $6000 en intereses por año?
20. Planificación financiera Después de 2 años, Betsy (ver problema 19) descubre que ahora necesitará $7000 por año. Suponiendo que la información restante es la misma, ¿cómo se debe reinvertir el dinero?
21. Banca Un banco prestó $12 000, parte de ellos a una tasa del 8% anual y el resto a una tasa del 18% anual. Si los intereses recibidos ascendieron a $1000, ¿cuánto se prestó al 8%?
22. Banca Wendy, oficial de préstamos de un banco, tiene $1.000.000 para prestar y debe obtener un rendimiento promedio de 18% anual. Si puede prestar a una tasa del 19% o al 16%, ¿cuánto puede prestar a la tasa del 16% y aun así cumplir con su requisito?

Machine Translated by Google

23. Mezcla de tés El gerente de una tienda que se especializa en vender té decide experimentar con una nueva mezcla. Mezclará un poco de té Earl Grey, que se vende a $6 la libra, con un poco de té Orange Pekoe, que se vende a $4 la libra, para obtener 100 libras de la nueva mezcla. El precio de venta de la nueva mezcla será de $5.50 por libra y no habrá diferencia en los ingresos entre vender la nueva mezcla y vender los otros tipos. ¿Cuántas libras de té Earl Grey y de té Orange Pekoe se necesitan?

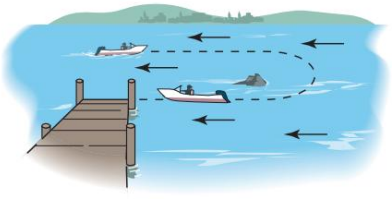
24. Negocio: Mezcla de café Un fabricante de café quiere comercializar una nueva mezcla de café que se vende a $4,10 la libra mezclando dos cafés que se venden a $2,75 y $5 la libra, respectivamente. ¿Qué cantidades de cada café se deben licuar para obtener la mezcla deseada?

[Sugerencia: suponga que el peso total de la mezcla deseada es 100 libras.]

25. Negocio: mezclar nueces Una tienda de nueces normalmente vende anacardos a $9.00 la libra y almendras a $4.50 la libra. Pero al final del mes las almendras no se habían vendido bien, entonces, para vender 60 libras de almendras, el gerente decidió mezclar las 60 libras de almendras con algunos anacardos y vender la mezcla a $7.75 la libra. ¿Cuántas libras de anacardos se deben mezclar con las almendras para garantizar que no haya cambios en los ingresos?

26. Negocio: Mezclar dulces Una tienda de dulces vende cajas de dulces que contienen caramelos y cremas. Cada caja se vende por $12.50 y contiene 30 dulces (todos los dulces son del mismo tamaño). Si producir los caramelos cuesta $0,25 y producir las cremas cuesta $0,45, ¿cuántos de cada uno debe haber en una caja para obtener una ganancia de $3?

27. Física: movimiento uniforme Una lancha a motor puede mantener una velocidad constante de 16 millas por hora en relación con el agua. El barco viaja río arriba hasta cierto punto en 20 minutos; el viaje de regreso dura 15 minutos. ¿Cuál es la velocidad de la corriente? Ver la figura.



28. Física: movimiento uniforme Una lancha avanza río arriba por un río que tiene una corriente de 3 millas por hora. El viaje río arriba dura 5 horas y el viaje de regreso dura 2,5 horas. ¿Cuál es la velocidad de la lancha? (Suponga que el barco mantiene una velocidad constante con respecto al agua).

29. Física: movimiento uniforme Una lancha mantuvo una velocidad constante de 15 millas por hora en relación con el agua al ir 10 millas río arriba y luego regresar. El tiempo total del viaje fue de 1,5 horas. Utilice esta información para encontrar la velocidad de la corriente.

30. Física: movimiento uniforme Dos automóviles ingresan a Florida Turnpike en Commercial Boulevard a las 8:00 am, cada uno en dirección a Wildwood. La velocidad promedio de un automóvil es 10 millas por hora más que la del otro. El auto más rápido llega a Wildwood a las 11:00 am, $\frac{1}{2}$ hora antes que el otro coche. cual fue el promedio velocidad de cada auto? ¿Qué distancia recorrió cada uno?

31. Pasarelas móviles La velocidad de una pasarela móvil suele ser de aproximadamente 2,5 pies por segundo. Al caminar sobre una pasarela en movimiento, a Karen le toma un total de 48 segundos recorrer 50 pies con el movimiento de la pasarela y luego retroceder contra el movimiento de la pasarela. ¿Cuál es la velocidad normal al caminar de Karen?

Fuente: Respuestas.com

32. Pasarelas de alta velocidad El Aeropuerto Internacional Pearson de Toronto tiene una versión de alta velocidad de una pasarela móvil. Si Liam camina mientras viaja en esta pasarela móvil, puede recorrer 280 metros en 60 segundos menos que si se queda quieto en la pasarela móvil. Si Liam camina a una velocidad normal de 1,5 metros por segundo, ¿cuál es la velocidad de la pasarela?

Fuente: Respuestas.com

33. Tenis Una cancha de tenis reglamentaria para dobles tiene un área de 2808 pies cuadrados. Si mide 6 pies más que el doble de su ancho, determine las dimensiones de la cancha.

Fuente: Asociación de Tenis de Estados Unidos

34. Impresoras láser Una impresora láser Xerox VersaLink C500 tarda 9 minutos más en completar un trabajo de impresión de 1440 páginas por sí sola que una Brother HL-L8350CDW en completar el mismo trabajo por sí sola. Juntas, las dos impresoras pueden completar el trabajo en 20 minutos. ¿Cuánto tiempo le toma a cada impresora completar el trabajo de impresión por sí sola? ¿Cuál es la velocidad de cada impresora?

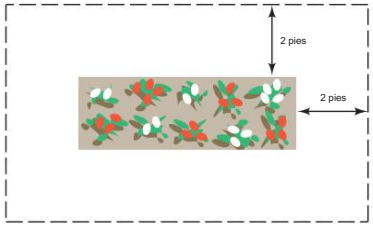
Fuente: Diez reseñas principales

35. Trabajando juntos en un trabajo Trent puede entregar sus periódicos en 30 minutos. A Lois le toma 20 minutos hacer la misma ruta. ¿Cuánto tiempo les tomaría entregar los periódicos si trabajaran juntos?

36. Trabajando juntos en un trabajo Patrice, solo, puede pintar cuatro habitaciones en 10 horas. Si contrata a April para que le ayude, pueden hacer el mismo trabajo juntos en 6 horas. Si deja que April trabaje sola, ¿cuánto tiempo le tomará pintar cuatro habitaciones?

37. Cerrar un jardín Un jardinero tiene 46 pies de cerca para cercar un jardín rectangular que tiene un borde de 2 pies de ancho que lo rodea. Ver la figura.

(a) Si el largo del jardín debe ser el doble de su ancho, ¿cuáles serán las dimensiones del jardín?
(b) ¿Cuál es el área del jardín?
(c) Si el largo y el ancho del jardín deben ser iguales, ¿cuáles serán las dimensiones del jardín?
(d) ¿Cuál será el área del jardín cuadrado?



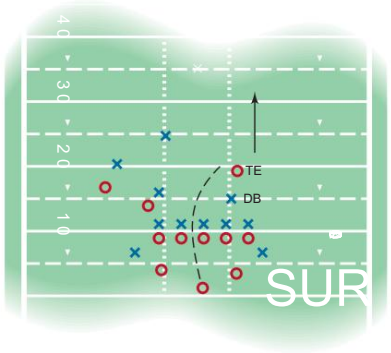
38. Construcción Un estanque está rodeado por una plataforma de madera de 3 pies de ancho. La cerca que rodea la plataforma tiene 100 pies de largo.

(a) Si el estanque es cuadrado, ¿cuáles son sus dimensiones?
(b) Si el estanque es rectangular y su largo debe ser tres veces su ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?
(c) Si el estanque es circular, ¿cuál es su diámetro?
(d) ¿Qué estanque tiene el área mayor?

Machine Translated by Google

39. Fútbol americano Un ala cerrada puede correr las 100 yardas en 12 segundos. Un back defensivo puede hacerlo en 10 segundos. El ala cerrada atrapa un pase en su propia yarda 20 con el back defensivo en la yarda 15. (Vea la figura.) Si no hay otros jugadores cerca, ¿en qué línea de yarda el back defensivo alcanzará al ala cerrada?

[Pista: En el momento t = 0, el back defensivo está a 5 yardas detrás del ala cerrada.]



40. Computación de gastos comerciales Teresa, una vendedora externa, usa su automóvil tanto para negocios como para placer. El año pasado, viajó 30.000 millas, usando 900 galones de gasolina.
Su auto recorre 40 millas por galón en la carretera y 25 en la ciudad. Puede deducir de sus impuestos todos los viajes por carretera, pero no los viajes por la ciudad. ¿Cuántas millas debería deducir Therese como gasto comercial?

41. Mezcla de agua y anticongelante ¿ Cuánta agua se debe agregar a 1 galón de anticongelante puro para obtener una solución con 60% de anticongelante?

42. Mezcla de agua y anticongelante El sistema de refrigeración de cierto automóvil de fabricación extranjera tiene una capacidad de 15 litros. Si el sistema se llena con una mezcla que contiene 40% de anticongelante, ¿qué cantidad de esta mezcla se debe drenar y reemplazar por anticongelante puro para que el sistema se llene con una solución que contiene 60% de anticongelante?

43. Química: Soluciones salinas ¿ Cuánta agua se debe evaporar de 32 onzas de una solución salina al 4% para obtener una solución salina al 6%?

44. Química: Soluciones salinas ¿ Cuánta agua se debe evaporar de 240 galones de una solución salina al 3% para producir una solución salina al 5%?

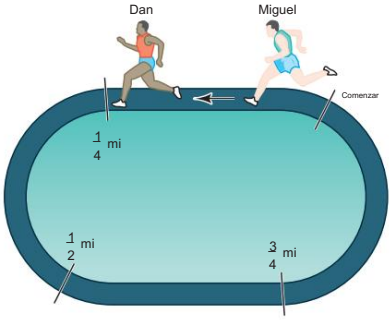
45. Pureza del oro La pureza del oro se mide en quilates, siendo el oro puro 24 quilates. Otras purezas del oro se expresan como partes proporcionales de oro puro. Así, el acero de 18 quilates

el oro es 75% oro puro; El oro de 12 quilates es oro 24, $\frac{12}{24}$ o 50% puro ; etcétera. ¿Cuánto oro de 12 quilates se debe

mezclar con oro puro para obtener 60 gramos de oro de 16 quilates?

46. Química: Moléculas de Azúcar Una molécula de azúcar tiene el doble de átomos de hidrógeno que de oxígeno y un átomo más de carbono que de oxígeno. Si una molécula de azúcar tiene un total de 45 átomos, ¿cuántos son oxígeno? ¿Cuántos son hidrógeno?

47. Correr una carrera Mike puede correr la milla en 6 minutos y Dan puede correr la milla en 9 minutos. Si Mike le da a Dan una ventaja de 1 minuto, ¿a qué distancia del inicio pasará Mike a Dan? ¿Cuánto tiempo se tarda? Ver la figura.



48. Alcance de un avión Un avión de rescate aéreo promedia 300 millas por hora en aire en calma. Lleva suficiente combustible para 5 horas de vuelo. Si al despegar encuentra un viento en contra de 30 mi/h, ¿qué distancia puede volar y regresar con seguridad? (Suponga que el viento permanece constante).

49. Vaciado de petroleros La bomba principal puede vaciar un petrolero en 4 horas. Una bomba auxiliar puede vaciar el camión cisterna en 9 horas. Si la bomba principal se pone en marcha a las 9 am, ¿cuándo se debe arrancar la bomba auxiliar para que el camión cisterna se vacíe al mediodía?

50. Mezcla de cemento Una bolsa de 20 libras de mezcla de cemento marca Economy contiene 25% de cemento y 75% de arena. ¿Cuánto cemento puro se debe agregar para producir una mezcla de cemento con 40% de cemento?

51. Llenar una tina La tina de un baño se llenará en 15 minutos con ambos grifos abiertos y el tapón en su lugar. Con ambos grifos cerrados y quitado el tapón, la tina se vaciará en 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la tina si ambos grifos están abiertos y se quita el tapón?

52. Uso de dos bombas Una bomba de 5 caballos de fuerza (hp) puede vaciar una piscina en 5 horas. Una bomba más pequeña, de 2 hp, vacía la misma piscina en 8 horas. Las bombas se utilizan juntas para comenzar a vaciar la piscina. Después de dos horas, la bomba de 2 hp se avería. ¿Cuánto tiempo tardará la bomba más grande en terminar de vaciar la piscina?

53. Un biatlón Supongamos que ha participado en un biatlón de 87 millas que consta de una carrera a pie y en bicicleta. Durante su carrera, su velocidad promedio es de 6 millas por hora y durante su carrera en bicicleta, su velocidad promedio es de 25 millas por hora. Terminas la carrera en 5 horas. ¿Cuál es la distancia de la carrera?

¿Cuál es la distancia de la carrera ciclista?

54. Ciclistas Dos ciclistas salen de una ciudad al mismo tiempo, uno hacia el este y el otro hacia el oeste. El ciclista en dirección oeste anda en bicicleta 5 mph más rápido que el ciclista en dirección este. Después de 6 horas están a 246 millas de distancia. ¿A qué velocidad viaja cada ciclista?

55. Comparación de héroes olímpicos En los Juegos Olímpicos de 2016, Usain Bolt de Jamaica ganó la medalla de oro en la carrera de 100 metros con un tiempo de 9,81 segundos. En los Juegos Olímpicos de 1896, Thomas Burke de Estados Unidos ganó la medalla de oro en la carrera de 100 metros en 12,0 segundos. Si corrieran la misma carrera, repitiendo sus respectivos tiempos, ¿por cuántos metros le ganaría Bolt a Burke?

56. Construyendo una lata de café
Una lata de 30,5 onzas de café Hills Bros.® requiere 58,9p pulgadas cuadradas de aluminio. Si su altura es de 6,4 pulgadas, ¿cuál es su radio?
[Sugerencia: el área de superficie S de un cilindro recto es $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, donde r es el radio y h es el altura.]

Machine Translated by Google

57. Construcción de una caja Se va a construir una caja abierta a partir de una pieza cuadrada de chapa de metal quitando un cuadrado de 1 pie de lado de cada esquina y doblando los bordes. Si la caja debe contener 4 pies cúbicos, ¿cuál debería ser la dimensión de la lámina de metal?

58. Construcción de una caja Reelaboración del problema 57 si la pieza de chapa es un rectángulo cuyo largo es el doble de su ancho.

Explicar conceptos: discusión y escritura

59. Pensamiento crítico Invente un problema escrito que requiera resolver una ecuación lineal como parte de su solución. Problemas de intercambio con un amigo. Escribe una crítica del problema de tu amigo.

60. Pensamiento crítico Eres el gerente de una tienda de ropa y acabas de comprar 100 camisas de vestir a $20,00 cada una.
Después de 1 mes de vender las camisetas al precio normal, planeas realizar una oferta con un 40 % de descuento sobre el precio de venta original. Sin embargo, aún desea obtener una ganancia de $4 por cada camiseta al precio de oferta. ¿Cuál debería ser el precio inicial de las camisetas para garantizarlo? Si en lugar de un 40% de descuento en la venta, usted da un 50% de descuento, ¿en cuánto se reduce su ganancia?

61. Cálculo de la velocidad promedio Al ir de Chicago a Atlanta, un automóvil promedia 45 millas por hora, y al ir de Atlanta a Miami, promedia 55 millas por hora. Si Atlanta está a medio camino entre Chicago y Miami, ¿cuál es el promedio?

62. Velocidad de un avión En un vuelo reciente de Phoenix a Kansas City, una distancia de 919 millas náuticas, el avión llegó 20 minutos antes. Al bajar del avión le pregunté al capitán: “¿Cuál era nuestro viento de cola?” Él respondió: "No lo sé, pero nuestra velocidad de avance era de 550 nudos". ¿Se le ha proporcionado suficiente información para encontrar el viento de cola? Si es posible, encuentre el viento de cola. (1 nudo = 1 milla náutica por hora)

velocidad de Chicago a Miami? Discuta una solución intuitiva.
Escribe un párrafo defendiendo tu solución intuitiva. Luego resuelve el problema algebraicamente. ¿Su solución intuitiva es la misma que la algebraica? Si no, encuentra el defecto.

63. Pensamiento crítico Sin resolver, explica qué está mal en el siguiente problema de mezcla: ¿Cuántos litros de etanol al 25% se deben agregar a 20 litros de etanol al 48% para obtener una solución de etanol al 58%?
Ahora pasa por una solución algebraica. ¿Lo que sucede?

A.9 Notación de intervalos; Resolver desigualdades

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Conceptos básicos de álgebra (Sección A.1, págs. A1–A10)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página A80.

OBJETIVOS 1 Usar la notación de intervalos (p. A72)
2 Utilice las propiedades de las desigualdades (p. A74)
3 Resolver desigualdades (p. A76)
4 Resolver desigualdades combinadas (p. A77)
5 Resolver desigualdades que implican valor absoluto (p. A78)

Supongamos que a y b son dos números reales y a 6 b. La notación a 6 x 6 b significa que x es un número entre a y b. La expresión a 6 x 6 b es equivalente a las dos desigualdades a 6 x y x 6 b. De manera similar, la expresión a … x … b es equivalente a las dos desigualdades a … x y x … b. Las dos posibilidades restantes, a ... x 6 b y a 6 x ... b, se definen de manera similar.

Aunque es aceptable escribir 3 Ú x Ú 2, es preferible invertir los símbolos de desigualdad y escribir en su lugar 2… x … 3 para que los valores vayan de menor a mayor, leyendo de izquierda a derecha.

Una afirmación como 2... x ... 1 es falsa porque no existe ningún número x para el cual 2 … x y x … 1. Finalmente, nunca mezcle símbolos de desigualdad, como en 2 … x Ú 3.

1 Usar notación de intervalo

Sean a y b dos números reales con a 6 b.

Machine Translated by Google

DEFINICIÓN Intervalos

- Un intervalo abierto, denotado por 1a, b2, consta de todos los números reales x para cual un 6 x 6 b.
- Un intervalo cerrado, denotado por 3a, b4, consta de todos los números reales x para cual a … x … b.
- Los intervalos medio abiertos o medio cerrados son 1a, b4, que constan de todos los números reales x para los cuales a 6 x … b, y 3a, b2, que constan de todos los números reales x para lo cual a ... x 6 b.

En palabras

La notación [a, b] significa todos los números reales entre a y b, inclusive.
La notación (a, b) significa todos los números reales entre a y b, sin incluir a y b.

En cada una de estas definiciones, a se denomina punto final izquierdo y b punto final derecho del intervalo.

El símbolo q (leído como "infinito") no es un número real, sino una notación utilizada para indicar que no hay límites en la dirección positiva. El símbolo - q (leído como "infinito negativo") tampoco es un número real, sino una notación que se utiliza para indicar que no hay límites en la dirección negativa. Los símbolos q y - q se utilizan para definir otros cinco tipos de intervalos:

3a, ^ 2	consta de todos los números reales x para los cuales x Ú a.
1a, ^ 2 1	consta de todos los números reales x para los cuales x 7 a.
·^, a4 1 ·^,	consta de todos los números reales x para los cuales x … a.
a2 1 ·^, ^ 2	consta de todos los números reales x para los cuales x 6 a.

consta de todos los números reales.

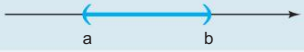
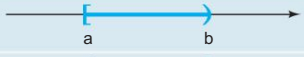
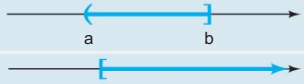
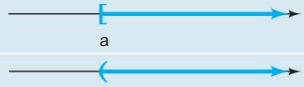
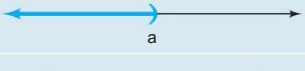
En palabras

Un intervalo es un conjunto no vacío de números reales.

Tenga en cuenta que q y - q nunca se incluyen como puntos finales, ya que ninguno de los dos es un número real.

La Tabla 2 resume la notación de intervalo, la notación de desigualdad correspondiente y sus gráficos.

Tabla 2

Intervalo	Desigualdad	Grafico
El intervalo abierto (a, b)	un 6 x 6 b	
El intervalo cerrado [a, b]	a #x#b	
El intervalo medio abierto [a, b)	un # x6b _	
El intervalo medio abierto (a, b]	un 6 x # b	
El intervalo [a, q)	x$ a	
El intervalo (a, q)	x7a _ _	
El intervalo (- q, a]	x# a	
El intervalo (- q, a)	x 6 un	
El intervalo (- q, q)	todos los números reales	

EJEMPLO 1 Escribir desigualdades usando notación de intervalos

Escribe cada desigualdad usando notación de intervalo.

(a) 1... x ... 3 (b) - 4 6 x 6 0 (c) x 7 5 (d) x ... 1

La solución (a) 1… x … 3 describe todos los números reales x entre 1 y 3, inclusive. En notación de intervalo, escribimos 31, 34.

(b) En notación de intervalo, - 4 6 x 6 0 se escribe 1 - 4, 02.

(c) En notación de intervalo, x 7 5 se escribe 15, q 2.

(d) En notación de intervalo, x … 1 se escribe 1 - q, 14 .

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2 Escribir intervalos usando notación de desigualdad

Escribe cada intervalo como una desigualdad que involucra a x.

(a) 31, 42 (b) 12, q 2 (c) 32, 34 (d) 1 - q, - 34

La solución (a) 31, 42 consta de todos los números reales x para los cuales 1 … x 6 4.

(b) 12, q 2 consta de todos los números reales x para los cuales x 7 2.

(c) 32, 34 consta de todos los números reales x para los cuales 2… x … 3.

(d) 1 - q, - 34 consta de todos los números reales x para los cuales x ... - 3.

Ahora problemas de trabajo 1 3 , 2 5 , y 3 3

2 Utilice propiedades de desigualdades

El producto de dos números reales positivos es positivo, el producto de dos números reales negativos es positivo y el producto de 0 y 0 es 0. Para cualquier número real a, el valor de a2 es 0 o positivo; es decir, a2 no es negativo. A esto se le llama propiedad no negativa.

En palabras

El cuadrado de un número real nunca es negativo.

Propiedad no negativa

Para cualquier número real a,

$$a^2 \geq 0 \qquad (1)$$

Cuando se suma el mismo número a ambos lados de una desigualdad, se obtiene una desigualdad equivalente. Por ejemplo, desde 3 6 5, entonces 3 + 4 6 5 + 4 o 7 6 9.
Esto se llama propiedad de la suma de las desigualdades.

En palabras

La propiedad de la suma establece que el sentido o dirección de una desigualdad permanece sin cambios si se suma el mismo número en ambos lados.

Propiedad de la suma de desigualdades

Para los números reales a, b y c,

- Si a 6 b, entonces a + c 6 b + c. (2a)
- Si a 7 b, entonces a + c 7 b + c. (2b)

EJEMPLO 3 Propiedad de la suma de desigualdades

(a) Si x 6 - 5, entonces x + 5 6 - 5 + 5 o x + 5 6 0.

(b) Si x 7 2, entonces x + 1 - 22 7 2 + 1 - 22 o x - 2 7 0.

Ahora resuelve el problema 4 1

Ahora veamos qué sucede cuando ambos lados de una desigualdad se multiplican por un número distinto de cero.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 4 Multiplicar una desigualdad por un número positivo

Expresar como desigualdad el resultado de multiplicar ambos lados de la desigualdad 3 6 7 por 2.

Solución Comience con

$$3 < 6 < 7$$

Al multiplicar ambos lados por 2 se obtienen los números 6 y 14, por lo que tenemos

$$6 < 6 < 14$$

EJEMPLO 5 Multiplicar una desigualdad por un número negativo

Expresar como desigualdad el resultado de multiplicar ambos lados de la desigualdad 9 7 2 por - 4.

Solución Comience con

$$9 > 7 > 2$$

Al multiplicar ambos lados por - 4 se obtienen los números - 36 y - 8, por lo que tenemos

$$-36 < 6 < -8$$

En palabras

Multiplicar por un número negativo invierte la desigualdad.

Tenga en cuenta que el efecto de multiplicar ambos lados de 9 7 2 por el número negativo - 4 es que la dirección del símbolo de desigualdad se invierte.

Los ejemplos 4 y 5 ilustran las siguientes propiedades generales de multiplicación para desigualdades:

En palabras

Las propiedades de la multiplicación establecen que el sentido o dirección de una desigualdad sigue siendo el mismo. si ambos lados se multiplican por un número real positivo , mientras que la dirección se invierte si ambos lados se multiplican por un número real negativo .

Propiedades de multiplicación para desigualdades

Para los números reales a, b y c,

- Si $a < b$ y si $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- Si $a < b$ y si $c < 0$, entonces $ac > bc$. (3a)

- Si $a > b$ y si $c > 0$, entonces $ac > bc$.
- Si $a > b$ y si $c < 0$, entonces $ac < bc$. (3b)

EJEMPLO 6 Propiedad de multiplicación de desigualdades

(a) Si $2x < 6$, entonces $\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(6)$ o $x < 3$.

(b) Si $-\frac{x}{3} > 12$, entonces $-3\left(-\frac{x}{3}\right) < -3(12)$ o $x < -36$.

(c) Si $-4x < -8$, entonces $\frac{-4x}{-4} > \frac{-8}{-4}$ o $x > 2$.

(d) Si $-x > 8$, entonces $(-1)(-x) < (-1)(8)$ o $x < -8$.

Ahora problema de trabajo 47

Machine Translated by Google

Propiedades recíprocas de desigualdades

- Si un 7 0, entonces $\frac{1}{a}$ 7 0. (4a)
- Si un 6 0, entonces $\frac{1}{a}$ 6 0. (4b)
- Si b 7 a 7 0, entonces $\frac{1}{a}$ 7 $\frac{1}{}$ 7 0. b (4c)
- Si a 6 b 6 0, entonces $\frac{1}{b}$ 6 $\frac{1}{a}$ 6 0. (4d)

3 Resolver desigualdades

Una desigualdad en una variable es un enunciado que involucra dos expresiones, al menos una que contiene la variable, separadas por uno de los símbolos de desigualdad: 6,…, 7, o Ú. Resolver una desigualdad significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales la afirmación es verdadera. Estos valores se llaman soluciones de la desigualdad.

Por ejemplo, las siguientes son todas desigualdades que involucran una variable x:

x + 5 6 8 2x - 3 Ú 4 x2 - 1 … 3 $\frac{x+1}{x-2}$ 7 0

Al igual que con las ecuaciones, un método para resolver una desigualdad es reemplazarla por una serie de desigualdades equivalentes hasta obtener una desigualdad con una solución obvia, como x 6 3, es obtenido. Las desigualdades equivalentes se obtienen aplicando algunas de las mismas propiedades que se utilizan para encontrar ecuaciones equivalentes. La propiedad de la suma y las propiedades de la multiplicación para desigualdades forman la base de los siguientes procedimientos.

Procedimientos que dejan el símbolo de desigualdad sin cambios

- Simplifique ambos lados de la desigualdad combinando términos semejantes y eliminando paréntesis:

Reemplazar x + 2 + 6 7 2x + 51x + 12
por x + 8 7 7x + 5

- Suma o resta la misma expresión en ambos lados de la desigualdad:

Reemplazar 3x - 5 6 4
por 13x - 52 + 5 6 4 + 5

- Multiplica o divide ambos lados de la desigualdad por la misma expresión positiva :

Reemplace 4x 7 16 por $\frac{4x}{4}$ 7 $\frac{\text{dieciséis}}{4}$

Procedimientos que invierten el sentido o dirección de la Símbolo de desigualdad

- Intercambia los dos lados de la desigualdad:

Reemplazar 3 6 x por x 7 3

- Multiplica o divide ambos lados de la desigualdad por el mismo negativo expresión:

Reemplazar - 2x 7 6 por $\frac{-2x}{-2}$ 6 $\frac{6}{-2}$

Machine Translated by Google

Como lo ilustran los ejemplos que siguen, resolvemos desigualdades usando muchos de los mismos pasos que se usan para resolver ecuaciones. Al escribir la solución de una desigualdad, se puede utilizar la notación de conjuntos o la notación de intervalos, lo que sea más conveniente.

EJEMPLO 7 Resolver una desigualdad

Resuelve la desigualdad $4x + 7 \le 2x - 3$ y grafica el conjunto solución.

Solución

$$4x + 7 \le 2x - 3$$

$4x + 7 - 7 \le 2x - 3 - 7$ Resta 7 de ambos lados.

$4x \le 2x - 10$ Simplificar.

$4x - 2x \le 2x - 10 - 2x$ Resta 2x de ambos lados.

$2x \le -10$ Simplificar.

$\frac{2x}{2} \le \frac{-10}{2}$ Divide ambos lados entre 2. (La dirección del símbolo de desigualdad no cambia).

$x \le -5$ Simplificar.

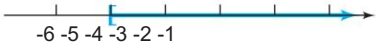


Figura 28 $x \le -5$

El conjunto solución es $\{x \mid x \le -5\}$ o, usando notación de intervalo, todos los números en el intervalo $(-\infty, -5]$. Consulte la Figura 28 para ver el gráfico.

Ahora problema de trabajo 59

4 Resolver desigualdades combinadas

EJEMPLO 8 Resolver una desigualdad combinada

Resuelve la desigualdad $-5 \le 3x - 2 \le 1$ y grafica el conjunto solución.

Solución Recuerde que la desigualdad

$$-5 \le 3x - 2 \le 1$$

es equivalente a las dos desigualdades

$$-5 \le 3x - 2 \text{ y } 3x - 2 \le 1$$

Resuelve cada una de estas desigualdades por separado.

$-5 \le 3x - 2$	$3x - 2 \le 1$
$-5 + 2 \le 3x - 2 + 2$ Suma 2 a ambos lados.	$3x - 2 + 2 \le 1 + 2$
$-3 \le 3x$ Simplificar.	$3x \le 3$
$\frac{-3}{3} \le \frac{3x}{3}$ Divide ambos lados por 3.	$\frac{3x}{3} \le \frac{3}{3}$
$-1 \le x$ Simplificar.	$x \le 1$

El conjunto solución del par original de desigualdades consta de todo x para el cual

$$-1 \le x \text{ y } x \le 1$$

Figura 29 $-1 \le x \le 1$

Esto se puede escribir de forma más compacta como $\{x \mid -1 \le x \le 16\}$. En notación de intervalo, la solución es $[-1, 12]$. Consulte la Figura 29 para ver el gráfico.

Ahora problema de trabajo 79

Machine Translated by Google

Observe en el ejemplo 8 que resolver cada una de las dos desigualdades requirió exactamente los mismos pasos. Un atajo para resolver algebraicamente la desigualdad original es tratar las dos desigualdades al mismo tiempo, de la siguiente manera:

- 5 6	3x - 2	6 1	
- 5 + 2 6	3x - 2 + 2	6 1 + 2	Agrega 2 a cada parte.
- 3 6	3x	6 3	Simplificar.
$\frac{-3}{3}$ 6	$\frac{3x}{3}$	6 $\frac{3}{3}$	Divide cada parte por 3.
- dieciséis	X	6 1	Simplificar.

EJEMPLO 9 Usar una propiedad recíproca para resolver una desigualdad

Resuelve la desigualdad 14x - 12 $^{-1}$ 7 0 y grafica el conjunto solución.

Solución Recuerde que 14x - 12 $^{-1}$ = $\frac{1}{4x - 1}$. La propiedad recíproca (4a) establece que si a 7 0, entonces su recíproco es mayor que cero.

14x - 12 $^{-1}$ 7 0

$\frac{1}{4x - 1}$ 7 0

4x - 1 7 0 Propiedad recíproca (4a)

4x 7 1 Suma 1 a ambos lados.

x7 _ $\frac{1}{4}$ Divide ambos lados por 4.

Figura 30 x 7 $\frac{1}{4}$

El conjunto solución es b x ` x 7 $\frac{1}{4}$ r, es decir, todos los números reales en el intervalo ¢ $\frac{1}{4}$ ’ q≤. La figura 30 muestra el gráfico.

Ahora problema de trabajo 8 9

5 Resolver desigualdades que implican valor absoluto

EJEMPLO 10 Resolver una desigualdad que implica valor absoluto

Resuelve la desigualdad 0 x 0 6 4 y grafica el conjunto solución.

Solución Buscamos todos los puntos cuya coordenada x esté a una distancia menor que 4 unidades del origen. Consulte la Figura 31 para ver el gráfico. Debido a que cualquier x entre - 4 y 4 satisface la condición 0 x 0 6 4, el conjunto solución consta de todos los números x para los cuales - 4 6 x 6 4, es decir, todo x en el intervalo 1 - 4, 42.

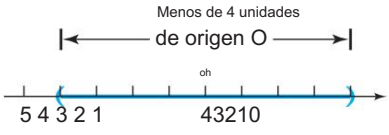


Figura 31 0 x 0 6 4

EJEMPLO 11 Resolver una desigualdad que implica valor absoluto

Resuelve la desigualdad 0 x 0 7 3 y grafica el conjunto solución.

Solución

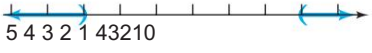


Figura 32 0 x 0 7 3

Buscamos todos los puntos cuya coordenada x esté a una distancia mayor que 3 unidades del origen. La Figura 32 muestra el gráfico. Cualquier número x menor que - 3 o mayor que 3 satisface la condición 0 x 0 7 3. El conjunto solución consta de todos los números x para los cuales x 6 - 3 o x 7 3, es decir, todos los x en 1 - q, - 32 13, q 2.

*Recordemos que el símbolo representa la unión de dos conjuntos. Consulte la página A2 si es necesario.

Machine Translated by Google

Los ejemplos 10 y 11 ilustran los siguientes resultados:

TEOREMA

Si a es cualquier número positivo, entonces

• 0 u 0 6 a es equivalente a - a 6 u 6 a • 0 u 0	(5)
… a es equivalente a - a … u … a • 0 u 0 7 a	(6)
es equivalente a u 6 - a o u 7 a • 0 u 0 Ú a equivale	(7)
a u … - a o u Ú a	(8)

EJEMPLO 12

Resolver una desigualdad que implica un valor absoluto Resuelve

la desigualdad 0 2x + 4 0 … 3 y representa gráficamente el conjunto solución.

Solución

	0 2x + 4 0 … 3		Esto sigue la forma del enunciado (6) donde u = 2x + 4.
	- 3… 2x + 4 … 3		Utilice la declaración (6).
- 3 - 4 ...	2x + 4 - 4 ...	3 - 4	Resta 4 de cada parte.
	- 7… 2x … - 1		Simplificar.
	$\frac{-7}{2}$ … $\frac{2x}{2}$ … $\frac{-1}{2}$		Divide cada parte por 2.
	$-\frac{7}{2}$ … x … $-\frac{1}{2}$		Simplificar.

Figura 33 0 2x + 40 … 3

El conjunto solución es e x 2 $-\frac{7}{2}$ … X … $-\frac{1}{2}$ f, es decir, todo x en el intervalo c $-\frac{7}{2}$, $-\frac{1}{2}$d. Ver Figura 33 para ver una gráfica del conjunto de soluciones.

Ahora problema de trabajo 9 7

EJEMPLO 13

Resolver una desigualdad que involucra un valor absoluto Resuelve

la desigualdad 0 2x - 5 0 7 3 y representa gráficamente el conjunto solución.

Solución 0 2x - 5 0 7 3 Esto sigue la forma del enunciado (7) donde u = 2x - 5.

2x - 5 6	- 3	o	2x - 5 7 3	Utilice la declaración (7).
2x - 5 + 5 6	- 3 + 5	o	2x - 5 + 5 7 3 + 5	Añade 5 a cada parte.
2x6 2 _		o	2x78 _	Simplificar.
$\frac{2x}{2}$ 6 $\frac{2}{2}$		o	$\frac{2x}{2}$ 7 $\frac{8}{2}$	Divide cada parte por 2.
x6 _ 1		o	4x7 _ _	Simplificar.

Figura 34 0 2x - 50 7 3

El conjunto solución es 5x· x 6 1 o x 7 46, es decir, todo x en 1 - q, 12 14, q 2. Consulte la Figura 34 para ver una gráfica del conjunto solución.

ADVERTENCIA Un error común que se debe evitar es intentar escribir la solución x 6 1 o x 7 4 como la desigualdad combinada 1 7 x 7 4, lo cual es incorrecto, ya que no hay números x para los cuales x 6 1 y x 7 4 Otro error común es "mezclar" los símbolos y escribir 1 6 x 7 4, lo que hace que sin sentido.

Ahora problema de trabajo 1 0 3

Machine Translated by Google

A.9 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas enumeradas en rojo.

1. Grafica la desigualdad: x Ú - 2 (págs. A4–A5)

2. Verdadero o Falso - 5 7 - 3 (págs. A4–A5)

Conceptos y vocabulario

3. Un(n) _____ _____, denotado 3a, b4, consta de todos los reales números x para los cuales a … x … b.

4. El estado en el que el sentido o dirección de una desigualdad sigue siendo el mismo si ambos lados se multiplican por un número positivo, mientras que la dirección se invierte si ambos lados se multiplican por un número negativo.

En los problemas 5 a 8, suponga que a 6 b y c 6 0.

5. Verdadero o Falso a + c 6 b + c

6. Verdadero o Falso a - c 6 b - c

7. Verdadero o Falso ac 7 aC

8. Verdadero o Falso $\frac{a}{c}$ 6 $\frac{b}{c}$

9. Verdadero o Falso El cuadrado de cualquier número real siempre es no negativo.

10. Verdadero o Falso Un intervalo medio cerrado debe tener un punto final de cualquiera de los dos - q o q.

11. Opción múltiple ¿ Cuál de las siguientes opciones no cambiará la dirección o el sentido de una desigualdad?
(a) Dividir ambos lados por un número negativo
(b) Intercambiar lados
(c) Tomando el recíproco de ambos lados
(d) Restar un número positivo de ambos lados

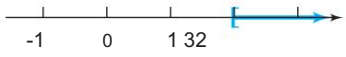
12. Opción múltiple ¿Qué par de desigualdades equivalen a 0 6 x … 3?
(a) x 7 0 y x Ú 3
(b) x 6 0 y x Ú 3
(c) x 7 0 y x … 3
(d) x 6 0 y x … 3

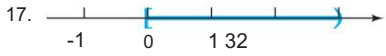
Desarrollo de habilidades

En los problemas 13 a 18, exprese la gráfica que se muestra en azul usando notación de intervalo. También expresa cada uno como una desigualdad que involucra a x.

13.

14.

15. 

17. 

18.

En los problemas 19 a 24 se da una desigualdad. Escribe la desigualdad obtenida por:
(a) Sumar 3 a ambos lados de la desigualdad dada.
(b) Restar 5 a ambos lados de la desigualdad dada.
(c) Multiplicar ambos lados de la desigualdad dada por 3.
(d) Multiplicar ambos lados de la desigualdad dada por - 2.

19. 3 6 5 20. 2 7 1 21. 4 7 - 3 22. - 3 7 - 5 23. 2x + 1 6 2 24. 1 - 2x 7 5

En los problemas 25 a 32, escriba cada desigualdad usando notación de intervalo y grafique cada desigualdad en la recta numérica real.

25. 0… x … 4 26. - 1 6 x 6 5 27. 4... x 6 6 28. - 2 6 x 6 0

29. x Ú - 3 30. x … 5 31.x6-4 _ _ 32.x71 _ _

En los problemas 33 a 40, escribe cada intervalo como una desigualdad que involucra x y representa gráficamente cada desigualdad en la recta numérica real.

33. 32, 54 34. 11, 22 35. 1 - 4, 34 36. 30, 12

37. 34, q 2 38. 1 - q, 24 39. 1 - q, - 32 40. 1 - 8, q 2

En los problemas 41 a 58, complete el espacio en blanco para formar un enunciado de desigualdad correcto.

41. Si x 6 5, entonces x - 5 _____ 0.

42. Si x 6 - 4, entonces x + 4 _____ 0.

43. Si x 7 - 4, entonces x + 4 _____ 0.

44. Si x 7 6, entonces x - 6 _____ 0.

45. Si x Ú - 4, entonces 3x _____ - 12.

46. Si x … 3, entonces _____ 6.

47. Si x 7 6, entonces - 2x _____ - 12.

2x 48. Si x 7 - 2, entonces - _____ 8.

49. Si x Ú 5, entonces - 4x _____ - 20.

4x 50. Si x … - 4 , entonces - _____ 12.

51. Si 8x 7 40, entonces x _____ 5.

3x 52. Si 3x … 12, entonces x _____ 4.

53. Si - x … 3, entonces x 2 _____ - 6.

54. Si - x 7 1, entonces x 4 _____ - 4.

55. Si 0 6 5 6 x, entonces 0 6 $\frac{1}{\square}$ 6 $\frac{1}{\square}$.

56. Si x … - 4 6 0, entonces $\frac{1}{\square}$ … $\frac{1}{\square}$ 6 0.

57. Si - 5 6 x 6 0, entonces $\frac{1}{\square}$ 6 $\frac{1}{\square}$ 6 0.

58. Si 0 6 x … 10, entonces 0 6 $\frac{1}{\square}$ … $\frac{1}{\square}$.

Machine Translated by Google

En los problemas 59 a 108, resuelve cada desigualdad. Exprese su respuesta usando notación de conjuntos o notación de intervalos. Grafique el conjunto solución.

59. $x + 1 \le 5$

60. $x - 6 \ge 1$

61. $3 - 5x < -7$

62. $2 - 3x \le 5$

63. $3x - 7 > 2$

64. $2x + 5 > 1$

65. $3x - 1 \ge 3 + x$

66. $2x - 2 \ge 3 + x$

67. $-21x + 32 \le 8$

68. $-3 \le 11 - x2 < 12$

69. $4 - 3 \le 11 - x2 \le 3$

70. $8 - 4 \le 12 - x2 < -2x$

71. $\frac{1}{2} \le 1x - 4 < 2 \le 7x + 8$

72. $3x + 4 > 7 \ge \frac{1}{3} \le 1x - 2 < 2$

73. $\frac{x}{2} \ge 1 > -\frac{x}{4}$

74. $\frac{x}{3} \ge 2 + 6 \ge \frac{x}{-}$

75. $0 \le 6 \le 3x - 7 \le 5$

76. $4 < 2x + 2 < 10$

77. $-5 < 4 - 3x < 2$

78. $-3 < 3 - 2x < 9$

79. $-3 \le 6 \le \frac{2x - 1}{4} \le 6 \le 0$

80. $0 \le 6 \le \frac{3x + 2}{2} \le 6 \le 4$

81. $1 \le 6 \le 1 - \frac{1}{-}x \le 6 \le 4 \le 2$

82. $0 \le 6 \le 1 - \frac{1}{3}x \le 6 \le 1$

83. $1x + 2 \le 2 \le 1x - 3 \le 2 \le 7 \le 1x - 1 \le 2 \le 1x + 1 \le 2 \le 8$

84. $1x - 1 \le 2 \le 1x + 1 \le 2 \le 7 \le 1x - 3 \le 2 \le 1x + 4 \le 2$

85. $x14x + 3 \le 2 \le 12x + 1 \le 2$

86. $x19x - 5 \le 2 \le 13x - 1 \le 2$

87. $\frac{1}{2} \le \frac{x + 1}{3} \le \frac{3}{4}$

88. $\frac{1}{3} \le \frac{x + 1}{2} \le \frac{2}{3}$

89. $14x + 2 \le -1 \le 6 \le 0$

90. $12x - 1 \le -1 \le 7 \le 0$

91. $11 - 4x2 \le -1 \le 7$

92. $213x + 5 \le -1 \le 3$

93. $0 \le 6 \le \frac{2}{x} \le 6 \le \frac{3}{5}$

94. $0 \le 6 \le \frac{4}{x} \le 6 \le \frac{2}{3}$

95. $0 \le 6 \le 12x - 4 \le -1 \le 6 \le \frac{1}{2}$

96. $0 \le 6 \le 13x + 6 \le -1 \le 6 \le \frac{1}{3}$

97. $0 \le 2x \le 0 \le 6 \le 8$

98. $0 \le 3x \le 0 \le 6 \le 12$

99. $0 \le 3x \le 0 \le 7 \le 12$

100. $0 \le 2x \le 0 \le 7 \le 6$

101. $0 \le 2x - 1 \le 0 < 1$

102. $0 \le 2x + 5 \le 0 < 7$

103. $0 \le 1 - 2x \le 0 \le 7 \le 3$

104. $0 \le 2 - 3x \le 0 \le 7 \le 1$

105. $0 - 4x \le 0 + 0 - 5 \le 0 < 9$

106. $0 - x \le 0 - 0 \le 4 \le 0 < 2$

107. $0 - 2x \le 0 \le 0 - 4 \le 0$

108. $0 - x - 2 \le 0 \le 1$

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 109 a 118, encuentre a y b.

109. Si $-1 \le x \le 1$, entonces $a \le x + 4 \le b$.

110. Si $-3 \le x \le 2$, entonces $a \le x - 6 \le b$.

111. Si $2 \le x \le 3$, entonces $a \le -4x \le b$.

112. Si $-4 \le x \le 0$, entonces un $\le \frac{1}{-}x \le b$.

113. Si $0 \le x \le 4$, entonces $a \le 2x + 3 \le b$.

114. Si $-3 \le x \le 3$, entonces $a \le 1 - 2x \le b$.

115. Si $-3 \le x \le 0$, entonces un $\le \frac{1}{x + 4} \le b$.

116. Si $2 \le x \le 4$, entonces un $\le \frac{1}{x - 6} \le b$.

117. Si $6 \le 3x \le 12$, entonces $a \le x2 \le b$.

118. Si $0 \le 2x \le 6$, entonces $a \le x2 \le b$.

119. ¿Cuál es el dominio de la variable en la expresión $23x + 6$?

120. ¿Cuál es el dominio de la variable en la expresión $28 + 2x$?

121. Un adulto joven puede definirse como alguien mayor de 21 años pero menor de 30 años. Expresa esta afirmación usando desigualdades.

122. La mediana edad puede definirse como la que tiene 40 años o más y menos de 60 años. Exprese esta afirmación mediante desigualdades.

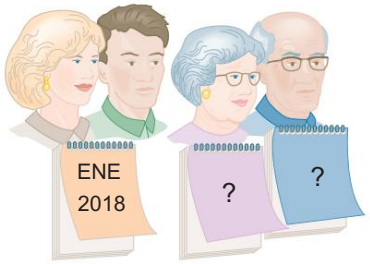
123. Esperanza de vida La Administración del Seguro Social determinó que un hombre promedio de 30 años en 2018 podría esperar vivir al menos 52,2 años más y que una mujer promedio de 30 años en 2018 podría esperar vivir al menos 55,8 años más. .

(a) ¿ Hasta qué edad podría esperar vivir un hombre promedio de 30 años? Expresa tu respuesta como una desigualdad.

(b) ¿ Hasta qué edad podría esperar vivir una mujer promedio de 30 años? Expresa tu respuesta como una desigualdad.

(c) ¿Quién puede esperar vivir más tiempo, un hombre o una mujer? Por ¿cuántos años?

Fuente: Administración del Seguro Social, 2018



Machine Translated by Google

124. Química general Para cierto gas ideal, el volumen V (en centímetros cúbicos) equivale a 20 veces la temperatura T (en grados Celsius). Si la temperatura varía de 80° a 120°C, inclusive, ¿cuál es el rango correspondiente del volumen del gas?

125. Bienes raíces Un agente de bienes raíces acuerda vender un complejo de apartamentos de acuerdo con el siguiente programa de comisiones: $45 000 más el 25 % del precio de venta que exceda los $900 000. Suponiendo que el complejo se venderá a algún precio entre $900 000 y $1 100 000, inclusive, ¿en qué rango varía la comisión del agente? ¿Cómo varía la comisión como porcentaje del precio de venta?

126. Comisión de ventas A un vendedor de automóviles usados se le paga una comisión de $25 más el 40% del precio de venta en exceso del costo del propietario. El propietario afirma que los autos usados normalmente se venden por lo menos por el costo del propietario más $200 y como máximo por el costo del propietario más $3000. Por cada venta realizada, ¿en qué rango puede esperar el vendedor que varíe la comisión?

127. Retención de Impuestos Federales El método porcentual de retención del impuesto federal sobre la renta (2018) establece que una sola persona cuyo salario semanal, después de restar las retenciones, sea superior a $815, pero no superior a $1658, tendrá $85.62 más el 22% del exceso sobre $815 retenidos. ¿En qué rango varía la cantidad retenida si los salarios semanales varían de $900 a $1100, inclusive?

Fuente: Guía fiscal del empleador. Servicio de Impuestos Internos, 2018

128. Hacer ejercicio Sue quiere perder peso. Para perder peso de forma saludable, el Colegio Americano de Medicina Deportiva (ACSM) recomienda entre 200 y 300 minutos de ejercicio por semana. Durante los primeros seis días de la semana, Sue hizo ejercicio 40, 45, 0, 50, 25 y 35 minutos. ¿Cuánto tiempo debe hacer ejercicio Sue el séptimo día para mantenerse dentro de las pautas del ACSM?

129. Tarifas de electricidad Durante los meses de verano de 2018, el Distrito de Energía Pública de Omaha cobró a los clientes residenciales un cargo de servicio mensual de $25, más un cargo de uso de 10,06 ¢ por kilovatio-hora (kWh). Si las facturas mensuales de verano de un cliente oscilaron entre un mínimo de $140,69 y un máximo de $231,23, ¿en qué rango varió el uso (en kWh)?

Fuente: Distrito de Energía Pública de Omaha, 2018

130. Facturas de alcantarillado El pueblo de Oak Lawn cobra a los propietarios $23,55 por trimestre por el uso del alcantarillado, más $0,40 por cada 1000 galones de agua medidos. En 2018, la factura trimestral de un propietario osciló entre un máximo de $36,75 y un mínimo de $30,35. ¿En qué rango varió el uso de agua medida?

Fuente: Village of Oak Lawn, Illinois, enero de 2018

131. Contenido de grasa Supongamos que pides un batido de chocolate McCafe™ pequeño (15 g de grasa) y un Artisan Grilled Chicken Sandwich™ (7 g de grasa) en McDonald's. ¿Cuántas galletas de avena con pasas puedes comer (5 g de grasa) y aun así mantener el contenido total de grasa de tu comida en no más de 47 g?

Fuente: Corporación McDonald's

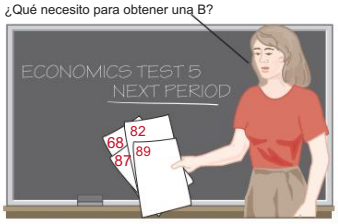
132. Contenido de sodio Suponga que pide una ensalada de jardín (95 mg de sodio) y un batido de fresa y plátano (50 mg de sodio) en Burger King. ¿Cuántas hamburguesas puedes comer (380 mg de sodio) y aun así mantener el contenido total de sodio de tu comida en no más de 1285 mg?

Fuente: Burger King

133. Calificaciones de informática En su clase de Economía 101, obtiene puntuaciones de 68, 82, 87 y 89 en las primeras cuatro de cinco pruebas. Para obtener una calificación de B, el promedio de los primeros cinco puntajes de las pruebas debe ser mayor o igual a 80 y menor a 90.

(a) Resuelva una desigualdad para encontrar la puntuación mínima que puede obtener el último examen y aun así obtener una B.

(b) ¿Qué puntuación necesitas si la quinta prueba cuenta? ¿doble?



134. Pruebas de coeficiente intelectual Una prueba de inteligencia estándar tiene una puntuación promedio de 100. Según la teoría estadística, de las personas que realizan la prueba, el 2,5% con las puntuaciones más altas tendrá puntuaciones de más de 1,96 s por encima de la media, donde s (sigma, un número llamado desviación estándar) depende de la naturaleza de la prueba. Si s = 12 para esta prueba y (en principio) no hay un límite superior para la puntuación posible en la prueba, escriba el intervalo de posibles puntuaciones de las personas en el 2,5% superior.

135. Media aritmética Si a 6 b, demuestra que a 6 $\frac{a+b}{2}$ 6b . El número se llama media aritmética de a y b.

2 136. Consulte el problema 135. Demuestre que la media aritmética de un y b es equidistante de a y b.

137. Media geométrica Si 0 6 a 6 b, demuestre que a 6 $\sqrt{ab}$ 6 b. El número $\sqrt{ab}$ se llama media geométrica de a y b.

138. Consulte los problemas 135 y 137. Demuestre que la media geométrica de a y b es menor que la media aritmética de a y b.

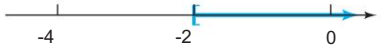
Explicar conceptos: discusión y escritura

139. Inventa una desigualdad que no tenga solución. Inventa una desigualdad que tenga exactamente una solución.

140. La desigualdad x2 + 1 6 - 5 no tiene solución real. Explicar por qué.

141. ¿Prefieres utilizar la notación de desigualdad o la notación de intervalo para expresar la solución de una desigualdad? Da tus razones. ¿Hay circunstancias particulares en las que prefieres uno al otro? Citar ejemplos.

'¿Estas preparado?' Respuestas

1. 

2. Falso

Machine Translated by Google

A.10 enésimas raíces; Exponentes racionales

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN Antes de comenzar, revise lo siguiente:

• Exponentes, raíces cuadradas (Sección A.1, págs. A7–A10)

Ahora trabaja el '¿Estás preparado?' problemas en la página 89.

OBJETIVOS 1 Trabajar con raíces enésimas (p. A83)
2 Simplificar radicales (p. A84)
3 Racionalizar denominadores y numeradores (p. A85)
4 Resolver ecuaciones radicales (p. A86)
5 Simplificar expresiones con exponentes racionales (p. A87)

1 Trabajar con enésimas raíces

DEFINICIÓN Principal enésima raíz

La raíz enésima principal de un número real a, n Ú 2 un número entero, simbolizado por $\sqrt[n]{a}$, se define de la siguiente manera:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ significa } a = b^n$$

donde a Ú 0 y b Ú 0 si n es par y a, b son números reales cualesquiera si n es impar.

En palabras
El símbolo $\sqrt[n]{a}$ significa "¿qué es?" número que, elevado a la potencia n, es igual a".

Observe que si a es negativo y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no está definido. cuando es definida, la raíz enésima principal de un número es única.

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ para la raíz enésima principal de a se llama radical; el número entero n se llama índice y a se llama radicando. Si el índice de un radical es 2, llamamos a $\sqrt{a}$ a la raíz cuadrada de a y omitimos el índice 2 simplemente escribiendo $\sqrt{a}$. Si el índice es 3, llamamos a $\sqrt[3]{a}$ a la raíz cúbica de a.

EJEMPLO 1 Simplificando raíces enésimas principales

(a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2$

(b) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{1 - 4^3} = -4$

(c) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2}$

(d) $\sqrt{1 - 2^6} = 0 - 2^0 = 2$

Estos son ejemplos de raíces perfectas, ya que cada una se simplifica a un número racional. Observe el valor absoluto en el Ejemplo 1(d). Si n es par, entonces la raíz n-ésima principal debe ser no negativa.

En general, si n Ú 2 es un número entero y a es un número real, tenemos

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ Ú 3 es impar} \qquad (1a)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = 0 a 0 \quad \text{si } n \text{ Ú 2 es par} \qquad (1b)$$

Ahora problema de trabajo 1 1

Los radicales proporcionan una forma de representar muchos números reales irracionales. Por ejemplo, se puede demostrar que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. Usando radicales, podemos decir que $\sqrt{2}$ es el número positivo cuyo cuadrado es 2.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 2

Usando una calculadora para aproximar raíces Usa una calculadora para aproximar $\sqrt[5]{16}$.

Solución La Figura 35 muestra el resultado usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C.

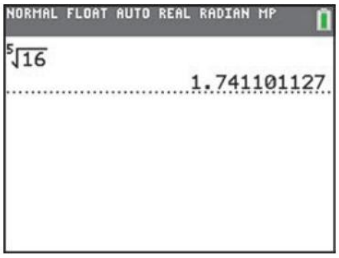


Figura 35

Ahora resuelve el problema 1 3 1

2 Simplificar radicales

Sean n Ú 2 ym Ú 2 números enteros, y sean a y b números reales.
Suponiendo que todos los radicales están definidos, tenemos las siguientes propiedades:

Propiedades de los radicales

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad (2a)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{segundo} \cdot 0 \qquad (2b)$$

$$b\sqrt[n]{am} = (\sqrt[n]{a}2\,m \qquad (2c)$$

Cuando se usa en referencia a radicales, la indicación "simplificar" significa eliminar de los radicales cualquier raíz perfecta que se presente como factor.

EJEMPLO 3

Simplificando Radicales

(a) $\sqrt{232} = \sqrt{216 \# 2} = \sqrt{216} \# \sqrt{22} = 4\sqrt{22}$ cc (2a)

Factoriza 16, un cuadrado perfecto. (b) $\sqrt{23\,16} = \sqrt{23\,8 \# 2} = \sqrt{23\,8} \# \sqrt{23\,2} = \sqrt{23\,23} \# \sqrt{23\,2} = 223\sqrt{2}$

Factoriza 8, un cubo perfecto. (c) cc (2a)

$$\sqrt{23 - 16x4} = \sqrt{23 - 8 \# 2 \# x3 \# x} = \sqrt{23\,1 - 8x32\,12x2}$$ cc Factor perfecto

Agrupa cubos perfectos dentro de radical. cubitos.

$$= \sqrt{23\,1 - 2x2^{\,3} \# 2x} = \sqrt{23\,1 - 2x2^{\,3}} \# \sqrt{23\,2x} = -2x\sqrt{23\,2x}$$

d) $\sqrt[4]{\frac{16x5}{81}} = \sqrt[4]{\frac{24x4x34}{\quad}} = \sqrt[4]{\quad} \# \sqrt[4]{\quad} = \sqrt[4]{\quad} \# x = \sqrt[4]{\quad} \# 24\,x = \sqrt[4]{\quad} \# 24\,x$

= segundo 4 un 2x4gundo

Ahora resuelve los problemas 1 5 y 2 7

Se pueden combinar dos o más radicales, siempre que tengan el mismo índice. y el mismo radicando. Estos radicales se denominan radicales similares.

EJEMPLO 4

Combinando radicales similares

(a) $-8\sqrt{212} + \sqrt{23} = -8\sqrt{24} \# 3 + \sqrt{23} = -8 \# \sqrt{24\,23}$

$+ \sqrt{23} = -16\sqrt{23} + \sqrt{23} = -15\sqrt{23}$

(b) $\sqrt{23\,8x4} + \sqrt{23 - x} + \sqrt{423\,27x} = \sqrt{23\,23x3\,x} + \sqrt{23 - 1} \# x + \sqrt{423\,33x} = \sqrt{23}$

$12x2 = \sqrt{\quad}^{3} \# \sqrt{23\,x} + \sqrt{23 - 1} \# \sqrt{23\,x} + \sqrt{423\,33} \# \sqrt{23\,x}$

$2x\sqrt{23\,x} - 1 \# \sqrt{23\,x} + 12\sqrt{23\,x} = 12\sqrt{x}$

$+ 112\sqrt{23\,x}$

Ahora resuelve el problema 4 5

Machine Translated by Google

3 Racionalizar denominadores y numeradores

Cuando aparecen radicales en cocientes, se acostumbra reescribir el cociente para que el nuevo denominador no contenga radicales. Este proceso se conoce como racionalización del denominador.

La idea es multiplicar por una expresión apropiada para que el nuevo denominador no contenga radicales. Por ejemplo:

Si un denominador Contiene el factor	Multiplicar por	Para obtener un denominador Libre de radicales
$\sqrt{23}$	$\sqrt{23}$	$\sqrt{23}\cdot\sqrt{23} = 23 = 3$
$\sqrt{23} + 1$	$\sqrt{22} + 3$	$(\sqrt{22} + 3)(\sqrt{22} - 3) = 22 - 9 = 13$
$\sqrt{22} - 3$	$\sqrt{25} - \sqrt{23}$	$(\sqrt{22} - 3)(\sqrt{25} - \sqrt{23}) = -32 = 2 - 9 = -7$
$\sqrt{25} - \sqrt{23}$	$\sqrt{23} + \sqrt{4}$	$(\sqrt{25} - \sqrt{23})(\sqrt{23} + \sqrt{4}) = 25 - 23 = 5 - 3 = 2$
$\sqrt{23} + \sqrt{4}$		

Al racionalizar el denominador de un cociente, asegúrese de multiplicar tanto el numerador como el denominador por la expresión.

EJEMPLO 5 Racionalizar denominadores

Racionaliza el denominador de cada expresión:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{23}}$ (b) $\dfrac{5}{\sqrt{422}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{22}}{\sqrt{23}-\sqrt{322}}$

Solución (a) El denominador contiene el factor $\sqrt{23}$, por lo que multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{23}$ para obtener

$$\frac{1}{\sqrt{23}} = \frac{1}{\sqrt{23}}\cdot\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{23}} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{1\,232\,2}} = \frac{\sqrt{23}}{3}$$

(b) El denominador contiene el factor 12, por lo que multiplicamos el numerador y el denominador por 12 para obtener

$$\frac{5}{\sqrt{422}} = \frac{5}{\sqrt{422}}\cdot\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{22}} = \frac{5\sqrt{22}}{\sqrt{41\,222\,2}} = \frac{5\sqrt{22}}{4\#2} = \frac{5\sqrt{22}}{8}$$

(c) El denominador contiene el factor $\sqrt{23} - \sqrt{322}$, por lo que multiplicamos el numerador y denominador por $\sqrt{23} + \sqrt{322}$ para obtener

$$\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{23}-\sqrt{322}} = \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{23}-\sqrt{322}}\cdot\frac{\sqrt{23}+\sqrt{322}}{\sqrt{23}+\sqrt{322}} = \frac{\sqrt{221}\sqrt{23}+\sqrt{3222}}{\sqrt{1\,232\,2}-\sqrt{13222\,2}}$$

$$= \frac{\sqrt{22}\sqrt{23}+31\,222\,2}{3-18} = \frac{26+6}{-15} = -\frac{6+26}{15}$$

Ahora problema de trabajo 5 9

En cálculo, a veces es necesario racionalizar el numerador de un cociente. Para hacer esto, multiplique por una expresión apropiada para que el nuevo numerador no contenga radicales.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 6 Racionalizar numeradores

Racionaliza el numerador de la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt{2x + h} - \sqrt{2x}}{h} \quad h \neq 0$$

Solución El numerador contiene el factor $\sqrt{2x + h} - \sqrt{2x}$, por lo que multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{2x + h} + \sqrt{2x}$ para obtener

$$\frac{\sqrt{2x + h} - \sqrt{2x}}{h} = \frac{\sqrt{2x + h} - \sqrt{2x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2x + h} + \sqrt{2x}}{\sqrt{2x + h} + \sqrt{2x}} = \frac{(\sqrt{2x + h})^2 - (\sqrt{2x})^2}{h(\sqrt{2x + h} + \sqrt{2x})}$$

$$= \frac{x + h - x}{h(\sqrt{2x + h} + \sqrt{2x})} = \frac{h}{h(\sqrt{2x + h} + \sqrt{2x})} = \frac{1}{\sqrt{2x + h} + \sqrt{2x}}$$

Ahora problema de trabajo 69

4 Resolver ecuaciones radicales

Cuando la variable en una ecuación ocurre en una raíz cuadrada, raíz cúbica, etc., es decir, cuando ocurre en un radical, la ecuación se llama ecuación radical. A veces, una operación adecuada cambiará una ecuación radical a una lineal o cuadrática.
Un procedimiento comúnmente utilizado es aislar el radical más complicado en un lado de la ecuación y luego eliminarlo elevando ambos lados a una potencia igual al índice del radical. Sin embargo, se debe tener cuidado porque pueden resultar soluciones aparentes que, en realidad, no son soluciones de la ecuación original. Estas se llaman soluciones extrañas. Por lo tanto, necesitamos verificar todas las respuestas cuando trabajamos con ecuaciones radicales y las verificamos en la ecuación original .

EJEMPLO 7 Resolver una ecuación radical

Encuentra las soluciones reales de la ecuación: $\sqrt[3]{2x - 4} - 2 = 0$

Solución La ecuación contiene un radical cuyo índice es 3. Aíslelo en el lado izquierdo.

$$\sqrt[3]{2x - 4} - 2 = 0$$

$$\sqrt[3]{2x - 4} = 2 \quad \text{Suma 2 a ambos lados.}$$

Ahora eleva ambos lados a la tercera potencia (el índice del radical es 3) y resuelve.

$$(\sqrt[3]{2x - 4})^3 = 2^3 \quad \text{Eleva ambos lados a la potencia 3.}$$

$$2x - 4 = 8 \quad \text{Simplifica.}$$

$$2x = 12 \quad \text{Suma 4 a ambos lados.}$$

$$x = 6 \quad \text{Divide ambos lados por 2.}$$

✓ Compruebe: $\sqrt[3]{2 \cdot 6 - 4} - 2 = \sqrt[3]{12 - 4} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 2 - 2 = 0$

El conjunto solución es $\{6\}$.

Ahora problema de trabajo 77

Machine Translated by Google

5 Simplificar expresiones con exponentes racionales

Los radicales se utilizan para definir exponentes racionales.

DEFINICIÓN $a^{1/n}$

Si a es un número real y n Ú 2 es un número entero, entonces

$$a^{1>n} = \sqrt[n]{a} \qquad (3)$$

siempre que $\sqrt[n]{a}$ existe .

Tenga en cuenta que si n es par y a 6 0, entonces $\sqrt[n]{a}$ y $a^{1>n}$ no existen.

EJEMPLO 8 Escribir expresiones que contienen exponentes fraccionarios como radicales

(a) $4^{1>2} = 24 = 2\sqrt{\ }$ (b) $81^{>2} = 28 = 222$

(c) $1 - 27^{2\,1>3} = 23 - \sqrt{27} = -3$ (d) $16^{1>3} = 23\sqrt{16} = 223\sqrt{\ }2$

DEFINICIÓN $a^{m>n}$

Si a es un número real y m y n son números enteros que no contienen factores comunes, siendo n Ú 2, entonces

$$a^{m>n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad (4)$$

siempre que $\sqrt[n]{a}$ existe .

Tenemos dos comentarios sobre la ecuación (4):

- El exponente $\frac{m}{n}$ debe estar en los términos más bajos y n Ú 2 debe ser positivo.
- Al simplificar la expresión $a^{m>n}$, Se puede utilizar $\sqrt[n]{a^m}$ o $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, dependiendo de cuál sea más fácil de simplificar. Generalmente, es más fácil tomar la raíz primero, como en $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

EJEMPLO 9 Simplificar expresiones con exponentes racionales

(a) $4^{3>2} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$ (b) $1 - 8^{2\,4>3} = 1 - 25\,6^{2\,2-2} = 1 - 2^{-2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (c) $25^{4>2} = 25^{3>2} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$

(d) $16^{-3>4} = \frac{1}{16^{3>4}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Ahora problema de trabajo 8 1

Se puede demostrar que las leyes de los exponentes son válidas para exponentes racionales. El El siguiente ejemplo ilustra el uso de las leyes de los exponentes para simplificar.

EJEMPLO 10 Simplificar expresiones con exponentes racionales

Simplifica cada expresión. Expresa tu respuesta de modo que solo aparezcan exponentes positivos. Supongamos que las variables son positivas.

(a) $\left(x^{2>3}y^2\right)^{1>2}\left(x^{-2}y^2\right)$ (b) $\left(\frac{2x^{1>3}y^{-3}}{x^{-2}}\right)^{-3}$ (c) $\left(\frac{9x^2y^{1>3}}{x^{1>3}}\right)^{1>2}$

Machine Translated by Google

Solución (a) 1x2>3 y2 1x-2 y2 1>2 = x2>3 # y # 1x-22 1>2 # y1>2 1ab2 n = x2>3 # y # x-1 # y1 >2 = x2 >3 · un bn

x-1 # y # y1>2 1 am 2 n · am

= x-1>3 # y3>2 soy # un · soy·n

= y3>2 / x1>3 un · un 1/—

(b) ¢ 2x1>3 / y2>3 ≤ -3 = ¢ 2x1>3 ≤ 3 = 1y2>32 3 / 12x1>32 3 = y2 / 23 1x1>32 3 = y2 / 8x

(c) ¢ 9x2y1>3 / x1>3y ≤ 1>2 = ¢ 9x2-11>32 / 1>2 ≤ 1>2 = ¢ 9x5>3 ≤ 1>2 = 91>2 1x5>32 1>2 / 1y2>32 1>2 = 3x5>6 / y1>3

Ahora problema de trabajo 1 0 1

Los dos ejemplos siguientes ilustran algo de álgebra que necesitará saber para ciertos problemas de cálculo.

EJEMPLO 11 Escribir una expresión como un cociente único

Escribe la siguiente expresión como un cociente único en el que solo aparezcan exponentes positivos.

1x2 + 12 1>2 + x # 2 1 1x2 + 12 -1>2 # 2x

Solución

1x2 + 12 1>2 + x # 1/2 1x2 + 12 -1>2 # 2x = 1x2 + 12 1>2 + x2 / 1x2 + 12 1>2

= 1x2 + 12 1>2 1x2 + 12 1>2 + x2 / 1x2 + 12 1>2

= 1x2 + 12 + x2 / 1x2 + 12 1>2

= 2x2 + 1 / 1x2 + 12 1>2

Ahora problema de trabajo 1 0 7

EJEMPLO 12 Factorizar una expresión que contiene exponentes racionales

Factoriza y simplifica: 4/3 x1>3 12x + 12 + 2x4>3

Solución

Comienza escribiendo 2x4>3 como una fracción con 3 como denominador.

4/3 x1>3 12x + 12 + 2x4>3 = 4x1>3 12x + 12 / 3 + 6x4>3 / 3 = C 4x1>3 12x + 12 + 6x4>3 / 3

Suma las dos fracciones.

= C 2x1>3 3212x + 12 + 3x4 / 3 = C 2x1>3 17x + 22 / 3

2 y x1/3 son factores comunes. Simplificar.

Ahora problema de trabajo 1 1 9

Machine Translated by Google

A.10 Evalúe su comprensión

'¿Estas preparado?' Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta incorrecta, lea las páginas en rojo.

1. $1 - 32^{2} =$; $-32 =$ (págs. A7–A9)

2. $\sqrt{216} =$; $\sqrt{21 - 42}^{2} =$ (págs. A9–A10)

Conceptos y vocabulario

3. En el símbolo $\sqrt[n]{a}$, el número entero n se llama 4. _____ . Llamamos a $\sqrt{23}$ a el _____ _____ de un.

5. Opción múltiple Sean n Ú 2 y m Ú 2 números enteros, y sean a y b números reales. ¿Cuál de las siguientes no es una propiedad de los radicales? Suponga que todos los radicales están definidos.

(a) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (b) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(c) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (d) $\sqrt{a^{m}} = a^{\frac{m}{2}}$

6. Opción múltiple Si a es un número real y n Ú 2 es un número entero, entonces ¿cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $\sqrt[n]{a}$, siempre que exista?

(a) un (b) un (C) $\frac{1}{un}$ (d) a1>n

7. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes frases define mejor como radicales?

(a) Expresiones radicales que tienen el mismo índice
(b) Expresiones radicales que tienen el mismo radicando
(c) Expresiones radicales que tienen el mismo índice y el mismo radicando
(d) Expresiones radicales que tienen la misma variable

8. Opción múltiple Para racionalizar el denominador de los 12 expresión, multiplica tanto el numerador como el $1 - \sqrt{13}$ ¿Denominador por cuál de los siguientes?

(a) $\sqrt{23}$ (b) $\sqrt{22}$ (c) $1 + \sqrt{23}$ (d) $1 - \sqrt{23}$

9. Verdadero o Falso $\sqrt{25 - 32} = -2$

10. Verdadero o Falso $\sqrt[4]{24\ 1 - 32} = -3$

Desarrollo de habilidades

En los problemas 11 a 54, simplifica cada expresión. Suponga que todas las variables son positivas cuando aparecen.

11. $\sqrt{23\ 27}$ 13. $\sqrt{23 - 8}$ 14. $\sqrt{23 - 1}$

12. $\sqrt{24\ 16}$

15. $\sqrt{28\ 17}$. $\sqrt{2700}$ 18. $\sqrt{245x3}$

16. $\sqrt{275}$

19. $\sqrt{23\ 32}$ 21. $\sqrt{23 - 8x4}$ 22. $\sqrt{23\ 192x5}$

20. $\sqrt{23\ 54}$

23. $\sqrt{24\ 243}$ 25. $\sqrt{24\ x12y8}$ 26. $\sqrt{25\ x10y5}$

24. $\sqrt{24\ 48x5}$

27.B $\sqrt[4]{\frac{x9y7}{xy3}}$

28. B $\sqrt{3\frac{3xy2}{81x4y2}}$

29. $\sqrt{264x}$

30. $\sqrt{29x5}$

31. $\sqrt{24\ 162x9\ y12}$

32. $\sqrt{23 - 40x14\ y10}$

33. $\sqrt{215x2\ 25x\ 37.}$

34. $\sqrt{25x220x3}$ _

35. $\sqrt{1\ 25\ 23\ 92}^{2}$

36. $\sqrt{1\ 23\ 3\ 2102\ 4}$

$13262\ 12222$ 41. $\sqrt{-248 + 5212}$ 45. $\sqrt{523\ 2 -}$

38. $\sqrt{15282\ 1 - 3232}$

39. $\sqrt{322 + 422}$ 43. $\sqrt{1}$

40. $\sqrt{625 - 425}$ 44. $\sqrt{1}$

42. $\sqrt{2212 - 3227}$

$\sqrt{23 + 32\ 1\ 23 - 12}$ 47. $\sqrt{1\ 2x - 12\ 2}$ 51. $\sqrt{28x3 - 3250x}$ 53. $\sqrt{23\ 16x4y - 3x23\ 2xy + 523 - 2xy4}$

$\sqrt{25 - 22\ 1\ 25 + 32}$ 48. $\sqrt{1\ 2x + 252\ 2}$

$\sqrt{223\ 54}$ 49. $\sqrt{23\ 16x4 - 23\ 2x}$ 52. $\sqrt{3x29y + 4225y}$

46. $\sqrt{923\ 24 - 23\ 81}$

50. $\sqrt{24\ 32x + 24\ 2x5}$

54. $\sqrt{8xy - 225x2y2 + 23\ 8x3y3}$

En los problemas 55 a 68, racionalice el denominador de cada expresión. Suponga que todas las variables son positivas cuando aparecen.

55. $\frac{1}{\sqrt{22}}$

56. $\frac{2}{\sqrt{23}}$

57. $\frac{-\sqrt{23}}{\sqrt{25}}$

58. $\frac{-\sqrt{23}}{\sqrt{28}}$

59. $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{5 - 22}}$

60. $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{27 + 2}}$

61. $\frac{2 - \sqrt{25}}{\sqrt{2 + 325}}$

62. $\frac{\sqrt{23 - 1}}{\sqrt{223 + 3}}$

63. $\frac{5}{\sqrt{22 - 1}}$

64. $\frac{-3}{\sqrt{25 + 4}}$

$\frac{5}{\sqrt{23\ 2}}$

66. $\frac{-2}{\sqrt{23\ 9}}$

67. $\frac{\sqrt{2x + h - 2x}}{\sqrt{2x + h + 2x}}$

68. $\frac{\sqrt{2x + h + 2x - h}}{\sqrt{2x + h - 2x - h}}$

Machine Translated by Google

En los problemas 69 a 76, racionalice el numerador de cada expresión. Suponga que todas las variables son positivas cuando aparecen.

69. $\frac{\sqrt{2t + 1}}{2}$

70. $\frac{\sqrt{5 - 2t}}{3}$

71. $\frac{\sqrt{6 - 2t}}{\sqrt{2t}}$

72. $\frac{\sqrt{5 + 2t}}{\sqrt{5}}$

73. $\frac{\sqrt{2x - 2c}}{x - c}$ $x \cdot c$

74. $\frac{\sqrt{2x - 2}}{x - 4}$ $x \cdot 4$

75. $\frac{\sqrt{2x - 7 - 1}}{x - 8}$ $x \cdot 8$

76. $\frac{\sqrt{4 - 2x - 9}}{x - 25}$ $x \cdot 25$

En los problemas 77 a 80, resuelve cada ecuación.

77. $\sqrt{2t - 1} = 2$

78. $\sqrt{3t + 1} = -2$

79. $\sqrt{2x - 1} = x$

80. $\sqrt{2x - 1} = x$

En los problemas 81 a 96, simplifica cada expresión.

81. $8^{2/3}$

82. $4^{3/2}$

83. $(1 - 64)^{2/3}$

84. $16^{3/4}$

85. $1000^{2/3}$

86. $25^{3/2}$

87. $4^{-3/2}$

88. $16^{-3/2}$

89. $(u^{9})^{3/2}$

90. $(u^{27})^{2/3}$

91. $(u^{8})^{-3/2}$

92. $(u^{27}b)^{-2/3}$

93. $(1 - 1000)^{-2/3}$

94. $-25^{-1/2}$

95. $\left(a - \frac{64}{125}b\right)^{-2/3}$

96. $-81^{-3/4}$

En los problemas 97 a 104, simplifica cada expresión. Expresa tu respuesta de modo que solo aparezcan exponentes positivos. Supongamos que las variables son positivas.

97. $x^{3/4}x^{1/3}x^{-1/2}$

98. $x^{2/3}x^{1/2}x^{-1/4}$

99. $x^{1/3}y^{6}$

100. $x^{4}y^{8}$

101. $\frac{x^{2}y^{2}\,x^{y^{2}}}{2x^{2}\,y^{2/3}}$

102. $\frac{x^{y^{2}}\,x^{4}\,x^{y^{2}}}{x^{2}\,y^{2/3}}$

103. $\frac{16x^{2}y^{-1/3}}{xy^{2}\,x^{4}}$

104. $\frac{4x^{-1}y^{1/3}}{xy^{2/3}}$

Aplicaciones y extensiones

En los problemas 105 a 118 se dan expresiones que aparecen en cálculo. Escribe cada expresión como un cociente único en el que solo aparecen exponentes positivos y/o radicales.

105. $\frac{x}{(1 + x^{2})^{1/2}} + 2(1 + x^{2})^{1/2}$ $x \neq -1$

106. $\frac{1+ x}{2x^{1/2}} + (x^{1/2} + 2)x \neq 0$

107. $2x(x^{2} + 1)^{1/2} + x^{2}\left(\frac{1}{2}\right)(x^{2} + 1)^{-1/2}(2x)$

108. $(x + 1)^{1/3} + x\left(\frac{1}{3}\right)(x + 1)^{-2/3}$ $x \neq -1$

109. $\sqrt{4x + 3} + 2x\sqrt{x - 5} + \frac{x^{2}}{\sqrt{x - 5}}$ $x \neq 5$

110. $\frac{\sqrt{3(8x + 1)}}{(1x - 2)^{2}} + \frac{\sqrt{3x - 2}}{(8x + 1)^{2}}$ $x \neq 2, x \neq -\frac{1}{8}$

111. $\frac{\sqrt{1+ x} - x\left(\frac{1}{2\sqrt{1+ x}}\right)}{1+ x}$ $x \neq -1$

112. $\frac{\sqrt{2x^{2} + 1} - x\left(\frac{2x}{2\sqrt{2x^{2} + 1}}\right)}{x^{2} + 1}$

113. $\frac{(x + 4)^{1/2} - x(x + 4)^{-1/2}}{x + 4}$ $x \neq -4$

114. $\frac{(9 - x^{2})^{1/2} + x^{2}(9 - x^{2})^{-1/2}}{9- x^{2}}$ $-3 \leq x \leq 3$

115. $\frac{\left(\frac{x^{2}}{(x^{2} - 1)^{1/2}}\right) - (x^{2} - 1)^{1/2}}{x^{2}}$ $x \leq -1$ o $x \geq 1$

116. $\frac{(x^{2} + 4)^{1/2} - x^{2}(x^{2} + 4)^{-1/2}}{x^{2} + 4}$

117. $\frac{\frac{1 + x^{2}}{\sqrt{2x}} - 2x\sqrt{2x}}{(1 + x^{2})^{2}}$ $x \neq 0$

118. $\frac{(1- x^{2})^{1/3} + \frac{2}{3}x(1 - x^{2})^{-2/3}}{(1- x^{2})^{2/3}}$ $x \neq -1, x \neq 1$

Machine Translated by Google

En los problemas 119 a 128 se dan expresiones que aparecen en cálculo. Factoriza cada expresión. Expresa tu respuesta de modo que solo aparezcan exponentes positivos.

+ 12 + x # 2 3>2 1x + 12 1>2 119. 1x x Ú - 1

120. 1x2 + 42 4>3 1x2 + 42 + x # 3 1>3 # 2x

121. 6x1>2 1x2 + x2 - 8x3>2 - 8x1>2 x Ú 0 123. 31x2 + 42 + x # 41x2 + 42 4>3 1>3 # 2x

122. 6x1>2 12x + 32 + x3>2 # 8 x Ú 0

124. 2x13x + 42 4>3 + x2 # 413x + 42 1>3

125. 4(3x + 5)1>3 (2x + 3)3>2 + 3(3x + 5)4>3 (2x + 3)1>2 x Ú - 3/2

126. 6(6x + 1)1>3 (4x - 3)3>2 + 6(6x + 1)4>3 (4x - 3)1>2 x Ú 3/4

127. 3x-1>2 + 3/x1>2 x 7 0 2

128. 8x1>3 - 4x-2>3 x · 0

En los problemas 129 a 136, use una calculadora para aproximar cada radical. Redondea tu respuesta a dos cifras decimales.

129. 22 132. 23 - 5

130. 27

131. 23 4

133. $\frac{2 + 23}{3 - 25}$

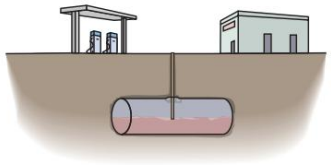
134. $\frac{25 - 2}{22 + 4}$

135. $\frac{323\ 5 - 22}{23}$

136. $\frac{223 - 23\ 4}{22}$

137. Calcular la cantidad de gasolina en un tanque Una estación Shell almacena su gasolina en tanques subterráneos que son cilindros circulares rectos que se encuentran de lado. Ver la figura. El volumen V de gasolina en el tanque (en galones) viene dado por la fórmula

$$V = 40h2\ A\ 96h - 0,608$$



donde h es la altura de la gasolina (en pulgadas) medida con una varilla de profundidad.

(a) Si h = 12 pulgadas, ¿cuántos galones de gasolina hay en el tanque?

(b) Si h = 1 pulgada, ¿cuántos galones de gasolina hay en el tanque?

138. Planos inclinados La velocidad final v de un objeto en pies por segundo (ft/s) después de que se desliza por un plano inclinado de altura sin fricción. h pies es

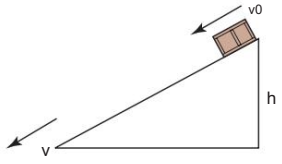
$$v = 264\sqrt{h + v0^2}$$

donde v0 es la velocidad inicial (en pies/s) del objeto.

(a) ¿Cuál es la velocidad final v de un objeto que se desliza hacia abajo por una pendiente inclinada sin fricción? plano de altura 4 pies? Suponga que la velocidad inicial es 0.

(b) ¿Cuál es la velocidad final v de un objeto que se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción de 16 pies de altura? Suponga que la velocidad inicial es 0.

(c) ¿Cuál es la velocidad final v de un objeto que se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción de 2 pies de altura con una velocidad inicial de 4 pies/s?



'¿Estas preparado?' Respuestas

1, 9; - 9 2.4 ; 4

Machine Translated by Google

Esta página se ha dejado en blanco intencionalmente

Machine Translated by Google

Utilidades gráficas

Apéndice B

Describir

B.1 El rectángulo de visualización

B.2 Uso de una utilidad gráfica para representar gráficamente ecuaciones

B.3 Uso de una utilidad gráfica para localizar intersecciones y comprobar la simetría

B.4 Uso de una utilidad gráfica para resolver ecuaciones

B.5 Pantallas cuadradas

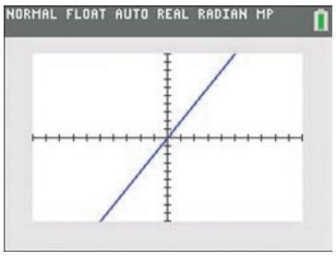
B.6 Uso de una utilidad gráfica para realizar gráficos Desigualdades

B.7 Uso de una utilidad gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales

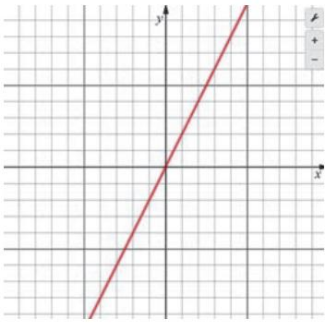
B.8 Uso de una utilidad gráfica para representar gráficamente una ecuación polar

B.9 Uso de una utilidad gráfica para realizar gráficos Ecuaciones paramétricas

B.1 El rectángulo de visualización



(a) y = 2x en una TI-84 Plus C



(b) y = 2x usando Desmos

Figura 1

Todas las utilidades gráficas (es decir, todas las calculadoras gráficas y todos los paquetes de software de computación) grafican ecuaciones trazando puntos en una pantalla. La pantalla en sí consta en realidad de pequeños rectángulos llamados píxeles. Cuantos más píxeles tenga la pantalla, mejor será la resolución. La mayoría de las calculadoras gráficas tienen entre 50 y 100 píxeles por pulgada; la mayoría de los teléfonos inteligentes tienen entre 300 y 450 píxeles por pulgada. Cuando un punto a trazar se encuentra dentro de un píxel, el píxel se enciende (se ilumina). La gráfica de una ecuación es una colección de píxeles. La Figura 1(a) muestra cómo se ve la gráfica de y = 2x en una calculadora gráfica TI-84 Plus C, y la Figura 1(b) muestra la misma gráfica usando Desmos.com.

La pantalla de una utilidad gráfica muestra los ejes de coordenadas de un sistema de coordenadas rectangular. Sin embargo, la escala debe establecerse en cada eje. También se deben establecer los valores más pequeño y más grande de xey que se incluirán en el gráfico. A esto se le llama configurar el rectángulo de visualización o la ventana de visualización. La Figura 2 muestra una ventana de visualización típica en una TI-84 Plus C.

Para seleccionar la ventana de visualización se deben dar valores a las siguientes expresiones:

Xmín:	el valor más pequeño de x
Xmáx:	el valor más grande de x
Xscl:	el número de unidades por marca en el eje x
Ymín:	el valor más pequeño de y
Ymáx:	el valor más grande de y
Yscl:	el número de unidades por marca en el eje y

La Figura 3 ilustra estas configuraciones y su relación con el sistema de coordenadas cartesianas.

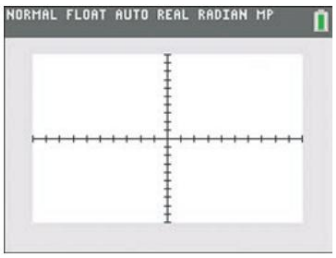


Figura 2 Ventana de visualización en un TI-84 Plus C

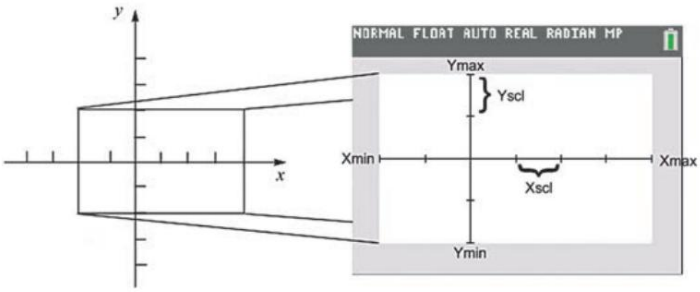


figura 3

Si se conoce la escala utilizada en cada eje, los valores mínimo y máximo de xey que se muestran en la pantalla se pueden determinar contando las marcas. Mire nuevamente la Figura 2. Para una escala de 1 en cada eje, los valores mínimo y máximo de x son -10 y 10, respectivamente; los valores mínimo y máximo de y son

Machine Translated by Google

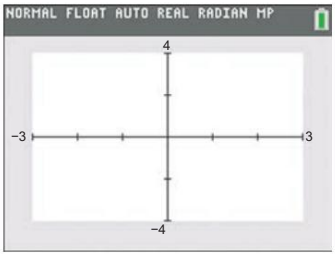


Figura 4

también - 10 y 10. Si la escala es 2 en cada eje, entonces los valores mínimo y máximo de x son - 20 y 20, respectivamente; y los valores mínimo y máximo de y son - 20 y 20, respectivamente.

Por el contrario, si se conocen los valores mínimo y máximo de xey , las escalas se pueden determinar contando las marcas que se muestran . Este texto sigue la práctica de mostrar los valores mínimo y máximo de xey en ilustraciones para que el lector sepa cómo se configuró la ventana de visualización. Consulte la Figura 4. Los números fuera de la ventana de visualización representan

Xmín = - 3, Xmáx = 3, Xscl = 1

Ymín = - 4, Ymáx = 4, Yscl = 2

EJEMPLO 1 Encontrar las coordenadas de un punto mostrado en una pantalla de utilidad gráfica

Encuentre las coordenadas del punto que se muestra en la Figura 5. Suponga que las coordenadas son números enteros.

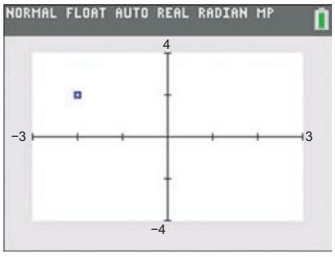


Figura 5

Solución Primero, tenga en cuenta que la ventana de visualización utilizada en la Figura 5 es

Xmín = - 3, Xmáx = 3, Xscl = 1

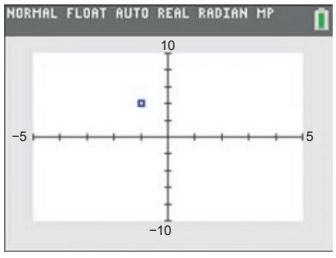
Ymín = - 4, Ymáx = 4, Yscl = 2

El punto que se muestra está a 2 unidades de tick a la izquierda del origen en el eje horizontal 1scale = 12 y 1 tick hacia arriba en el eje vertical 1scale = 22. Las coordenadas del punto mostrado son 1 - 2, 22.

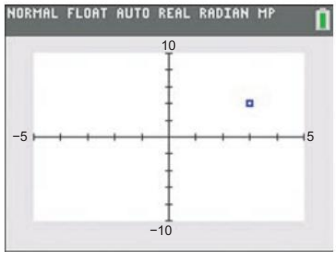
B.1 Ejercicios

En los problemas 1 a 4, determine las coordenadas de los puntos mostrados. Indica en qué cuadrante se encuentra cada punto. Supongamos que las coordenadas son números enteros.

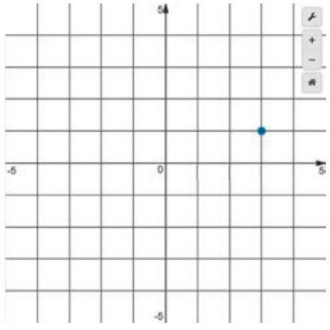
1.



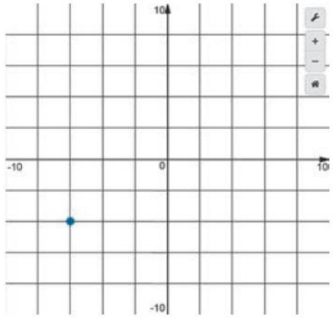
2.



3.

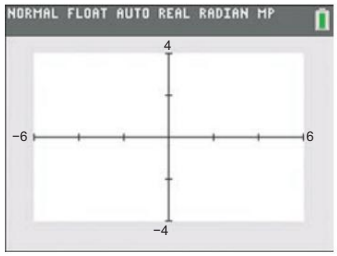


4.

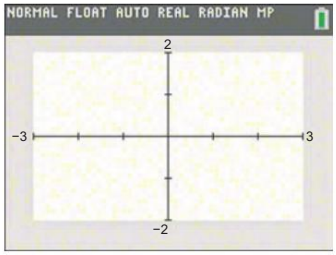


En los problemas 5 a 10, determine la ventana de visualización utilizada.

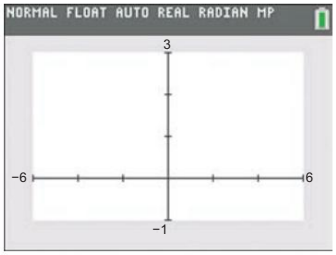
5.



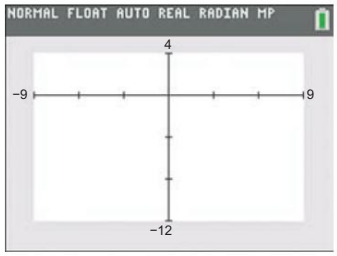
6.



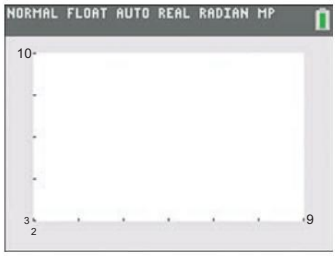
7.



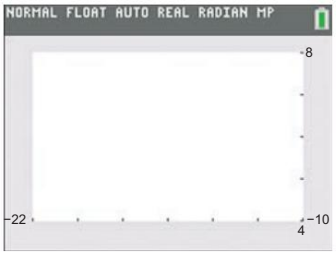
8.



9.



10.



Machine Translated by Google

En los problemas 11 a 16, seleccione una configuración para que cada uno de los puntos dados quede dentro del rectángulo de visualización.

11. 1 - 10, 52, 13, - 22, 14, - 12 12. 15, 02, 16, 82, 1 - 2, - 32 14. 1 - 80, 602, 120, - 302, 1 - 20, - 402 15. 10, 02, 1100, 52, 15, 1502

13. 140, 202, 1 - 20, - 802, 110, 402

16. 10, - 12, 1100, 502, 1 - 10, 302

B.2 Uso de una utilidad gráfica para representar gráficamente ecuaciones

De los ejemplos 2 y 3 de la sección 1.2, recuerde que una manera de obtener una gráfica es trazando puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y conectándolos.
Las utilidades gráficas realizan estos mismos pasos al graficar una ecuación. Por ejemplo, la TI-84 Plus C determina 265 valores de entrada espaciados uniformemente*, comenzando en Xmin y terminando en Xmax; utiliza la ecuación para determinar los valores de salida; traza estos puntos en la pantalla; y finalmente (si está en el modo conectado) dibuja una línea entre puntos consecutivos.

Para graficar una ecuación en dos variables xey usando una utilidad gráfica a menudo requiere que la ecuación se escriba explícitamente en la forma y = 5expresión en x6.
Si la ecuación original no está en esta forma, reemplácela por ecuaciones equivalentes hasta obtener la forma y = 5 expresión en x6.

Pasos para graficar una ecuación usando una utilidad gráfica

Paso 1: Resuelve la ecuación para y en términos de x.

Paso 2: acceda al modo de gráficos de la utilidad de gráficos. La pantalla generalmente mostrará Y1 =, solicitándole que ingrese la expresión que involucra x que se encuentra en el Paso 1. (Consulte su manual para conocer la forma correcta de ingresar la expresión; por ejemplo, y = x2 se puede ingresar como x ¿2 o como x *x o como x xy 2.)

Paso 3: seleccione la ventana de visualización. Sin conocimientos previos sobre el comportamiento de la gráfica de la ecuación, es común seleccionar inicialmente la ventana de visualización estándar** . Luego, la ventana de visualización se ajusta según el gráfico que aparece. En este texto, la ventana de visualización estándar es

Xmín = - 10 Xmáx = 10 Xscl = 1

Ymín = - 10 Ymáx = 10 Yscl = 1

Paso 4: Grafica.

Paso 5: Ajuste la ventana de visualización hasta obtener un gráfico completo.

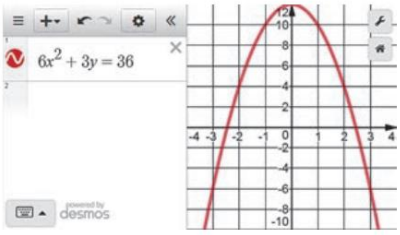


Figura 6 6x2 + 3y = 36

NOTA Algunas utilidades gráficas permiten la entrada de ecuaciones implícitas. Por ejemplo, la Figura 6 muestra la gráfica de 6x2 + 3y = 36 usando Desmos.

*Estos valores de entrada dependen de los valores de Xmin y Xmax. Por ejemplo, si Xmin = - 10 y Xmax = 10, 10 - 1 - 102 entonces el primer valor de entrada será - 10 y el siguiente valor de entrada será - 10 + $\frac{\quad}{264}$ =-9,9242, etcétera.

**Algunas utilidades de gráficos tienen una función ZOOM-STANDARD que establece automáticamente la ventana de visualización en la ventana de visualización estándar y grafica la ecuación.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 1 Graficar una ecuación en una utilidad gráfica

Grafica la ecuación 6x2 + 3y = 36.

Solución

Paso 1: Resuelve para y en términos de x.

6x2 + 3y = 36

3y = - 6x2 + 36 Resta 6x2 de ambos lados.

y = - 2x2 + 12 Divide ambos lados entre 3 y simplifica.

Paso 2: Desde la pantalla Y1 =, ingrese la expresión - 2x2 + 12 después del mensaje.

Paso 3: establezca la ventana de visualización en la ventana de visualización estándar.

Paso 4: Grafica. La pantalla debería verse como la Figura 7.

Paso 5: La gráfica de y = - 2x2 + 12 no está completa. El valor de Ymax debe aumentarse para que la parte superior del gráfico sea visible. Después de aumentar el valor de Ymax a 12, obtenemos el gráfico de la Figura 8. El gráfico ahora está completo.

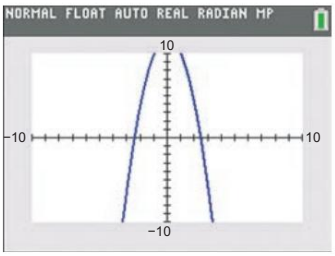


Figura 7 y = -2x2 + 12

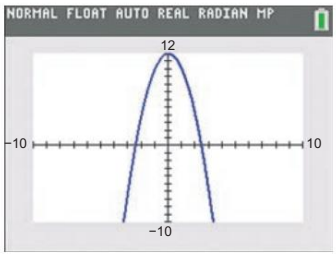


Figura 8 y = -2x2 + 12

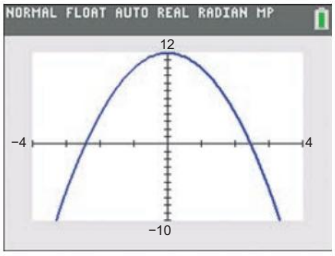


Figura 9 y = -2x2 + 12

Mire nuevamente la Figura 8. Aunque se muestra un gráfico completo, el gráfico podría mejorarse ajustando los valores de Xmin y Xmax. La Figura 9 muestra la gráfica de y = - 2x2 + 12 usando Xmin = - 4 y Xmax = 4. ¿Crees que esta es una mejor opción para la ventana de visualización?

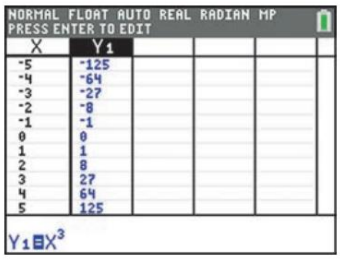
EJEMPLO 2 Crear una tabla y graficar una ecuación

Crea una tabla y grafica la ecuación y = x3 .

Solución

La mayoría de las utilidades gráficas tienen la capacidad de crear una tabla de valores para una ecuación. (Consulte su manual para ver si su utilidad de gráficos tiene esta capacidad). La Tabla 1 ilustra una tabla de valores para y = x3 en una TI-84 Plus C. Consulte la Figura 10 para ver el gráfico.

Tabla 1



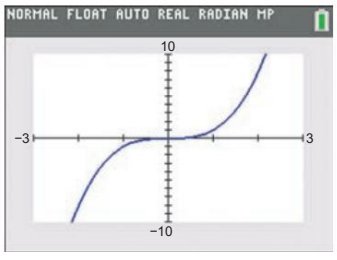


Figura 10 y = x3

B.2 Ejercicios

En los problemas 1 a 16, grafique cada ecuación usando las siguientes ventanas de visualización:

(a) Xmín = - 5 Xmáx = 5 XScl = 1
Ymín = - 4 Ymáx = 4 Ycl = 1

(b) Xmín = - 10 Xmáx = 10 Xcl = 2
Ymín = - 8 Ymáx = 8 Ycl = 2

1. y = x + 2
2. y = x - 2
6. y = 2x - 2
3. y = - x + 2
7. y = - 2x + 2
4. y = - x - 2
5. y = 2x + 2
8. y = - 2x - 2

Machine Translated by Google

9. y = x2 + 2 13. 3x + 2y = 6
10. y = x2 - 2 14. 3x - 2y = 6
11. y = - x2 + 2 15. - 3x + 2y = 6 17–32.
12. y = - x2 - 2 16. - 3x - 2y = 6

Para cada una de las ecuaciones de los problemas 1 a 16, cree una tabla, - 5 … x … 5, y enumere los puntos en la gráfica.

B.3 Uso de una utilidad gráfica para localizar intersecciones y comprobar la simetría

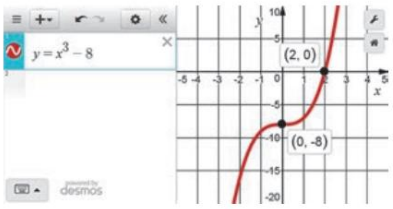


Figura 11 y = x3 - 8

Valor y cero (o raíz)

La mayoría de las utilidades gráficas tienen una función eVALUEate que, dado un valor de x, determina el valor de y para una ecuación. Esta característica es útil para evaluar una ecuación en x = 0 para encontrar la intersección con el eje y. La mayoría de las utilidades gráficas también tienen una función CERO (o RAÍZ) que se utiliza para encontrar la (s) intersección(es) en el eje x de una ecuación.

NOTA Algunas utilidades de gráficos identifican automáticamente puntos clave, como intersecciones y puntos de intersección. Por ejemplo, la Figura 11 muestra la gráfica de y = x3 - 8 usando Desmos donde las intersecciones ya están identificadas. j ■

EJEMPLO 1

Encontrar intersecciones utilizando una utilidad gráfica

Usa una herramienta gráfica para encontrar las intersecciones de la ecuación y = x3 - 8.

Solución

La Figura 12(a) muestra la gráfica de y = x3 - 8 en una calculadora gráfica TI-84 Plus C.

La función eVALUEate de una TI-84 Plus C acepta como entrada un valor de x y determina el valor de y. Si x = 0, encontramos que la intersección con el eje y es - 8. Consulte la Figura 12(b).

La función CERO de una TI-84 Plus C se utiliza para encontrar las intersecciones x. Véase la Figura 12(c). La intersección con el eje x es 2.

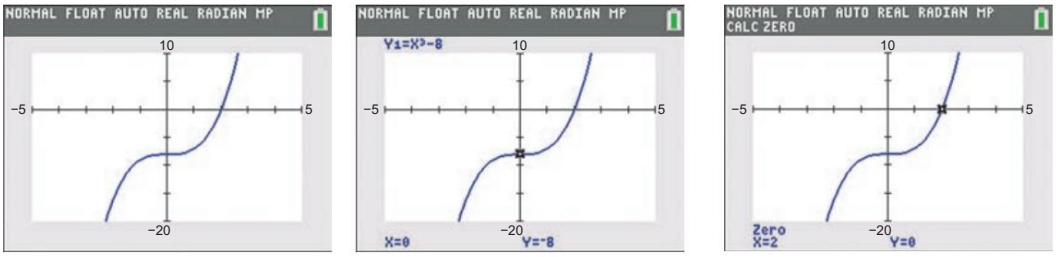


Figura 12 (a) (b) (C)

EJEMPLO 2

Graficar la ecuación $y = \frac{1}{x}$

Grafique la ecuación $y = \frac{1}{x}$. Con base en la gráfica, infiere información sobre las intersecciones y la simetría.

Solución

La figura 13 muestra el gráfico. Infiere del gráfico que no hay intersecciones; También inferimos que la simetría con respecto al origen es una posibilidad. La función TABLA en una utilidad gráfica proporciona evidencia adicional de simetría con respecto al origen.

Usando una TABLA, observe que para cualquier par ordenado (x, y), el par ordenado 1 - x, - y2 también es un punto en la gráfica. Ver Tabla 2.

(continuado)

Machine Translated by Google

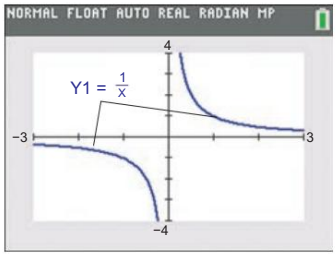
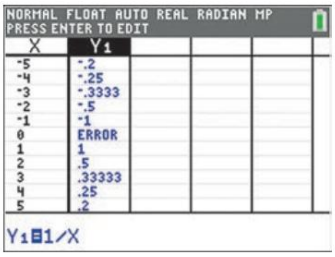


Figura 13 y = $\frac{1}{X}$

Tabla 2



B.3 Ejercicios

En los problemas 1 a 6, use CERO (o RAÍZ) para aproximar la menor de las dos intersecciones x de cada ecuación. Expresa la respuesta redondeada a dos decimales.

1. y = x2 + 4x + 2
2. y = x2 + 4x - 3 5.
3. y = 2x2 + 4x + 1
4. y = 3x2 + 5x + 1
5. y = 2x2 - 3x - 1
6. y = 2x2 - 4x - 1

En los problemas 7 a 12, use CERO (o RAÍZ) para aproximar las intersecciones x positivas de cada ecuación. Expresa cada respuesta redondeada a dos decimales.

7. y = x3 + 3,2x2 - 16,83x - 5,31 9.
8. y = x3 + 3,2x2 - 7,25x - 6,3
9. y = x4 - 1,4x3 - 33,71x2 + 23,94x + 292,41 11.
10. y = x4 + 1,2x3 - 7,46x2 - 4,692x + 15,2881
11. y = x3 + 19,5x2 - 1021x + 1000,5
12. y = x3 + 14,2x2 - 4,8x - 12,4

B.4 Uso de una utilidad gráfica para resolver ecuaciones

Para muchas ecuaciones, no existen técnicas algebraicas que conduzcan a una solución. Para este tipo de ecuaciones, a menudo se utiliza una utilidad gráfica para investigar posibles soluciones. Cuando se utiliza una utilidad gráfica para resolver una ecuación, generalmente se obtienen soluciones aproximadas . A menos que se indique lo contrario, este texto sigue la práctica de dar soluciones aproximadas redondeadas a dos decimales.

La característica CERO (o RAÍZ) de una utilidad gráfica se usa a menudo para encontrar las soluciones de una ecuación cuando un lado de la ecuación es 0. Al usar esta característica para resolver ecuaciones, aproveche el hecho de que las intersecciones con el eje x (o ceros) de la gráfica de una ecuación se encuentran haciendo y = 0 y resolviendo la ecuación para x. Resolver una ecuación para x cuando un lado de la ecuación es 0 es equivalente a encontrar dónde la gráfica de la ecuación correspondiente cruza o toca el eje x.

EJEMPLO 1 Uso de CERO (o RAÍZ) para aproximar soluciones de una ecuación

Encuentra la(s) solución(es) de la ecuación x2 - 6x + 7 = 0. Redondea las respuestas a dos decimales.

Solución

Las soluciones de la ecuación x2 - 6x + 7 = 0 son las mismas que las intersecciones con el eje x de la gráfica de Y1 = x2 - 6x + 7. Comienza graficando la ecuación. Consulte la Figura 14(a) para ver el gráfico utilizando una TI-84 Plus C.

Según la gráfica, parece haber dos intersecciones con el eje x (soluciones de la ecuación): una entre 1 y 2, la otra entre 4 y 5.

Utilizando la característica CERO (o RAÍZ) de la utilidad gráfica, determine que las intersecciones con el eje x y, por lo tanto, las soluciones de la ecuación, son x = 1,59 y x = 4,41. redondeado a dos decimales. Véanse las Figuras 14(b) y (c).

Machine Translated by Google

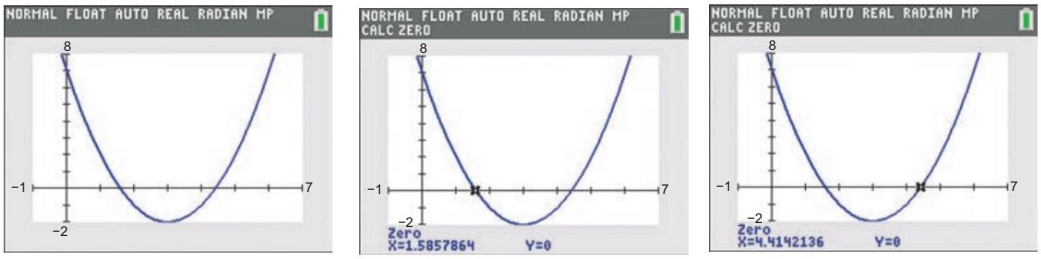


Figura 14 (a) (b) (C)

Un segundo método para resolver ecuaciones utilizando una utilidad gráfica implica la función INTERSECT de la utilidad gráfica. Esta característica se utiliza con mayor eficacia cuando un lado de la ecuación no es 0.

EJEMPLO 2 Uso de INTERSECT para aproximar soluciones de una ecuación

Encuentra la(s) solución(es) de la ecuación 31x - 22 = 51x - 12.

Solución

Comience graficando cada lado de la ecuación de la siguiente manera: grafique Y1 = 31x - 22 e Y2 = 51x - 12. Consulte la Figura 15(a) para ver el gráfico utilizando una TI-84 Plus C.

En el punto de intersección de las gráficas, el valor de la coordenada y es el mismo. Concluya que la coordenada x del punto de intersección representa la solución de la ecuación. ¿Ves por qué? La función INTERSECT en una utilidad gráfica determina el punto de intersección de los gráficos. Utilizando esta función, encuentre que las gráficas se cruzan en 1 - 0,5, - 7,52. Véase la Figura 15(b). Por tanto, la solución de la ecuación es x = - 0,5. La Figura 15(c) muestra el punto de intersección usando Desmos.

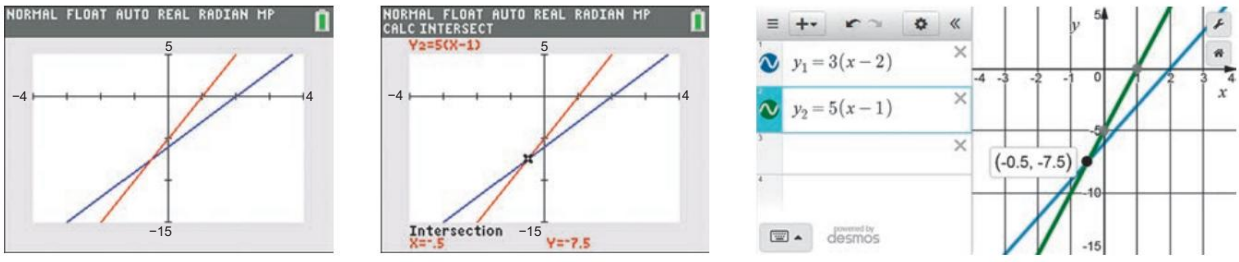


Figura 15 (a) (b) (C)

RESUMEN

Los siguientes pasos se pueden utilizar para aproximar soluciones de ecuaciones.

Pasos para aproximar soluciones de ecuaciones usando CERO (o RAÍZ)

Paso 1: Escribe la ecuación en la forma 5 expresión en x6 = 0.

Paso 2: Grafica Y1 = 5 expresión en x6.

Asegúrese de que el gráfico esté completo. Es decir, asegúrese de que todas las intersecciones se muestren en la pantalla.

Paso 3: Utilice CERO (o RAÍZ) para determinar cada intersección con el eje x de la gráfica.

Pasos para aproximar soluciones de ecuaciones usando INTERSECT

Paso 1: Grafica Y1 = 5expresión en x en el lado izquierdo de la ecuación6.

Grafique Y2 = 5expresión en x en el lado derecho de la ecuación6.

Paso 2: Utilice INTERSECT para determinar cada coordenada x de los puntos de intersección, si los hay.

Asegúrese de que los gráficos estén completos. Es decir, asegúrese de que todos los puntos de intersección se muestren en la pantalla.

Machine Translated by Google

EJEMPLO 3

Resolver una ecuación radical

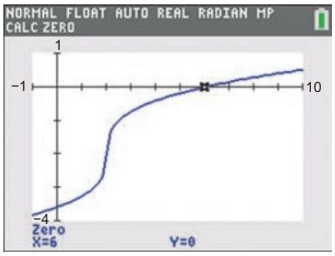


Figura 16 $y = 23\ 2x - 4 - 2$

Encuentra las soluciones reales de la ecuación $23\ 2x - 4 - 2 = 0$.

Solución La Figura 16 muestra la gráfica de la ecuación

$$Y1 = 23\ 2x - 4 - 2.$$

En la gráfica, hay una intersección con el eje x cerca de 6. Usando CERO (o RAÍZ), encuentra que la intersección con el eje x es 6. La única solución es x = 6.

B.5 Pantallas cuadradas

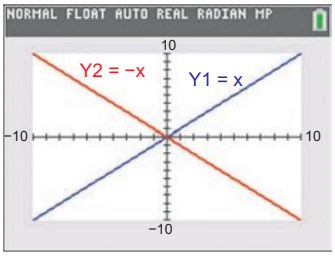


Figura 17 y = x e y = - x usando una ventana de visualización estándar.

La mayoría de las utilidades gráficas tienen una pantalla rectangular. Debido a esto, usar la misma configuración para x e y da como resultado una vista distorsionada. Por ejemplo, la Figura 17 muestra las gráficas de y = x e y = - x usando una TI-84 Plus C con una ventana de visualización estándar.

Esperamos que las líneas se crucen en ángulos rectos, pero no es así. Las selecciones para Xmin, Xmax, Ymin e Ymax deben ajustarse para que resulte una pantalla cuadrada . En la TI-84 Plus C, esto se logra estableciendo la relación de xay en 8:5.* Por ejemplo, si

Xmín = - 16 Ymín = - 10

Xmáx = 16 Ymáx = 10

entonces la razón de xey es

$$\frac{Xmáx - Xmín}{Ymáx - Ymín} = \frac{16 - 1 - 162}{10 - 1 - 102 \text{ para}} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$$

una proporción de 8:5, lo que da como resultado una pantalla cuadrada.

EJEMPLO 1

Ejemplos de visualización de rectángulos que dan como resultado pantallas cuadradas

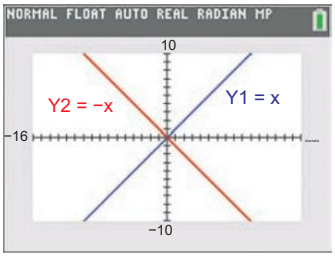


Figura 18 y = x e y = - x con una pantalla cuadrada.

(a)	(b)	(c)
Xmín = - 8	Xmín = - 16	Xmín = - 24
Xmáx = 8	Xmáx = 16	Xmáx = 24
XScl = 1	XScl = 1	Xcl = 3
Ymín = - 5	Ymín = - 10	Ymín = - 15
Ymáx = 5	Ymáx = 10	Ymáx = 15
Ycl = 1	Ycl = 1	Ycl = 3

La Figura 18 muestra las gráficas de y = x e y = - x en una pantalla cuadrada usando el rectángulo de visualización dado en la parte (b). Observe que las líneas ahora se cruzan en ángulos rectos. Compare esta ilustración con la Figura 17.

B.5 Ejercicios

En los problemas 1 a 8, determine cuál de los rectángulos de visualización dados da como resultado una pantalla cuadrada.

1. Xmín = - 6 Xmáx = 6 XScl = 1
   Ymín = - 2 Ymáx = 2 Ycl = 0,5

2. Xmín = - 5 Xmáx = 5 XScl = 1
   Ymín = - 4 Ymáx = 4 Ycl = 1

3. Xmín = 0 Xmáx = 16 Xscl = 4
   Ymín = - 2 Ymáx = 8 Ycl = 2

4. Xmín = - 10 Xmáx = 14 Xscl = 2
   Ymín = - 7 Ymáx = 8 Ycl = 3

*Algunas utilidades de gráficos tienen una función incorporada que cuadra automáticamente la pantalla. Por ejemplo, la TI-84 Plus C tiene una función ZSquare que hace esto. Algunas utilidades de gráficos requieren una proporción distinta de 8:5 para cuadrar la pantalla. Por ejemplo, el HP 48G requiere que la relación de xay sea 2 :1 para una pantalla cuadrada. Consulta tu manual.

Machine Translated by Google

5. Si Xmin = - 4, Xmax = 12 y Xscl = 1, ¿cómo se deben seleccionar Ymin, Ymax e Yscl para que el rectángulo de visualización contenga el punto (4, 8) y la pantalla sea cuadrada?
6. Si Xmin = - 6, Xmax = 10 y Xscl = 2, ¿cómo se deben seleccionar Ymin, Ymax e Yscl para que el rectángulo de visualización contenga el punto (4, 8) y la pantalla sea cuadrada?

B.6 Uso de una utilidad gráfica para representar gráficamente desigualdades

EJEMPLO 1 Graficar una desigualdad usando una utilidad gráfica

Utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente 3x + y - 6 … 0.

Solución

Comience graficando la ecuación 3x + y - 6 = 0 1Y1 = - 3x + 62. Consulte la Figura 19.

Al igual que con la gráfica manual, seleccione puntos de prueba de cada región y determine si satisfacen la desigualdad. Para probar el punto 1 - 1, 22, por ejemplo, ingrese 31 - 12 + 2 - 6 … 0. Consulte la Figura 20(a). El 1 que aparece indica que la afirmación ingresada (la desigualdad) es verdadera. Cuando se prueba el punto 15, 52 aparece un 0, indicando que la afirmación ingresada es falsa. Por tanto, 1 - 1, 22 es parte de la gráfica de la desigualdad y 15, 52 no lo es. La Figura 20(b) muestra el gráfico de la desigualdad en una TI-84 Plus C.* La Figura 20(c) muestra el gráfico usando Desmos.

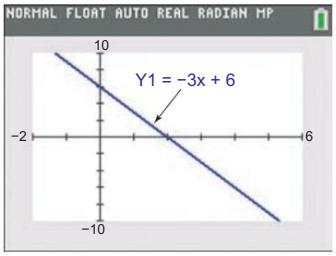
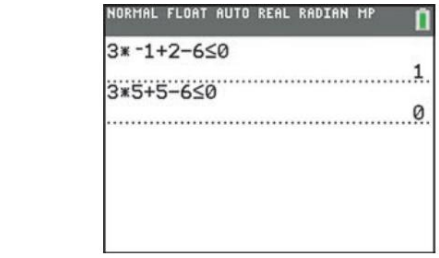
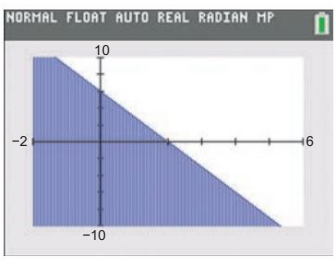


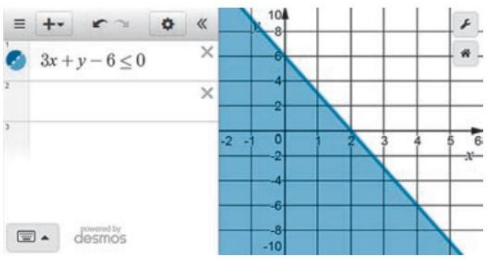
Figura 19



(a)



(b)



(C)

Figura 20

Pasos para graficar una desigualdad usando una utilidad gráfica

Paso 1: Reemplaza el símbolo de desigualdad por un signo igual, resuelve la ecuación para y y grafica la ecuación.

Paso 2: En cada región, seleccione un punto de prueba P y determine si las coordenadas de P satisfacen la desigualdad.

- Si el punto de prueba satisface la desigualdad, también lo hacen todos los puntos de la región. Indique esto usando la utilidad de gráficos para sombrear la región.
- Si las coordenadas de P no satisfacen la desigualdad, entonces tampoco lo harán cualquiera de los otros puntos de esa región.

*Consulta el manual de tu propietario para conocer las técnicas de sombreado.

B.7 Uso de una utilidad gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales

La mayoría de las utilidades gráficas tienen la capacidad de poner la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales en forma escalonada por filas. El siguiente ejemplo, el Ejemplo 6 de la Sección 11.2, demuestra esta característica usando una calculadora gráfica TI-84 Plus C.

Machine Translated by Google

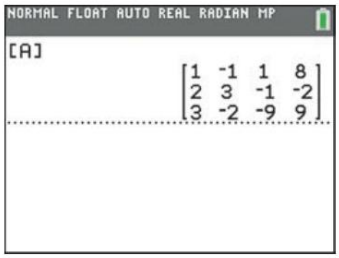
EJEMPLO 1 Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando una utilidad gráfica

$$2x + 3y - z = -2 \quad (1)$$
$$\text{Resuelva } 3x - 2y + 9z = 8 \quad (2)$$
$$(3)$$

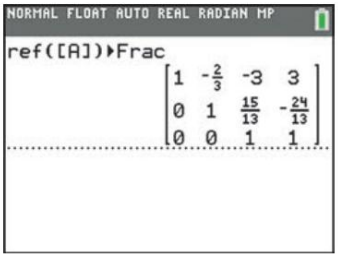
Solución La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Ingrese esta matriz en una utilidad gráfica y asígnele el nombre A. Consulte la Figura 21(a). Usando el comando ref (forma escalonada de filas) en la matriz A, se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 21(b). Si toda la matriz no cabe en la pantalla, desplácese hacia la derecha para ver el resto.



(a)



(b)

Figura 21

El sistema de ecuaciones representado por la matriz en forma escalonada por renglones es

$$x - \frac{2}{3}y - 3z = 3 \quad (1)$$
$$y + \frac{15}{13}z = -\frac{24}{13} \quad (2)$$
$$z = 1 \quad (3)$$

Usando z = 1, sustituye hacia atrás para obtener

$$y + \frac{15}{13}(1) = -\frac{24}{13} \quad (2)$$
$$y = -\frac{39}{13} = -3 \quad (2)$$

Simplificar.

$$x - \frac{2}{3}y - 3(1) = 3 \quad (1)$$
$$x - \frac{2}{3}(-3) = 6 \quad (1)$$

Resuelva la segunda ecuación para y para encontrar que y = - 3. Sustituya hacia atrás y = - 3 en x - y = 6 para encontrar que x = 4. La solución del sistema es x = 4, y = - 3, z = 1.

Observe que la forma escalonada por renglones de la matriz aumentada que utiliza la utilidad gráfica difiere de la forma escalonada por renglones obtenida en el ejemplo 6 de la sección 11.2; sin embargo, ¡ambas matrices proporcionan la misma solución! Esto se debe a que las dos soluciones utilizaron diferentes operaciones de fila para obtener la forma escalonada de fila. Con toda probabilidad, las dos soluciones se separaron en el Paso 4 de la solución algebraica, donde se evitaron las fracciones intercambiando las filas 2 y 3.

La mayoría de las utilidades gráficas también tienen la capacidad de poner una matriz en forma escalonada por filas reducida. La Figura 22 muestra la forma escalonada por filas reducida de la matriz aumentada del Ejemplo 1 usando el comando rref en una calculadora gráfica TI-84 Plus C. Usando este comando, observe que la solución del sistema sigue siendo x = 4, y = - 3, z = 1.

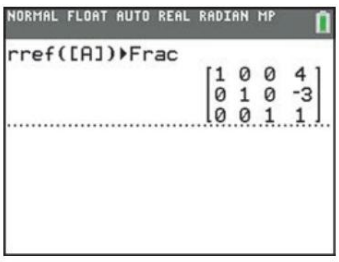


Figura 22

Machine Translated by Google

B.8 Uso de una utilidad gráfica para representar gráficamente una ecuación polar

La mayoría de las utilidades gráficas requieren los siguientes pasos para obtener la gráfica de una ecuación polar. Asegúrese de estar en modo POLAR.

Graficar una ecuación polar usando una utilidad gráfica

Paso 1: configura el modo en POLAR. Resuelve la ecuación para r en términos de u.

Paso 2: seleccione el rectángulo de visualización en modo polar. Además de configurar Xmin, Xmax, Xscl, etc., el rectángulo de visualización en modo polar requiere configurar los valores mínimo y máximo para u y una configuración incremental para u (usep). Además, se debe utilizar una pantalla cuadrada y una medida en radianes.

Paso 3: Ingrese la expresión que involucra a u que encontró en el Paso 1. (Consulte su manual para conocer la forma correcta de ingresar la expresión).

Paso 4: Grafica.

EJEMPLO 1 Graficar una ecuación polar usando una utilidad gráfica

Utilice una utilidad gráfica para representar gráficamente la ecuación polar r sen u = 2.

Solución

Paso 1: Resuelve la ecuación para r en términos de u.

$$r \operatorname{sen} u = 2$$

$$r = \frac{2}{\operatorname{pecado} u}$$

Paso 2: Desde el modo POLAR, seleccione el rectángulo de visualización.

$$\text{umin} = 0,\ \text{umax} = 2p,\ \text{upaso} = \frac{p}{24}$$

Xmín = - 8, Xmáx = 8, XScl = 1

Ymín = - 5, Ymáx = 5, Ycl = 1

ustep determina el número de puntos que trazará la utilidad gráfica. Por ejemplo, $\frac{p}{24}$ la utilidad gráfica evaluará r en u = 01umin2, si ustep es 24, 24, $\frac{p}{24}, \frac{2p}{24}, \frac{3p}{24}$, y y así sucesivamente hasta 2p1umax2. Cuanto menor sea el paso, más puntos trazará la utilidad gráfica. Experimente con diferentes valores de umin, umax y ustep para ver cómo se ve afectado el gráfico.

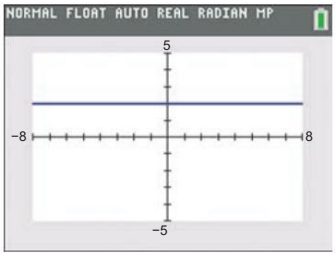


Figura 23 r sen u = 2

Paso 3: Ingrese la expresión después del mensaje $r1 = \frac{2}{\sin u}$.

Paso 4: Grafica.

El gráfico se muestra en la Figura 23.

B.9 Uso de una utilidad gráfica para representar gráficamente ecuaciones paramétricas

La mayoría de las utilidades gráficas tienen la capacidad de representar gráficamente ecuaciones paramétricas. Generalmente se requieren los siguientes pasos para obtener la gráfica de ecuaciones paramétricas. Consulta el manual del propietario para ver cómo funciona el tuyo.

Machine Translated by Google

Graficar ecuaciones paramétricas usando una utilidad gráfica

Paso 1: Establezca el modo en PARAMÉTRICO. Introduzca x(t) e y(t).

Paso 2: seleccione la ventana de visualización. Además de configurar Xmin, Xmax, Xscl, etc., la ventana de visualización en modo paramétrico requiere configurar valores mínimos y máximos para el parámetro t y un ajuste incremental para t (Tstep).

Paso 3: Grafica.

EJEMPLO 1 Graficar una curva definida por ecuaciones paramétricas usando una Utilidad gráfica

Grafique la curva definida por las ecuaciones paramétricas.

$$x = 3t^2, \quad y = 2t, \; -2 \ldots t \ldots 2$$

Solución

Paso 1: Ingresa las ecuaciones x1t2 = 3t ^{2}, y1t2 = 2t con la utilidad gráfica en Modo PARAMÉTRICO.

Paso 2: seleccione la ventana de visualización. El intervalo es - 2 … t … 2, así que seleccione el siguiente ventana de visualización cuadrada:

Tmín = - 2, Tmáx = 2, Tpaso = 0,1
Xmín = 0, Xmáx = 16, Xscl = 1
Ymín = - 5, Ymáx = 5, Yscl = 1

Elija Tmin = - 2 y Tmax = 2 porque - 2 … t … 2. Finalmente, la elección de Tstep determinará el número de puntos que trazará la utilidad gráfica. Por ejemplo, con Tstep en 0,1, la utilidad gráfica evaluará x y y en t = - 2, - 1,9, - 1,8, y así sucesivamente. Cuanto menor sea el Tstep, más puntos trazará la utilidad gráfica. Experimente con diferentes valores de Tstep para ver cómo se ve afectado el gráfico.

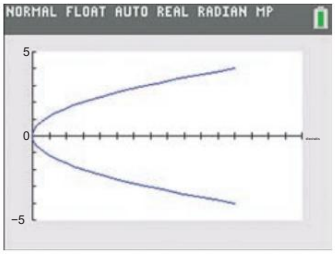


Figura 24
x = 3t 2, y = 2t, -2 … t … 2

Paso 3: Grafica. Observe la dirección en la que se dibuja el gráfico. Esta dirección muestra la orientación de la curva.

Usando una TI-84 Plus C, el gráfico que se muestra en la Figura 24 está completo.

Exploración

Grafique las siguientes ecuaciones paramétricas usando una utilidad gráfica con Xmin = 0, Xmax = 16, Ymín = -5, Ymáx = 5 y Tpaso = 0,1.

1. $x = \frac{3t^2}{4}$, y = t, -4 … t … 4

2 2.x = 3t _ + 12t + 12, y = 2t + 4, -4 … t … 0

x = 3t 2>3 , y = 223 t 3. _ , -8... t ... 8

Compare estos gráficos con la Figura 24. Concluya que las ecuaciones paramétricas que definen una curva no son únicas; es decir, diferentes ecuaciones paramétricas pueden representar la misma gráfica.

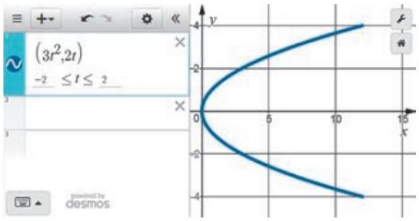


Figura 25
x = 3t 2, y = 2t, -2 … t … 2

Exploración

En el modo FUNCIÓN, grafica $x = \frac{3y2}{4}$ aY1 = A 4x $\sqrt{3}$ y Y2 = - A 4x $\sqrt{3}$ b con Xmín = 0, Xmáx = 16, Ymín = -5, Ymax = 5. Compare este gráfico con la Figura 24. ¿Por qué difieren los gráficos?

NOTA Algunas utilidades gráficas ingresan las ecuaciones paramétricas como un par ordenado. Por ejemplo, La figura 25 muestra la gráfica de $x = 3t^2$, y = 2t, - 2 … t … 2 usando Desmos.

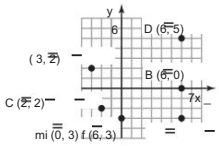
Machine Translated by Google

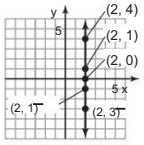
Respuestas

CAPÍTULO 1 Gráficos

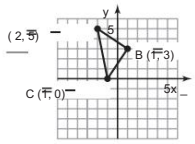
1.1 Evalúe su comprensión (página 42)

7. coordenada x o abscisa; Coordenada y u ordenada 8. cuadrantes 9. punto medio 10. F 11. F 12. T 13. b 14. a 15. (a) Cuadrante II (b) eje x 18. Los puntos estarán en a 33. d (A, B) = 113 (c) Cuadrante III (d) Cuadrante I d(B, C) = 113 (e) Eje y (f) Cuadrante IV d(A, C) = 126 (113)2 + (113)2 = (126)2 19. 15 22. 110 23. 2117 26. 1130 28. 110 30. 26.89 ≈ 2.62 32. 2a2 + b2 línea vertical que mide 2 unidades a la derecha del eje y.

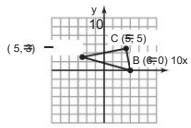




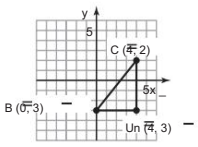
Área = 13 unidades cuadradas



36. d(A, B) = 1130 d(B, C) = 126 d(A, C) = 2126 (126)2 + (2126)2 = (1130)2 Área = 26 unidades cuadradas



38. d(A, B) = 4 d(B, C) = 141 d(A, C) = 5 42 + 52 = (141)2 Área = 10 unidades cuadradas



39. (4, 0) 42. a 2 , b 2b 44. (8, - 2) 46. a 2 , 2 b 47. (5, 4) 49. (4, 8) y (4, - 4)

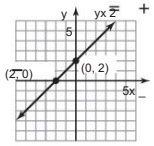
51. (4+613, 0); (5 - 613, 0) 53. (a) (4, 2) (b) (1, 11) 55. P2 = (- 6, 7) 58. d(C, D) = 237; d(B, E) = 234; d(A, F) = 5 60. d(P1, P2) = 2210; d(P2, P3) = 425; d(P1, P3) = 2110; un triángulo rectángulo isósceles 62. d(P1, P2) = 2197; d(P2, P3) = 1194; d(P1, P3) = 1194; un triángulo rectángulo isósceles 63. 9012 ≈ 127,28 pies 65. (a) (90, 0), (90, 90), (0, 90) (b) 512161 ≈ 232,43 pies (c) 301149 ≈ 366,20 pies 67. d = 75t millas

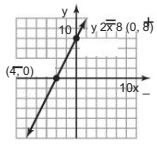
69. (a) (2,65, 1,6) (b) Aproximadamente 1,285 unidades 71. $17 553; una ligera subestimación 74. a 2 , s 2 segundo

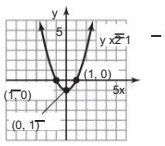
75. Disponga el paralelogramo en el plano coordenado de modo que los vértices sean P1 = (0, 0), P2 = (a, 0), P3 = (a + b, c) y P4 = (b, c). Entonces las longitudes de los lados son d(P1, P2) = a, d(P2, P3) = 2b2 + c2 , d(P3, P4) = a, y d(P1, P4) = 2b2 + c2 de las , y las longitudes diagonales. son d(P1, P3) = 2(a + b) a2 + 1 2 + c2 y d(P2, P4) = 2(a - b) 2 + c2 . Entonces, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados es 2b2 + c2 2 2 + a2 + 1 2b2 + c2 2 2 = a2 + b2 + c2 + a2 + b2 + c2 = 2a2 + 2b2 + 2c2 . La suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es 1 2(a + b) 2 c2 2 2 + 1 2(a - b) + 2 + c2 2 2 = (a + b) 2 + c2 + (a - b) 2 + c2 = a2 + 2ab + b2 + c2 + a2 - 2ab + b2 + c2 = 2a2 + 2b2 + 2c2 .

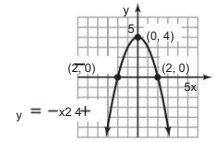
1.2 Evalúe su comprensión (página 53)

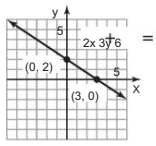
3. intercepta 4. y = 0 5. eje y 6. 4 7. (- 3, 4) 8. T 9. F 10. F 11. d 12. c 13. (0, 0) está en la gráfica . 16. (0, 3) está en la gráfica. 18. (0, 2) y (12, 12) están en la gráfica. 20. (- 2, 0), (0, 2) 22. (- 4, 0), (0, 8) 23. (- 1, 0), (1, 0), (0, - 1) 26. (- 2, 0), (2, 0), (0, 4) 28. (3, 0), (0, 2)



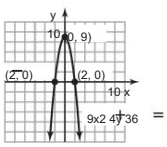




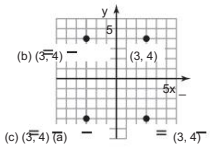




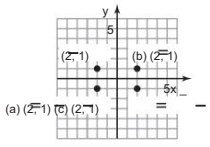
30. (- 2, 0), (2, 0), (0, 9)



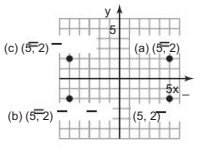
31.



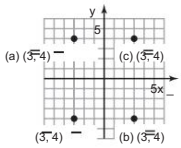
34.



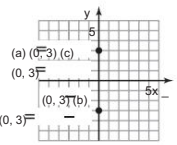
36.



38.



40.



41. (a) (- 1, 0), (1, 0) (b) Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen 48. (a) (- 2, 0), (0, 0), (2, 0) (b) Simétrica respecto al origen

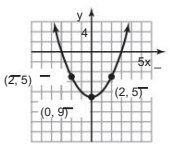
44. (a) un - 2 pag , 0b, (0, 1), ap 2 0b (b) Simétrico con respecto al eje y

46. (a) (0, 0) (b) Simétrico con respecto a el eje x

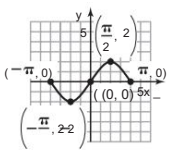
50. (a) (x, 0), - 2 … x … 1 (b) Sin simetría

52. (a) Sin intersecciones (b) Simétrica con respecto al origen

54.

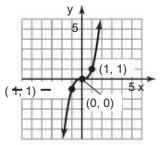


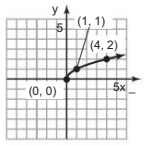
56.



58. (- 16, 0), (0, - 4), (0, 4); simétrico con respecto al eje x 60. (0, 0); simétrico con respecto al origen 61. (0, 9), (3, 0), (- 3, 0); simétrico con respecto al eje y 64. (- 2, 0), (2, 0), (0, - 5), (0, 5); simétrico con respecto al eje x, al eje y y al origen 66. (0, - 64), (4, 0); sin simetría 68. (0, - 8), (4, 0), (- 2, 0); sin simetría 70. (0, 0); simétrico con respecto al origen 72. (0, 0); simétrico con respecto al origen AN1

Machine Translated by Google

74. 

76. 

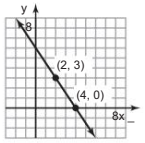
78. a = - 4 o a = 1 79. (- 6, - 2) 81. -1 83. (a) (0, 0), (18,
0), (0, -9), (0, 9), (b) simetría del eje x 85. (0, 0), (- a, 0), (a, 0); simétrica
con respecto al eje x, al eje y y al origen 87. (a) y = 2x2 e y = x tienen la misma gráfica. (b) 2x2 = x (c) x Ú
0 para y = 1 2x2 2 mientras que x puede ser cualquier número real para y = x. (d) y Ú 0 para y = 2x2

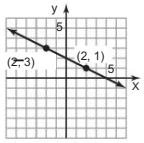
1.3 Evalúe su comprensión (página 67)

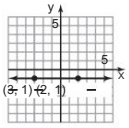
1 1. indefinido; 0 2, 3; 2 3. T 4. F 5. T 6. m1 = m2; intersecciones y; m1m2 = - 1 7. 2 8. - 2 9.c 10.d 11.b 12.d

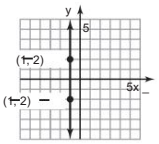
13. (a) Pendiente = $\frac{1}{2}$
(b) Si x aumenta en 2 unidades, y aumentará en 1 unidad.

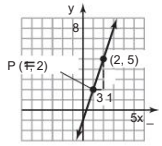
16. (a) Pendiente = - $\frac{1}{3}$
(b) Si x aumenta en 3 unidades, y disminuirá en 1 unidad.

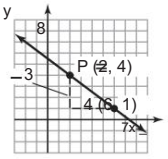
18. Pendiente = - $\frac{3}{2}$ 

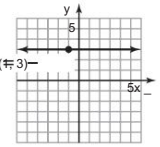
19. Pendiente = - $\frac{1}{2}$ 

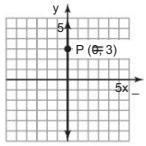
22. Pendiente = 0 

24. Pendiente indefinida 

25. 

28. y 

30. 

32. 

33. y - 2 = 3(x - 1) 36. y - 4 = - 38. y - 3 = 0 40. $\frac{}{4}$ (x -2)
12, 62; 13, 102; 14, 142 42. (4, - 7); (6,-10); (8, - 13)
44. (- 1, - 5); (0,-7); (1,-9)

1 45. x - 2y = 0 o y = x 48. x + y = 2 o y = - x + 2 50. 2x - y = 3 o y = 2x - 3 52. x + 2y = 5 o y = - x + 2

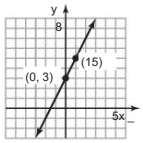
$\frac{5}{2}$

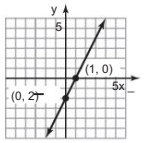
53. 3x - y = - 9 o y = 3x + 9 56. x - 2y = 1 o y = x - 2

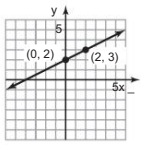
$\frac{1}{2}$ 1 58. x - 2y = - 5 o y = x + 2 2 59. 3x + y = 3 o y = - 3x + 3

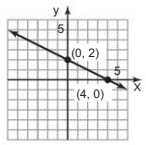
62. x - y = - 4 o y = x + 4 64. x = 2; sin forma pendiente-intersección 66. y = 2 67. 2x - y = - 4 o y = 2x + 4 70. x - 2y = 0 o y = $\frac{1}{2}$x

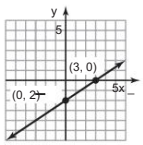
72. x = 4; sin forma pendiente-intersección 73. 2x + y = 0 o y = - 2x 76. 2x + y = 4 o y = - 2x + 4 78. y = 4

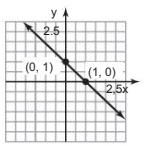
79. Pendiente = 2; y@intercepción = 3 

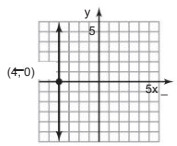
82. Pendiente = 2; y@intercepción = - 2 

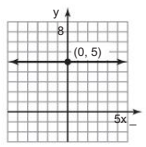
84. Pendiente = $\frac{1}{2}$; y@intercepción = 2 

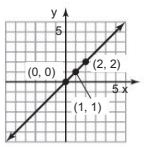
85. Pendiente = - $\frac{1}{2}$; y@intercepción = 2 

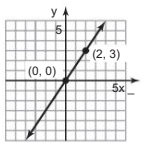
2 88. Pendiente = $\frac{}{}$; y@intercepción = - 2 3 

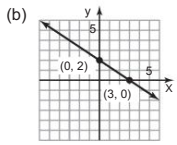
90. Pendiente = - 1; y@intercepción = 1 

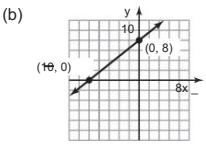
92. Pendiente indefinida; sin intersección y 

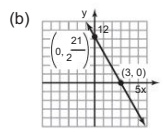
94. Pendiente = 0; y@intercepción = 5 

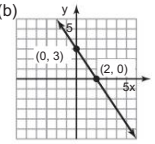
96. Pendiente = 1; y@intercepción = 0 

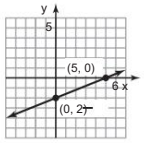
3 98. Pendiente = $\frac{}{}$; y@intercepción = 0 2 

99. (a) intercepción x: 3; intercepción y: 2
(b) 

102. (a) intersección con el eje x: - 10; intercepción y: 8
(b) 

104. (a) intercepción x: 3; 21
intercepción y: $\frac{}{2}$
(b) 

106. (a) intercepción x: 2;
Intercepción y:
3 (b) 

108. (a) intercepción x: 5;
intercepción y: - 2
(b) 

110. y = 0
112. Paralelo 114. Ninguno
116. x - y = - 2 o y = x + 2
118. x + 3y = 3 o y = - 3 $\frac{}{}$ x + 1

120. P1 = (- 4, 4), P2 = (1, 5): m1 = $\frac{1}{5}$; P2 = (1, 5), P3 = (2, 0): m2 = - 5; porque m1 # m2 = - 1, los segmentos de recta P1P2 y P2P3 son perpendiculares.
Los puntos (- 4, 4), (1, 5) y (2, 0) son los vértices de un triángulo rectángulo.

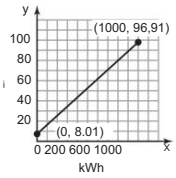
Machine Translated by Google

122. P1 = (- 2, 1), P2 = (- 3, 2), m12 = - 1; P2 = (- 3, 2), P4 = (- 5, 0), m24 = 1; P3 = (- 4, - 1), P4 = (- 5, 0) m24 = 1; P1 = (- 2, 1), P3 = (- 4, - 1), m13 = 1; los lados opuestos son paralelos y los lados adyacentes son perpendiculares; los puntos son los vértices de un rectángulo.

123. C = 0,09x + 33; +48,75; +69,27 125. C = 0,16x + 4436

127. (a) C = 0,0889x + 8,01, 0... x ... 1000

(b)



(c) $25,79 (d) $52,46

(e) Cada kWh adicional utilizado agrega $0.0889 a la factura.

129 °C = $\frac{5}{9}$(°F - 32); aproximadamente 21,1°C 131. (a) y = - $\frac{3}{}$x + 45 (b) intercepción x: 435; 29 la rampa llega al piso a 435 pulgadas (36,25 pies) de la base de la plataforma. (c) La rampa no cumple con los requisitos de diseño. Tiene un recorrido de 36.25 pies. (d) La única pendiente posible para que la rampa cumpla con el requisito es que caiga 1 pulgada por cada 8 pulgadas. correr.

133. (a) A(x) = $\frac{2}{5}$x - 30 000 (b) $ 250 000

(c)Cada caja adicional vendida requiere $0,40 adicionales en publicidad

136. - 2, - 3 $\frac{2}{}$, $\frac{1}{2}$ 137. a a +3b , $\frac{C}{}$ 3 b 139. b, c, e, g 141. c 147. No; No

149. Son la misma línea. 151. Sí, si la intersección con el eje y es 0.

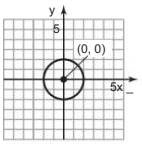
1.4 Evalúe su comprensión (página 75)

3. F 4. radio 5. T 6. F 7. d 8. a 9. Centro (2, 1); radio = 2; (x - 2)2 + (y - 1)2 = 4

12. Centrar un $\frac{3}{2}$, 2b; radio = $\frac{5}{}$; hacha - 2 b ^{2} + (y - 2)2 = 4 $\frac{9}{}$

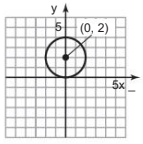
14. x2 + y2 = 4;

x2 + y2 - 4 = 0



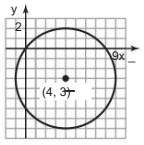
15. x2 + (y - 2)2 = 4;

x2 + y2 - 4y = 0



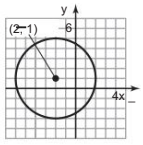
18. (x - 4)2 + (y + 3)2 = 25;

x2 + y2 - 8x + 6y = 0



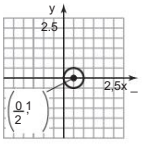
20. (x + 2)2 + (y - 1)2 = 16;

x2 + y2 + 4x - 2y - 11 = 0



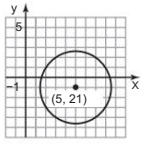
22. hacha - $\frac{1}{}$ 2 b + y2 = ; $\frac{1}{4}$

x2 + y2 - x = 0



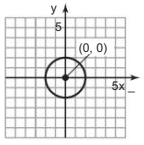
24. (x - 5)2 + (y + 1)2 = 13;

x2 + y2 - 10x + 2y + 13 = 0



26. (a) (h, k) = (0, 0); r = 2

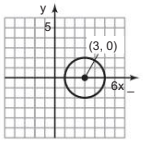
(b)



(c) ({2, 0); (0, {2)

27. (a) (h, k) = (3, 0); r = 2

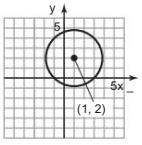
(b)



(c) (1, 0); (5, 0)

30. (a) (h, k) = (1, 2); r = 3

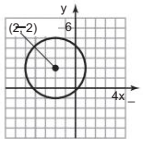
(b)



(c) (1{ 15, 0); (0, 2 {212)

31. (a) (h, k) = (- 2, 2); r = 3

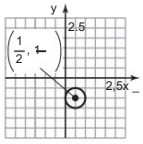
(b)



(c) 1 - 2 { 15, 02; 10, 2 {152

34. (a) (h, k) = a 1 $\frac{1}{}$ 2 ' - 1b; r = $\frac{1}{2}$

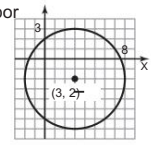
(b)



(c) (0,-1)

35. (a) (h, k) = (3, - 2); r = 5

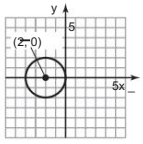
(por



(c) (3 {121, 0); (0, - 6), (0, 2)

38. (a) (h, k) = (- 2, 0); r = 2

(b)



(c) (0, 0), (-4, 0)

40. x2 + y2 = 13 42. (x + 1)2 + (y - 3)2 = 5 44. (x - 2)2 + (y + 4)2 = 64

46. c 48. b 49. 7x + 5y = 18 51. y = 2 53. 50 unidades2 56. x2 + (y - 140)2 = 16900

58. x2 + (y - 49,5)2 = 3660,25 60. (x - 2)2 + (y - 3)2 = 9 62. (x + 1)2 + (y - 3)2 = 1

63. (a) x2 + (mx + b) ^{2} = r ^{2}

(1 + m2)x2 + 2mbx + b2 - r La ^{2} = 0 ecuación tiene una solución si y sólo si el discriminante = 0.

(2mb) ^{2} - 4(1 + m2)(b2 - r - ^{2}) = 0

4b2 + 4r ^{2} + 4m2 r ^{2} = 0

r ^{2}(1 + m2) = b2

(b) x = $\frac{- 2mb}{2(1 + m2)}$ = $\frac{- 2mb}{2b2 /r^2}$ = - $\frac{2}{\text{habitación}}$ b

y = ma - $\frac{2}{\text{habitación}}$ segundo segundo + segundo = - $\frac{r_{2m2}}{b}$ + segundo = $\frac{-r_2\ m2 + b2}{b}$ = $\frac{r^2}{b}$

(c) La pendiente de la recta tangente = m.

La pendiente de la recta que une el centro con el punto de tangencia = $\frac{r^2/b}{-r_2}$ = - $\frac{1}{\text{metro.}}$ megabyte

65. 12x + 4y = 912

Machine Translated by Google

68. El centro del círculo es un $x1 + x2 \over 2$, $y1 + y2 \over 2$ b y el radio es $\frac{1}{2}\sqrt{3(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2}$. Entonces la ecuación de la

el círculo es un hacha - $x1 + x2 \over 2 \text{ segundo}$ ^{2} + sí - $y1 + y2 \over 2 \text{ segundo}$ ^{2} = $\frac{1}{4J}(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2$ 2R . Expandiendo, da

$$x2 - x(x1 + x2) + \frac{(x1 + x2)^2}{4} + y2 - y(y1 + y2) + \frac{(y1 + y2)^2}{4} = \frac{1}{4\ Jx1\ 2} - 2x1x2 + x2^2 + y1^2 - 2y1y2 + y2_{2R\ _}$$

$$4x2 - 4x1x - 4x2x + x1^2 + 4y2 - 4y1y - 4y2y + y1^2 + 2y1y2 + y2^2 = x1^{2\ 2} + 2x1x2 + x2^2 + y1^2 - 2y1y2 + y2^2$$

$$4x2 - 4x1x - 4x2x + 4x1x2 + 4y2 - 4y1y - 4y2y + 4y1y2 = 0$$

$$x2 - x1x - x2x + x1x2 + y2 - y1y - y2y + y1y2 = 0$$

$$x(x - x1) - x2(x - x1) + y(y - y1) - y2(y - y1) = 0$$

$$(x - x1)(x - x2) + (y - y1)(y - y2) = 0$$

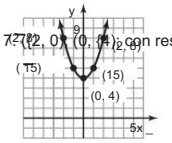
69. b, c, e, g

Ejercicios de repaso (página 79)

1. (a) 215 (b) (2, 1) (c) $\frac{1}{}$ (d) Por cada ejecución de 2, hay un aumento de 1. 2. (a) 5 (b) a - $\frac{1}{2}$, 1b (c) - $\frac{4}{3}$ (d) Por cada corrida de 3, hay un aumento de -4.

2 3. (a) 12 (b) (4, 2) (c) indefinido (d) sin cambios en x

4.



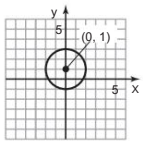
5. (- 4, 0), (0, 2), (0, 0), (0, - 2), (2, 0) 6. (0, 0); simétrico con respecto al eje y

7. (2, 0), (0, 4), (2, 6) con respecto al eje x, el eje y y el origen 8. (0, 1); simétrico con respecto al eje y

9. (0, 0), (2, 0) y (- 2, 0); simétrico con respecto al origen 10. (0, 0), (- 1, 0), (0, - 2); sin simetría

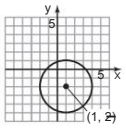
11. (x + 3)2 + (y - 4)2 = 25 12. (x + 1)2 + (y + 2)2 = 1

13. Centro (0, 1); radio = 2



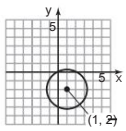
Intercepciones: 1 - $\sqrt{3}$, 0, 1 + $\sqrt{3}$, 0, (0, - 1), (0, 3)

14. Centro (1, - 2); radio = 3



Intercepciones: 1 - $\sqrt{15}$, 0, 1 + $\sqrt{15}$, 0, (0, - 2 - $\sqrt{12}$), (0, - 2 + $\sqrt{12}$)

15. Centro (1, - 2); radio = $\sqrt{15}$

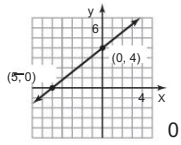


Intersecciones: (0, 0), (2, 0), (0, - 4)

16. 2x + y = 5 o y = - 2x + 5 17. x = 1; sin forma pendiente-intersección 18. x + 5y = - 10 o y = - $\frac{1}{5}$x - 2 19. y - 2x + 7 = 0 o y = 2x - 7

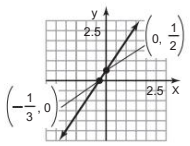
20. 2x - 3y = - 19 o y = $\frac{2}{3}$x + $\frac{19}{3}$ 21. x + y - 8 = 0 o y = - x + 8

22. Pendiente = $\frac{4}{5}$; y@intercepción = 4

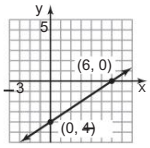


0

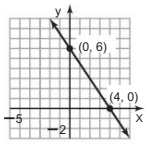
23. Pendiente = $\frac{3}{2}$; y@intercepción = 2 ^{1}



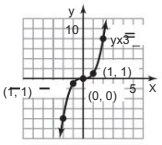
24. Intercepciones: (6, 0), (0, - 4)



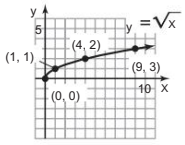
25. Intercepciones: (4, 0), (0, 6)



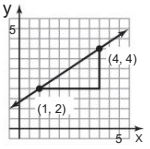
26.



27.



28. y



29. d(A, B) = $\sqrt{2(1 - 3)2 + (1 - 4)2}$ = $\sqrt{13}$

d(B, C) = $\sqrt{2(- 2 - 1)2 + (3 - 1)2}$ = $\sqrt{13}$

30. (a) d(A, B) = $\sqrt{}$215; d(B, C) = $\sqrt{}$1145; d(A, C) = $\sqrt{}$515; [d(A, B)]2 + [d(A, C)]2 = ($\sqrt{}$215)2 + ($\sqrt{}$515)2 = 20 + 125 = 145 = [d(B, C)]2

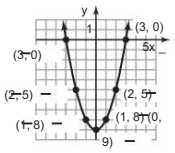
(b) La pendiente de A a B es - 2; la pendiente de A a C es $\frac{1}{2}$. Desde - 2 # $\frac{1}{2}$ = - 1, las rectas son perpendiculares.

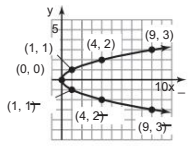
31. Centro (1, - 2); Radio = $\sqrt{}$12; (x - 1)2 + (y + 2)2 = 32 32. La pendiente de A a B es - 1; la pendiente de A a C es -1.

Machine Translated by Google

Prueba de capítulo (página 80)

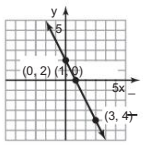
1. d = 2113 2. (2, 1) 3. (a) m = - $\frac{2}{3}$ (b) Por cada cambio de 3 unidades en x, y cambiará en - 2 unidades.

4. 

5. 

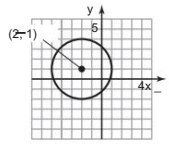
6. Intercepciones: (- 3, 0), (3, 0), (0, 9); simétrico con respecto al eje y

7. y = - 2x + 2



8. x2 + y2 - 8x + 6y = 0

9. Centro: (- 2, 1); radio: 3



10. Recta paralela: y = - x - 3 $\frac{2}{}$ $\frac{1}{}$; recta perpendicular: y = 3 $\frac{3}{2}$x + 3

CAPÍTULO 2 Funciones y sus gráficas

2.1 Evalúe su comprensión (página 95)

7. independiente; dependiente 8. a 9. c 10. F 11. F 12. verbalmente; numéricamente; gráficamente; algebraicamente 13. F 14. F

15. cociente de diferencias 16. explícitamente

17. (a) Dominio: 50, 22, 40, 70, 1006 en °C

Rango: 51,031, 1,121, 1,229, 1,305, 1,4116 en kg/m3

(b)

Temperatura, 8°C	Densidad, kg/m3
0	1.411
22	1.305
40	1.229
70	1.121
100	1.031

(c) 5 10, 1,4112, 122, 1,3052, 140, 1,2292, 170, 1,1212, 1100, 1,0312 6

19. Dominio: 5Elvis, Colleen, Kaleigh, Marissa6; Rango: 58 de enero, 15 de marzo, 176 de septiembre; Función

22. Dominio: 520, 30, 406; Rango: 5200, 300, 350, 4256; No es una función 23. Dominio: 5 - 3, 2, 46; Rango: 56, 9, 106; No es una función

26. Dominio: 51, 2, 3, 46; Rango: 536; Función 28. Dominio: 5 - 4, 0, 36; Rango: 51, 3, 5, 66; No es una función 30. Dominio: 5 - 1, 0, 2, 46; Rango: 5 - 1, 3, 86; Función

32. Función 34. Función 36. No es una función 37. No es una función 40. Función 42. No es una función

43. (a) - 4 (b) 1 (c) - 3 (d) 3x2 - 2x - 4 (e) - 3x2 - 2x + 4 (f) 3x2 + 8x + 1 (g) 12x2 + 4x - 4 (h) 3x2 + 6xh + 3h2 + 2x + 2h - 4

46. (a) 0 (b) 2 $\frac{1}{}$ (c) -2 $\frac{1}{}$ (d) - $\frac{x}{x2 + 1}$ (e) - $\frac{x}{x2 + 1}$ (f) $\frac{x + 1}{x2 + 2x + 2}$ (g) $\frac{2x}{4x2 + 1\ 1}$ (h) $\frac{x + h}{x2 + 2xh + h2 + 1}$ 48. (a) 4 (b) 5 (c) 5 (d) 0 x 0 + 4

(e) - 0 x 0 - 4 (f) 0 x + 1 0 + 4 (g) 2 0 x 0 + 4 (h) 0 x + h 0 + 4 50. (a) - $\frac{3}{5}$ (segundo) $\frac{3}{-2}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{2x - 1}{3x + 5}$ (mi) $\frac{- 2x - 1}{3x - 5}$ (f) $\frac{2x + 3}{3x - 2}$

(gramo) $\frac{4x + 1}{6x - 5}$ (h) $\frac{2x + 2h + 1}{3x + 3h - 5}$ 52. Todos los números reales 54. Todos los números reales 55. 5x 0 x ≠ - 4, x ≠ 46 58. 5x 0 x ≠ 06 60. 5x x Ú 46

62. 5x x ≠ - 2, - 16 64. 5x 0 x 7 46 66. 5t 0 t Ú 4, t ≠ 76 68. Todos los números reales 70. 5t t ≠ - 2, t ≠ 76

71. (a) 1f + g2 1x2 = 5x + 1; Todos los números reales (b) 1f - g2 1x2 = x + 7; Todos los números reales (c) 1f # g2 1x2 = 6x2 - x - 12; todos los números reales

(d) una f segundo 1x2 $\frac{3x + 4}{2x}$ e x ` x ≠ $\frac{3}{2}$ f (e) 16 (f) 11 (g) 10 (h) - 7 74. (a) 1f + g2 1x2 = 2x2 + x - 1; todos los números reales

(b) 1f - g2 1x2 = - 2x2 + x - 1; Todos los números reales (c) 1f # g2 1x2 = 2x3 - 2x2 ; Todos los números reales (d) a f segundo 1x2 = $\frac{x - 1}{2x2}$; 5x0x ≠ 06

(e) 20 (f) - 29 (g) 8 (h) 0 76. (a) 1f + g2 1x2 = 1x + 3x - 5; 5x 0 x Ú 06 (b) 1f - g2 1x2 = 1x - 3x + 5; 5x 0 x Ú 06

(c) 1f # g2 1x2 = 3x1x - 51x; 5x 0 x Ú 06 (d) a f segundo 1x2 = $\frac{1x}{3x - 5}$; e x ` x Ú 0, x ≠ $\frac{5}{3}$ f (e) 23 + 4 (f) - 5 (g) 22 (h) - $\frac{1}{2}$

78. (a) 1f + g2 1x2 = 1 + $\frac{2}{x}$; 5x 0 x ≠ 06 (b) 1f - g2 1x2 = 1; 5x 0 x ≠ 06 (c) 1f # g2 1x2 = $\frac{1}{x}$ + $\frac{1}{x2}$; 5x0x ≠ 06

(d) una f segundo 1x2 = x + 1; 5x 0 x ≠ 06 (e) $\frac{5}{3}$ (f) 1 (g) $\frac{3}{4}$ (h) 2 80. (a) 1f + g2 1x2 = $\frac{6x + 3}{3x - 2}$; e x ` x ≠ $\frac{2}{3f}$

(b) 1f - g2 1x2 = $\frac{- 2x + 3}{3x - 2\ 5}$; e x ` x ≠ $\frac{2}{3f}$ (c) 1f # g2 1x2 = $\frac{8x2 + 12x}{13x - 22^{2}}$; e x ` x ≠ $\frac{2}{3}$ f (d) a f segundo 1x2 = $\frac{2x + 3}{}$; e x ` x ≠ 0, x ≠ $\frac{2}{3f}$

(e) 3 (f) - 2 $\frac{1}{}$ (gramo) $\frac{7}{2}$ (h) $\frac{}{4}$ 82. g1x2 = 5 - $\frac{7}{2}$x 83. 4 86. 2x + h 88. 2x + h - 1 90. - 14x + 4h - 32 14x $\frac{4x20}{- 32}$

92. $\frac{6}{(x + 3)(x + h + 3)}$ 94. $\frac{1}{2x + h - 2 + 2x - 2}$ 96. - $\frac{2x + h}{x2\ 1x + h2^{2}}$ 98. - $\frac{2x + h}{24 - (x + h)^{2} + 24 - x2}$ 99. 5 - 4, 76 101. A = - 5

103. A = 1 105. P1L2 = 6L 108. G1x2 = 17x 110. (a) 22,719 m (b) Aproximadamente 1,86 s (c) Aproximadamente 2,52 s

Machine Translated by Google

111. (a) C(550) = $252,12 (b) C(500) = $225,33 (c) C(650) = $248,72 (d) C(450) = $260 113. R1x2 = $\frac{L1x2}{P1x2}$ 115. H1x2 = P1x2 # I1x2

117. (a) P1x2 = - 0.06x3 + 1.3x2 + 235x - 400 (b) P1122 = $2503.52 (c) Cuando se venden 1200 celulares, la ganancia es $2503.52

119. (a) D(v) = 0.05v2 + 2.6v - 15 (b) 321 pies (c) El automóvil necesitará 321 pies para detenerse una vez que se observe el impedimento.

122. $\frac{1}{(x+h)^{2/3} + x1/3(x+h)^{1/3} + x2/3}$ 123. b x ` - 2 6 x 6 $\frac{8}{3}$ r 125. H1x2 = $\frac{3x - x3}{\text{edad}}$ 127. Intercepciones: (- 16, 0), (- 8, 0); simetría del eje x

128. (4, 32) 129. 7.5 libras 130. 5 - 3, 2, 36 131. a = o a = $\frac{d - bx}{1 - c}$ $\frac{bx - d}{c - 1}$ 132. 2,5 kg # m2 133. - 3 $\frac{10}{}$ 134. - $\frac{12x2 + 40x + 21}{(4x2 - 7)2}$ 135. 7

2.2 Evalúe su comprensión (página 103)

3. vertical 4, 5; - 3 5. a = - 2 6. F 7. F 8. T 9. c 10. a

11. (a) f102 = 3; f1 - 62 = - 3 (b) f162 = 0; f1112 = 1 (c) Positivo (d) Negativo (e) - 3, 6 y 10 (f) - 3 6 x 6 6; 10 6 × … 11
(g) 5x 0 - 6 … x … 116 (h) 5y 0 - 3 … y … 46 (i) - 3, 6, 10 (j) 3 (k) 3 veces (l) Una vez (m) 0, 4 (n) - 5, 8

14. No es una función (a) Dominio: 5x x … - 1 o x Ú 16; Rango: todos los números reales (b) (- 1, 0), (1, 0) (c) simetría del eje x, del eje y y del origen

15. Función (a) Dominio: 5x 0 - p… x … p6; Rango: 5y 0 - 1 … y … 16 (b) a - $\frac{\text{pag}}{2}$, 0b, ap$\overline{2}$, 0b, 10, 12 (c) eje y

17. No es una función (a) Dominio: 5x x … 06; Rango: todos los números reales (b) (0, 0) (c) eje x

20. Función (a) Dominio: 5x 0 0 6 x 6 36; Rango: 5y 0 y 6 26 (b) (1, 0) (c) Ninguno

22. Función (a) Dominio: todos los números reales; Rango: 5y 0 y … 26 (b) 1 - 3, 02, (3, 0), (0, 2) (c) eje y

24. Función (a) Dominio: todos los números reales; Rango: 5y 0 y Ú - 36 (b) (1, 0), (3, 0), (0, 9) (c) Ninguno

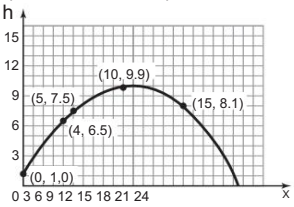
26. (a) Sí (b) f1 - 22 = 8; 1 - 2, 82 (c) 0 o - $\frac{1}{3}$; 10, - 22, un - $\frac{1}{3}$, - 2b (d) Todos los números reales (e) - 1, $\frac{2}{3}$ (f) - 2

28. (a) No (b) f142 = - 3; 14, - 32 (c) 14; (14, 2) (d) 5x 0 x ≠ 66 (e) - 2 (f) - 3 $\frac{1}{}$

30. (a) Sí (b) f132 = $\frac{486}{5}$; a3, 486b (c) - $\frac{23}{3}$ o $\frac{23}{3}$; ¢ - $\frac{23}{3}$, 1≤, ¢ $\frac{23}{3}$, 1≤ (d) Todos los números reales (e) 0 (f) 0 $\frac{3}{}$

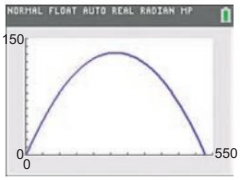
31. (a) 5 (b) - 1 (c) 1 (d) - 1 (e) 0 (f) - 4

33. (a) Aproximadamente 7,5 pies de alto
(b) Aproximadamente 9,9 pies de altura
(c) h



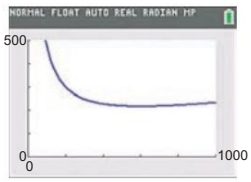
(d) La pelota no golpeará el travesaño; h1202 = 2,3 pies. Si v = 30 pies/seg, h1202 = 8

35. (a) Aproximadamente 81,07 pies (b) Aproximadamente 129,59 pies (c) Aproximadamente 26,63 pies; La pelota mide aproximadamente 26,63 pies de altura después de haber recorrido 500 pies.
(d) Aproximadamente 528,13 pies
(mi)

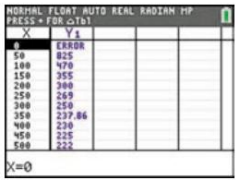


(f) Aproximadamente 115,07 pies y 413,05 pies
g) 275 pies; La altura máxima que se muestra en la tabla es 131,8 pies (h) 264 pies.

37. a) 223 dólares; $220 (b) 5x x 7 06
(C)



(d)



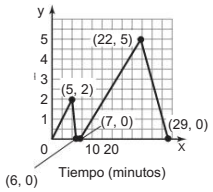
(e) 600 millas por hora

39. a) 50 dólares; Cuesta $50 si usas 0 gigabytes. b) 50 dólares; Él Cuesta $50 si usas 5 gigabytes. c) 150 dólares; Cuesta $150 si usas 15 gigabytes. (d) 5g 0… g … 306. Se utilizan como máximo 30 gigabytes en un mes.

41. 420 43. Las intersecciones con el eje x pueden ser desde 0 hasta una infinidad. Hay como máximo una intersección con el eje y.

45. (a) III (b) IV (c) I (d) V (e) II

47.



49. (a) transcurrieron 2 horas durante las cuales Kevin estuvo entre 0 y 3 millas de su casa (b) transcurrieron 0,5 horas durante las cuales Kevin estuvo a 3 millas de casa (c) transcurrieron 0.3 horas durante las cuales Kevin estuvo entre 0 y 3 millas de casa (d) transcurrieron 0.2 horas durante las cuales Kevin estuvo a 0 millas de casa (e) transcurrieron 0.9 horas durante las cuales Kevin estuvo entre 0 y 2.8 millas desde casa (f) transcurrieron 0,3 horas durante las cuales Kevin estuvo a 2,8 millas de casa (g) transcurrieron 1,1 horas durante las cuales Kevin estuvo entre 0 y 2,8 millas desde casa (h) 3 millas (i) Dos veces 51. No hay puntos cuya x- su coordenada es 5 o cuya coordenada y es 0 puede estar en el gráfico. 54. - x2 + $\frac{2}{3}$5x - 9 55. 2210 56. x + 8 57. Todos los números reales o (- q, q)

58. 36 59. $\frac{1}{2x + 26}$ 60. 55.8 min 61. 5x - 4 6 x … 16 o (- 4, 1] 62. 5x2 - 15x + 12 63. [- 3, 10]

2.3 Evalúe su comprensión (página 117)

6. aumentando 7. incluso; impar 8. T 9. T 10. F 11. c 12. d 13. Sí 15. No 17. 3 - 8, - 24; 30, 24; 35, 74 19. Sí; 10 21. - 2, 2; 6, 10

24. f(- 8) = - 4 25. (a) 1 - 2, 02, (0, 3), (2, 0) (b) Dominio: 5x 0 - 4 … x … 46 o [- 4, 4]; Rango: 5y 0 0 … y … 36 o [0, 3] (c) Creciente en 3 - 2, 04 y [2, 4]; Decreciente en 3 - 4, - 24 y [0, 2] (d) Par 28. (a) (0, 1) (b) Dominio: todos los números reales; Rango: 5y 0 y 7 06 o 10, q 2 (c) Creciente en 1 - q, q 2 (d) Ninguna 30. (a) 1 - p, 02, 10, 02, 1p, 02 (b) Dominio: 5x 0 - p … x … p6 o [- p , pag]; Rango: 5y 0 - 1 … y … 16 o [- 1, 1] (c) Creciente en c - $\frac{\text{pag}}{2}$, $\frac{\text{pag}}{2}$ días; Decreciente en c - p, - $\frac{\text{pag}}{2}$d y cp $\overline{2}$, pd (d) Impar 32. (a) a0, 1 $\overline{2}$b, un$\overline{3}$, 0b, un$\overline{2}$, 0b

Machine Translated by Google

(b) Dominio: 5x 0 - 3 … x … 36 o [- 3, 3]; Rango: 5y 0 - 1 … y … 26 o [- 1, 2] (c) Incrementando en [2, 3]; Disminuyendo en 3 - 1, 14;

Constante en 3 - 3, - 14 y [1, 2] (d) Ninguna 34. (a) 0; 3 (b) - 2, 2; 0, 0 36. (a) $\frac{pag}{}$; 1 (b) - 2 $\frac{pag}{2}$; - 1 37. Impar 40. Par 42. Impar 44. Ninguno

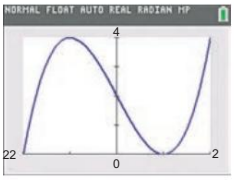
46. Par 48. Impar 49. Máximo absoluto: f112 = 4; mínimo absoluto: f152 = 1; máximo local: f132 = 3; mínimo local: f122 = 2

52. Máximo absoluto: f132 = 4; mínimo absoluto: f112 = 1; máximo local: f132 = 4; mínimo local: f112 = 1

54. Máximo absoluto: ninguno; mínimo absoluto: f102 = 0; máximo local: f122 = 3; mínimos locales: f102 = 0 y f132 = 2

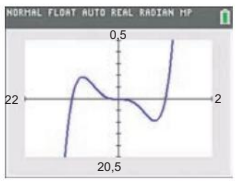
56. Máximo absoluto: ninguno; mínimo absoluto: ninguno; máximo local: ninguno; mínimo local: ninguno

57.



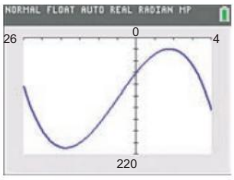
Creciente: 3 - 2, - 14, 31, 24
Decreciente: 3 - 1, 14
Máximo local: f1 - 12 = 4
Mínimo local: f112 = 0

60.



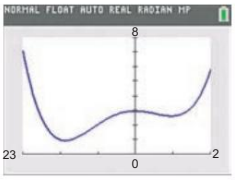
Creciente: 3 - 2, - 0,774, 30,77, 24
Decreciente: 3 - 0,77, 0,774
Máximo local: f1 - 0,772 = 0,19
Mínimo local: f10,772 = - 0,19

62.



Creciente: 3 - 3,77, 1,774
Decreciente: 3 - 6, - 3,774, 31,77, 44
Máximo local: f11,772 = - 1,91
Mínimo local: f1 - 3,772 = - 18,89

64.

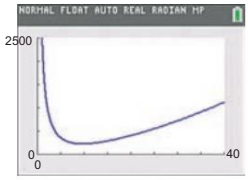


Creciente: 3 - 1,87, 04, 30,97, 24
Decreciente: 3 - 3, - 1,874, 30, 0,974
Máximo local: f102 = 3
Mínimo local: f1 - 1,872 = 0,95, f10,972 = 2,65

65. (a) - 4 (b) - 8 (c) - 10 68. (a) 15 (b) - 3 (c) 9 70. (a) 5 (b) y = 5x - 2 71. (a) - 1 (b) y = - x 74. (a) 4 (b) y = 4x - 8

76. (a) Impar (b) El valor máximo local es 54 en x = - 3. 77. (a) Par (b) El valor máximo local es 25 en x = - 2. (c) 50,4 unidades cuadradas

79. (un)



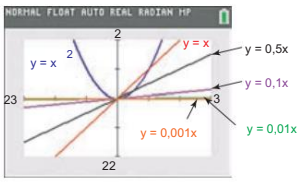
b) 10 cortadoras de césped con operador a bordo

(c) $239/cortacésped

81. (a) En promedio, la población aumenta a una tasa de 0,036 g/h de 0 a 2,5 h. (b) En promedio, de 4,5 a 6 h, la población aumenta a un ritmo de 0,1 g/h. (c) La tasa promedio de cambio aumenta con el tiempo.

83. (a) 1 (b) 0,5 (c) 0,1 (d) 0,01 (mi) 0,001

(F)



(g) Se están acercando a la recta tangente en (0, 0).

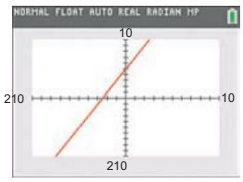
(h) Se están acercando a 0.

86. (a) 2

(b) 2; 2; 2; 2

(c) y = 2x + 5

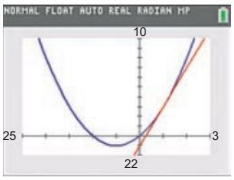
(d)



88. (a) 2x + h + 2 (b) 4,5; 4.1; 4,01; 4

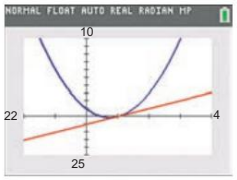
(c) y = 4,01x - 1,01

(d)



90. (a) 4x + 2h - 3 (b) 2; 1.2; 1,02; 1 (c) y = 1,02x - 1,02

(d)

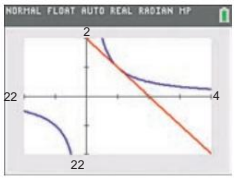


92. (a) - $\frac{1}{1x + h2x}$

(b) - ; - 3 $\frac{2}{}$ $\frac{10}{11}$; - $\frac{100}{101}$; - 1

(c) y = - x + $\frac{100}{101}$ $\frac{201}{101}$

(d)



93. $\frac{- 2 + 219}{3}$

97. Como mucho uno

99. Sí; la función f1x2 = 0 es par e impar.

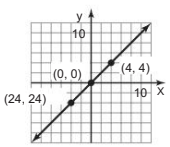
101. No necesariamente. Simplemente significa f152 7 f122. 103. 6215 104. 16a2 - 8ab + b2 105. C(x) = 0,80x + 40 106. 8,25 días

107. (x - 3)2 + (y + 2)2 = $\frac{3}{2}$ 108. 6x(x2 - 2)2 (3x5 + 1) (8x5 - 10x3 + 1) 109. a - $\frac{7}{10}$, - $\frac{3}{2}$ b $\frac{1}{}$ 110. b - 5, 3 r 111. 5 - 2, 16 112. D = $\frac{x(y2 - x)}{y(y - x2)}$ = $\frac{xy2 - x2}{y2 - x2 y}$

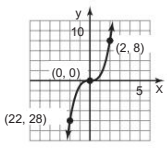
2.4 Evalúe su comprensión (página 130)

4. 1 - q, 04 5. definido por partes 6. T 7. F 8. F 9. b 10. a 11. C 13. E 15. B 17. F

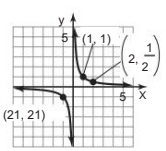
20.



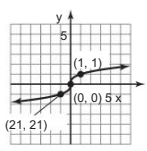
22.



24.



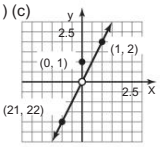
26.



28. (a) - 9 (b) 4 (c) 7 30. (a) 0 (b) 4 (c) 6 (d) 26

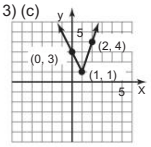
Machine Translated by Google

31. (a) Todos los números reales (b) (0, 1) (c)



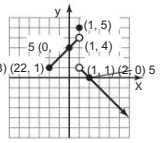
(d) 5y 0 y ≠ 06; 1 - q, 02 h 10, q 2

34. (a) Todos los números reales (b) (0, 3) (c)



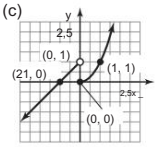
(d) 5y y Ú 16; 31,q)

36. (a) 5x x Ú - 26; 3 - 2, q) (b) (0, 3), (2, 0) (c)



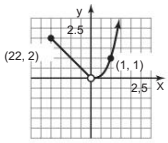
(d) 5y y 6 4, y = 56; 1-q, 42 h 556

38. (a) Todos los números reales (b) 1 - 1, 02, 10, 02 (c)



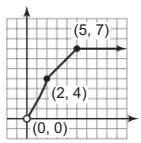
(d) Todos los números reales

40. (a) 5x x Ú - 2, x ≠ 06; 3 - 2, 0)h 10, q 2 (b) Sin intersecciones (c)



(d) 5 años y 7 06; 10, q 2

42. (a) Dominio (0, q) (b) Sin intersecciones (c)

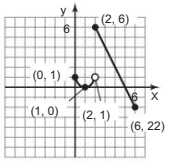


(d) Rango: (0, 7]

44. f1x2 = e - x si -1 … x … 0 46.
x si 0 6 x … 2
si x ... 0
f1x2 = e - x - x + 2 si 0 6 x … 2

48. (a) 3 (b) 5 (c) - 8

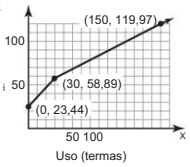
49. (un)



(b) [0, 6] (c) Máximo absoluto: f(2) = 6; mínimo absoluto: f(6) = - 2 51. (a) $19,99 (b) $37,49 (c) $20,24

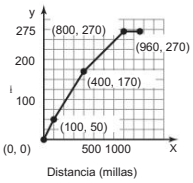
54. (a) $47,07 (b) $119,97 (c) C(x) = e 1,18 1x + 23,44 si 0... x ... 30
0,0897x + 24,0225 si x 7 30

(d) C



55. f1x2 = 0,10x si 0 6x … 9525
952,50 + 0,12 (x - 9525) si 9525 6 x … 38.700 4453,50 + 0,22 (x - 38.700) si 38.700 6 x … 82.500 14.089,50 + 0,24 (x - 82.500) si 82.500 6 x … 1 57.500 32.089,50 + 0,32 (x - 157.500) si 157.500 6 x … 200.000 45.689,50 + 0,35 (x - 200.000) si 200.000 6 x … 500.000 150.689,50 + 0,37 (x - 500.000) si x 7 500.000

57. (un)



(b) C1x2 = 10 + 0,4x (c) C1x2 = 70 + 0,25x

59. (a) C(s) = 8250 si 660 … s … 679
5250 si 680 … s … 699
3750 si 700 … s … 719
2250 si 720 … s … 739
f 1500 si s Ú 740

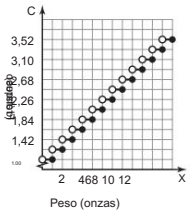
(b) $2250 (c) $8250

61. (a) 10°C (b) 4°C (c) - 3°C (d) - 4°C

(e) La sensación térmica es igual a la temperatura del aire. (f) A una velocidad del viento superior a 20 m/s, el factor de sensación térmica depende únicamente de la temperatura del aire.

65. f1x2 + g(x) = • - 2x + 24 si x … 0
3x - 4 si 0 6 x 6 2
x Ú 2

63. C(x) =
1.00 si 0 6 x … 1
1.21 si 1 6 x … 2
1,42 si 2 6 x … 3
1,63 si 3 6 x … 4
,84 si 4 6 x … 5
2.05 si 5 6 x … 6
.26 si 6 6 x … 7
.47 si 7 6x … 8
,68 si 8 6 x … 9
2,89 si 9 6 x … 10
3.10 si 10 6 x … 11
3.31 si 11 6 x … 12
3,52 si 12 6 x … 13



67. Cada gráfica es la de y = x2 , pero desplazado horizontalmente. Si y = 1x - k2 2, k 7 0, el desplazamiento es k unidades hacia la derecha; si y = 1x + k2 2, k 7 0, el desplazamiento se realiza a la izquierda k unidades.

69. La gráfica de y = - f1x2 es la reflexión respecto del eje x de la gráfica de y = f1x2. 71. Sí. La gráfica de y = 1x - 12 3 + 2 es la gráfica de y = x3 se desplazó 1 unidad hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba. 73. Todos tienen la misma forma general. Los tres pasan por los puntos 1 - 1, - 12, (0, 0) y (1, 1). x6 A medida que aumenta el exponente, aumenta la inclinación de la curva (excepto cerca de x = 0). 76. $\sqrt{y10}$ 77. (h, k) = (0, 3); r = 5 78. 5 - 86

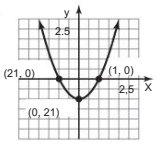
79. CD: 22.000 dólares; Fondo mutuo: $38.000 80. Cociente: x2 + x - 2; Resto: - 2 81. 84. $\frac{3}{2}$ + 2i 82. - 2x7 83. $5t\sqrt{221 + 25t}$ 3
5x x Ú - 76 o 3 - 7, q 2 85. (3x - 2y)(x2 y + 6)

Machine Translated by Google

2.5 Evalúe su comprensión (página 143)

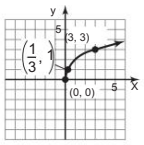
1.horizontal ; derecha 2. y 3. F 4. T 5. d 6. b 8. B 10. H 12. I 14. L 16. F 18. G 20. y = 1x - 42 = 8x3 29. y = - 12- x + 22 32. y = $\frac{3}{3}$ 22. y = x3 + 4 24. y = - x3 32x + 5 + 4 34. c 36. c 26. y = 5x3 28. y = 12x2

37.



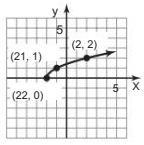
Dominio: 1 - q, q 2;
Rango: 3 - 1, q)

40.



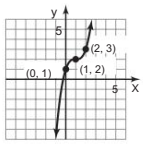
Dominio: [0, q);
Rango: [0, q)

41.



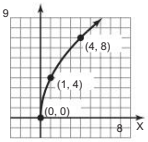
Dominio: 3 - 2, q);
Rango: 30, q)

43.



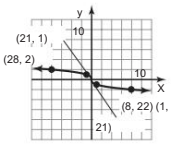
Dominio: 1 - q, q 2;
Rango: 1 - q, q 2

45. y 9



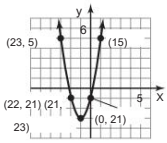
Dominio: 30, q);
Rango: 30, q)

47.



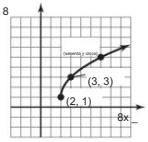
Dominio: 1 - q, q 2;
Rango: 1 - q, q 2

50.



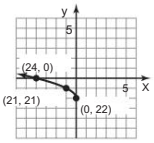
Dominio: 1 - q, q 2;
Rango: 3 - 3, q)

52. y 8



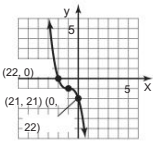
Dominio: 32, q 2;
Rango: 31, q 2

53.



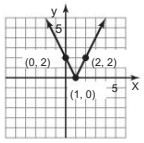
Dominio: 1 - q, 04;
Rango: 3 - 2, q 2

56.



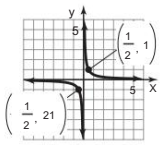
Dominio: 1 - q, q 2;
Rango: 1 - q, q 2

58.



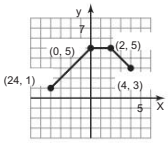
Dominio: 1 - q, q 2;
Rango: 30, q)

60.

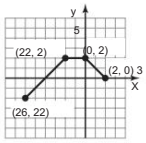


Dominio: (- q, 0) h (0, q)
Rango: (- q, 0) h (0, q)

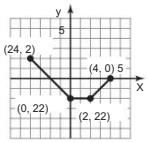
61. (a) F1x2 = f1x2 + 3



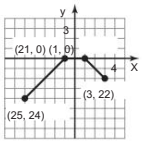
(b) G1x2 = f1x + 22



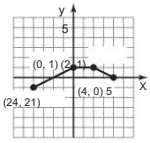
(c) P1x2 = - f1x2



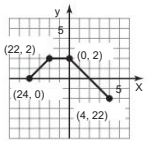
(d) H1x2 = f1x + 12 - 2



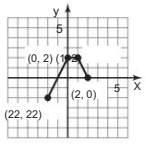
1 (e) Q1x2 = f1x2 2



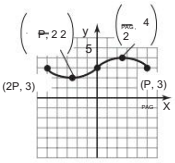
(f) g1x2 = f1 - x2



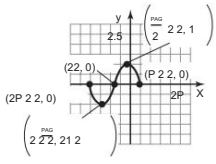
(g) h1x2 = f12x2



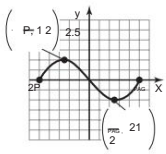
64. (a) F1x2 = f1x2 + 3



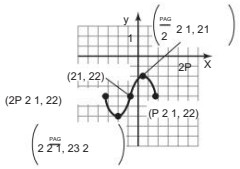
(b) G1x2 = f1x + 22



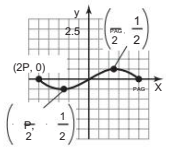
(c) P1x2 = - f1x2



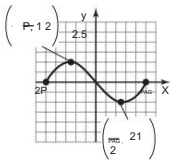
(d) H1x2 = f1x + 12 - 2



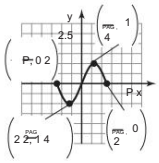
(e) Q1x2 = $\frac{1}{2}$ f1x2



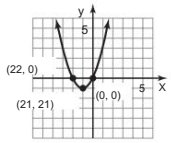
(f) g1x2 = f1 - x2



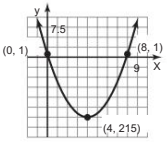
(g) h1x2 = f12x2



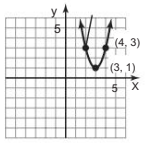
66. f1x2 = 1x + 12 ^{2} - 1



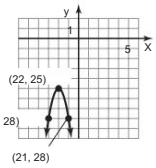
67. f1x2 = 1x - 42 ^{2} - 15



70. f1x2 = 21x - 32 (2, 3) ^{2} + 1



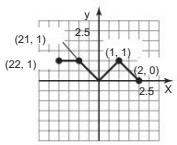
72. f1x2 = - 31x + 22 ^{2} - 5



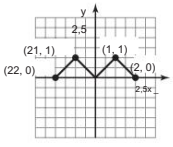
73. (a) - 7 y 1 (b) - 3 y 5 (c) - 5 y 3
(d) - 3 y 5

75. (a) [- 3, 3] (b) [4, 10]
(c) Disminuyendo en 3 - 1, 54
(d) Disminuyendo en 3 - 5, 14

77. (un)

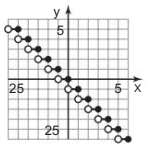


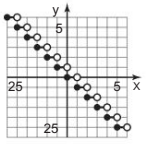
(b)

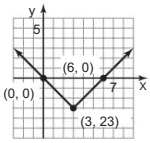


79. (a) (- 2, 2)
(b) (3, - 5)
(c) (- 1, 3)

Machine Translated by Google

81. (un) 

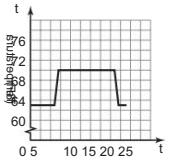
(b) 

83. (un) 

(b) 9 unidades cuadradas

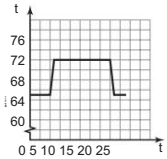
85. (a) 72°F; 65°F

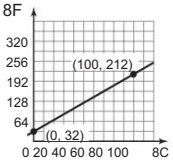
(b) La temperatura disminuye de 2° a 70°F durante el día y 63°F durante la noche.

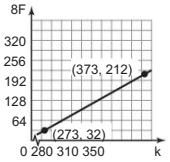


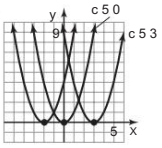
(c) La hora a la que la temperatura se ajusta entre los ajustes diurno y nocturno se adelanta 1 hora.

Comienza a calentarse a las 5:00 am en lugar de 6:00 am y comienza a enfriarse a las 8:00 pm en lugar de a las 9:00 pm.



87. 8F 

8F 

89. c 5 22 

92. [4, 8] 93. La gráfica de y = 4 f1x2 es un tramo vertical por un factor de 4. La gráfica de y = f(4x) es un tramo horizontal compresión por un factor de . 95. $4\frac{1}{3}$ $\frac{\text{decisiones}}{}$ unidades cuadradas 97. El dominio de g(x) = 2x es 30, q 2. La gráfica de g1x - k2 es la La gráfica de g se desplazó k unidades hacia la derecha, por lo que el dominio de g1x - k2 es 3k, q 2. 98. m = $\frac{3}{5}$; b = - 6 99, 3,11 mph 100, 15,75 galones

101. Intercepciones: (0, - 2), (0, 2), (- 4, 0); Simetría del eje x 102. 5x x ≠ 7, x ≠ - 26 103. 7 seg 104. 2xy223 2x2 z 105. 6x + 3h + 2

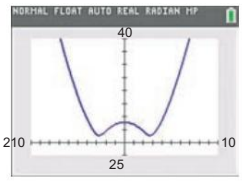
106. 1z + 62 1z2 - 6z + 362

2.6 Evalúe su comprensión (página 150)

1. (a) d1x2 = 2x4 - 15x2 + 64

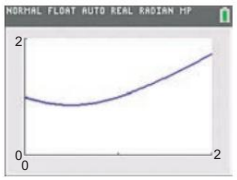
(b) d102 = 8

(c) d112 = 250 ≈ 7,07

(d) 

(e) d es más pequeño cuando x ≈ - 2,74 o x ≈ 2,74

3. (a) d1x2 = 2x2 - x + 1

(b) 

(c) d es más pequeño cuando x = 0,5.

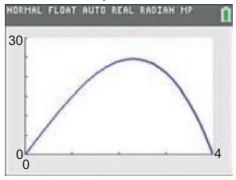
(d) $\frac{23}{2}$ ≈ 0,87

5. A1x2 = $\frac{1}{2}$ x5

7. (a) A1x2 = x116 - x2 2

(b) Dominio: 5x 0 0 6 x 6 46

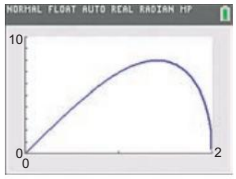
(c) El área es mayor cuando x ≈ 2,31.



(d) El área más grande es de aproximadamente 24,63 unidades cuadradas.

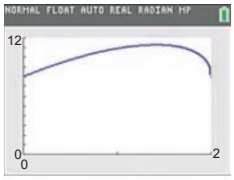
9. (a) A1x2 = 4x24 - x2

(c) A es mayor cuando x ≈ 1,41.



(b) p1x2 = 4x + 424 - x2

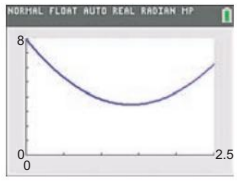
(d) p es mayor cuando x ≈ 1,41.



12. (a) A1x2 = x2 + $\frac{25 - 20x + 4x2}{\text{pag}}$

(b) Dominio: 5x 0 0 6 x 6 2,56

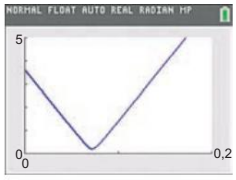
(c) A es más pequeño cuando x ≈ 1,40 m.



14. (a) C1x2 = 6x (b) A1x2 = $\frac{9x2}{\text{pag}}$

15. (a) A(x) = 18x2 (b) P1x2 = 18x 17. A1x2 = ap $\frac{}{3}$ - $\frac{23}{4x2}$

19. (a) d1t2 = 22500t 2 (b) d - 360t + 13 es más pequeño cuando t ≈ 0,07 h.



21. V1x2 = $\frac{4Hp1R - 2x2x2}{R}$

23. (a) T1x2 = $\frac{12 - x}{5}$ + $\frac{2x2 + 4}{3}$

(b) 5x 0... x ...126

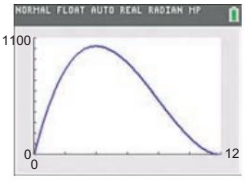
(c) 3,09 horas

(d) 3,55 horas

25. (a) V1x2 = x124 - 2x2 (b) 972 ^{2} pulg.3

(c) 160 pulgadas 3

(d) V es mayor cuando x = 4 pulg.



(e) El volumen más grande es 1024 pulg.3

27. (a) C(x) = + 1,60x + $\frac{9000}{x}$ 2910

(b) El minorista debe pedir 75 unidades por pedido por un costo anual mínimo de $3150.

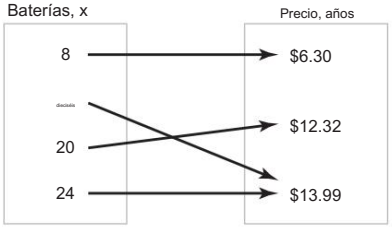
28.50, 36 29. 64 mi/h 30. m = - 4 31. 5.6 32. y = $\frac{tu - 1}{tu}$ 33. $\frac{4x + 5}{3x2/3}$ 34. 35. (- 3, 2) 36. P = $\frac{^{2}mi}{\text{v2 d4}}$ $\frac{}{6,76 \text{ toneladas}}$ 37. 97

Machine Translated by Google

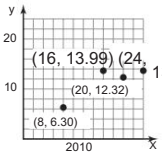
Ejercicios de repaso (página 155)

1. (a) Dominio: 58, 16, 20, 246; rango: 5 +6,30, +12,32, +13,996 (b) {18, +6,302, 116, +13,992, 120, +12,322, 124, +13,992}

(C) Baterías, x



(d)



2. Dominio: 5 - 2, 1, 36; rango: 50, 46 3. Dominio: 52, 46; rango: 5 - 1, 1, 26; no es una función 4. Dominio: [- 1, 3]; rango: 3 - 2, 24; no es una función 5. Dominio: todos los números reales; rango: 3 - 3, q 2; función 31x - 22 3x 3x (e) x2 - 4x + 3

6. (a) 2 (b) - 2 (c) - x2 - 1 (d) - $\frac{}{x2 - 1}$ 7. (f) $\frac{6x}{4x2 - 1}$

(a) 0 (b) 0 (c) 2x2 - 4 (d) - 2x2 - 4 (e) 2x2 - 4x (f) 22x2 - 1 x2 - 4 x2 - 4 8. (a) 0 (b) 0 (c) (d) - x2 x2 36 10. 5x x … 7 26 11. 5x 0 x ≠ 06 12. 5x: $\frac{1x - 22}{x ≠ - 5, x ≠ 16}$ 9. 5x 0 x ≠ - 3, x ≠ 13. [- 1, 2) (2, q) 14. 5x $\frac{x1x - 42}{2}$ (e) (f) $\frac{x2 - 1}{x2}$

0 x 7 - $\frac{10}{3\ 6}$

15. 1f + g2 1x2 = 2x + 3; Dominio: todos los números reales
1f - g2 1x2 = - 4x + 1; Dominio: todos los números reales 1f # g2 1x2 = - 3x2 + 5x + 2; Dominio: todos los números reales

a f b 1x2 = $\frac{2 - x}{3x + 1}$; Dominio: e x 2 x ≠ - 3 f

1f + g2 1x2 = ; Dominio: $\frac{1}{x2 + 2x - 1}$ 17. 5x x ≠ 0, x ≠ 16 x1x - 12 x2 + 1 1f - g2 1x2 = ; Dominio: 0, x ≠ 16 x1x - 12

1f # g2 1x2 = $\frac{5x x ≠}{x + 1}$; Dominio: 5x x ≠ 0, x ≠ 16 x1x - 12

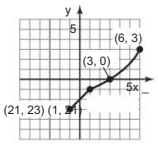
a f b 1x2 = $\frac{x1x + 12}{}$; Dominio: 5x x ≠ 0, x ≠ 16 x - 1

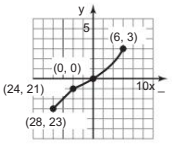
16. 1f + g2 1x2 = 4x2 + x + 1; Dominio: todos los números reales
1f # g2 1x2 = 4x3 - 8x2 + 3x - 6; Dominio: todos los números reales 4x2 +

a f b 1x2 = $\frac{3}{x - 2}$; Dominio: {xx ≠ 2}

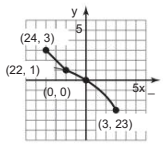
18. - 2x - h + 7

19. (a) Dominio: 5x 0 - 4… x … 36; Rango: 5y 0 - 3 … y … 36 (b) (0, 0) (c) - 1 (d) - 4 (e) 5x 0 0 6 x … 36 (g) (f)





(h)



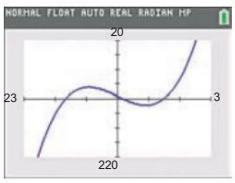
(e) Sin simetría (f) Ninguna (g) 1 - 3, 02, 10, 02, 13, 02

21. Impar 22. g es par 23. Ninguno de los dos

24. f es impar

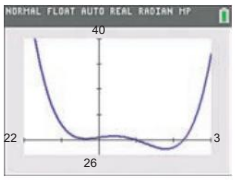
20. (a) Dominio: 5x 0 x … 46 o (- q, 4]
Rango: 5y 0 y … 36 o (- q, 3]
(b) Aumenta en (- q, - 2] y [2, 4]; Disminuye en [- 2, 2] (c) El valor máximo local es 1 y ocurre en x = - 2.
El valor mínimo local es - 1 y ocurre en x = 2.
(d) Máximo absoluto: f(4) = 3
Mínimo absoluto: ninguno

25.



Valor máximo local: 4,04 en x = - 0,91
Valor mínimo local: - 2,04 en x = 0,91
Creciente: [- 3, - 0,91], [0,91, 3]
Decreciente: [- 0,91, 0,91]

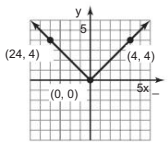
26.



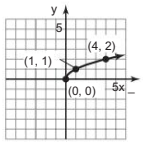
Valor máximo local: 1,53 en x = 0,41
Valores mínimos locales: 0,54 en x = - 0,34 y - 3,56 en x = 1,80
Creciente: [- 0,34, 0,41], [1,80, 3]
Decreciente: [- 2, - 0,34], [0,41, 1,80]

27. (a) 23 (b) 7 (c) 47 28. - 5 29. - 17 30. y = - 17x + 24 31. No 32. Sí

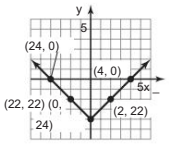
33.



34.

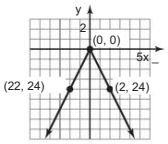


35.



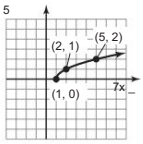
Intercepciones: 1 - 4, 02, 14, 02, 10, - 42
Dominio: todos los números reales
Rango: 5y y Ú - 46 o 3 - 4, q)

36.



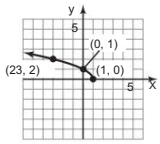
Intercepción: (0, 0)
Dominio: todos los números reales
Rango: 5y y … 06 o (- q, 04

37. y 5



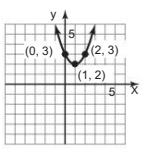
Intercepción: (1, 0)
Dominio: 5x x Ú 16 o 31, q)
Rango: 5y y Ú 06 o 30, q)

38.



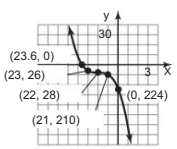
Intercepciones: (0, 1), (1, 0)
Dominio: 5x x … 16 o (- q, 14 Rango: 5y y Ú 06 o 30, q)

39.



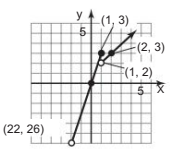
Intercepción: (0, 3)
Dominio: todos los números reales
Rango: 5y y Ú 26 o 32, q)

40.



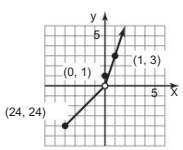
Intercepciones: 10, - 242,
(- 2 - 23 4, 0) o aproximadamente 1 - 3,6, 02
Dominio: todos los números reales
Rango: todos los números reales

41. (a) 5x x 7 - 26 o 1 - 2, q 2 (b) (0, 0)
(c)



(d) 5y y 7 - 66 o 1 - 6, q 2

42. (a) 5x x Ú - 46 o [- 4, q 2 (b) (0, 1)
(c)



(d)5y - 4 … y 6 0 o y 7 06 o 3 - 4, 0)
10, q 2

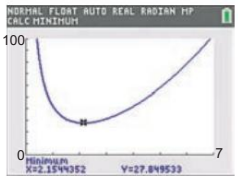
Machine Translated by Google

43. A = 11

44. (a) $A(x) = 2x2 + \frac{40}{x}$

(b) 42 pies2 (c) 28 pies2

(d)



A es más pequeño cuando x ≈ 2,15 pies.

45. (a) A1x2 = 10x - x3

(b) El área más grande que puede abarcar el

El rectángulo mide aproximadamente 12,17 unidades cuadradas.

Prueba de capítulo (página 157)

1. (a) Dominio: 52, 4, 6, 86; rango: 55, 6, 7, 86; función (b) Dominio: 5 - 3, 1, 46; rango: 5 - 2, 3, 5, 76; no es una función (c) Dominio: 5x x Ú - 16;

rango: todos los números reales; no es una función (d) Dominio: todos los números reales; rango: 5y 0 y Ú 26; función 2. Dominio: e x ` $x \frac{4}{\ldots}$ 5 f; f1 - 12 = 3

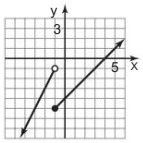
3. Dominio: 5x 0 x ≠ - 26; g1 - 12 = 1 4. Dominio: 5x x ≠ - 9, x ≠ 46; h1 - 12 = 8 5. (a) Dominio: 5x 0 - 5… x … 56; rango: 5y 0 - 3 … y … 36

(b) (0, 2), 1 - 2, 02 y (2, 0) (c) f112 = 3 (d) x = - 5 y x = 3 (e) 5x 0 - 5 … x 6 - 2 o 2 6 x … 56 o [- 5, - 22 12, 5]

6. Valores máximos locales: f1 - 0,852 ≈ - 0,86; f12,352 ≈ 15,55; valor mínimo local: f102 = - 2; la función es creciente en los intervalos

[- 5, - 0,85] y [0, 2,35] y decreciente en los intervalos [- 0,85, 0] y [2,35, 5].

7. (un)



(b) 10, - 42, (4, 0)

(c) g1 - 52 = - 9

(d) g122 = - 2

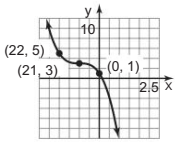
8. (a) 18 (b) y = 18x - 32

9. (a) 1f - g2 1x2 = 2x2 - 3x + 3

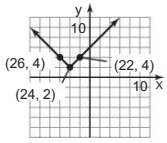
(b) 1f # g2 1x2 = 6x3 - 4x2 + 3x - 2

(c) f1x + h2 - f1x2 = 4xh + 2h2

10 a)



(b)



11. 2x + h - 3 12. (a) V1x2 = $\frac{x2}{3} \cdot \frac{10x}{3} + \frac{px2}{24}$ (b) 3460.29 pies3 13. Par

Revisión acumulativa (página 158)

1. 566 2. mi 0, 3 f 3. 5 - 1, 96 4. mi 1 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ f 5. mi - $\frac{7}{2}, \frac{1}{2}$ f 6. mi 1 $\frac{1}{2}$ f

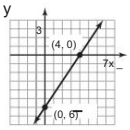
7. e x ` x 6 - $\frac{4}{3}$f; a - q, - 3 b 8. $\frac{4}{5}$x 0 1 6 x 6 46; 11, 42 9. e x ` x … - 2 o x Ú 2 f; (- q, - 24 c $\frac{3}{2}$, qb

10. (a) distancia: 129

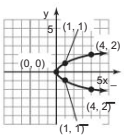
(b) punto medio: a$\frac{2}{2}$, - 4b

(c) pendiente: - $\frac{2}{5}$

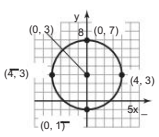
11. y



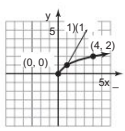
12.



13.



14.

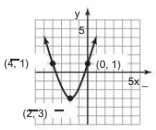


15. Intercepciones: (0, - 3), (- 2, 0), (2, 0);

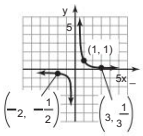
simetría con respecto al eje y

16. y = $\frac{1}{2}$x +5

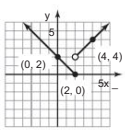
17.



18.



19.



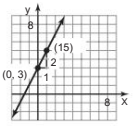
CAPÍTULO 3 Funciones lineales y cuadráticas

3.1 Evalúe su comprensión (página 167)

7. pendiente; intersección con el eje y 8. positivo 9. T 10. F 11. a 12. d

13. (a) m = 2; segundo = 3

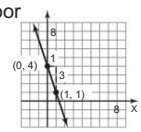
(b)



(c) 2 (d) Creciente

16. (a) metro = - 3; segundo = 4

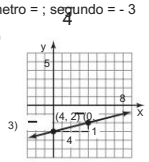
(por



(c) - 3 (d) Decreciente

18. (a) metro = $\frac{1}{4}$; segundo = - 3

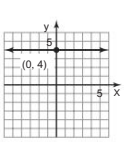
(b)



(c) $\frac{1}{4}$ (d) aumento

20. (a) metro = 0; segundo = 4

(b)



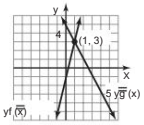
(c) 0 (d) Constante

21. Lineal; - 3 24. No lineal

26. No lineal 28. Lineal; 0

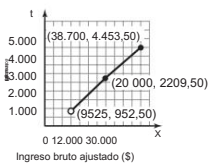
Machine Translated by Google

1 29. (a) 4 — (b) e x ` x 7 1/4 por 1 1/4 ’ qb (c) 1 (d) 5x x … 16 o 1 - q, 1] (e)



31. (a) 28 (b) 63 (c) - 28 (d) 5x x 7 286 o 128, q 2 (e) 5x x … 636 o (- q, 63] (f) 5x - 28 6 x 6 636 o 1 - 28, 632
33. (a) - 8 (b) 5x x 6 - 86 o 1 - q, - 82 35. (a)
- 11 (b) 5x - 11 … x 6 86 o [- 11 , 82 37. (a) $185 (b)
64 mi (c) 26 mi (d) 5x x Ú 06 o 30, q) 40. (a) 185,3 cm (b)
33,6 cm 41. (a) $10; 250 camisetas (b) +0 6 p 6 +10 (c) El precio aumentará

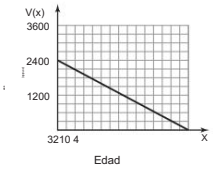
43. (a) 5x 9525 6 x … 38,7006 o 19525, 38 7004 (b) $2209,50 (c) La variable independiente es el ingreso bruto ajustado, x.
La variable dependiente es la factura de impuestos,
T. (d)



e) 27.500 dólares

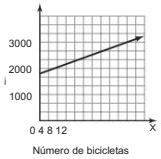
46. (a) x = 1000 (b) x 7 1000

47. (a) V1x2 = mx + b = - 600x + 2400 (b) 5x 0 … x … 46 o 30, 44 (c)



(d) $1200 (e) Después de 3 años

49. (a) C1x2 = 90x + 1800 (b) C(x)

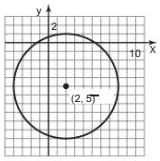


(c) $3060 (d) 22 bicicletas

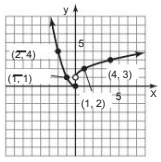
51. (a) d1w2 = 5,5w (b) 13,2 cm (c) 3,6 kg

53. C1R2 = ~~5~~ R - 273,15 55. d, e 9

57. b = 0; sí, f1x2 = b 59.

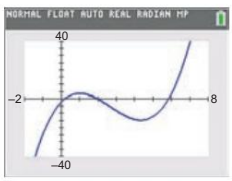


60. 6
61. 7
62.



63. f1x2 = 1x - 52 2 - 18
64. g1x2 = 3ax + 5/2 segundo 2 - 23/4
65. intersecciones x: - 322, 322; Intersección con el eje y: 8 66. {xx Ú - 2, x ≠ 4} 67. y = - 2x + 9

68.

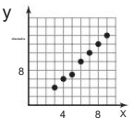


Máximo local: f112 = 4 Mínimo local: f14.332 = - 14.52 Creciente: [- 2, 1] [4.33, 8]
Decreciente: [1, 4.33]

3.2 Evalúe su comprensión (página 175)

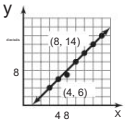
3. diagrama de dispersión 4. T 5. Relación lineal, m 7 0 8. Relación lineal, m 6 0 10. Relación no lineal

11. (a) y



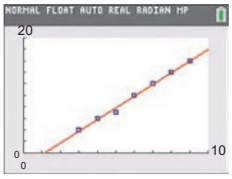
(b) Las respuestas variarán. Usando (4, 6) y (8, 14), y = 2x - 2.

(c) y

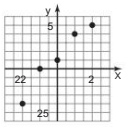


(d) y = 2,0357x - 2,3571

(e) r ≈ 0,996 (f)

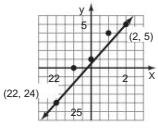


14. (a)



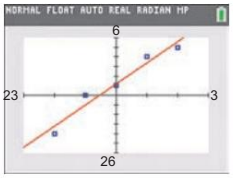
(b) Las respuestas variarán. Usando (- 2, - 4) y (2, 5), y = x + 4 2 9/— 1/—.

(C)

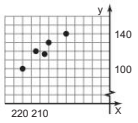


(d) y = 2,2x + 1,2

(e) r ≈ 0,976 (f)

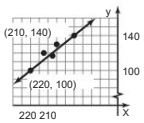


16. (un)



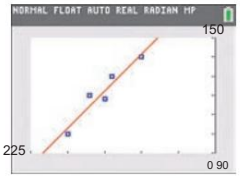
(b) Las respuestas variarán. Usando (- 20, 100) y (- 10, 140), y = 4x + 180.

(C)

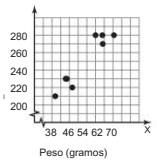


(d) y = 3,8613x + 180,2920

(e) r ≈ 0,957 (f)

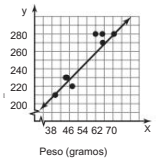


Machine Translated by Google

17. (un) 

(b) Lineal con pendiente positiva

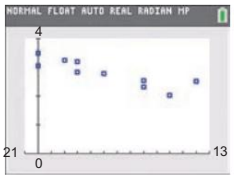
(c) Las respuestas variarán. Utilizando el puntos (39.52, 210) y (66.45, 280), y = 2.599x + 107.288.

(d) 

(mi) 269 calorías

(f) Si el peso de una barra de chocolate aumenta en 1 gramo, la cantidad de calorías aumentará en 2.599, en promedio.

19. (a) La variable independiente es el número de horas dedicadas a jugar videojuegos, y el promedio de calificaciones acumulativo es la variable dependiente porque utilizamos el número de horas jugando videojuegos para predecir (o explicar) el promedio de calificaciones acumulativo.

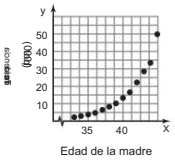
(b) 

(c) G(h) = - 0,0942h + 3,2763

(d) Si el número de horas que juegan videojuegos en una semana aumenta en 1 hora, el promedio académico acumulado disminuye 0.09, en promedio.

(mi) 2,52

(f) Aproximadamente 9,3 horas

21. 

No, los datos no siguen un patrón lineal.

23. y = 1,5x + 3,5; r = 1 25. Ninguna barra de chocolate pesa 0 gramos. 27. 2x + y = 3 o y = - 2x + 3

28. 5x x ≠ - 5, x ≠ 56 29. (g - f)(x) = x2 - 8x + 12 30. y = (x + 3)2 - 4 31. 52 - 27, 2 + 276

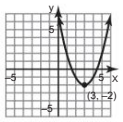
32.c- $\frac{52}{7}$, qb 33. Par 34. Intercepción x: 2; intercepción y: - $\frac{3}{4}$ 35. - $\frac{1}{6 + 2x + \sqrt{1}}$ 36. $\frac{7x + 6}{12 + x2}^{1/2}$

3.3 Evalúe su comprensión (página 188)

7. parábola 8. eje o eje de simetría 9. - 2a $\frac{b}{}$ 10. T 11. T 12. T 13. a 14. d 16. C 18. F 20. G 22. H

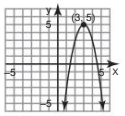
24. (a) Vértice: 13, - 22; Eje de simetría: x = 3

(b) Cóncavo hacia arriba

(C) 

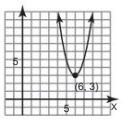
26. (a) Vértice: (3, 5); Eje de simetría: x = 3

(b) Cóncavo hacia abajo

(C) 

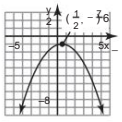
27. (a) Vértice: (6, 3); Eje de simetría: x = 6

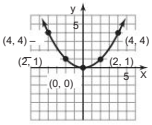
(b) Cóncavo hacia arriba

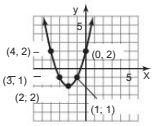
(c) y 

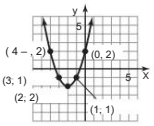
30. (a) Vértice: a $1\overline{2}$, - $\frac{7}{}$ 6b; Eje de simetría: x = $\frac{1}{2}$

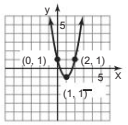
(b) Cóncavo hacia abajo

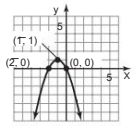
(C) 

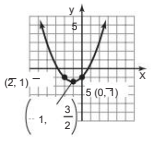
32. 

34. 

35. f1x2 = 1x + 22 ^{2} - 2 

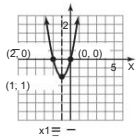
38. f1x2 = 21x - 12 ^{2} - 1 

40. f1x2 = - 1x + 12 ^{2} + 1 

42. f1x2 = $\frac{1}{2}$ 1x + 12 ^{2} - $\frac{3}{2}$ 

43. (a) Vértice: 1 - 1, - 12; Eje de simetría: x = - 1; Cóncava arriba

(b) intersección con el eje y: 0; intersecciones x: - 2, 0

(C) 

(d) Dominio: 1 - q, q 2; Rango: 3 - 1, q 2

(e) Decreciente: 1 - q, - 14 ; Creciente: 3 - 1, q 2

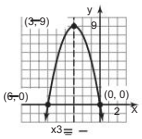
(f) f1x2 7 0 en 1 - q, - 22 10, q 2 o para x 6 - 2, x 7 0; f1x2 6 0 en 1 - 2, 02 o para - 2 6 x 6 0

Machine Translated by Google

46. (a) Vértice: 1 - 3, 92; Eje de simetría: x = - 3; Cóncavo hacia abajo

(b) intersección con el eje y: 0; intersecciones x: - 6, 0

(C)



(d) Dominio: 1 - q, q 2; Rango: 1 - q, 9]

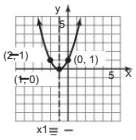
(e) Creciente: 1 - q, - 3]; Decreciente: [- 3, q 2

(f) f1x2 7 0 en (- 6, 0) o para - 6 6 x 6 0;
f1x2 6 0 en (- q, - 6) (0, q) o para
x 6 - 6, x 7 0

49. (a) Vértice: 1 - 1, 02; Eje de simetría: x = - 1; Cóncava arriba

(b) intersección con el eje y: 1; intercepción x: - 1

(C)



(d) Dominio: 1 - q, q 2; Rango: 30, q)

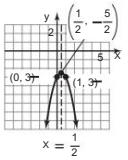
(e) Decreciente: (- q, - 1]; Creciente: [- 1, q)

(f) f1x2 7 0 en (- q, - 1) (- 1, q) o para x 6 - 1, x 7 - 1;
f1x2 nunca es negativo.

53. (a) Vértice: a $\frac{1}{2}$, - $\frac{5}{2}$b; Eje de simetría: x = $\frac{1}{2}$; Cóncavo hacia abajo

(b) intersección con el eje y: - 3; intersección x: ninguna

(C)



(d) Dominio: 1 - q, q 2; Rango: a - q, - (e) $\frac{5}{2 \text{ días}}$

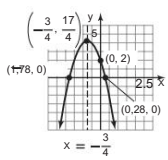
Creciente: a - q, 2 d ; Decreciente: c 1 $\frac{1}{2}$, qb

(f) f1x2 nunca es positiva; f1x2 6 0 en (- q, q) o para todos los números reales

58. (a) Vértice: ¢ - $\frac{3}{4}$, $\frac{17}{4}$ ≤; Eje de simetría: x = - $\frac{3}{4}$; Cóncavo hacia abajo

(b) intersección con el eje y: 2; intersecciones x: $\frac{-3-217}{4}$, $\frac{-3+217}{4}$

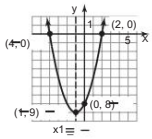
(C)



48. (a) Vértice: 1 - 1, - 92; Eje de simetría: x = - 1; Cóncava arriba

(b) intersección con el eje y: - 8; intersecciones x: - 4, 2

(C)



(d) Dominio: 1 - q, q 2; Rango: [- 9, q 2

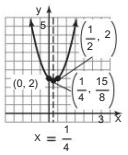
(e) Decreciente: 1 - q, - 1]; Creciente: [- 1, q 2

(f) f1x2 7 0 en (- q, - 4) (2,q) o para x 6 - 4, x 7 2;
f1x2 6 0 en (- 4, 2) o para - 4 6 x 6 2

52. (a) Vértice: a $\frac{1}{4}$, $\frac{15}{8}$b; Eje de simetría: x = $\frac{1}{4}$; Cóncava arriba

(b) intersección con el eje y: 2; intersección x: ninguna

(C)



(d) Dominio: 1 - q, q 2; Rango: c 15 $\frac{1}{8}$, qb

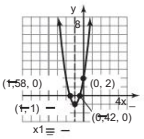
(e) Decreciente: a - q, 4 $\frac{1}{4}$ d ; Creciente: c 14, qb

(f) f1x2 7 0 en (- q, q) o para todos los números reales;
f1x2 nunca es negativo.

56. (a) Vértice: 1 - 1, - 12; Eje de simetría: x = - 1; Cóncava arriba

(b) intersección con el eje y: 2; intersecciones x: $\frac{-3-23}{3}$, $\frac{-3+23}{3}$

(C)



(d) Dominio: 1 - q, q 2; Rango: 3 - 1, q)

(e) Decreciente: (- q, - 1]; Creciente: [- 1, q)

(f) f(x) 7 0 en ¢ - q, $\frac{-3-23}{3}$ ≤ ¢ - 3 + 23, q ≤ o
para x6 $\frac{-3-23}{3}$, x7 $\frac{-3+23}{3}$;
f1x2 6 0 en ¢ - 3 - 23, $\frac{-3+23}{3}$ ≤ o
para $\frac{-3-23}{3}$ 6x6 $\frac{-3+23}{3}$

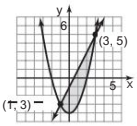
(d) Dominio: 1 - q, q 2; Rango: a - q, (e) $\frac{17}{4 \text{ días}}$

Creciente: a - q, - (f) $\frac{3}{4}$ días; Decreciente: c - $\frac{3}{4}$, qb

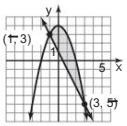
f1x2 7 0 en ¢ - 3 - 217, $\frac{-3+217}{4}$ ≤ o
para $\frac{-3-217}{4}$ 6x6 $\frac{-3+217}{4}$;
f1x2 6 0 en ¢ - q, $\frac{-3-217}{4}$ ≤ ¢ - 3 + 217, q ≤ o
para x6 $\frac{-3-217}{4}$, x7 $\frac{-3+217}{4}$

Machine Translated by Google

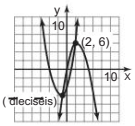
59. f1x2 = 1x + 12 62. ^{2} - 2 = x2 + 2x - 1
f1x2 = - 1x + 32 ^{2} + 5 = - x2 - 6x - 4
64. f1x2 = 21x - 12 66. ^{2} - 3 = 2x2 - 4x - 1
Valor mínimo; - 48 67. Valor mínimo; - 21
70. Valor máximo; 8 72. Valor máximo; 23 73. a = 1, b = 0, c = 5
76. (a), (c), (d) 78. (a), (c), (d) 80. (a), (c), (d)



(b) 5 - 1, 36

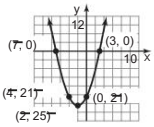


(b) 5 - 1, 36

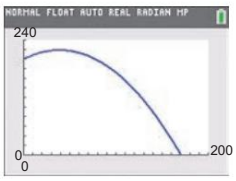


(b) 5-1, 26

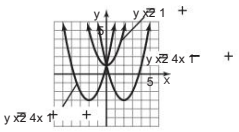
81. (a) a = 1: f(x) = x2 + 2x - 8
a = 2: f(x) = 2x2 + 4x - 16
a = - 2: f(x) = - 2x2 - 4x + 16
a = 6: f(x) = 6x2 + 12x - 48
(b) Las intersecciones con el eje x no se ven afectadas por el valor de a. La intersección con el eje y se multiplica por el valor de a. (c) El eje de simetría no se ve afectado por el valor de a. Para este problema, el eje de simetría es x = - 1 para todos los valores de a.
(d) La coordenada x del vértice no se ve afectada por el valor de a. La coordenada y del vértice se multiplica por el valor de a.
(e) La coordenada x del vértice es la media de las intersecciones x.
83. (a) 1 - 2, - 252 (b) - 7, 3 (c) - 4, 0; 1 - 4, - 212, 10, - 212
(d)



85. (un) $\frac{625}{\text{decadía}}$ ≈ 39,1 pies (b) $\frac{7025}{32}$ ≈ 219,5 pies (c) Aproximadamente 170 pies
(d)



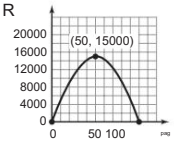
(f) Cuando la altura es de 100 pies, el proyectil está aproximadamente a 135,7 pies del acantilado.
88. $4500; $182,250,000 89. (a) 70,000 jugadores (b) $2500
92. a) 187 ó 188 relojes; $7031.20 (b) P(x) = - 0.2x2 + 43x - 1600
c) 107 ó 108 relojes; $711.20
93. (a) 140 pies (b) 56 mph 95. x = 2 $\frac{a}{}$ 97. 10 100. (2, 2)
101. f aumenta en ¢ - q, - $\frac{1}{3}$ b, 15, q 2. f es decreciente en a - $\frac{1}{3}$, 5b
105.



109. 0, 1 o 2 110. Simétrico con respecto al eje x, al eje y y al origen 111. 5x x … 46 o 1 - q, 4]
112. Centro 15, - 22; radio = 3 113. y = 1- x 114. y = - x + 7 $\frac{5}{7}$
115. Dominio: {1, 2, 3, 4, 5}; Rango: {- 7, - 6, - 5, - 4, - 3}; Función 116. 0 117. x 118. (3x + 5)2/3 $\frac{28x2 + 40x}{}$ 119.x + c + 5

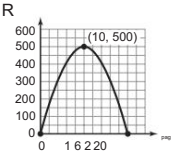
3.4 Evalúe su comprensión (página 197)

3. (a) R1p2 = - 6p2 + 600p
(b) 5p 0 … p … 1006
c) 50 dólares
d) 15.000 dólares
(mi) 300
(f) R



g) Entre 30 y 70 dólares

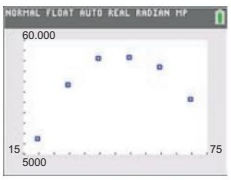
6. (a) R1p2 = - 5p2 + 100p
(b) 5p 0... p ... 206
c) 10 dólares
d) 500 dólares
(mi) 50
(f) R



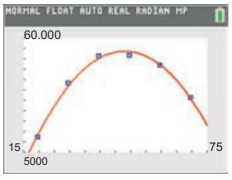
g) Entre 8 y 12 dólares

7. (a) A1w2 = - w2 + 240w
(b) A es mayor cuando w = 120 yd.
(c) 14.000 yd2
10. 8.000.000 m2
11. 18,75 metros
13. (a) 3 pulgadas (b) Entre 2 pulgadas y 4 pulgadas.
15. $\frac{750}{\text{pag}}$ ≈ 238,73 m por 375 m

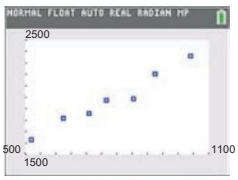
17. (un)



Los datos parecen seguir una relación cuadrática con un 6 0.
(b) I1x2 = - 49,421x2 + 4749,034x - 60.370,056
(c) Aproximadamente 48 años de edad
d) Aproximadamente 53.717 dólares
(mi)

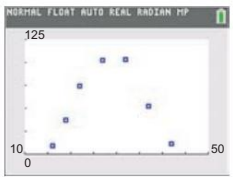


20. (un)



(b) R1x2 = 1,337x + 936,781
c) $2107
Los datos parecen estar relacionados linealmente con una pendiente positiva.

21. (un)



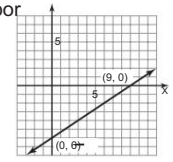
Los datos parecen seguir una relación cuadrática con un 6 0.
(b) B1a2 = - 0,561a2 + 32,550a - 371,675 (c) 80,35 nacimientos por 1.000
24. $\frac{38}{3}$ 26. $\frac{248}{3}$ 28. 13 29. 1x + 62 ^{2} + y2 = 7 30. b - 4 - 131 $\frac{}{5}$, $\frac{- 4 + 131}{5}$ $\frac{}{}$ r
31. intercepción x: 28; intercepción y 20 32. b - $\frac{8}{3}$, $\frac{22}{3}$ r 33. x2 - 4x + 7; resto 6
34. {xx ≠ - 4, x ≠ 0,x ≠ 4} 35. y = 229 - (x + 3)2 - 4 36. (x + h - 1)(x - 1) $\frac{}{- 3}$
37. (x + 1)4 (x - 7)3 (9x - 31)

Machine Translated by Google

3.5 Evalúe su comprensión (página 203)

4. (a) 5x x 6 - 2 o x 7 26; 1 - q, - 22 h 12, q 2 (b) 5x - 2 … x … 26; [- 2, 2]
5. (a) 5x - 2... x ...16; [- 2, 1] (b) 5x x 6 - 2 o x 7 16; 1 - q, - 22 h 11, q 2
8. 5x - 2 6 x 6 56; 1 - 2, 52 9. 5x x 6 0 o x 7 46; 1 - q, 02 h 14, q 2 12. 5x - 3 6 x 6 36; 1 - 3, 32
13. 5x x 6 - 4 o x 7 36; 1 - q, - 42 h 13, q 2 16. e x ` - 22. e x ` x 6 - 1/2 6 x 6 3f; a - 1/2, 3b 17. Sin solución real 20. Sin solución real
2/3 o x 7 3/2f; a - q, - 3 b h 2/a 3 2', qb 24. (a) 5 - 1, 16 (b) 5 - 16 (c) 5 - 1, 46 (d) 5x x 6 - 1 o x 7 16; 1 - q, - 12 h 11, q 2
(e) 5xx ... - 16; 1 - q, - 1] (f) 5x x 6 - 1 o x 7 46; 1 - q, - 12 h 14, q 2 (g) 5x x … - 22 o x Ú 226; 1 - q, - 224 h 3 22, q 2
26. (a) 5 - 1, 16 (b) e - 4 f (c) 5 - 4, 06 (d) 5x - 1 6 x 6 16; 1 - 1, 12 (e) e x ` x ... - 4 f; a - q, - 4 d (f) 5x - 4 6 x 6 06; 1 - 4, 02 (g) 506
28. (a) 5 - 2, 26 (b) 5 - 2, 26 (c) 5 - 2, 26 (d) 5x x 6 - 2 o x 7 26; 1 - q, - 22 h 12, q 2 (e) 5x x … - 2 o x Ú 26; 1 - q, - 2] h [2, q 2
(f) 5x x 6 - 2 o x 7 26; 1 - q, - 22 h 12, q 2 (g) 5x x … - 25 o x Ú 256; 1 - q, - 254 h 3 25, q 2
30. (a) 5 - 1, 26 (b) 5 - 2, 16 (c) {0} (d) 5x x 6 - 1 o x 7 26; 1 - q, - 12 h 12, q 2 (e) 5x - 2 … x … 16; [- 2, 1] (f) 5x x 6 06; 1-q, 02
(g) e x ` x … (1 - 213)/2 o x Ú (1 + 213)/2 F; a-q, (1 - 213)/2 dhc 1 + 213 2', qb 31. 5x x … - 4 o x Ú 46; 1 - q, - 4] h [4, q 2
34. (a) 5 s (b) La pelota está a más de 96 pies sobre el suelo durante un tiempo t entre 2 y 3 s, 2 6 t 6 3.
36. (a) $0, $1000 (b) El ingreso es más de $800 000 para precios entre $276,39 y $723,61, +276,39 6 p 6 +723,61.
37. (a) 5c 0,112 6c 6 81,9076; (0,112, 81,907) (b) Es posible dar en el blanco a 75 km de distancia si c = 0,651 o c = 1,536. 44. 5x x … 56 45. Impar

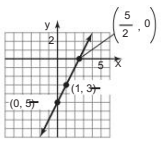
46. (a) (9, 0), 10, - 62
(por



47. Ninguno 48. 5 - 3 - 217, - 3 + 2176 49. (0, 25), ¢ - 5/2, 0≤, ¢5 2, 0≤ 50. - x2 + x + 3 51. 3x3 + 2x2 - 29x + 28
52. 6x + 3h - 5 53. x4 (2x + 35) / (2x + 7)5 o 2x5 + 35x4 / (2x + 7)5

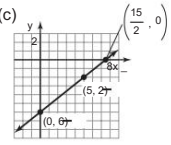
Ejercicios de repaso (página 205)

1. (a) metro = 2; segundo = - 5 (segundo) 2
(C)



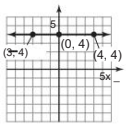
(d) aumento

m = 5 4/—; b = - 6 (b) 2. (a) 4/—
5 (c)



(d) aumento

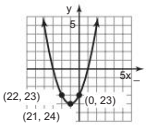
3. (a) metro = 0; segundo = 4 (segundo) 0
(C)



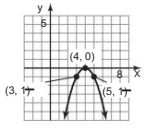
(d) Constante

4. Lineal; Pendiente: 3
5. No lineal

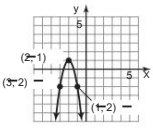
6.



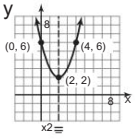
7.



8.

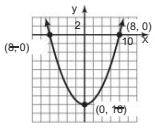


9. (a) y



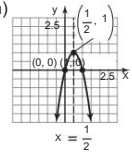
(b) Dominio: (- q, q)
Rango: 32, q)
(c) Decreciente: (- q, 24
Creciente: 32, q)

10 a)



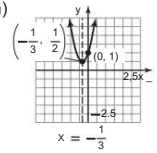
(b) Dominio: (- q, q)
Rango: 3 - 16, q)
(c) Decreciente: (- q, 04
Creciente: 30, q)

11. (un)



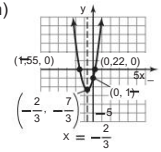
(b) Dominio: (- q, q)
Rango: (- q, 14
(c) Creciente: a - q, 2 d 1/—
Decreciente: c 2', qb

12. (un)



(b) Dominio: (- q, q)
Rango: c 2', qb
(c) Decreciente: a - q, - 3 d 1/—
Creciente: c - 1/3, qb

13. (un)



(b) Dominio: (- q, q)
7
Rango: c - 3', qb
(c) Decreciente: a - q, - 2/— 3 días
Creciente: c - qb3'

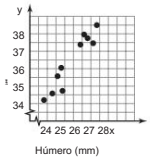
14. Valor mínimo; 1 15. Valor máximo; -4 16. Valor máximo; 9 17. 5x - 8 6 x 6 26; 1 - 8, 22
18. e x ` x … - 1/3 o x Ú 1/5 f; a - q, - 3 d h [5, q 2 19. y = - 2x2 + 12x - 13 20. y = 3x2 + 12x + 14
21. (a) S1x2 = 0,01x + 25 000 (b) $35 000 (c) $7 500 000 (d) x 7 +12 500 000
22. (a) R1p2 = - 10p2 + 1500p (b) 5p 0 … p … 1506 (c) $75 (d) $56,250 (e) 750 unidades (f) Entre $70 y $80

Machine Translated by Google

23. 125 pies por 125 pies 24. 4,166,666.7 m2 25. El lado con los semicírculos debe ser $\frac{50}{\pi}$ pies; el otro lado debe medir 25 pies. 26. (a) 63 palos (b) $151,90 27.

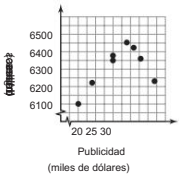
A(x) = - x2 + 10x; 25 unidades cuadradas 28. 3.6 pies

29. (un)

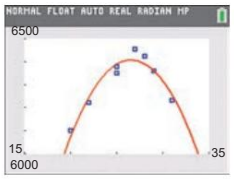


(b) sí
(c) y = 1,3902 x + 1,1140 (d)
37,95 mm

30. (a) Cuadrática, a 6 0

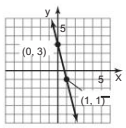


(b) Alrededor de $26,5 mil (c) $6408 mil (e)



Prueba de capítulo (página 207)

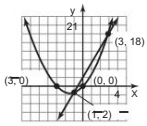
1. (a) Pendiente: - 4; Intersección con el eje y: 3 (b) - 4 (c) Decreciente (d)



2. a $-\frac{4}{3}$, 0b, (2, 0), (0, - 8)

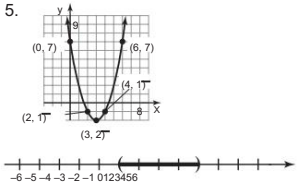
3. a $2 - 2\sqrt{2}$, 0b, a $2 + 2\sqrt{2}$, 0b, (0, 1)

4. (a) 5 - 1, 36 (b)



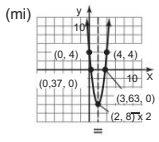
(c) 5x - 1 6 x 6 36; 1 - 1, 32

5.



6. (a) Cóncava hacia arriba (b) 12, - 82 (c) x = 2 intersecciones x: $\frac{6 - 2\sqrt{6}}{3}$; $\frac{6 + 2\sqrt{6}}{3}$ (d)

(mi)



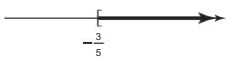
=

7. Valor máximo; 21 8. 5x x … 4 o x Ú 66; (- q, 44 36, q) 9. (a) C(m) = 0,15m + 129,50 (b) $258,50 (c) 562 millas 10. (a) R(p) = - 10p2 + 10.000p (b) {p0 ... p ...1000}
(c) $500 (d) $2,500,000 (e) 5000 (f) Entre $200 y $800

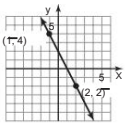
Revisión acumulativa (página 208)

1.522 ; a 3 2 2 ; b 2. 1 - 2, - 12 y (2, 3) están en la gráfica. 3. e x ` x Ú - 5

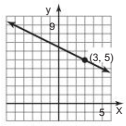
f; c-qb



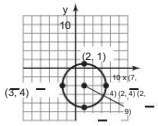
4. y = - 2x + 2



1 5. y = - x + 2



6. 1x - 22 ^{2} + 1 año + 42 ^{2} = 25



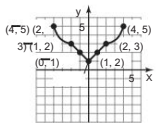
7. Sí 8. (a) - 3 (b) x2 - 4x - 2 (c) x2 + 4x + 1 (d) - x2 + 4x - 1 (e) x2 - 3 (f) 2x + h - 4 9 .e z ` z ≠ _

10. Sí 11. (a) No (b) - 1; (- 2, - 1) está en el gráfico. (c) -8; (- 8, 2) está en el gráfico. 12. Ninguno de los dos 13. El valor máximo local es 5,30 y ocurre en x = - 1,29. El valor mínimo local es - 3,30 y se produce en x = 1,29.

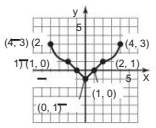
Creciente: 3 - 4, - 1,294 y 31,29, 44 ; Decreciente: 3 - 1,29, 1,294 14. (a) - 4 (b) 5x x 7 - 46 o 1 - 4, q 2

15. (a) Dominio: 5x - 4… x … 46; Rango: 5y - 1 … y … 36 (b) 1 - 1, 02, 10, - 12, (1, 0) (c) Eje y (d) 1 (e) - 4 y 4 (f) 5x - 1 6 x 6 16

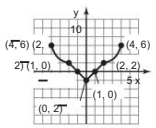
(gramo)



(h)



(i)



(j) Par (k) 30, 44

CAPÍTULO 4 Funciones polinomiales y racionales

4.1 Evalúe su comprensión (página 223) 6. suave;

continuo 7. b 8. 1 - 1, 12; 10, 02; 11, 12 9. r es un cero real de f; r es una intersección con el eje x de la gráfica de f; x - r es un factor de f. 10. puntos de inflexión 11. y = 3x4 12. q; - q 13. b 14. d 15. Función polinómica; grado 3; f1x2 = x3 + 4x; término principal: x3 ; término constante: 0

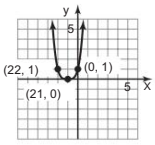
polinómica; grado 2; g1x2 = $\frac{3}{5}$ 2 3 x2 + 18. Función ; término principal: 5 5 $\frac{2}{5}$2x2 ; _ término constante: $\frac{1}{5}$ 19. No es una función polinómica; x se eleva a la potencia - 1.

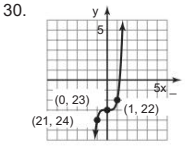
22. No es una función polinómica; x se eleva a potencias no enteras.

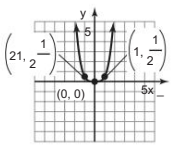
24. Función polinómica; grado 4; F1x2 = 5x4 - px3 + 2 $\frac{1}{2}$1; término principal: 5x4 ; término constante:

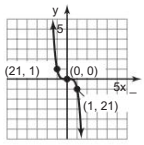
26. Función polinómica; grado 4; G1x2 = 2x4 - 4x3 + 4x2 - 4x + 2; término principal: 2x4 ; término constante: 2

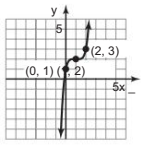
Machine Translated by Google

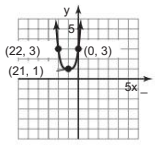
27. 

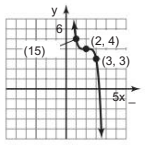
30. 

32. 

33. 

36. 

38. 

40. 

41. f1x2 = 1x + 12 1x - 12 1x - 32 para a = 1 44. f1x2 = x1x + 52 1x - 62 para a = 1

46. f1x2 = 1x + 52 1x + 22 1x - 32 1x - 52 para a = 1 48. f1x2 = 1x + 12 1x - 32 50. f1x2 = 31x + 22 1x - 32 ^{2} para a = 1 1x - 52 52. f1x2 = 16x1x + 22 1x - 12 1x - 32

54. f1x2 = 31x + 32 1x - 12 1x - 42 56. f1x2 = 51x + 12 58. f1x2 = - 21x + 52 ^{2} 1x - 12 ^{2}

59. (a) 7, multiplicidad 1; - ^{2} 1x - 22 1x - 42

3, multiplicidad 2 (b) La gráfica toca el eje x en - 3 y lo cruza en 7. (c) 2 (d) y = 3x3

62. (a) 5, multiplicidad 3 (b) La gráfica cruza el eje x en 5. (c) 6 (d) y = 7x7

64. (a) - 1, multiplicidad 2; - 4, multiplicidad 3 (b) La gráfica toca el eje x en - 2 $\frac{1}{2}$ y cruza en - 4. (c) 4 (d) y = - 2x5

66. (a) 5, multiplicidad 3; - 4, multiplicidad 2 (b) La gráfica toca el eje x en - 4 y lo cruza en 5. (c) 4 (d) y = x5

68. (a) No hay ceros reales (b) La gráfica no cruza ni toca el eje x. (c) 5 (d) y = 2x6

70. (a) 0, multiplicidad 2; - 12, 12, multiplicidad 1 (b) La gráfica toca el eje x en 0 y lo cruza en - 12 y 12 . (c) 3 (d) y = - 2x4

71. Podría ser; ceros: - 1, 1, 2; El grado mínimo es 3. 74. No puede ser la gráfica de un polinomio; brecha en x = - 1

75. f1x2 = x1x - 12 1x - 22 78. f1x2 = - $\frac{1}{}$ 1x + 12 1x - 12 2 ^{2} 1x - 22 79. f1x2 = 0.21x + 42 1x + 12 ^{2} 1x - 32

82. f1x2 = - x1x + 32 ^{2} 1x - 32 ^{2} 84. (a) - 3, 2 (b) - 6, - 1 86. - 3, multiplicidad 2; - 1, multiplicidad 3; 1, multiplicidad 1

87. No, cada función polinómica se define en 0, por lo que tiene una intersección con el eje y; sí, la gráfica de una función polinómica puede estar completamente por encima o por Eje x (por ejemplo, y = x2 + 1) 89. a, b, c, d 95. y = - 5 $\frac{2}{}$ x - $\frac{11}{}$ 96. 5x x ≠ - 56 97. $\frac{- 2 - 27}{2}$, $\frac{\text{debajo de } - 2 + 27}{2}$ 98. mi - $\frac{4}{5}$, 2 f 99. Decreciente

100. y = 1x + 22 ^{2} + 5 101. 1 - q, 02 h 11, q 2 102. - 3 $\frac{5\,1}{}$ 103. 18, - 142 104. Cociente: 4x - 7; resto: 4x - 2

4.2 Evalúe su comprensión (página 231)

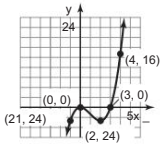
5. Paso 1: y = x3

Paso 2: intersecciones x: 0, 3; intercepción y: 0

Paso 3: 0: multiplicidad 2, toques; 3: multiplicidad 1, cruces

Paso 4: como máximo 2 puntos de inflexión

Paso 5: f1- 12 = - 4 ; f122 = -4; f142 = 16



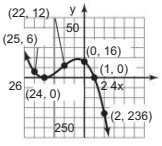
8. Paso 1: y = - x3

Paso 2: x@intercepta: - 4, 1; y@intercepción: 16

Paso 3: - 4: multiplicidad 2, toques; 1: multiplicidad 1, cruces

Paso 4: como máximo 2 puntos de inflexión

Paso 5: f1 - 52 = 6; f1 - 22 = 12; f122 = -36



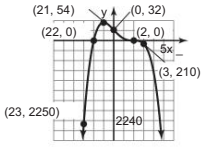
10. Paso 1: y = - 2x4

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 2, 2; intercepción y: 32

Paso 3: - 2: multiplicidad 1, cruces; 2: multiplicidad 3, cruces

Paso 4: como máximo 3 puntos de inflexión

Paso 5: f1- 32 = - 250; f1 - 12 = 54; f132 = - 10



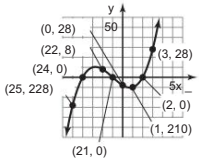
12. Paso 1: y = x3

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 4, - 1, 2; intercepción y: - 8

Paso 3: - 4, - 1, 2: multiplicidad 1, cruces

Paso 4: como máximo 2 puntos de inflexión

Paso 5: f1- 52 = - 28; f1 - 22 = 8; f112 = -10; f132 = 28



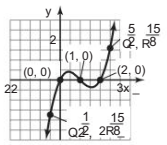
14. Paso 1: y = x3

Paso 2: intersecciones x: 0, 1, 2; intercepción y: 0

Paso 3: 0, 1, 2: multiplicidad 1, cruces

Paso 4: como máximo 2 puntos de inflexión

Paso 5: f a - 2 b = - $\frac{1}{}$ $\frac{15}{8}$; f un segundo = $\frac{5}{}$ $\frac{15}{8}$



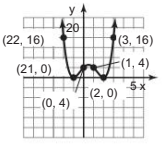
16. Paso 1: y = x4

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 1, 2; intercepción y: 4

Paso 3: - 1, 2: multiplicidad 2, toques

Paso 4: como máximo 3 puntos de inflexión

Paso 5: f1- 22 = 16; f112 = 4; f132 = 16



Machine Translated by Google

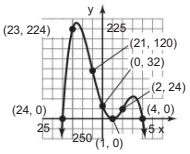
18. Paso 1: y = - 2x4

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 4, 1, 4; intercepción y: 32

Paso 3: - 4, 4: multiplicidad 1, cruces; 1: multiplicidad 2, toques

Paso 4: como máximo 3 puntos de inflexión

Paso 5: f1- 32 = 224; f1 - 12 = 120; f122 = 24



20. Paso 1: y = 5x4 Paso

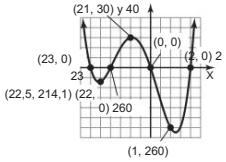
2: intersecciones con el eje x: - 3, - 2, 0, 2; intercepción y: 0

Paso 3: - 3, - 2, 0, 2: multiplicidad 1, cruces Paso 4: Como

máximo 3 puntos de inflexión Paso 5: f1 -

42 = 240; f1 - 2,52 ≈ - 14,1;

f1 - 12 = 30; f112 = -60; f132 = 450



22. Paso 1: y = x5 Paso

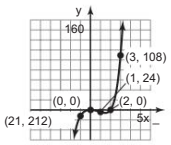
2: intersecciones con el eje x: 0, 2; Intercepción y: 0

Paso 3: 2: multiplicidad 1, cruces; 0: multiplicidad 2, toques

Paso 4:

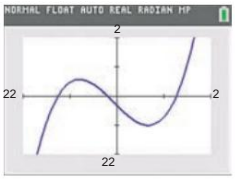
Como máximo 4 puntos de inflexión Paso

5: f1 - 12 = - 12; f112 = -4; f132 = 108



23. Paso 1: y = x3 Paso

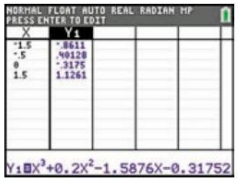
2:



Paso 3: intersecciones con el eje x: - 1,26, - 0,20,

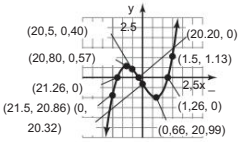
1,26; Intercepción y: - 0,31752

Etapa 4:



Paso 5: 1 - 0,80, 0,572; 10,66,-0,992

Paso 6:



Paso 7: Rango: 1 - q, q 2 Paso 8:

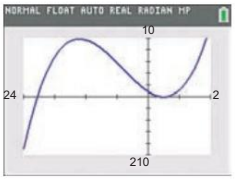
Creciente en 1 - q, - 0,804 y 30,66, q 2

Decreciente en 3 -

0,80, 0,664

26. Paso 1: y = x3 Paso

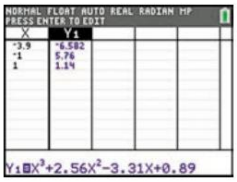
2:



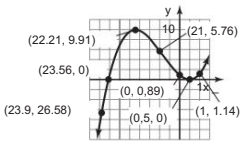
Paso 3: intersecciones en x: - 3,56, 0,50

intersecciones en y: 0,89

Etapa 4:



Paso 5: 1 - 2,21, 9,912; 10.50, 02 Paso 6:



Paso 7: Rango: 1 - q, q 2 Paso 8:

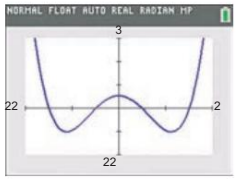
Creciente en 1 - q, - 2,214 y 30,50, q 2

Decreciente en 3 -

2,21, 0,504

28. Paso 1: y = x4 Paso

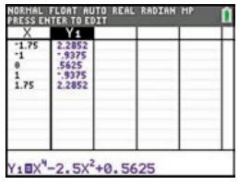
2:



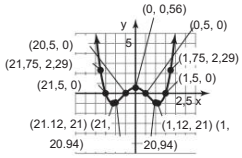
Paso 3: intersecciones con el eje x: - 1,5, - 0,5, 0,5, 1,5

Intercepción y: 0,5625

Etapa 4:



Paso 5: 1 - 1,12, - 12; 11,12,-12; 10, 0,562 Paso 6:



Paso 7: Rango: 3 - 1, q 2 Paso 8:

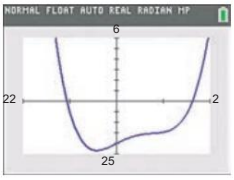
Aumentando en 3-1.12, 04 y 31.12, q 2

Disminuyendo en

1 - q, - 1.124 y [0, 1.12]

30. Paso 1: y = 2x4 Paso

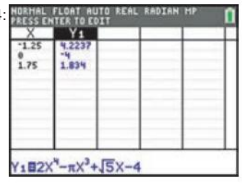
2:



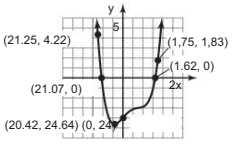
Paso 3: intersecciones con el eje x: - 1,07,

1,62; Intercepción y:

- 4 Paso 4:



Paso 5: 1 - 0,42, - 4,642 Paso 6:



Paso 7: Rango: 3 - 4,64, q 2 Paso 8:

Aumentando en 3 - 0,42, q 2 Disminuyendo en

1 - q, - 0,424

Machine Translated by Google

32. f1x2 = - x1x + 22 1x - 22

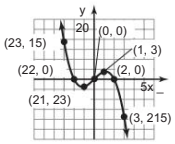
Paso 1: y = - x3

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 2, 0, 2; intercepción y: 0

Paso 3: - 2, 0, 2: multiplicidad 1, cruces

Paso 4: como máximo 2 puntos de inflexión

Paso 5: f1 - 32 = 15; f1 - 12 = - 3; f112 = 3;
f132 = - 15



34. f1x2 = x1x + 42 1x - 32

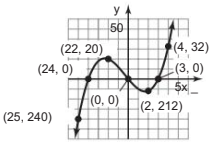
Paso 1: y = x3

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 4, 0, 3; intercepción y: 0

Paso 3: - 4, 0, 3: multiplicidad 1, cruces

Paso 4: como máximo 2 puntos de inflexión

Paso 5: f1 - 52 = - 40; f1 - 22 = 20; f122 = -12;
f142 = 32



36. f1x2 = 2x1x + 62 1x - 22 1x + 22

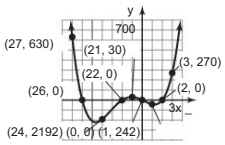
Paso 1: y = 2x4

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 6, - 2, 0,
2; intercepción y: 0

Paso 3: - 6, - 2, 0, 2: multiplicidad 1, cruces

Paso 4: como máximo 3 puntos de inflexión

Paso 5: f1 - 72 = 630; f1 - 42 = - 192; f1-12 = 30;
f112 = -42; f132 = 270



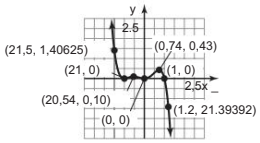
38. f1x2 = - x2 1x + 12 Paso 1: ^{2} 1x - 12
y = - x5

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 1, 0, 1; intercepción y: 0

Paso 3: 1: multiplicidad 1, cruces; - 1, 0:
multiplicidad 2, toques

Paso 4: como máximo 4 puntos de inflexión

Paso 5: f1-1,52 = 1,40625; f1- 0,542 = 0,10 ; f10,742 =
0,43; f11.22 = - 1.39392



40. f1x2 = 5x3 13x + 42 1x + 42

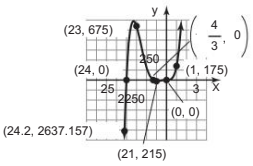
Paso 1: y = 15x5

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 4, - $\frac{4}{3}$, 0; 3
intercepción y: 0

Paso 3: - 4, - $\frac{4}{3}$: multiplicidad 1, cruces; 3
0: multiplicidad 3, cruces

Paso 4: como máximo 4 puntos de inflexión

Paso 5: f1 - 4,22 = - 637,157; f1 - 32 = 675 f1 - 12 = - 15;
f112 = 175



42. f1x2 = 1x + $\frac{1}{5}$ 1x - 42 1x - 52

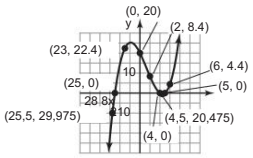
Paso 1: y = $\frac{1}{5}$ x3

Paso 2: intersecciones con el eje x: - 5,
4, 5; intercepción y: 20

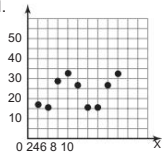
Paso 3: - 5, 4, 5: multiplicidad 1, cruces

Paso 4: como máximo 2 puntos de inflexión

Paso 5: f1 - 5,52 = - 9,975; f1 - 32 = 22,4; f122 = 8,4;
f14,52 = - 0,475; f162 = 4,4



43. (a) H.

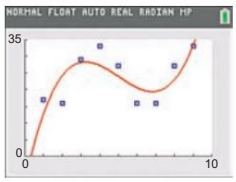


La relación parece ser cúbica.

(b) H1x2 = 0,3948x3 - 5,9563x2 + 26,1965x - 7,4127

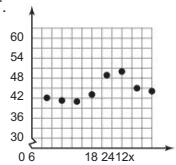
(c) ≈ 24

(d)



(mi) ≈ 54; No

45. (a) T.

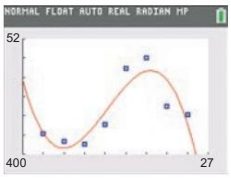


La relación parece ser cúbica.

(b) 0,7°/h (c) - 0,65°>h

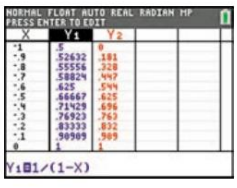
(d) T1x2 = - 0,0079x3 + 0,2930x2 - 2,6481x + 47,6857;
T1172 ≈ 48,32°F

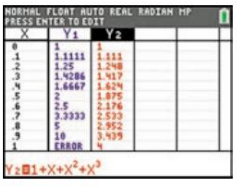
(mi)



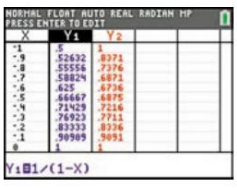
(f) La temperatura prevista a medianoche es 47,7°F.

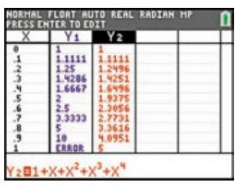
47. (un)



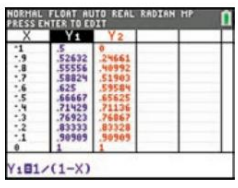


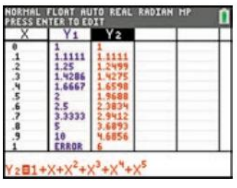
(b)





(C)

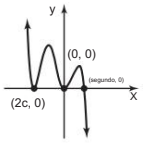




(d) A medida que se agregan más términos, los valores de la función polinómica se acercan a los valores de f. Las aproximaciones cercanas a 0 son mejores que las cercanas a -1 o 1.

Machine Translated by Google

49. (a) La escala vertical puede variar.



(b) 1 - c, 02 y (0, b) (c) - c y 0
(d) 1b, q 2 (e) 1 - q, - b - 42
(f) Decreciente

50. e x ` x 6 - $\frac{2}{3}$ o x 7 $\frac{4}{3}$ f, o a - q, - 2x $\frac{2}{3}$ b h un $\frac{4}{3}$' qb

51. y = - $\frac{1}{3}$ _ 52. a 7 $\frac{25}{4}$' $\frac{}{8}$b 53. 140 54. $\frac{17}{4}$

55. 34, q 2 56. 3 57. Centro: 1 - 2, 12; radio: 4

58. incluso 59. 6,25 años

4.3 Evalúe su comprensión (página 242)

5. F 6. asíntota horizontal 7. asíntota vertical 8. propia 9. T 10. F 11. y = 0 12. T 13. d 14. a

16. Todos los números reales excepto el 7; 5x 0 x ≠ 76 17. Todos los números reales excepto 2 y - 4; 5x 0 x ≠ 2, x ≠ - 46

20. Todos los números reales excepto - $\frac{3}{2}$ y 4; e x ` x ≠ - $\frac{3}{2}$' x ≠ 4 f 22. Todos los números reales excepto 4; 5x0x ≠ 46 _ _

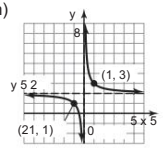
24. Todos los números reales 26. Todos los números reales excepto - 2 y 2; 5x 0 x ≠ - 2, x ≠ 26

27. (a) Dominio: 5x 0 x ≠ 26; rango: 5y 0 y ≠ 16 (b) (0, 0) (c) y = 1 (d) x = 2 (e) Ninguno

30. (a) Dominio: 5x 0 x ≠ 06; rango: todos los números reales (b) 1 - 1, 02, 11, 02 (c) Ninguno (d) x = 0 (e) y = 2x

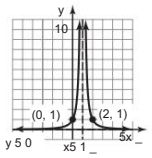
32. (a) Dominio: 5x 0 x ≠ - 2, x ≠ 26; rango: 5y 0 y … 0, y 7 16 (b) (0, 0) (c) y = 1 (d) x = - 2, x = 2 (e) Ninguno

34. (un)



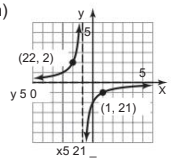
(b) Dominio: 5x x ≠ 06; rango: 5y y ≠ 26
(c) Asíntota vertical: x = 0;
asíntota horizontal: y = 2

35. (un)



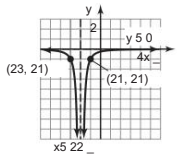
(b) Dominio: 5x x ≠ 16; rango:
5y y 7 06
(c) Asíntota vertical: x = 1;
asíntota horizontal: y = 0

38. (un)



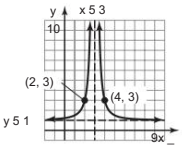
(b) Dominio: 5x x ≠ - 16;
rango: 5y y ≠ 06
(c) Asíntota vertical: x = - 1;
asíntota horizontal: y = 0

40. (un)



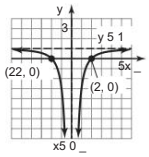
(b) Dominio: 5x x ≠ - 26; rango: 5y y 6
06
(c) Asíntota vertical: x = - 2;
asíntota horizontal: y = 0

42. (un)



(b) Dominio: 5x x ≠ 36; rango: 5y y 7
16
(c) Asíntota vertical: x = 3;
asíntota horizontal: y = 1

44. (un)



(b) Dominio: 5x x ≠ 06; rango: 5y y 6
16
(c) Asíntota vertical: x = 0;
asíntota horizontal: y = 1

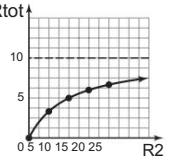
45. Asíntota vertical: x = - 4; asíntota horizontal: y = 3 47. Asíntota vertical: x = 3; asíntota oblicua: y = x + 5

49. Asíntotas verticales: x = 1, x = - 1; asíntota horizontal: y = 0 52. Asíntota vertical: x = - $\frac{1}{}$; asíntota horizontal: y = 3 $\frac{2}{3}$

54. Asíntota vertical: ninguna; sin asíntota horizontal u oblicua 56. Asíntota vertical: x = 0; sin asíntota horizontal u oblicua

57. (a) 9,8208 m>seg2 (b) 9,8195 m>seg2 (c) 9,7936 m>seg2 (d) eje h (e)

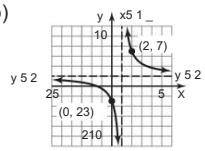
59. (a) Rtot



(b) Horizontal: Rtot = 10; A medida que la resistencia de R2 aumenta sin límite, la resistencia total se acerca a 10 ohmios, la resistencia R1.
(c) R1 ≈ 103,5 ohmios

61. (a) R1x2 = 2 + $\frac{5}{x - 1}$ = 5a 1$\overline{x - 1 \text{ segundo} + 2}$

(b)



(c) Asíntota vertical: x = 1;
asíntota horizontal: y = 2

67. x = 5 68. mi - 19 f $\frac{4}{}$

69. simetría del eje x

70. 1 - 3, 112, 12, - 42

71. 16, 02, 10, - 32 72. f1 - 32 = 19

73. ¢- $\frac{2}{5}$, 3≤ 74. Impar 75. $\frac{9\text{-}2x _}{x2 - 9}$ 76. 1- q, - 22

4.4 Evalúe su comprensión (página 256)

2. F 3. c 4. T 5. (a) 5x x ≠ 26 (b) 0 6. a

7. 1. Dominio: 5x x ≠ 0, x ≠ - 46 2. R está en términos mínimos 3. sin intersección con el eje y; intercepción x: - 1
4. R está en términos más bajos; Asíntotas verticales: x = 0, x = - 4 5. Asíntota horizontal: y = 0, intersectada en 1 - 1, 02

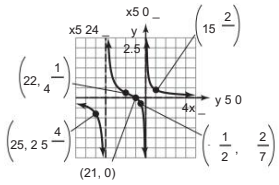
Machine Translated by Google

6.

24 21 0

Intervalo	(2`, 24)	(24, 21)	(21, 0)	(0, `)
Número elegido	25	22	$21\frac{1}{2}$	1
Valor de R	R(25) 5 25 $\frac{4}{}$	R(22) 5 4 $\frac{1}{}$	R(2) 5 $\frac{1}{}$ 2 $\frac{2}{7}$	R(1) 5 $\frac{2}{5}$
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(25,) $\frac{}{25}$	(22,) $\frac{}{4}$	($\frac{1}{}$, $\frac{}{}$) 22 2 7	(1,) $\frac{}{2}$

7.



10. 1. R1x2 = $\frac{31x + 12}{21x + 22\ 4}$; Dominio: 5x x ≠ - $\frac{}{}$ 26 2. R está en sus términos más bajos 3. Intersección con el eje y: $\frac{3}{}$; intercepción x: - 1

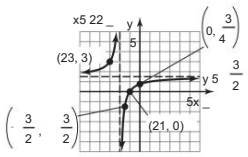
4. R está en términos más bajos; asíntota vertical: x = - 2 5. Asíntota horizontal: y = 2 $\frac{3}{}$, no intersectado

6.

22 21

Intervalo	(2`, 22)	(22, 21)	(21, `)
Número elegido	23	$23\frac{}{2}$	0
Valor de R	R (23) 5 3	R(2) 5 $\frac{3}{}$ 2 $\frac{3}{2}$	R(0) 5 $\frac{3}{4}$
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(23, 3)	($\frac{3}{}$, $\frac{}{}$) 22 2 3	(0,) $\frac{}{3}$

7.



12. 1. R1x2 = $\frac{3}{22\ 1x - 22}$; Dominio: 5x x ≠ - 2, x ≠ 26 2. R está en términos mínimos 3. Intersección con el eje y: - 1x + $\frac{3}{4}$; sin intersección x

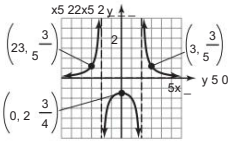
4. R está en términos más bajos; Asíntotas verticales: x = 2, x = - 2 5. Asíntota horizontal: y = 0, no intersecada

6.

22 2

Intervalo	(2`, 22)	(22, 2)	(2, `)
Número elegido	23	0	3
Valor de R	R (23) 5 $\frac{3}{5}$	R(0) 5 24 $\frac{3}{}$	R(3) 5 5 $\frac{3}{}$
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(23,) $\frac{3}{5}$	(0,) $\frac{}{24}$	(3,) $\frac{}{3}$

7.



13. 1. P1x2 = $\frac{1x2 + x + 12}{1x + 12}$; Dominio: 5x x ≠ - 1, x ≠ 16 2. P está en $\frac{1x2 - x + 12}{1x - 12}$ términos mínimos 3. Intercepción y: - 1; sin intersección x

4. P

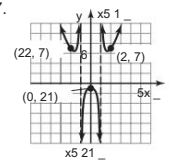
está en términos mínimos; asíntotas verticales: x = - 1, x = 1 5. Sin asíntota horizontal u oblicua

6.

21 1

Intervalo	(2`, 21)	(21, 1)	(1, `)
Número elegido	22	0	2
Valor de P	P(22) 5 7	P(0) 5 21	P(2) 5 7
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(22, 7)	(0, 21)	(2, 7)

7.



15. 1. H1x2 = $\frac{1x - 12}{1x + 32}$; Dominio: 5x x ≠ - 3, x ≠ 36 2. H está en $\frac{1x2 + x + 12}{1x - 32}$ términos mínimos 3. Intersección con el eje y: 9 $\frac{1}{}$; intercepción x: 1

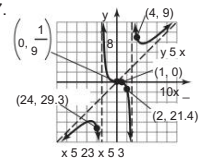
4. H está en términos más bajos; asíntotas verticales: x = 3, x = - 3 5. Asíntota oblicua: y = x, intersectada en a 1 $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{}$ 9 segundo

6.

23 1 3

Intervalo	(2`, 23)	(23, 1)	(1, 3)	(3, `)
Número elegido	24	0	2	4
Valor de H	H (24) < 29,3 $\frac{}{}$	H(0) 5 $\frac{1}{9}$	H(2) 5 21,4	H(4) 5 9
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(24, 29.3)	(0,) $\frac{}{9}$	(2, 21.4)	(4, 9)

7.



18. 1. R1x2 = $\frac{x2}{1x + 32\ 1x - 22}$; Dominio: 5x ≠ - 3, x ≠ 26 2. R está en términos mínimos 3. Intercepción y: 0; intercepción x: 0

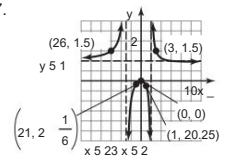
4. R está en términos más bajos; Asíntotas verticales: x = 2, x = - 3 5. Asíntota horizontal: y = 1, intersectada en (6, 1)

6.

23 0 2

Intervalo	(2`, 23)	(23, 0)	(0, 2)	(2, `)
Número elegido	26	21	1	3
Valor de R	R (26) 5 1,5	R(21) 5 2 $\frac{}{}$	R(1) 5 20,25	R(3) 5 1,5
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(26, 1.5)	(21,) $\frac{}{26}$	(1, 20.25)	(3, 1.5)

7.



Machine Translated by Google

20. 1. G1x2 = $\frac{x}{1x + 22\ 1x - 22}$; Dominio: 5x x ≠ - 2, x ≠ 26 2. G es en términos mínimos 3. Intercepción y: 0; intercepción x: 0

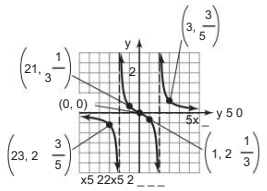
4. G está en términos más bajos; Asíntotas verticales: x = - 2, x = 2 5. Asíntota horizontal: y = 0, intersectada en (0, 0)

6.

22 0 2

Intervalo	(2`, 22)	(22, 0)	(0, 2)	(2, `)
Número elegido	23	21	1	3
Valor de G	G (23) 5 25 $\frac{3}{\ }$	G(21) 5 $\frac{1}{3}$	G(1) 5 2 $\frac{1}{3}$	G(3) 5 $\frac{3}{5}$
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(23,) 25	(21,) $\frac{1}{3}$	(1, 2)	(3,)

7.



22. 1. R1x2 = $\frac{3}{1x - 12\ 1x + 22\ 1x - 22}$; Dominio: 5x x ≠ 1, x ≠ - 2, x ≠ 26 2. R está en términos mínimos 3. Intercepción y: $\frac{3}{4}$; sin intersección x

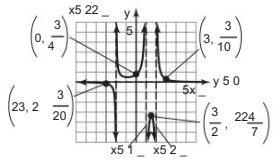
4. R está en términos más bajos; asíntotas verticales: x = - 2, x = 1, x = 2 5. Asíntota horizontal: y = 0, no intersectada

6.

22 1 2

Intervalo	(2`, 22)	(22, 1)	(1, 2)	(2, `)
Número elegido	23	0	1.5	3
Valor de R	R 3 (23) 5 220 —	R(0) 5 $\frac{3}{4}$	R(1.5) 5 2 $\frac{24}{7}$	R(3) 5 $\frac{\ }{3\ 10}$
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(23,) 220	(0,) $\frac{3}{4}$	(1.5,) 24 7	(3,)

7.



24. 1. H1x2 = $\frac{1x + 12\ 1x - 12}{1x2 + 42\ 1x + 22\ 1x - 22}$; Dominio: 5x x ≠ - 2, x ≠ 26 2. H está en términos mínimos 3. Intersección con el eje y: $\frac{1}{\text{dieciséis}}$; intersecciones x: - 1, 1

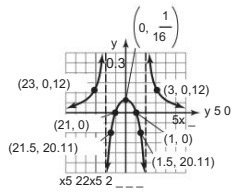
4. H está en términos más bajos; Asíntotas verticales: x = - 2, x = 2 5. Asíntota horizontal: y = 0, intersectada en 1 - 1, 02 y 11, 02

6.

22 21 1 2

Intervalo	(2`, 22)	(22, 21)	(21, 1)	(1, 2)	(2, `)
Número elegido	23	21,5	0	1.5	3
Valor de H	H(23) < 0,12 H(21,5) < 20,11 H(0) 5		$\frac{1}{\ }$	H(1,5) < 20,11	H(3) < 0,12
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(23, 0,12)	(21.5, 20.11)	(0,)	(1.5, 20.11)	(3, 0,12)

7.



26. 1. F1x2 = $\frac{1x + 12\ 1x - 42}{x + 2}$; Dominio: 5x x ≠ - 26 2. F está en términos más bajos 3. Intersección con el eje y: - 2; intercepción x: - 1, 4

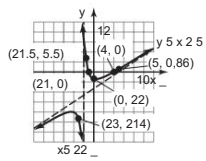
4. F está en términos más bajos; asíntota vertical: x = - 2 5. Asíntota oblicua: y = x - 5, no intersectada

6.

22 21 4

Intervalo	(2`, 22)	(22, 21)	(21, 4)	(4, `)
Número elegido	23	21,5	0	5
Valor de F	F(23) 5 214	F(21,5) 5 5,5 F(0) 5 22		F(5) < 0,86
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(23, 214)	(21.5, 5.5)	(0, 22)	(5, 0,86)

7.



28. 1. R1x2 = $\frac{1x + 42\ 1x - 32}{x - 4}$; Dominio: 5x x ≠ 46 2. R está en sus términos más bajos 3. Intersección con el eje y: 3; intersecciones x: - 4, 3

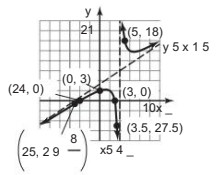
4. R está en términos más bajos; asíntota vertical: x = 4 5. Asíntota oblicua: y = x + 5, no intersectada

6.

24 3 4

Intervalo	(2`, 24)	(24, 3)	(3, 4)	(4, `)
Número elegido	25	0	3.5	5
Valor de R	R(25) 5 2 $\frac{8}{9}$	R(0) 5 3	R(3,5) 5 27,5	R(5) 5 18
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(25, 2) 89	(0, 3)	(3.5, 27.5)	(5, 18)

7.



30. 1. F1x2 = $\frac{1x + 42\ 1x - 32}{x + 2}$; Dominio: 5x x ≠ - 26 2. F está en términos más bajos 3. Intersección con el eje y: - 6; intersecciones x: - 4, 3

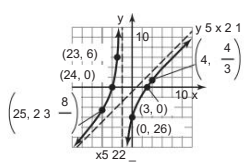
4. F está en términos más bajos; asíntota vertical: x = - 2 5. Asíntota oblicua: y = x - 1, no intersectada

6.

24 22 3

Intervalo	(2`, 24)	(24, 22)	(22, 3)	(3, `)
Número elegido	25	23	0	4
Valor de F	F (25) 5 2 $\frac{8}{3}$	F (23) 5 6	F (0) 5 26	F (4) 5 $\frac{4}{3}$
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(2 5, 2) 83	(23, 6)	(0, 26)	(4,)

7.



Machine Translated by Google

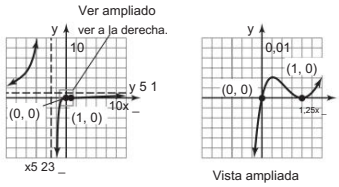
31. 1. Dominio: 5x x ≠ - 36 2. R está en sus términos más bajos 3. Intercepción y: 0; Intersecciones con el eje x: 0, 1 4. Asíntota vertical: x = - 3

5. Asíntota horizontal: y = 1, no intersectada

6.

	23	0	1
Intervalo	(2`, 23)	(23, 0)	(0, 1)	(1, `)
Número elegido	24	21	$\frac{1}{2}$	2
Valor de R	R(24) 5 100 R(21) 5 20,5	R( ) ≈ 0,003	R(2) 5 0,016
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(24, 100)	(21, 20.5)	(20,003) 1	(2, 0,016)

7.



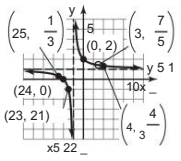
33. 1. R1x2 = $\frac{1x + 42\ 1x - 32}{- 32}$; Dominio: 5x x ≠ - 2, x ≠ 36 2. En términos más bajos, R1x2 = 1x + 22 1x $\frac{x + 4}{x + 2}$ 3. intercepción y: 2; intercepción x: - 4

4. Asíntota vertical: x = - 2; agujero en a3, 7 5 b 5. Asíntota horizontal: y = 1, no intersectada

6.

	24	22	3
Intervalo	(2`, 24)	(24, 22)	(22, 3)	(3, `)
Número elegido	25	23	0	4
Valor de R	R(25) 5 $\frac{1}{3}$	R(23) 5 21	R(0) 5 2	R(4) 5 $\frac{4}{3}$
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(2 5,) 3	(23, 21)	(0, 2)	(4,) 4

7.



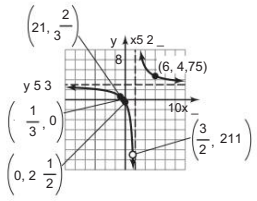
35. 1. R1x2 = $\frac{13x + 12\ 12x - 32}{1x - 22\ 12x - 32}$; Dominio: e x ` x ≠ $\frac{3}{2}$, x ≠ 2 f 2. En términos más bajos, R1x2 = $\frac{3x + 1}{x - 2}$ 3. intersección con el eje y: - ; intercepción x: - 2 $\frac{1}{3}$

4. Asíntota vertical: x = 2; agujero en un 3 2, - 11b 5. Asíntota horizontal: y = 3, no intersectada

6.

	21	3/2	2
Intervalo	(2', 2) $\frac{1}{3}$	(2 3,)	(2) 3	(2, `)
Número elegido	21	0	1.7	6
Valor de R	R(21) 5 $\frac{2}{3}$	R(0) 5 2 $\frac{1}{2}$	R(1,7) < 220,3	R(6) 5 4,75
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(21,)2 3	(0, 2) 1 2	(1.7, 220.3)	(6, 4,75)

7.



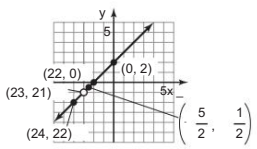
38. 1. R1x2 = $\frac{1x + 32\ 1x + 22}{x + 3}$; Dominio: 5x x ≠ - 36 2. En términos más bajos, R1x2 = x + 2 3. Intercepción y: 2; intercepción x: - 2

4. Asíntota vertical: ninguna; agujero en 1 - 3, - 12 5. Asíntota oblicua: y = x + 2 intersectada en todos los puntos excepto x = - 3

6.

	23	22
Intervalo	(2`, 23)	(23, 22)	(22, `)
Número elegido	24	25	0
Valor de R	R (24) 5 22	R(2) 5 22 $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$	R(0) 5 2
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(24, 22)	(22, 22) 1	(0, 2)

7.



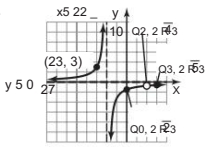
40. 1. H1x2 = $\frac{- 31x - 22}{x + 2}$; Dominio: 5x x ≠ - 2, x ≠ 26 2. En términos más bajos, H1x2 = 1x - 22 1x + 22 3. intersección con el eje y: - $\frac{3}{2}$; sin intersección x

4. Asíntota vertical: x = - 2; agujero en a2, - $\frac{3}{4}$ b 5. Asíntota horizontal: y = 0; no intersectado

6.

	22	2
Intervalo	(2`, 22)	(22, 2)	(2, `)
Número elegido	23	0	3
Valor de H	H(23) 5 3	H (0) 5 $\frac{3}{2}$	H (3) 5 $\frac{3}{5}$
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Debajo del eje x
Punto en el gráfico	(23, 3)	(0, 22) 3	(3, 25) 3

7.



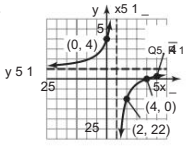
42. 1. F1x2 = $\frac{1x - 12\ 1x - 42}{1x - 12}$; Dominio: 5x x ≠ 16 2. En términos más bajos, F1x2 = $\frac{x - 4}{x - 1}$ 3. intercepción y: 4; intercepción x: 4

4. Asíntota vertical: x = 1 5. Asíntota horizontal: y = 1; no intersectado

6.

	1	4
Intervalo	(2', 1)	(1, 4)	(4, `)
Número elegido	0	2	5
Valor de F	F(0) 5 4	F(2) 5 22	F(5) 5 $\frac{1}{4}$
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(0, 4)	(2, 22)	(5,) 1 4

7.



Machine Translated by Google

44. 1. G1x2 = 1x $\frac{x}{2}$ + 22 4.; Dominio: 5x x ≠ - 26 2. G está en términos más bajos 3. Intercepción y: 0; intercepción x: 0

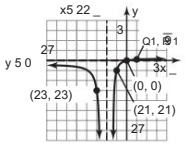
Asíntota vertical: x = - 2 5. Asíntota horizontal: y = 0; intersecado en (0, 0)

6.

22 0

Intervalo	(2`, 22)	(22, 0)	(0, `)
Número elegido	23	21	1
Valor de G	G(23) 5 23	G(21) 521	G (1) 5 $\frac{1}{9}$
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(23, 23)	(21, 21)	(1, $\frac{1}{9}$ 1

7.



46. 1. f1x2 = $\frac{x2 + 1}{x}$; Dominio: 5x x ≠ 06 2. f está en sus términos más bajos 3. sin intersección con el eje y; sin intersecciones x

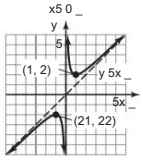
4. f está en sus términos más bajos; asíntota vertical: x = 0 5. Asíntota oblicua: y = x, no intersectada

6.

0

Intervalo	(2', 0)	(0, `)
Número elegido	21	1
Valor de f	f(21) 5 22 f(1) 5 2	
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(21, 22)	(1, 2)

7.



48. 1. f1x2 = $\frac{x3 + 1}{x}$ = $\frac{1x + 12\ 1x2 - x + 12}{x}$; Dominio: 5x x ≠ 06 2. f está en sus términos más bajos 3. sin intersección con el eje y; intercepción x: - 1

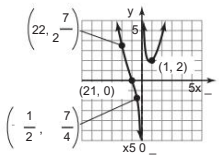
4. f está en sus términos más bajos; asíntota vertical: x = 0 5. Sin asíntota horizontal u oblicua

6.

21 0

Intervalo	(2`, 21)	(21, 0)	(0, `)
Número elegido	22	$\frac{21}{2}$	1
Valor de f	f(22) 5 $\frac{7}{2}$	f(2) 5 $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{4}$	f(1) 5 2
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(22,) $\frac{7}{2}$	($\frac{1}{2}$ 24) 7	(1, 2)

7.



50. 1. f1x2 = $\frac{x4 + 1}{x3}$; Dominio: 5x x ≠ 06 2. f está en sus términos más bajos 3. sin intersección con el eje y; sin intersecciones x

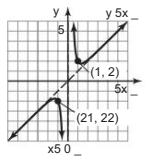
4. f está en sus términos más bajos; asíntota vertical: x = 0 5. Asíntota oblicua: y = x, no intersectada

6.

0

Intervalo	(2', 0)	(0, `)
Número elegido	21	1
Valor de f	f(21) 5 22	f(1) 5 2
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(21, 22)	(1, 2)

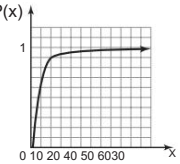
7.



51. Una posibilidad: R1x2 = $\frac{x2}{x2 - 4}$

54. Una posibilidad: R1x2 = $\frac{1x - 12\ 1x - 32\ ax2 + \frac{4}{3\ segundo}}{1x + 12^{2}\ 1x - 22^{2}}$

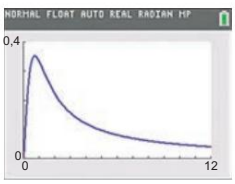
55. P(x)



La probabilidad de que su pelota no sea elegida aumenta muy rápidamente y se acerca a 1 a medida que aumenta el número de asistentes, x.

58. (a) eje t; C1t2 S 0

(b)

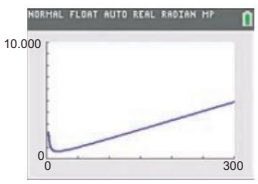


(c) 0,71 h después de la inyección

59. (a) C1x2 = 16x + $\frac{5000}{x}$ + 100

(b) x 7 0

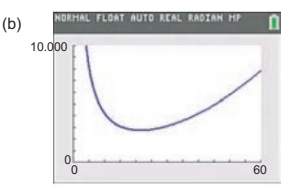
(C)



(d) Aproximadamente 17,7 pies por 56,6 pies (lado más largo paralelo al río)

62. (a) S1x2 = 2x2 + $\frac{40.000}{x}$

(b)



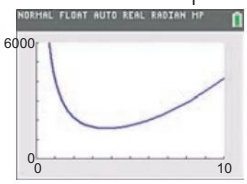
(c) 2784,95 pulgadas2

(d) 21,54 pulgadas * 21,54 pulgadas * 21,54 pulgadas

e) Minimizar el costo de los materiales necesarios para la construcción.

Machine Translated by Google

63. (a) $C1r2 = 12\pi r^2 + \frac{4000}{r}$

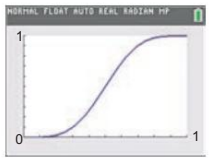
(b) 

El costo es menor cuando r = 3,76 cm.

65. (a) 0,8126

(b) 0,7759; un jugador que sirve, con probabilidad 0,62 de ganar un punto con un servicio, tiene probabilidad 0,7759 de ganar el juego.

(c) $x \approx 0{,}7$

(d) 

67. (a) R1x2 = μ $\frac{x2 + x - 12}{x2 - x - 6}$ si $x \neq 3$; $\frac{7}{5}$ si $x = 3$

(b) R1x2 = μ $\frac{6x2 - 7x - 3}{2x2 - 7x + 6}$ si $x \neq \frac{3}{2}$; -11 si $x = 2\frac{3}{}$

69. No. Cada función es un cociente de polinomios, pero no está escrita en términos mínimos. Cada función no está definida para x = 1; cada gráfica tiene un hueco en x = 1.

75. Si hay un factor común entre el numerador y el denominador, entonces la gráfica tendrá un agujero.

76. $4x3 - 5x2 + 2x - 2$ 77. e - 10 f 78. $\frac{1}{}$ $\frac{17}{2}$ 79. 12, - 52

80. y = x - 4 81. g132 = 6 82. x2 - x - 4 _ _

83. perpendicular 84. 596 85. 5 - 22, 226

4.5 Evalúe su comprensión (página 264)

3. c 4. F 6. (a)5x 0 0 6 x 6 1 o x 7 26; 10, 12 12, q 2 (b) 5x 0 x … 0 o 1… x … 26; 1 - q, 04 31, 24

8. (a)5x 0 - 1 6 x 6 0 o x 7 16; 1 - 1, 02 11, q 2 (b) 5x 0 x 6 - 1 o 0 … x 6 16; 1 - q, - 12 30, 12

9. 5x 0 x 6 0 o 0 6 x 6 36; 1 - q, 02 10, 32 12. 5x x … 16; 1 - q, 14 14. 5x 0 x … - 2 o x Ú 26; 1 - q, - 24 32, q 2

15. 5x 0 - 4 6 x 6 - 1 o x 7 06; 1 - 4, - 12 10, q 2 18. 5x 0 - 2 6 x ... - 16; 1 - 2, - 1] 20. 5x 0 x 6 - 66; 1 - q, - 62

21. 5x 0x 7 46; 14, q 2 24. 5x 0 - 4 6 x 6 0 o x 7 06; 1- 4, 02 10, q2 26. 5x 0 x … - 2 o 4… x … 66; 1 - q, - 24 34, 64

28. 5x 0 - 2 6 x 6 0 o x 7 66; 1 - 2, 02 16, q 2 30. 5x 0 x 6 - 1 o x 7 16; 1 - q, - 12 11, q 2

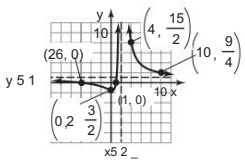
32. 5x 0 x 6 - 1 o x 7 16; 1 - q, - 12 11, q 2 34. 5x 0 x 6 26; 1 - q, 22 35. 5x 0 x 6 - 1 o x 7 16; 1 - q, - 12 11, q 2

38. 5x 0 x … - 2 o 0 6 x … 26; 1 - q, - 24 10, 24 40. 5x 0 x 6 - 2 o x 7 26; 1 - q, - 22 12, q 2 41. 5x 0 x 6 26; 1-q, 22

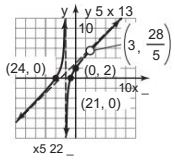
44. 5x 0 - 2 6x … 96; 1 - 2, 94 46. 5x 0 x 6 3 o x Ú 76; 1 - q, 32 37, q 2 48. 5x 0 x 6 2 o 3 6 x 6 56; 1 - q, 22 13, 52

50. 5x 0 x 6 - 5 o - 4 … x … - 3 o x = 0 o x 7 16; 1 - q, - 52 3- 4, - 34 506 11, q2

52. e x `- $\frac{1}{2}$ 6 x 6 1 o x 7 3 f; a - $\frac{1}{2}$, 1b 13, q 2 54. e x ` x 6 - $\frac{2}{3}$ o 0 6 x 6 $\frac{3}{}$ 2f; a - q, - 3 b $\frac{2}{}$ a0, 3 $\frac{}{}$ 2 segundo

56. (un) 

(b) 1 - q, - 64 31, 22 12, q 2

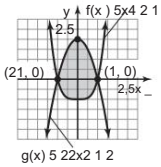
58. (un) 

(b) 3 - 4, - 22 3 - 1, 32 13, q 2

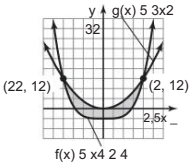
59. 5x 0x 7 46; 14, q 2

61. 5x 0 x … - 2 o x Ú 26; 1 - q, - 24 32, q 2

63. 5x 0 x 6 - 4 o x Ú 26; 1 - q, - 42 32, q 2

66. 

f1x2 … g1x2 si - 1 … x … 1

68. 

f1x2 … g1x2 si - 2 … x … 2

69. 1 - q, - 3) (- 2, 2) (3, q 2

71. Producir al menos 250 bicicletas.

73. (a) El tramo es inferior a 39 pies.

(b) La repisa debe estar al menos a 84 pies sobre el suelo para un saltador de 150 libras.

79. c $\frac{}{4}$, qb 80. 3x2 y4 1x + 2y2 12x - 3y2 81. y = 4 f $\frac{2}{3}2x^{-}$

82. 1f # g2 1x2 = 29x2 - 1; Dominio: c 1 $\frac{}{3}$, qb 83. x 84. C = $\frac{1}{Lv2}$ 85. eje x 86. (0, 4), (1.33, 2.81) 87. e - $\frac{1}{3}$,

88. Cociente: $2x - \frac{3}{}$; Resto: 2 $\frac{13}{2}$

Problemas históricos (página 278)

1. $\frac{b}{\text{hacha} - \text{3 segundo}}^3 + \text{bax} - \frac{b}{\text{3 segundo}}^2 + \text{cax} - \frac{b}{3} \text{ b + d = 0}$

$x3 - bx2 + \frac{b2\,x}{3} - \frac{b3}{27} + ax2 - \frac{2b2x}{3} + \frac{b3}{9} + cx - \frac{}{3} + re = 0$

$x3 + ca - \frac{b2}{\text{3 cajas + una}} \frac{2b3}{27} - \frac{}{3} + db = 0$

Sea $p = c - 3\frac{b2}{}$ y $q = \frac{2b3}{27} - \frac{}{3} + d$. Entonces $x3 + px + q = 0$.

2. $\overset{3}{1H + K2 + p1H + K2 + q = 0}$

$H3 + 3H2\,K + 3HK2 + K3 + pH + pK + q = 0$

Sea 3HK = - p.

$H3 - pH - pK + K3 + pH + pK + q = 0,$

$H3 + K3 = -q$

Machine Translated by Google

3. $3HK = -p$

$$k = -\frac{p}{3H}$$

$$H3 + un - \frac{p}{3Hb}^3 = -q$$

$$H3 - \frac{p3}{27H3} = -q$$

$$27H6 - p3 = -27qH3$$

$$27H6 + 27qH3 - p3 = 0$$

$$H3 = \frac{-27q \{ 2127q2\ 2 - 41272\ 1 - p32}{2 \# 27}$$

$$H3 = \frac{-q}{2} \{ C\ 272q2 + \frac{41272p3}{22\ 12722}$$

$$H3 = \frac{-q}{2} \{ C\ q2\overline{4} + \frac{p3}{27}$$

$$H = \text{segundo } 3\ \frac{-q}{2} + Bq2\overline{4} + \frac{p3}{27}$$

Elija la raíz positiva por ahora.

4. $H3 + K3 = -q$

$$K3 = -q - H3$$

$$K3 = -q - J - q\ \overline{2} + Cq2\overline{4} + \frac{p3}{27R}$$

$$K3 = \frac{-q}{2} - Cq2\overline{4} + \frac{p3}{27}$$

$$K = \text{segundo } 3\ \frac{-q}{2} - B\ q2\overline{4} + \frac{p3}{27}$$

5. $x = H + K$

$$x = B\ 3\ \frac{-q}{2} + Bq2\overline{4} + \frac{p3}{27} + B\ 3\ \frac{-q}{2} - B\ q2\overline{4} + \frac{p3}{27}$$

(Tenga en cuenta que si hubiéramos usado la raíz negativa en 3, el resultado habría sido el mismo).

6. x = 3 7. x = 2 8. x = 2

4.6 Evalúe su comprensión (página 278)

5. a 6. f(c) 7. b 8. F 9. 0 10. T 11. R = f122 = 8; nº 14. R = f122 = - 82; nº 16. R = f1 - 42 = 0; Sí

18. R = f1 - 42 = 1; nº 20. R = f a 1 $\overline{2}$ b = 0; sí 21, 7; 3 o 1 positivo; 2 o 0 negativo 24, 6; 2 o 0 positivos; 2 o 0 negativo 26, 3; 2 o 0 positivos; 1 negativo 28, 4; 2 o 0 positivos; 2 o 0 negativo 30, 5; 0 positivo; 3 o 1 negativo 32, 6; 1 positivo; 1 negativo

33. {1, {3 $\frac{1}{—}$ 36. {1, {5 38. {1, {3, { 9 $\frac{1}{—}$, {3 $\frac{1}{—}$ 40. {1, {3, {9, { 2 $\frac{1}{—}$, {3 $\frac{1}{—}$, {6 $\frac{1}{—}$, {2 $\frac{3}{—}$, {2 $\frac{9}{—}$

42. {1, {2, {3, {4, {6, {12, { 2 $\frac{1}{—}$, {2 $\frac{3}{—}$ 44. {1, {2, {4, {5, {10, {20, { 2 $\frac{1}{—}$, {2 $\frac{5}{—}$, {3 $\frac{1}{—}$, {3 $\frac{2}{—}$, {3 $\frac{4}{—}$, {3 $\frac{5}{—}$, {3 $\frac{10}{——}$, {3 $\frac{20}{——}$, {6 $\frac{1}{—}$, {6 $\frac{5}{—}$

45. - 3, - 1, 2; f1x2 = 1x + 32 1x + 12 1x - 22 48. 2 $\frac{1}{—}$; f1x2 = 2ax - $\frac{1}{2}$ b 1x2 + 12 50. 2, 25, - 25; f1x2 = 21x - 22 1x - 252 1x + 252

52. - 1, $\frac{1}{2}$, 23, - 23; f1x2 = 21x + 12 hacha - ; $\frac{1}{2}$ b 1x - 232 1x + 232 54. 1, multiplicidad 2; - 2, - 1; f1x2 = 1x + 22 1x + 12 1x - 12

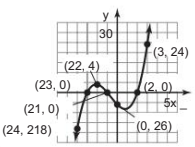
56. - 1, - $\frac{1}{4}$ f1x2 = 41x + 12 hacha + $\frac{1}{4}$ b 1x2 + 22 57. 5- 1, 26 60. e 2 $\overline{3}$ ' - 1 + 22, - 1 - 22 f 62. e 1 $\overline{3}$, 25, - 25 y 64. 5- 3, - 26

66. e-1 $\overline{3}$ f 68. e 1 $\overline{2}$, 2, 5 f 69. LB = - 2 ; UB = 2 72. LB = - 1 ; UB = 1 74. LB = - 2 ; UB = 2 76. LB = - 1 ; UB = 1

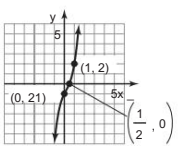
78. LB = - 2 ; UB = 3 79. f102 = - 1; f112 = 10 82. f1 - 52 = - 58; f1 - 42 = 2 84. f11,42 = - 0,17536; f11,52 = 1,40625

86. 0,21 88. - 4,04 90. 1,15 91. 2,53

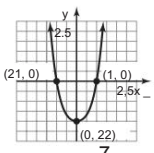
94.



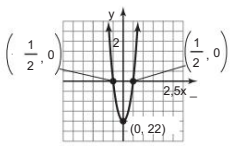
96.



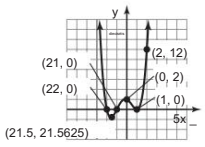
98.



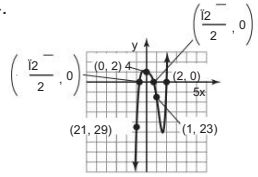
100.



102.



104.



105. -8,-4,-3 $\frac{7}{—}$ 107. k = 5 109. - 7

111. Si f1x2 = xn - cn , entonces f1c2 = cn - cn = 0, entonces x - c es un factor de f.

113, 5 116, 7 pulgadas.

117. Todos los ceros racionales potenciales son números enteros, por lo que r es un número entero o no es un cero racional (y, por tanto, es irracional). 120.b _

121. Defina f1x2 = 1x32 - 11 - x22 = x3 + x2 - 1. Como f102 = - 1 y f112 = 1, hay al menos un punto en el intervalo donde las dos funciones tienen el mismo valor y, por lo que hay al menos un punto de intersección en el intervalo.

123. No; según el teorema de los ceros racionales, no es un cero racional potencial. 125. No; según el teorema de los ceros racionales, no es un cero racional potencial. $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

126. f1x2 = - 31x - 52 ^{2} + 71 127. 33, 82 128. y = x - 5 $\frac{2}{—}$ $\frac{3}{5}$ 129. No hay soluciones reales. Las soluciones complejas son 3 { 3i$\overline{22}$

130. 3 - 3, 24 y 35, q 2 131. 1 - q, - 34 y [2, 5] 132. - 5 y - 1 133. 1 - 5, 02, 1 - 1, 02, 10, 32 134. 1 - 3, - 22, 12, 62 y (5, 1)

135. Mínimo absoluto: f1 - 32 = - 2; sin máximo absoluto

4.7 Evalúe su comprensión (página 286)

5. uno 6. 3 - 4i 7. T 8. F 9. 4 + i 12. - i, 3 - i 14. - i, - 5i 16. - i 18. 4 - 9i, - 7 + 2i 19. f1x2 = x4 - 14x3 + 77x2 - 200x + 208; un = 1

22. f1x2 = x5 - 4x4 + 7x3 - 8x2 + 6x - 4; a = 1 24. f1x2 = x4 - 6x3 + 10x2 - 6x + 9; a = 1 26. - 3i, 5 28. 4i, - 2, 4 $\frac{1}{—}$

Machine Translated by Google

30. 2 + 5i, - 3, 6 32. 2i, - 27, 27, - $\frac{2}{3}$ 34. 1, - 2 $\frac{1}{-}$ - $\frac{23}{2}$ yo, $\frac{1}{-2}$ + $\frac{23}{2}$ i; f1x2 = 1x - 12 hacha + $\frac{1}{2}$ + $\frac{23}{2 \text{ hacha ib}}$ + $\frac{1}{2}$ - $\frac{23}{2 \text{ libras}}$

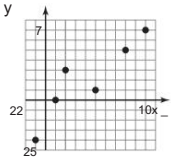
35. 2, 3 - 2i, 3 + 2i; f1x2 = 1x - 22 1x - 3 + 2i2 1x - 3 - 2i2 38. - i, i, - 2i, 2i; f1x2 = 1x + i2 1x - i2 1x + 2i2 1x - 2i2

40. - 5i, 5i, - 3, 1; f1x2 = 1x + 5i2 1x - 5i2 1x + 32 1x - 12 42. - 4, $\frac{1}{3}$, 2 - 3i, 2 + 3i; f1x2 = 31x + 42 hacha - 3 b $\frac{1}{1x - 2 + 3i2 1x - 2 - 3i2}$

44. 130 45. (a) f1x2 = 1x2 - 22x + 12 1x2 + 22x + 12 (b) - $\frac{22}{2}$ - $\frac{22}{2}$i, - $\frac{22}{2}$ + $\frac{22}{2}$i, $\frac{22}{2}$ - $\frac{22}{2}$i, $\frac{22}{2}$ + $\frac{22}{2}$i

47. Los ceros que son números complejos deben aparecer en pares conjugados; o un polinomio con coeficientes reales de grado impar debe tener al menos un cero real.
49. Si el cero restante fuera un número complejo, su conjugado también sería un cero, creando un polinomio de grado 5.

51. y



52. - 22 53. 6x3 - 13x2 - 13x + 20 54. A = 9p pie2 1 ≈ 28,274 pie22; C = 6p pies 1≈ 18.850 pies2

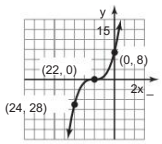
55. 1g>f2 1x2 = $\frac{x13x - 22}{x + 1}$; ~~Dominio: x ≠ - 1~~ y x ≠ 0 56. y = 1x + 52 ^{2} - 3 57. 30, q 2

58. 10, - 2232, 10, 2232, 14, 02 59. 1x + $\frac{x - 9}{72\ 12x + 32}$ 60. 3x2 + 3xh + h2

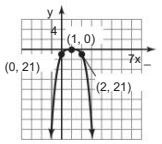
Ejercicios de repaso (página 290)

1. Polinomio de grado 7 2. Ninguno 3. Ninguno 4. Polinomio de grado 0

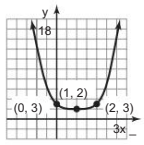
5.



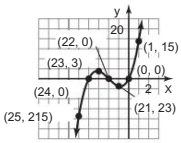
6.



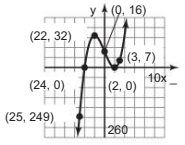
7.



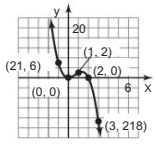
8. 1. y = x3
2. intersecciones con el eje x: - 4, - 2, 0; intercepción y: 0
3. - 4, - 2, 0 (toda multiplicidad 1), cruces
4. 2
5. f1 - 52 = - 15; f1 - 32 = 3 ; f1 - 12 = - 3; f112 = 15



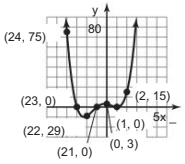
9. 1. y = x3
2. intersecciones x: - 4, 2; intercepción y: 16
3. - 4, multiplicidad 1, cruces; 2, multiplicidad 2, toques
4. 2
5. f1 - 52 = - 49; f1 - 22 = 32 ; f132 = 7



10.1. y = - 2x3
2. f1x2 = - 2x2 1x - 22
intersecciones x: 0, 2; intercepción y: 0
3. 0, multiplicidad 2, toques; 2, multiplicidad 1, cruces
4. 2
5. f1 - 12 = 6 ; f112 = 2 ; f132 = - 18



11. 1. y = x4
2. intersecciones con el eje x: - 3, - 1, 1; intercepción y: 3
3. - 3, - 1 (ambos multiplicidad 1), cruces; 1, multiplicidad 2, toques
4. 3
5. f1 - 42 = 75; f1 - 22 = - 9 ; f122 = 15



12. Dominio: 5x 0 x ≠ - 36; asíntota horizontal: y = 0; asíntotas verticales: x = 3

13. Dominio: 5x x ≠ - 2, x ≠ 26; asíntota horizontal: y = 1; asíntota vertical: x = 2, x = - 2

14. Dominio: 5x x ≠ - 26; asíntota horizontal: y = 1; vertical asíntota: x = - 2

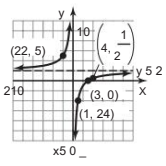
15. 1. R1x2 = $\frac{21x - 32}{x}$; dominio: 5x 0 x ≠ 06 2. R está en términos mínimos 3. sin intersección con el eje y; intercepción x: 3

4. R está en términos más bajos; asíntota vertical: x = 0 5. Asíntota horizontal: y = 2; no intersectado

6.

Intervalo	(2', 0)	(0, 3)	(3, `)
Número elegido	22	1	4
Valor de R	R(22) 5 5	R(1) 5 24	R(4) 5 $\frac{1}{2}$
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(22, 5)	(1, 24)	(4, $\frac{1}{2}$)

7.



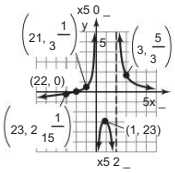
16. 1. Dominio: 5x 0 x ≠ 0, x ≠ 26 2. H está en términos mínimos 3. sin intersección con el eje y; intercepción x: - 2

4. H está en términos más bajos; Asíntotas verticales: x = 0, x = 2 5. Asíntota horizontal: y = 0; intersectada en 1 - 2, 02

6.

Intervalo	(2`, 22)	(22, 0)	(0, 2)	(2, `)
Número elegido	23	21	1	3
Valor de H	H(23) 5 2 $\frac{1}{15}$	H(21) 51 – 3	H(1) 5 23	H(3) 55 – 3
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(2 3, 2)1 —15	(21,) 13	(1, 23)	(3,) 5

7.



Machine Translated by Google

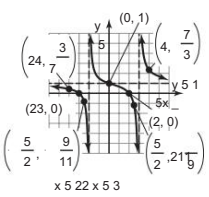
17. 1. R1x2 = $\frac{1x + 32\,1x - 22}{1x - 32\,1x + 22}$; dominio: 5x 0 x ≠ - 2, x ≠ 36 2. R está en términos mínimos 3. Intercepción y: 1; intersecciones x: - 3, 2

4. R está en términos más bajos; Asíntotas verticales: x = - 2, x = 3 5. Asíntota horizontal: y = 1; intersecado en (0, 1)

6.

Intervalo	(2`, 23)	(23, 22)	(22, 2)	(2, 3)	(3, `)
Número elegido	24	$25\frac{}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	4
Valor de R	R(24) 5 —7 ^{3}	R(2$\frac{5}{2}$) 52 ^{9}	R(0) 5 1	R($\frac{5}{2}$) 5211 $_{9}$	R(4) 5 —3 ^{7}
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(24,)3 —7	(2 , $\frac{5}{2}$)9 —11	(0, 1)	(, $\frac{5}{2}$) 11$_{9}$	(4,)7$_{3}$

7.



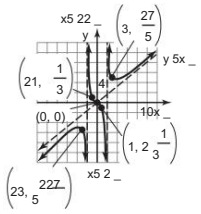
18. 1. F1x2 = $\frac{x3}{1x + 22\,1x - 22\,4.}$; dominio: 5x 0 x ≠ - 2, x ≠ 26 2. F es en términos mínimos 3. Intercepción y: 0; intercepción x: 0

F está en términos mínimos; asíntotas verticales: x = - 2, x = 2 5. Asíntota oblicua: y = x; intersecado en (0, 0)

6.

Intervalo	(2`, 22)	(22, 0)	(0, 2)	(2, `)
Número elegido	23	21	1	3
Valor de F	F(23) 5 —5 ^{227}	F( ) 5 $\frac{1}{}$ – $_{3}$	F(1) 5 ^{21} $\frac{}{3}$	F(3) 527 $_{}$
Ubicación del gráfico	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(2 3, 2) 27$_{5}$	(21,) $\frac{}{3}$	(1,) $\frac{}{23}$ 1	(3,)$\frac{}{5}$27

7.



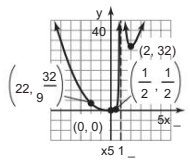
19. 1. Dominio: 5x 0 x ≠ 16 2. R está en términos mínimos 3. Intercepción y: 0; intercepción x: 0

4. R está en términos más bajos; asíntota vertical: x = 1 5. Sin asíntota oblicua u horizontal

6.

Intervalo	(2', 0)	(0, 1)	(1, `)
Número elegido	22	$\frac{1}{2}$	2
Valor de R	R(22) 5 ^{32} —9	R( ) $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$	R(2) 5 32
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Por encima del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(22,) ^{32} —9	(,)1 $\frac{}{2}$	(2, 32)

7.



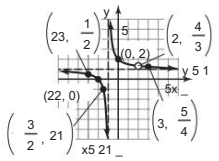
20. 1. G1x2 = $\frac{1x + 22\,1x - 22}{+ 12\,1x - 22}$; dominio: 5x 0 x ≠ - 1, x ≠ 26 2. En términos más bajos, G1x2 = 1x $\frac{x + 2}{x + 1}$ 3. intercepción y: 2; intercepción x: - 2

4. Asíntota vertical: x = - 1; agujero en a2, 4 $\frac{}{3}$ b 5. Asíntota horizontal: y = 1, no intersectada

6.

Intervalo	(2`, 22)	(22, 21)	(21, 2)	(2, `)
Número elegido	23	$\frac{3}{2}$	0	3
Valor de G	G(23) 5 $\frac{1}{2}$	G 5 $\frac{21}{2}$ $\frac{3}{}$	G(0) 5 2	G(3) 5 $\frac{5}{4}$
Ubicación del gráfico	Por encima del eje x	Debajo del eje x	Por encima del eje x	Por encima del eje x
Punto en el gráfico	(23,) $\frac{}{2}$	(2 , $\frac{}{2}$1) 3	(0, 2)	(3,)$\frac{5}{}$ –

7.



21. 5x 0 x 6 - 2 o - 1 6 x 6 26;

1 - q, - 22 1 - 1, 22

22. 5x 0 - 4 … x … - 1 o x Ú 16

3 - 4, - 14 31, q 2

23. 5x 0 x 6 1 o x 7 26; 1 - q, 12 12, q 2

24. 5x 0 1 … x … 2 o x 7 36; 31, 24 13, q 2

25. 5x 0 x 6 - 4 o 2 6 x 6 4 o x 7 66; 1 - q, - 42 12, 42 16, q 2

26. R = 0; g es un factor de f. 27. R = - 5x + 10; g no es un factor de f. 28. f142 = 47,105 29. 5, 3 o 1 positivo; 3 o 1 negativo

30, 1 positivo; 2 o 0 negativo 31. {1, {3, { 2 $\frac{1}{}$, {2$\frac{3}{}$, {3$\frac{1}{}$, $\frac{1}{}$, { 4$\frac{}{}$, $\frac{3}{}$, {6$\frac{1}{}$, $\frac{1}{}$ {12$\frac{}{}$ 32. - 2, 1, 4; f1x2 = 1x + 22 1x - 12 1x - 42

33. $\frac{1}{2}$, multiplicidad 2; - 2; f1x2 = 4ax - 2b $\frac{1}{}^{2}$ 1x + 22 34. 2, multiplicidad 2; f1x2 = 1x - 22 2 1x2 + 52 35. 5 - 3, 26 36. e - 3, - 1, - $\frac{1}{2}$, 1 f

37. LB: - 2; UB: 3 38. LB: - 3; UB: 5 39. f102 = - 1; f122 = 5 40. f102 = - 1; f112 = 1 41, 1,52 42, 0,93

43. 2 - 3i; f1x2 = x3 - 8x2 + 29x - 52 44. 6 + i, 2 - 5i; f(x) = x5 - 19x4 + 162x3 - 838x2 + 2561x - 3219

45. - 2, 1, 4; f1x2 = 1x + 22 1x - 12 1x - 42 46. - 2, $\frac{1}{2}$ 1multiplicidad 22; f1x2 = 41x + 22 hacha - 2 b $\frac{1}{}^{2}$

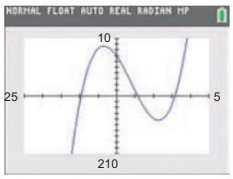
47. 2 (multiplicidad 2), - 15i, $\frac{}{}$15i; f1x2 = 1x + 15i2 1x - 15i2 1x - 22 ^{2}

48. - 3, 2, - yo, $\frac{12}{2}$ $\frac{12}{2}$ i; f1x2 = 21x + 32 1x - 22 hacha + $\frac{12}{}$ hacha de 2 ib - $\frac{12}{}$ 2 libras

Machine Translated by Google

49. Paso 1: y = x3

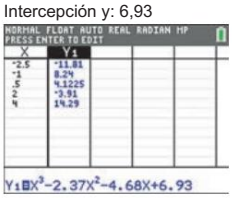
Paso 2:



Paso 3: intersecciones con el eje x: - 1,93, 1,14, 3,16

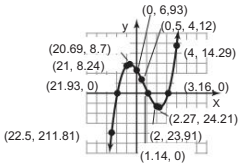
Intercepción y: 6,93

Etapa 4:



Paso 5: 1 - 0,69, 8,702, 12,27, - 4,212

Paso 6:



Paso 7: Rango: 1 - q, q 2

Paso 8: Aumentar en 1 - q, - 0,694 y 32,27, q 2;

Disminuyendo

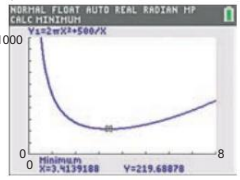
en 3 - 0,69, 2,274

50. (a) A1r2 = 2pr (b) $2 + \frac{500}{r}$

223,22 cm2

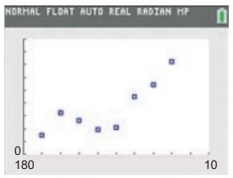
c) 257,08 cm2

(d)



A es más pequeño cuando r ≈ 3,41 cm.

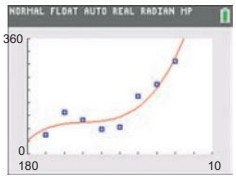
51. (a) 360



La relación parece ser cúbica.

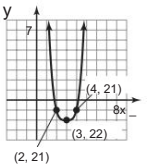
(b) P1t2 = 0,803t ^{3} ^{2} - 7.460t + 24.511t + 201.064; ≈ +503.000

(C)



Prueba de capítulo (página 291)

1. y



2. (a) 3

2 $\frac{\text{pag}}{q}$: { , {1, { (segundo) $\frac{3}{2}$, { , {3, {5, { 2 $\frac{15}{2}$, {15

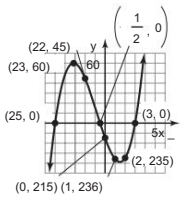
1

(c) -5, -, 3; g1x2 = 1x + 52 12x + 12 1x - 32

(d) intercepción y: - 15; intersecciones x: - 5, - 2 $\frac{1}{2}$, 3

(e) Cruces en - 5, - 2 $\frac{1}{2}$, 3

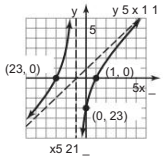
(f) y = 2x3



3. 4, - 5i, 5i 4. mi 1, $\frac{5 - \sqrt{161}}{6}, \frac{5 + \sqrt{161}}{6}$ f 5. Dominio: 5x 0 x ≠ - 10, x ≠ 46; asíntotas: x = - 10, y = 2

6. Dominio: 5x 0 x ≠ - 16; asíntotas: x = - 1, y = x + 1

7.



8. Las respuestas pueden variar. Una posibilidad es f1x2 = x4 - 4x3 - 2x2 + 20x

9. Las respuestas pueden variar. Una posibilidad es $\frac{21x - 92\ 1x - 12}{r1x2 = 1x - 42\ 1x - 92}$.

10. f102 = 8; f142 = -36

Como f102 = 8 7 0 y f142 = - 36 6 0, el teorema del valor intermedio garantiza que hay al menos un cero real entre 0 y 4.

11. 5x 0 x 6 3 o x 7 86; 1 - q, 32 18, q 2

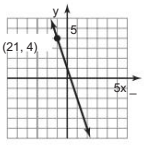
12. 5x 0 x … - 3 o - 2… x … 06; 1 - q, - 34 3 - 2, 04

Revisión acumulativa (página 292)

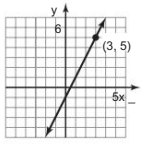
1. 126 2. 5x 0 x … 0 o x Ú 16; 1 - q, 04 o 31, q 2

3. 5x 0 - 1 6x 6 46; 1 - 1, 42

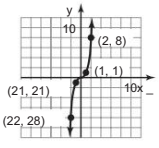
4. f1x2 = - 3x + 1



5. y = 2x - 1

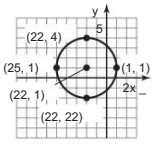


6.



7. No es una función; 3 tiene dos imágenes. 8. 50, 2, 46 9. e x ` x Ú 2 f; c 3 $\frac{3}{2}$, qb

10. Centro: 1 - 2, 12; radio: 3



11. intersecciones con el eje x: - 3, 0, 3; intercepción y: 0; simétrico con respecto al origen

12. y = - x + $\frac{2}{3}$ $\frac{17}{3}$ 13. No es una función; no pasa la prueba de la línea vertical.

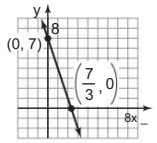
14. (a) 22 (b) x2 - 5x - 2 (c) - x2 - 5x + 2 (d) 9x2 + 15x - 2 (e) 2x + h + 5

15. (a) 5x 0 x ≠ 16 (b) No; (2, 7) está en el gráfico. c) 4; (3, 4) está en la gráfica. (d) (e) Racional

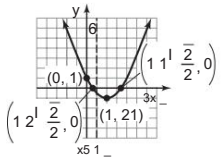
$\frac{7}{4}$; un $\sqrt{4}$, 9b está en el gráfico.

Machine Translated by Google

dieciséis.



17.



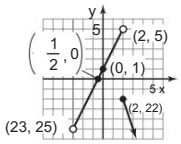
18, 6; y = 6x - 1

19. (a) intersecciones con el eje x: - 5, - 1, 5; intercepción y: - 3
(b) Sin simetría
(c) Ninguno
(d) Creciente: 1 - q, - 34 y 32, q 2; decreciente: 3 - 3, 24
(e) Un valor máximo local de 5 ocurre en x = - 3.
(f) Un valor mínimo local de -6 ocurre en x = 2.

20. extraño

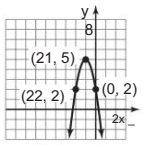
21. (a) Dominio: 5x 0 x 7 - 36 o 1 - 3, q 2
(b) intercepción x: - ; intercepción y: 1

(C)



(d) Rango: 5y 0 y 6 56 o 1 - q, 52

22.



23. (a) 1f + g2 1x2 = x2 - 9x - 6; dominio: todos los números reales
(b) una f segundo 1x2 = ; dominio: e x ` x ≠ -

24. (a) R1x2 = - x2 + 150x
b) 14.000 dólares
c) 750; $56,250
d) 75 dólares

CAPÍTULO 5 Funciones exponenciales y logarítmicas

5.1 Evalúe su comprensión (página 299)

4. función compuesta; f(g(x)) 5. F 6. c 7. a 8. F 10. (a) - 1 (b) - 1 (c) 8 (d) 0 (e) 8 (f) - 7 12. (a) 4 (b) 5 (c) - 1 (d) - 2

13. (a) 98 (b) 49 (c) 4 (d) 4 16. (a) 197 (b) - (c) 197 (d) - 2 18. (a) 225 (b) 522 (c) 1 (d) 0 20. (a) (b) (c) 1
d) 22. (a) (b) 1 (c) 5 (d) 0 24. (a) 1f g2 1x2 = 8x + 3; todos los números reales (b) 1g f2 1x2 = 8x + 12; todos los números reales
(c) 1f f2 1x2 = 4x + 9; todos los números reales (d) 1g g2 1x2 = 16x; todos los números reales 26. (a) 1f g2 1x2 = 3x2 - 1; todos los números reales
(b) 1g f2 1x2 = 9x2 - 6x + 1; todos los números reales (c) 1f f2 1x2 = 9x - 4; todos los números reales (d) 1g g2 1x2 = x4 ; todos los números reales
27. (a) 1f g2 1x2 = x4 + 8x2 + 16; todos los números reales (b) 1g f2 1x2 = x4 + 4; todos los números reales (c) 1f f2 1x2 = x4 ; todos los números reales
(d) 1g g2 1x2 = x4 + 8x2 + 20; todos los números reales 29. (a) 1f g2 1x2 = 31x ; 5x x ≠ 0, x ≠ 26 (b) 1g f2 1x2 = ; 5x x ≠ 16
(c) 1f f2 1x2 = ; 5x x ≠ 1, x ≠ 46 (d) 1g g2 1x2 = x; 5x x ≠ 06 32. (a) 1f g2 1x2 = ; 5x x ≠ - 4, x ≠ 06
(b) 1g f2 1x2 = ; 5x x ≠ 0, x ≠ 16 (c) 1f f2 1x2 = x; 5x x ≠ 16 (d) 1g g2 1x2 = x; 5x x ≠ 06

34. (a) 1f g2 1x2 = 22x + 5; e xx Ú - 2 f (b) 1g f2 1x2 = 22x + 5; 5x x Ú 06 (c) 1f f2 1x2 = 24 X; 5x x Ú 06
(d) 1g g2 1x2 = 4x + 15; todos los números reales 36. (a) 1f g2 1x2 = x; 5x x Ú 76 (b) 1g f2 1x2 = x ; todos los números reales
(c) 1f f2 1x2 = x4 + 14x2 + 56; todos los números reales (d) 1g g2 1x2 = 21x - 7 - 7; 5x x Ú 566 38. (a) 1f g2 1x2 = - ; e x ` x ≠ 3; x ≠ f
(b) 1g f21x2 = - ; 5xx ≠ -4; x ≠ - 16 (c) 1f f21x2 = - 2x + 8 ; 5xx ≠ -1; x ≠ 26 (d) 1g g2 1x2 = - x - 2 ; e x ` x ≠ ; x ≠ 3 f

39. 1 f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f a 1 2xb = 2 # x = x; 1g f 2 1x2 = g1 f 1x2 2 = g12x2 = # 2x = x

42. 1f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f1 23 x2 = 1 23 x2 3 = x; 1g f2 1x2 = g1f1x2 2 = g1x32 = 23 x3 = x

44. 1 f g2 1x2 = f1g1x22 = f a 1 9 1x + 62 b = 9 # 1x + 62 - 6 = x + 6 - 6 = x; 1g f2 1x2 = g1f1x22 = g19x - 62 = 19x - 6 + 62 = 9 9 9 # 9x = x

46. 1 f g2 1x2 = f1g1x2 2 = f a 1 a 1x - b2 b = ca 1 a 1x - b2 d + b = x; 1g f2 1x2 = g1f 1x2 2 = g1ax + b2 = 1ax + b - b2 = x

47. f1x2 = x4 ; g1x2 = 2x + 3 (Otras respuestas son posibles). 50. f1x2 = 2x; g1x2 = x2 + 1 (Otras respuestas son posibles).

52. f1x2 = x ; g1x2 = 2x + 1 (Otras respuestas son posibles.) 53. (f g)(x) = f(g(x)) = f(3) = 111 y 1g f2 1x2 = g(f(x)) =
g(7x2 - 8x2 + x - 9) = 3 55. a = 9 o a = - 9

57. (a) 1f g2 1x2 = f(f(x)) = ncx + nm + t (b) 1g f2 1x2 = g(f(x)) = cnx + ct + m (c) Los dominios de tanto f g como g f son todos reales 22500 - p

6 números. (d) nm + t = ct + m 59. S1t2 = pt dieciséis 61. C1t2 = 15.000 + 800.000t - 40.000t 2 63. C1p2 = + 800, 0 … p … 500 75

65. V1r2 = 6pr 3 67. (a) f1x2 = 0,7443x (b) g1x2 = 148,8705 (c) (g f)(x) = g(f(x)) = g(0,7443x) = 1108043x

(d) (g f)(1000) = 1108043(1000) = 110.804,3 yenes 69. (a) f1p2 = p - 500 (b) g1p2 = 0,8 p (c) (f g)(p) = f(gramo(p)) = 0,8 p - 500

(d) (g f)(p) = g(f(p)) = g(p - 500) = 0,8 p - 400 Aplicar el 20% primero es un mejor trato ya que se eliminará una porción mayor del frente.

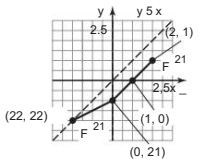
71. - 222, - 23, 0, 23, 222 73. 5 76. f es una función impar, por lo que f1 - x2 = - f1x2. g es una función par, entonces g1 - x2 = g1x2. Entonces 1f g2 1 -
x2 = f1g1 - x2 2 = f1g1x2 2 = 1f g2 1x2. Entonces f g es par. Además, 1g f2 1 - x2 = g1f1 - x2 2 = g1 - f1x2 2 = g1f1x2 2 = 1g f2 1x2, entonces g f
incluso. 78. - 5 79. 1f + g2 1x2 = 4x + 3; Dominio: todos los números reales; 1f - g2 1x2 = 2x + 13; Dominio: todos los números reales; 1f # g2 1x2 = 3x2 - 7x - 40;
Dominio: todos los números reales; gf gramo ≤ 1x2 = ; Dominio: 5x x ≠ 56

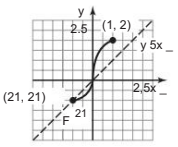
Machine Translated by Google

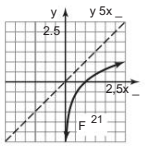
80. $\frac{1}{4}$, 4 81. Dominio: 5x x ≠ 36; Asíntota vertical: x = 3; Asíntota oblicua: y = x + 9 82. Vértice: 13, 82; Eje de simetría: x = 3; Cóncavo hacia abajo
83. - 1 … x … 7 84. b = 23 85. 1 - 4, 112,1 - 1, 52 86. 5210 87. $-\overline{1x} + 12\ \frac{3}{1c + 12}$ 88. 5 - 26, 0, 266

5.2 Evalúe su comprensión (página 311)

5. f1x12 ≠ f1x22 6. uno a uno 7. 3 8. y = x 9. [4, q 2 10. T 11. a 12. d 13. uno a uno 16. no uno a- uno
17. no uno a uno 20. uno a uno 21. uno a uno 24. no uno a uno 26. uno a uno

27. 

30. 

32. 

33. f1g1x2 2 = f a $\frac{1}{3}$ 1x - 42 segundo = 3 # $\frac{1}{3}$ 1x - 42 + 4 = x - 4 + 4 = x

g1f1x2 2 = g13x + 42 = $\frac{1}{3}$ [13x + 42 - 4] = $\frac{1}{3}$ # 3x = x

36. f1g1x2 2 = f a x^4 + 2b = 4ax 4 + 2b - 8 = x + 8 - 8 = x

g1f1x2 2 = g14x - 82 = + 2 = x - 2 + 2 = $\frac{4x - 8}{4}$

37. f1g1x2 2 = f123 $\overline{x + 82}$ = 123 $\overline{x + 82}$ 3 - 8 = x + 8 - 8 = x

g1f1x2 2 = g1x3 - 82 = 23 $\overline{1x3 - 82 + 8 = 23}$ x3 = x

40. f1g1x2 2 = f a $\frac{1}{x}$ b = $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ = x; x ≠ 0, g1f 1x2 2 = ga $\frac{1}{x}$ b = $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ = x, x ≠ 0

42. f1g1x2 2 = f a $\overline{4x - 3}$ segundo = $\frac{2 \# \frac{4x - 3}{2 - x} + 3}{\frac{4x - 3}{2 - x} + 4}$ = $\frac{214x - 32 + 312 - x2}{4x - 3 + 412 - x2}$ = $\frac{5x}{5}$ = x, x ≠ 2

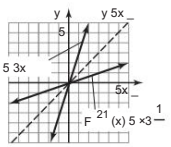
g1f1x2 2 = ga $\overline{2x + 3}$ b = $\frac{4 \# \frac{2x + 3}{x + 4} - 3}{2 - \frac{2x + 3}{x + 4}}$ = $\frac{412x + 32 - 31x + 42}{21x + 42 - 12x + 32}$ = $\frac{5x}{5}$ = x, x ≠ -4

44. (a) f^{-1} 1x2 = $\frac{1}{3}$x

f1f^{-1} 1x2 2 = f a $\frac{1}{3}$xb = 3 # $\frac{1}{3}$x = x

F^{-1} 1f1x2 2 = f^{-1} 13x2 = # 3x = x

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = Todos los números reales
Rango de f = Dominio de f^{-1} = Todos los números reales

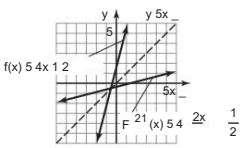
(C) 

45. (a) f^{-1} 1x2 = $\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

f1f^{-1} 1x2 2 = f a $\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$b = 4ax 4 - $\frac{1}{2}$b + 2 = x - 2 + 2 = x

F^{-1} 1f1x2 2 = f^{-1} 14x + 22 = $\frac{4x + 2}{4} - \frac{1}{2}$ = x + $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ = x

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = Todos los números reales
Rango de f = Dominio de f^{-1} = Todos los números reales

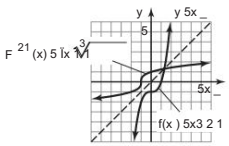
(c) 

48. (a) f^{-1} 1x2 = 23x + 1

f1f^{-1} 1x2 2 = f1 23x + 12 = 1 23x + 12 3 - 1 = x

F^{-1} 1f1x2 2 = f^{-1} 1x3 - 12 = 23 1x3 - 12 + 1 = x

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = Todos los números reales
Rango de f = Dominio de f^{-1} = Todos los números reales

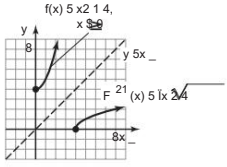
(c) 

50. (a) f^{-1} 1x2 = 2x - 4, x Ú 4

f1f^{-1} 1x2 2 = f1 2x - 42 = 1 2x - 42 2 1x2 + 4 = x

F^{-1} 1f1x2 2 = f^{-1} + 42 = 21x2 + 42 - 4 = 2x2 = x, x Ú 0

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = 5x x Ú 06
Rango de f = Dominio de f^{-1} = 5x x Ú 46

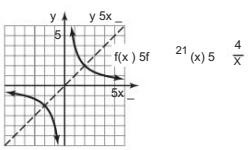
(C) 

52. (a) f^{-1} 1x2 = $\frac{4}{x}$

f1f^{-1} 1x2 2 = f a $\frac{4}{x}$b = $\frac{4}{\frac{4}{x}}$ = x

F^{-1} 1f1x2 2 = f -1 a $\frac{4}{x}$b = $\frac{4}{\frac{4}{x}}$ = x

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = 5x x ≠ 06
Rango de f = Dominio de f^{-1} = 5x x ≠ 06

(C) 

Machine Translated by Google

54. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

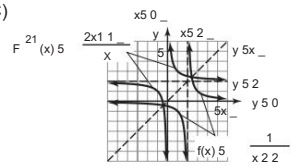
$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2x+1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{2x+1}{x} - 2} = \frac{x}{2x+1-2x} = x$$

$$F^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{x-2}\right)+1}{\frac{1}{x-2}} = \frac{2+x-2}{1} = x$$

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = $\{x : x \neq 2\}$

Rango de f = Dominio de f^{-1} = $\{x : x \neq 0\}$

(C)



56. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2-3x}{x}$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2-3x}{x}\right) = \frac{2}{3 + \frac{2-3x}{x}} = \frac{2x}{3x+2-3x} = \frac{2x}{2} = x$$

$$F^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2}{3+x}\right) = \frac{2 - 3\left(\frac{2}{3+x}\right)}{\frac{2}{3+x}} = \frac{2(3+x) - 3(2)}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = $\{x : x \neq -3\}$ =

Rango de f = Dominio de f^{-1} $\{x : x \neq 0\}$

58. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x}{x-3}$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{-2x}{x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{-2x}{x-3}\right)}{\frac{-2x}{x-3} + 2} = \frac{3(-2x) - 2(x-3)}{-2x + 2(x-3)} = \frac{-6x}{-6} = x$$

$$F^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x}{x+2}\right) = \frac{-2\left(\frac{3x}{x+2}\right)}{\frac{3x}{x+2} - 3} = \frac{-2(3x)}{3x - 3(x+2)} = \frac{-6x}{-6} = x$$

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = $\{x : x \neq -2\}$; Rango de f = Dominio de f^{-1} = $\{x : x \neq 3\}$

59. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{3x-2}\right) = \frac{2\left(\frac{x}{3x-2}\right)}{3\left(\frac{x}{3x-2}\right) - 1} = \frac{2x}{3x - (3x-2)} = \frac{2x}{2} = x$$

$$F^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x}{3x-1}\right) = \frac{\frac{2x}{3x-1}}{3\left(\frac{2x}{3x-1}\right) - 2} = \frac{2x}{6x - 2(3x-1)} = \frac{2x}{2} = x$$

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = $\{x : x \neq \frac{1}{3}\}$; Rango de f = Dominio de f^{-1} = $\{x : x \neq \frac{2}{3}\}$

62. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+4}{2x-3}$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{3x+4}{2x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{3x+4}{2x-3}\right) + 4}{2\left(\frac{3x+4}{2x-3}\right) - 3} = \frac{3(3x+4) + 4(2x-3)}{2(3x+4) - 3(2x-3)} = \frac{17x}{17} = x$$

$$F^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right) = \frac{3\left(\frac{3x+4}{2x-3}\right) + 4}{2\left(\frac{3x+4}{2x-3}\right) - 3} = \frac{3(3x+4) + 4(2x-3)}{2(3x+4) - 3(2x-3)} = \frac{17x}{17} = x$$

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = $\{x : x \neq \frac{3}{2}\}$; Rango de f = Dominio de f^{-1} = $\{x : x \neq \frac{3}{2}\}$

64. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x+3}{x-2}$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{-2x+3}{x-2}\right) = \frac{2\left(\frac{-2x+3}{x-2}\right) + 3}{\frac{-2x+3}{x-2} + 2} = \frac{2(-2x+3) + 3(x-2)}{-2x+3 + 2(x-2)} = \frac{-x}{-1} = x$$

$$F^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x+3}{x+2}\right) = \frac{-2\left(\frac{2x+3}{x+2}\right) + 3}{\frac{2x+3}{x+2} - 2} = \frac{-2(2x+3) + 3(x+2)}{2x+3 - 2(x+2)} = \frac{-x}{-1} = x$$

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = $\{x : x \neq -2\}$; Rango de f = Dominio de f^{-1} = $\{x : x \neq 3\}$

Machine Translated by Google

66. (a) $f^{-1}\ 1x2 = \dfrac{2}{21 - 2x}$

$f1f^{-1}\ 1x2\ 2 = f\ a\ 2\dfrac{}{21-2x\ _}$ segundo $= \dfrac{\dfrac{4}{1 - 2x} - 4}{2\dfrac{4}{\#\ 1 - 2x}} = \dfrac{4-411-2x2\ _}{2\ \#\ 4} = \dfrac{8x}{8} = x$

$F^{-1}\ 1f1x2\ 2 = f\ \underset{-1\ un}{\dfrac{x2 - 4}{2x2\ b}} = \dfrac{2}{B1 - 2\ \#\ \dfrac{x2 - 4}{2x2}} = \dfrac{2}{un\ x2} = 2x2 = x$, ya que $x\ 7\ 0$

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = 5x x 7 06; Rango de f = Dominio de f^{-1} $= e\ x\ `\ x\ 6\ \dfrac{1}{2}\ f$

68. (a) $f^{-1}\ 1x2 = 1x + 42^{\frac{3}{2}}, x\ Ú - 4$

$f1f^{-1}\ 1x2\ 2 = f\ a\ 1x + 42^{\frac{3}{2}}\ 2b = ¢\ 1x + 42^{\frac{3}{2}\ \frac{2}{3}}\ 2 \le - 4 = x + 4 - 4 = x$

$F^{-1}\ 1f1x2\ 2 = f\ -1\ 1x^{\frac{2}{3}} - 42 = ¢\ 1x^{\frac{2}{3}} - 42 + 4 \le = 1x^{\frac{3}{2}\ \frac{2}{3}\ 2}\ 2 = x$, ya que $x\ Ú\ 0$

(b) Dominio de f = Rango de $^{-1}$ = 5x x Ú 06; Dominio de f^{-1} = Rango de f = 5x x Ú - 46

70. (a) $f^{-1}\ f\ 1x2 = 25\ x3 + 2$

$f1f\ -1\ \ 1x2\ 2 = f1\ 25\ x3 + 22 = 33\ 1\ 25\ x3 + 22\ 5 - 2 = 23\ x3 + 2 - 2 = 23\ x3 = x$

$F^{-1}\ 1f1x2\ 2 = f1\ 23\ x5 - 22 = 35\ 1\ 23\ x5 - 22\ 3 + 2 = 25\ x5 - 2 + 2 = 25\ x5 = x$

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = Todos los Números Reales; Dominio de f^{-1} = Rango de f = Todos los números reales

72. (a) $f^{-1}\ 1x2 = 32x - 2 + 1, x\ Ú\ 2$

$f1f^{-1}\ 1x2\ 2 = f132x - 2 + 12 = \dfrac{1}{9}\ 3\ 132x - 2 + 12 - 14\ 2 + 2 = \dfrac{1}{9}\ 332x - 24\ 2 + 2 = \dfrac{1}{9}\ \#\ 91x - 22 + 2 = x - 2 + 2 = x$

$F^{-1}\ 1f1x2\ 2 = f\ -1\ ¢\ \dfrac{1}{9}\ 1x - 12^{\ 2} + 2 \le = 3A\ 1\ \dfrac{}{9}\ (x - 1)2 + 2 - 2 + 1 = 3\ Un\ 1\ \dfrac{}{9}\ 1x - 12^{\ 2} + 1 = 3\ \#\ \dfrac{1}{3}\ 1x - 12 + 1 = x - 1 + 1 = x$

(b) Dominio de f = Rango de f^{-1} = 5x x Ú 16; Dominio de f^{-1} = Rango de f = 5x x Ú 26

73. (a) 0 (b) 2 (c) 0 (d) 1 75. 6 77. Dominio de f^{-1} : 3 - 2, q 2; rango de f^{-1} : 35, q 2 79. Dominio de g-1 : [6, q 2, rango de g-1 : 1 - q, 0]

81. Creciente en el intervalo (f102, f172) 83. $f^{-1}\ 1x2 = \dfrac{1}{\text{metro}}\ 1x - b2, m \neq 0$ 85. Cuadrante III

87. $f^{-1}\ 1x2 = \dfrac{x}{5}, x\ Ú\ 0$

89. (a) $r1d2 = \dfrac{d + 90,45}{6,95}$

(b) Aproximadamente 49 mph

91. (a) 79,9 kilogramos

(b) $h1W2 = \dfrac{G + 85,7}{2.3}$

(c)) Alrededor de 73 en

94. (a) 5g 30,600… g … 74,2006 o [30600, 74200]

(b) 5T 4220 … T … 15,1206 o [4220, 15,120]

(c) $g1T2 = \dfrac{T - 4220}{0,25} + 30.600,$

dominio de g: 5T 4220… T … 15,1206,
rango de g: 5g 30, 600 … g … 74,2006

95. (a) La gráfica es estrictamente decreciente sobre $t\ Ú\ 0$, por lo que es uno a uno

(b) $t1H2 = A\ 100 - H\dfrac{}{4.9}$

(c) Aproximadamente 2,02 segundos

98. $f^{-1}\ 1x2 = \dfrac{- dx + b}{cx - un}$; $f = f^{-1}$ si $a = - d$

99. (a) Dominio: 1 - q,q 2; Rango: 1 - q, 32 34, q 2

(b) $f^{-1}\ 1x2 = \begin{cases} \dfrac{}{2} & \text{si } x\ 6\ 3 \\ \dfrac{x - 4}{dx - 3} & \text{si } x\ Ú\ 4 \end{cases}$

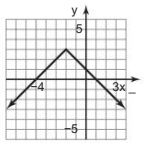
(c) Dominio: 1 - q, 32 34, q 2; Rango: 1 - q, q 2

103. No 107. $6xh + 3h2 - 7h$

108. Ceros: $\dfrac{- 5 - 213}{6}, \dfrac{- 5 + 213}{6}$;

intersecciones x: $\dfrac{- 5 - 213}{6}, \dfrac{- 5 + 213}{6}$; Vértice: a - $\dfrac{5}{6}$, - $\dfrac{13}{12}$b;

mínimo; cóncava arriba

109. 

110. Dominio: e x ` $x \neq - \dfrac{3}{2}$, $x \neq 2f$; Asíntota vertical: $x = - \dfrac{3}{2}$, Asíntota horizontal: $y = 3$

111. $1x + 32^{\ 2} + 1$ año $- 52^{\ 2} = 49$ 112. $y = - 2x - 7$ 113. Par 114. $D = 2y - x \dfrac{}{y - 2x}$

115. - 16 116. $\dfrac{2}{22x + 2h + 3 + 22x + 3}$

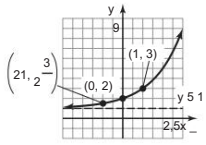
Machine Translated by Google

5.3 Evalúe su comprensión (página 326)

8. función exponencial; factor de crecimiento; valor inicial 9. a 10. T 11. T 12. a - 1, a b; (0, 1); (1, a) 13. 4 14. F 15. b 16. c

17. (a) 8.815 (b) 8.821 (c) 8.824 (d) 8.825 20. (a) 21.217 (b) 22.217 (c) 22.440 (d) 22.459 22. 1.265 24. 0.347 26. 3.320 28. 149.9 52 29. Ninguno de los dos 32. Exponencial; H1x2 = 4x 34. Exponencial; f1x2 = 3 # 2x 36. Lineal; H1x2 = 2x + 4 38.B 40.D 42.A 44.E _ _ _

45.



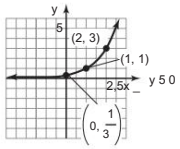
Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 7 16 o 11, q 2

Asíntota horizontal: y = 1

intercepción y: 2

48.



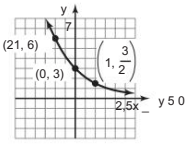
Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 7 06 o 10, q 2

Asíntota horizontal: y = 0

intercepción y: 1 3

50.



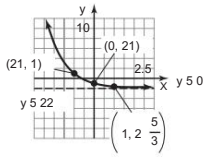
Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 7 06 o 10, q 2

Asíntota horizontal: y = 0

intercepción y: 3

52.



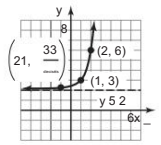
Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 7 - 26 o 1 - 2, q 2

Asíntota horizontal: y = - 2

intercepción y: - 1

54.



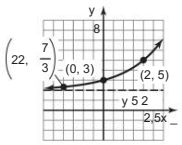
Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 7 26 o 12, q 2

Asíntota horizontal: y = 2

intercepción y: 9 4

56.



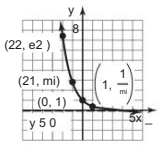
Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 7 26 o 12, q 2

Asíntota horizontal: y = 2

intercepción y: 3

57.



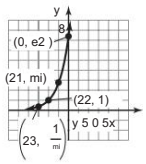
Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 7 06 o 10, q 2

Asíntota horizontal: y = 0

intercepción y: 1

60.



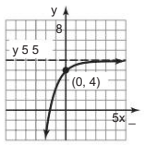
Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 7 06 o 10, q 2

Asíntota horizontal: y = 0

intercepción y: e2

62.



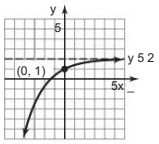
Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 6 56 o 1 - q, 52

Asíntota horizontal: y = 5

intercepción y: 4

64.



Dominio: Todos los números reales

Rango: 5y y 6 26 o 1 - q, 22

Asíntota horizontal: y = 2

intercepción y: 1

66. 556 67. 5 - 46 70. 526 72. e 7 2 f 74. 5 - 22, 0, 226

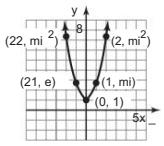
76. 536 77. 5 - 1, 76 80. 5 - 4, 26 82. 5 - 46 83. 51, 26 86. 49

88. 1 4 90. 5 92. f1x2 = 3x 94. f1x2 = - 6x 96. f1x2 = 3x + 2

98. a) 16; 14, 162 (b) - 4; a - 4, 16 b 100. (a) 1 ; a - 1, 4 b (b) 3; 13, 662 9 4 9

102. a) 60; 1 - 6, 602 (b) - 4; 1 - 4, 122 (c) - 2

104.

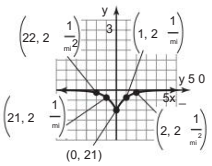


Dominio: 1 - q, q 2

Rango: [1, q 2

Intercepción: 10, 12

106.



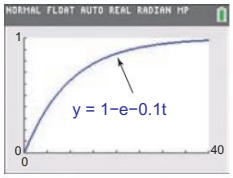
Dominio: 1 - q, q 2

Rango: [- 1, 02

Intercepción: 10, - 12

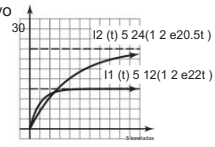
107. (a) Aproximadamente el 62,4% de la luz (b) Aproximadamente el 24,3% de la luz (c) Cada panel permite que sólo pase el 91% de la luz. 109. (a) Aproximadamente $16 231 (b) Aproximadamente $8 626 (c) El sedán vale el 90% de su valor el año anterior 111. (a) 80% (b) 40,96% (c) Sólo el 80% de los supervivientes anteriores vuelven a sobrevivir 113. Después de 1 h, 3,35 mg; después de 3 horas, estarán presentes 1,02 mg

115. (a) 0,632 (b) 0,982 (c) 1 (d)



(e) Aproximadamente 7 minutos

118. (a) Alrededor del 6% (b) Alrededor del 9% 119. (a) Alrededor del 79,3% (b) Aproximadamente 87,18% (c) 100% 121. (a) 5,41 amperios, 7,59 amperios, 10,38 amperios (b) 12 amperios (d) 3,34 amperios, 5,31 amperios, 9,44 amperios (e) 24 amperios (c), (f) yo



123. 36

125.

Final Denominador	Valor de Expresión	Comparar valor con e ? 2.718281828
1 + 1	2.5	2.5 6 mi
2 + 2	2.8	2.8 7e
3 + 3	2.7	2.7 6 mi
4 + 4	2.721649485	2.721649485 7 mi
5 + 5	2.717770035	2.717770035 6 e
6 + 6	2.718348855	2.718348855 7 mi

127. f 1A + B2 = aA+B = aA # aB = f 1A2 # f 1B2 129. f 1ax2 = aax = 1ax2 a = 3f 1x2 4a

Machine Translated by Google

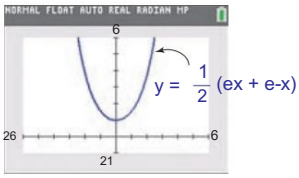
131. (a) f 1 - x2 = 2 1 $\frac{1}{}$ 1e-x + e-1-x2 2

= $\frac{1}{2}$ 1e-x + ex2

= $\frac{1}{2}$ 1ex + e-x2

= f1x2

(b)



(c) 1cosh x2 ^{2} - 1 pecado x2 ^{2}

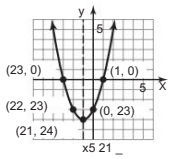
=c 1$\frac{1}{2}$ 1ex + e-x2 d ^{2} -c 1$\frac{1}{2}$ 1ex - e-x2 d ^{2}

= $\frac{1}{4}$ 3e2x + 2 + e-2x - e2x + 2 - e-2x 4

= $\frac{1}{4}$ # 4 = 1

134. 51, 26 135. 59 minutos 139. ax = 1a-12 x =¢1 $\frac{}{\text{un} \le x}$ 140. 1 - q, - 54 h 3 - 2, 24 141. 12, q 2 142. f1x2 = - 2x2 + 12x - 13

143. (a)



(b) Dominio: 1 - q, q 2; Rango: 3 - 4, q 2

(c) Decreciente: 1 - q, - 14 ; Creciente: 3 - 1, q 2

144. y $\frac{}{2}$ f 145. x2 + y2 = 1 146. 516, 1446

147. $1050 148. - 3 … x … 3 149. 4x + 2h - 7

5.4 Evalúe su comprensión (página 340)

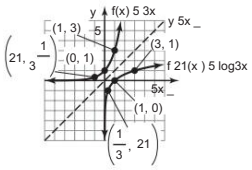
3. 5x x 7 06 o 10, q 2 4. un $\frac{}{1}$ - 1b, 11, 02, 1a, 12 5. 1 6. F 7. T 8. a 9. c 10. b 11. 2 = log3 9 14. 2 = loga 1.6 16. x = log2 7.2

18. x = ln 8 19. 23 = 8 22. a6 = 3 24. 3x = 2 26. ex = 4 27. 0 30. 2 32. - 3 34. 2 41. Todos los números reales excepto — $\frac{1}{}$ 36.4 38.2 _ — $\frac{1}{}$ 40. 5x x 7 36; 13, q 2

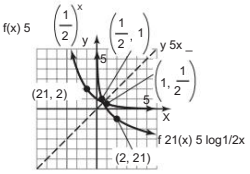
0; 5xx ≠06; 1 - q, 02 h 10, q 2 44. 5x x 7 106; 110, q 2 46. 5x x 7 - 16; 1 - 1, q 2

47. 5x x 6 - 1 o x 7 06; 1 - q, - 12 h 10, q 2 50. 5x x Ú 16; 31, q 2 52. 0.511 54. 30.099 56. 2.303 58. - 53.991 60. 22

61.



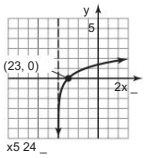
64.



66.B 68.D 70.A 72.E _ _ _ _

73. (a) Dominio: 1 - 4, q 2

(b)



(c) Rango: 1 - q, q 2

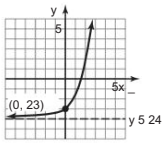
Asíntota vertical: x = - 4

(d) f $^{-1}$ 1x2 = ex - 4

(e) Dominio de f $^{-1}$: 1 - q, q 2

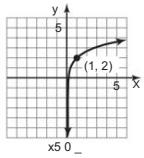
Rango de f $^{-1}$: 1 - 4, q 2

(F)



76. (a) Dominio: 10, q 2

(b)



(c) Rango: 1 - q, q 2

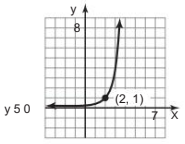
Asíntota vertical: x = 0

(d) f $^{-1}$ 1x2 = ex - 2

(e) Dominio de f $^{-1}$: 1 - q, q 2

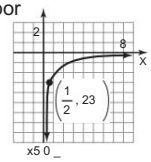
Rango de f $^{-1}$: 10, q 2

(F)



78. (a) Dominio: 10, q 2

(por



(c) Rango: 1 - q, q 2

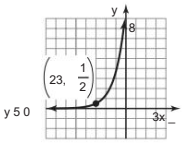
Asíntota vertical: x = 0

(d) f $^{-1}$ 1x2 = $\frac{1}{2}$ ej. + 3

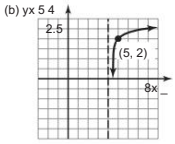
(e) Dominio de f $^{-1}$:1 - q, q 2

Rango de f $^{-1}$: 10, q 2

(F)



80. (a) Dominio: 14, q 2



(c) Rango: 1 - q, q 2

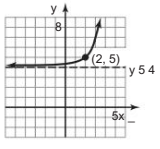
Asíntota vertical: x = 4

(d) f $^{-1}$ 1x2 = 10x - 2 + 4

(e) Dominio de f $^{-1}$: 1 - q, q 2

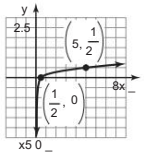
Rango de f $^{-1}$: 14, q 2

(F)



81. (a) Dominio: 10, q 2

(b)



(c) Rango: 1 - q, q 2

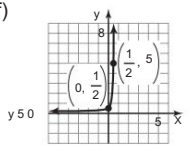
Asíntota vertical: x = 0

(d) f $^{-1}$ 1x2 = $\frac{1}{2}$ # 102x

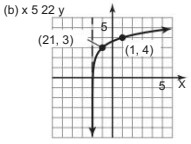
(e) Dominio de f $^{-1}$: 1 - q, q 2

Rango de $^{-1}$: 10, q 2

f (f)



84. (a) Dominio: 1 - 2, q 2



(c) Rango: 1 - q, q 2

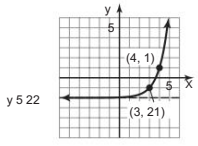
Asíntota vertical: x = - 2

(d) f $^{-1}$ 1x2 = 3x-3 - 2

(e) Dominio de f $^{-1}$: 1 - q, q 2

Rango de f $^{-1}$: 1 - 2, q 2

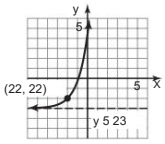
(F)



Machine Translated by Google

86. (a) Dominio: 1 - q, q 2

(b)

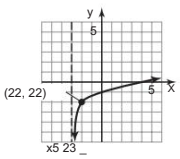


(c) Rango: 1 - 3, q 2
Asíntota horizontal: y = - 3

(d) f $^{-1}$ 1x2 = ln1x + 32 - 2

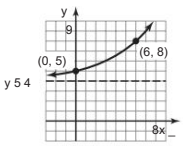
(e) Dominio de f^{-1} : 1 - 3, q 2
Rango de f^{-1} : 1 - q, q 2

(F)



88. (a) Dominio: 1 - q, q 2

(b)

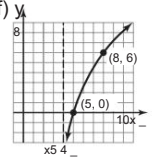


(c) Rango: 14, q 2
Asíntota horizontal: y = 4

(d) f $^{-1}$ 1x2 = 3 log2 1x - 42

(e) Dominio de f^{-1} : 14, q 2
Rango de $^{-1}$: 1 - q, q 2

f (f) y



89. 596 92. mi 28 $\overline{3}$ f 94. 546 96. 556

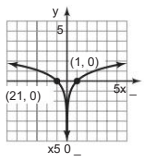
98. 536 100. 526 101. e en 10 $\overline{3f}$

104. y en $\overline{82f5}$ 106. 5 - 325, 3256

108. 5 - 26 110. e 5 ln $\frac{7}{\overline{5}}$ f 112. mi 2 - log 2 f $\frac{5}{}$

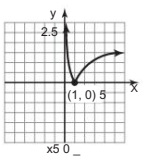
114. (a) e x ` x 7 - $\frac{1}{\overline{2}}$f; a - qb$\overline{2}$,
(b) 2; (40, 2) (c) 121; (121, 3) (d) 4

116.



Dominio: 5x x ≠ 06
Rango: 1 - q, q 2
Intercepciones: 1 - 1, 02, 11, 02

118.



Dominio: 5x x 7 06
Rango: 5y y Ú 06
Intercepción: 11, 02

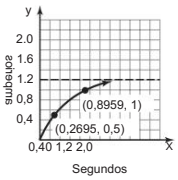
119. (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d)
Aumenta. (e) 0,000316 (f)
3,981 * 10-8

121. (a) Aproximadamente 4,62 km
(b) Aproximadamente 2,66 km

124. (a) Aproximadamente 5,11 minutos
(b) Aproximadamente 12,04 minutos
(c) La probabilidad no puede alcanzar el 100% porque e−0.1t nunca será igual a cero; de este modo, F(t) = 1 - e−0.1t nunca será igual a 1

125. Aproximadamente 4,58 h o 4 h 35 min

127. 0,2695 s
0,8959 s



129. 10 decibeles 131. 110 decibelios 133. M(122,899) = loga 122,899 $\overline{10-3}$ b * 8,1 135. (a) k ? 11.216b) 6.73
(c) 0,41% (d) 0,14% 137. 5646

139. 5 - 1, 56 141. Porque y = log1 x significa 1y = 1 = x, lo cual no puede ser cierto para x ≠ 1 143. Ceros: - 3, - 2

144. 12 145. f112 = - 5; f 122 = 17 146, 3 + yo; f1x2 = x4 - 7x3 + 14x2 + 2x - 20; un = 1

147. b 7 - $\frac{\overline{7 - 257}}{4}$, $\frac{\overline{7 + 257}}{4}$ r 148. 5x + 8y = 8 149. 5 - 31, 146 150. 151.1 cm 151. x2 + 2x + 4 152. 1x + 52

$\frac{1}{-}$, $\frac{1}{-}$, 3; intersecciones x: - 3, - 2 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 3

^{3} 1x - 32 ^{6} 111x + 232

5.5 Evalúe su comprensión (página 351)

1. 0 2. M 3. r 4. loga M + loga N 5. loga M - loga N 6. r loga M 7. 7 8. F 9. F 10. F 11. b 12. b 14. 29 15 - 4 18. 13 19. 1 22. 1

23. 3 26. $\frac{6}{5\frac{1}{}}$ 28. 4 30. a + b 32. b - a 34. 3a 36. 5 $\frac{1}{-}$ 1a + b2 38. 2 + log6 x 40. 6 log5 y 42. 1 + ln x 44. ln x - x 46. 2 loga u + 3 loga v

48. 2 en x + $\frac{}{-}$ ln11 - x2 50. 3 log2 x - log2 1x - 32 51. log x + log1x + 22 - 2 log1x + 32 54. 2 $\frac{1}{3}$ ln1x - 22 + $\frac{1}{-}$ ln1x + 12 - 3 $\frac{2}{3}$ ln1x + 42

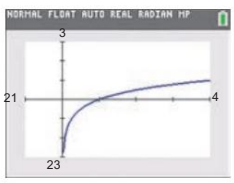
56. En 5 + En x + $\frac{1}{2}$ ln11 + 3x2 - 3 ln1x - 42 57. log5 u3 v4 60. log3 a 1 $\overline{x5/2}$ b 62. log4 c x $\overline{1x + 12}$ ^{4} d 63. - 2 ln1x - 12 66. log2 3x13x - 22 ^{4}

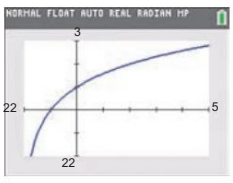
68. loga a $\frac{25x6}{\overline{22x + 3}}$ b 70. log2 cd 71. 2.321 74. 12.880 76. 5.615 78. 0.874 $\frac{1x + 12^{2}}{}$

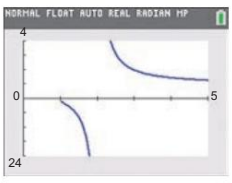
79. y = $\frac{\text{iniciar sesión x}}{\text{registro 4}}$

82. y = $\frac{\log1x + 22}{\text{registro 2}}$

84. y = $\frac{\log1x + 12}{\log1x - 12}$







86. (a)1f g2 1x2 = x; 5x x es cualquier número real6 o 1 - q, q 2
(b) 1g f2 1x2 = x; 5x x 7 06 o 10, q 2 (c) 5
(d) 1f h2 1x2 = ln x2 ; 5x x ≠ 06 o 1 - q, 02 h 10, q 2 (e) 2

88. y = 8Cx 90. y = Cx1x + 102 92. y = Ce17x

94. y = Ce-3x + 8 96. y = 1x + $\frac{23\ \overline{C12x + 52}\ 1>6}{22\ 1>9}$ 97, 3 99, 1

101. loga 1x + 2x2 $\overline{- 12}$ + loga 1x - 2x2 - 12 = $\overline{\text{loga 3 1x + 2x2 - 12 1x - 2x2 - 12}}$ 4 = loga 3x2 - 1x2 $\overline{- 12}$ 4 = loga 1 = 0

103. ln11 + e2x2 = ln[e2x 1e-2x + 12] = ln e2x + ln1e-2x + 12 = 2x + ln11 + e-2x2

105. y = f1x2 = log x; ay = x implica ay = a 1 $\overline{\text{a b -y}}$ = x, entonces - y = log1>a x = - f1x2.

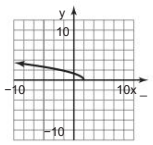
107. f1x2 = log x; f un 1 $\overline{\text{x b}}$ = loga $\frac{1}{\text{x}}$ = loga 1 - loga x = - f1x2 109. loga $\frac{\text{METRO}}{\text{norte}}$ = loga 1M # N -12 = loga M + loga N $^{-1}$ = loga M - loga N.

Machine Translated by Google

112. $\log_b a = \frac{\text{registro b}}{\text{log a}} = \frac{1}{\text{iniciar sesión}}$ 114. $\log_a bm = \frac{\text{loga bm}}{\text{loga an}} = \frac{\text{mloga b}}{\text{norte}} = \frac{\text{metro}}{\text{norte}}\text{loga b}$

119. 5 - 1.78, 1.29, 3.496 120. Una solución real repetida (doble raíz) 121. - 2, 5 $\frac{1}{3}, \frac{-5-\sqrt{221}}{2}, \frac{-5+\sqrt{221}}{2}$

122.



Dominio: 5x x … 26 o 1 - q, 24
Rango: 5y y Ú 06 o 30, q 2

123. ¢ - q, 5 R 124. 5x - 9 6 x 6 76 o 1 - 9, 72 125. Aproximadamente 4,58 hrs, o 4 hrs 35 min

126. Centro: 15, - 22; radio: 8 127, 7 128. Impar

5.6 Evalúe su comprensión (página 358)

6. 5166 8. mi 16 $\sqrt{5}$ f 10. 5116 12. 5 - 64, 646 14. 5 - 6, 76 16. 5646 17. e 1 $\sqrt{3}$ f 20. 576 22. 556 24. b 16 $\sqrt{3}$ r 25, 5 - 66 28, 5 - 26

30. 5 - 1 + 21 + e46 32. e - 15 + 5213 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f 34. 526 35. mi 9 $\sqrt{2}$ f 38. 576 40. 5 - 2 + 4226 42. 5 - 23, 236

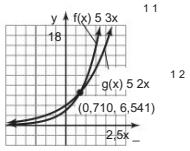
44. mi $\sqrt{9}$’ 243 f 46. 586 47. 5log2 106 = e 1 $\sqrt{\log 2}$ f 50. 5 - log8 1.26 = e - 56. e ln $\frac{\text{en 1.2}}{\text{En 8}}$ f 52. e 1 $\sqrt[\text{registro2}]{3}$ $\frac{8}{5}$ f = c ln 32 $\frac{\sqrt{8}}{\text{ln 5}}$ 54. e $\frac{\text{en 3}}{\text{2 en 3 + en 4}}$ f

0.6 + $\frac{\text{en 7}}{\ln 7}$ f 57. 506 60. e ln p $\sqrt{1 + \ln p}$ f 62. e ln 3 $\sqrt{\ln 2}$ f 64. 506 65. e log4 1 - 2 + 272 f 68. 5log5 46 70. No hay solución real

72. 5log4 56 74. 52.796 75. 5 - 0.576 78. 5 - 0.706 80. 50.576 82. 50.39, 1.006 84. 51.326 86. 51.316

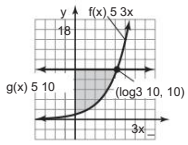
87. a) 556; 15, 32 (b) 556; 15, 42 (c) 516; sí, en 11, 22 (d) 556 (e) e - 11 f

89. (a), (b)

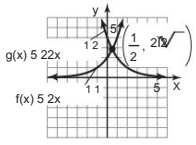


(c) 5x x 7 0,7106 o 10,710, q 2

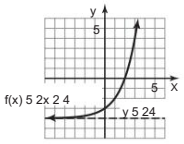
91. (a), (b), (c)



93. (a), (b), (c)



95. (un)



(b) 2 (c) 5x x 6 26 o 1 - q, 22

98. (a) 2005 (b) 2030 100. (a) Después de 2,4 años (b) Después de 3,8 años (c) Después de 9,4 años 102. 516 104. e $\frac{1}{4}$’ 4f 105. 53log 36 107. e - 3, $\frac{1}{4}$’ 2 f

108. uno a uno 109. 1f g2 1x2 = $\frac{x+5}{\text{; 5x x ≠ 3, x ≠ 116 110. 5x x Ú 16 o 31, q 2 111. 596 112. 6 113. - x + 11 1x - 22 1x + 22}}$ $\frac{}{x^2+7x-10}$

114. $\sqrt{4210}$ 115. 6 $\frac{1}{}$ 116. $\frac{1}{2x+\sqrt{6+2x}}$

5.7 Evalúe su comprensión (página 367)

3. director 4. yo; Prt; interés simple 5. tasa de interés efectiva 6. a 7. $108,29 10. $969,56 12. $1394,19 13. $1246,08 15. $88,72 18. $1444,79

20. $713.53 22. $102.00 23. 5.095% 26. 4.081% 28. 6, compuesto $\frac{1}{4}$ anualmente 30. 9% compuesto mensual 31. 25.992% 34. 24.573%

35. (a) Aproximadamente 8,69 años (b) Aproximadamente 8,66 años 38. 6,823% 40. Aproximadamente 4,81 años 42. Aproximadamente 2,53 años (o 2 años, 6 meses) 43. $274.211,88

45. Aproximadamente $4.719,77 47. Aproximadamente $4.053,36 49. El segundo banco ofrece $12.388,25, que es una mejor oferta que el primer banco. 51. Susan tiene £24.005,10; Chloe tiene £22 408,45 53. (a) £46 920 (b) £22 838 55. 64,9 año 58. $1 802,86 60. Aproximadamente 2,577 %

62. 34,31 años 64. (a) Alrededor de $2051,10 (b) Alrededor de $2018,97 66. Alrededor de $5213,09

67. (a) Aproximadamente 5,42 años (b) Aproximadamente 16,24 años

(C) $\frac{\text{en m}}{\text{r}}$

norte lna1 + norte segundo

70. (a) Aproximadamente 3,757% (b) Aproximadamente 14 años (o en 2009) 72. Aproximadamente 30 años

76. R = 0; si 77. f $^{-1}$ 1x2 = $\frac{2x}{x-1}$

78. - 2, 5; f1x2 = 1x + 22 ^{2} 1x - 52 1x2 + 12 79. 566

80. 2x1x + 32 1x - 52 1x + 52 81. 1f g2 1x2 = 45x2 - 18x - 7

82. Dominio: 1 - q,q 2; Rango: 1 - q, 94

83. Verticales: x = 7; horizontal: ninguno; oblicuo: y = 2x + 9

84. y = 4x - 18 85. 3

5.8 Evalúe su comprensión (página 379)

1. (a) P(0) = 900e(0.07)# (10) = 900 insectos (b) Tasa de crecimiento: k = 0.07 = 7, (c) Aproximadamente 1812 insectos (d) Aproximadamente 3.7 días (e) Aproximadamente 9.9 días

3. (a) Tasa de descomposición: k = - 0,0244 = - 2,44, (b) Aproximadamente 491 tumbas (c) Aproximadamente 56,8 años (d) Aproximadamente 28,4 años

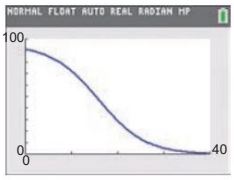
5. (a) N1t2 = N0ekt (b) Aproximadamente 1960 mosquitos (c) Aproximadamente 11,6 días 7. (a) N1t2 = N0ekt (b) 25.198 10. Aproximadamente 33,122 gr

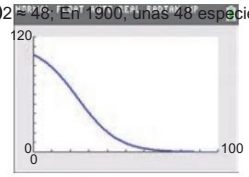
11. Hace aproximadamente 2654 años 13. (a) Aproximadamente a las 2:23 pm (b) Aproximadamente 11 min (c) La temperatura de la sartén se acerca a 72°F.

Machine Translated by Google

15. 18,63°C; 25,1°C 17. Aproximadamente 7,79 días (o 187 horas) 19. 0,26 M; 6,58 h o 395 min 21. Aproximadamente 20,8 días

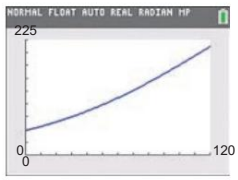
23. (a) En 1984, el 91,8% de los hogares hacían 27. (un) 25. (un) (a) f(0)2 ≈ 48; En 1900, unas 48 especies invasoras no poseían un ordenador personal.
estaban presentes en los Grandes Lagos. b) 1,7%

(b) 



(b) 0,78, o 78%

c) 50 personas

(C) 

(c) 70,6% (d) Durante 2011

(d) A medida que n aumenta, la probabilidad disminuye.

(d) Alrededor de 176 (e) Durante 1999

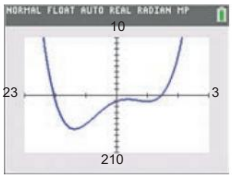
30. (a) P1t2 = 40132 t>30 (b) La población dentro de 47 días será alrededor de 224 (c) La población llegará a 640 en aproximadamente 76 días

(d) P1t2 = 40e0.037t 31. f1x2 = - $\frac{3}{2}$x + 7 32. Ninguno

33. 2 en x + $\frac{1}{2}$ ln y - ln z 34. 5x x ≠ - 4, x ≠ 26

35. 1g - f2 1x2 = 1x - $\frac{x2 - 2x - 13}{32\ 1x - 42\ 22}$ 36. intersecciones x: $\frac{5 - \sqrt{217}}{4}, \frac{5 + \sqrt{217}}{4}$;

Intersección con el eje y: 1 37. b - $\frac{\sqrt{22}}{2}, \frac{\sqrt{22}}{2}$ r 38. y = - 1,0714x + 3,9048; r = - 0,985

39. 

Mínimos locales: f1 - 1,372 = - 5,85 y f112 = - 1

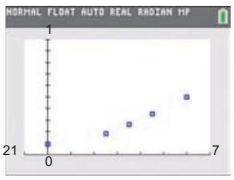
Máximo local: f10,372 = - 0,65

Creciente: 3 - 1,37, 0,374 h 31, 34

Decreciente: 3 - 3, - 1.374 h 30.37, 14

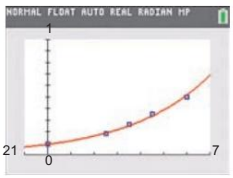
40. $\frac{40x + 45}{312x + 32}^{2/3}$

5.9 Evalúe su comprensión (página 386)

1. (una) 

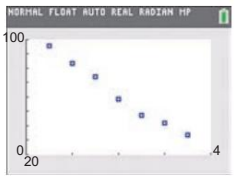
(b) y = 0,090311,33842x

(c) N1t2 = 0,0903e0,2915t

(d) 

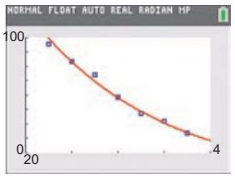
(mi) 0,69

(f) Después de aproximadamente 7,26 horas

3. (una) 

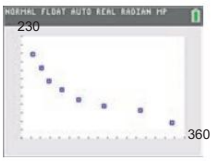
(b) y = 118,722610,70132 x

(c) A1t2 = 118,7226e-0,3548t

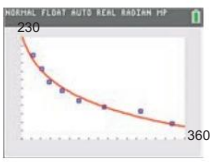
(d) 

(e) 28,7%

(f) k = - 0,3548 = - 35,48% es la tasa de crecimiento exponencial. Representa la tasa a la que está disminuyendo el porcentaje de pacientes que sobreviven al cáncer de mama en estadio avanzado.

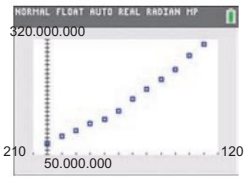
5. (a) 

20110 (b) y = 344,5217 - 37,2566 ln x

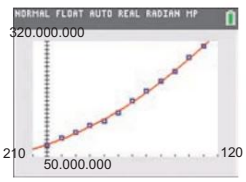
(C) 

20110 (d) 188 mil millones de libras

(e) Menos de 2 mil millones de libras

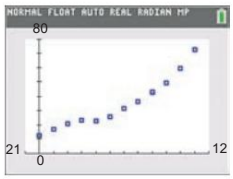
7. (un) 

(b) y = 1 $\frac{762.176.844,4}{+ 8,7428e-0,0162x}$

(C) 

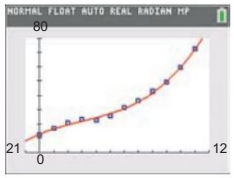
d) 762.176.844

(e) Aproximadamente 315.203.288 (f) 2023

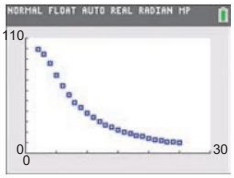
9. (un) 

(b) Cúbico

(c) y = 0,0607x3 - 0,5533x2 + 4,1390x + 13,1560

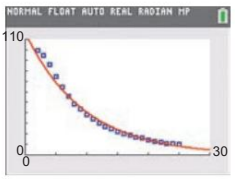
(d) 

e) Alrededor de 186.400 millones de dólares

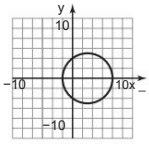
11. (un) 

(b) Exponencial

(c) y = 115,577910,90122 x

(d) 

e) 5,1%

12. f1x2 = 1x + 1 $\frac{1}{-32}$ 1x + 12 3 ^{2} 1x - 22 13. 23 14. 

15. 1 - 3, - 22 16. f1x2 = - 2x - 4 17. b 2 - 219 $\frac{2 - \sqrt{219}}{3}, \frac{2 + \sqrt{219}}{3}$ r

18. 5x 0 - 5 6 x … - 1 o x 7 56 o 1 - 5, - 14 h 15, q 2

19. R = f1 - 32 = 0; si 20. 6

21. La función f es un polinomio por lo que es una función continua, y f1 - 22 = - 21; f1 - 12 = 3; cero: - 1,32

Ejercicios de repaso (página 391)

1. (a) - 65 (b) 665 (c) 23 (d) 2 2. (a) 211 (b) 1 (c) 326 + 2 (d) 19 3. (a) 215 (b) 328 - 5 (c) 22 (d) - 38

4. 1f g2 1x2 = 1 - 3x, todos números reales; 1g f2 1x2 = 7 - 3x, todos números reales; 1f f2 1x2 = x, todos números reales; 1g g2 1x2 = 9x + 4, todos los números reales

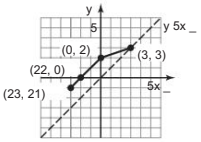
5. El dominio de f es 5x x Ú 16, el dominio de g es xx es cualquier número real}, el dominio de f g: {xx ≠ - 2, x ≠ - 1}, el dominio de g f: {xx Ú 1}, dominio de f f: {xx Ú 2}, dominio de g g: {xx es cualquier número real}

Machine Translated by Google

6. 1f g2 1x2 = $\frac{1+x}{1-x}$, 5x x ≠ 0, x ≠ 16; 1g f2 1x2 = $\frac{x-1}{x+1}$, 5x x ≠ - 1, x ≠ 16; 1f f2 1x2 = x, 5x x ≠ 16; 1g g2 1x2 = x, 5x x ≠ 06

7. (a) La función es uno a uno (b) Inversa: {(2, 32, 110, 52, 15, 22, 13, 7)}

8.



9. f1g1x2 2 = f ¢1 $\sqrt[5]{}$x + 2≤ = 5¢1 $\sqrt[5]{}$x + 2≤ - 10 = x + 10 - 10 = x

g1f1x2 2 = g15x - 102 = 15x - 102 + 2 = x - 2 + 2 = x

10. f1g1x2 2 = f ¢4 $\sqrt{1-x}$≤ = $\frac{\frac{4}{1-x} - 4}{\sqrt{\frac{4}{1-x}}} = \frac{4-411-x2}{4} = \frac{4-4+4x}{4} = \frac{4x}{4}$ = x, x ≠ 1

11. f $^{-1}$ 1x2 = $\frac{2x+3}{5x-2}$

g1f1x2 2 = g¢ x - 4x ≤ = $\frac{4}{1-\frac{x-4}{x}} = \frac{4x}{x-1x-42} = \frac{4x}{4}$ = x, x ≠ 0

f1f $^{-1}$ 1x2 2 = $\frac{2a\sqrt{2x+23}b+3}{5a\sqrt{2x-2}3egundo-2}$ = x

12. f $^{-1}$ 1x2 = $\frac{x+1}{x}$

f1f $^{-1}$ 1x2 2 = $\frac{1}{\frac{x+1}{x}-1}$ = x

F $^{-1}$ 1f1x2 2 = $\frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}}$ = x

Dominio de f = rango de f^{-1} = todos los números reales excepto 1

Rango de f = dominio de f^{-1} = todos los números reales excepto 0

F^{-1} 1f1x2 2 = $\frac{2a\sqrt{2x+23}b+3}{5a\sqrt{2x-2}3egundo-2}$ = x

Dominio de f = rango de f^{-1} = todo real números excepto 5 $\frac{2}{}$

Rango de f = dominio de f^{-1} = todo real números excepto 5 $\frac{2}{}$

13. f $^{-1}$ 1x2 = x2 + 2, x Ú 0

f 1 f $^{-1}$ 1x2 2 = 2x2 + 2 - 2 = x = x, x Ú 0

F^{-1} 1 f 1x2 2 = 1 $\sqrt{2x-22}$ ^{2} + 2 = x

Dominio de f = rango de f^{-1} = 32, q 2

Rango de f = dominio de f^{-1} = 30, q 2

14. f $^{-1}$ 1x2 = 1x - 12 ^{3};

f 1 f $^{-1}$ 1x2 2 = 1 1x - 12 32 1>3 + 1 = x

F^{-1} 1f 1x2 2 = 1x1>3 + 1 - 12 = ^{3} = x

Dominio de f = rango de f^{-1} 1 - q, q 2

Rango de f = dominio de f 1 $^{-1}$ = 1 - q, q 2

15. (a) 16 (b) 4 (c) 64 — (d) - 3

16. 5 = log3 z 17. 37 = z

18. e x ` x 7 $\sqrt[2]{3}$f; un $\sqrt[2]{3}$, qb

19. 5x x 6 1 o x 7 26; 1 - q, 12 h 12, q 2

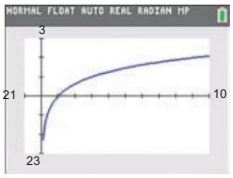
20. 3 21. 22 $\sqrt{22}$. 0.4

23. log5 x + log5 y - 2 log5 z

24. 8 log2 a + 2 log2 b

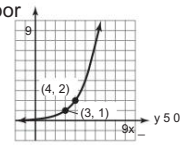
25. 2 iniciar sesión x + $\frac{1}{2}$ log1x3 + 12 26. 2 ln 12x + 32 - 2 ln 1x - 12 - 2 ln 1x - 22 27. log2 $\frac{x32}{(x2+1)3}$ 28. - 2 ln1x + 12 29. ln c $\frac{162x\sqrt{2x+1}}{2x\sqrt{1x-42}}$ d 30. 2.124

31.



32. (a) Dominio de f: 1 - q, q 2

(por



(c) Rango de f: 10, q 2

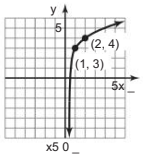
Asíntota horizontal: y = 0

(d) f $^{-1}$ 1x2 = 3 + log2x

(e) Dominio de f^{-1} : 10, q 2

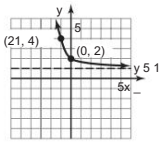
Rango de f^{-1} : 1 - q, q 2

(F)



33. (a) Dominio de f: 1 - q, q 2

(b)



(c) Rango de f: 11, q 2

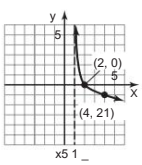
Asíntota horizontal: y = 1

(d) f $^{-1}$ 1x2 = - log3 1x - 12

(e) Dominio de f^{-1} : 11, q 2

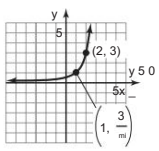
Rango de f^{-1} : 1 - q, q 2

(F)



34. (a) Dominio de f: 1 - q, q 2

(b)



(c) Rango de f: 10, q 2

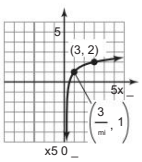
Asíntota horizontal: y = 0

(d) f $^{-1}$ 1x2 = 2 + ln¢ x $\sqrt{3}$ ≤

(e) Dominio de f^{-1} : 10, q 2

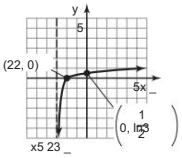
Rango de f y $^{-1}$: 1 - q, q 2

(F)



35. (a) Dominio de f: 1 - 3, q 2

(b)



(c) Rango de f: 1 - q, q 2

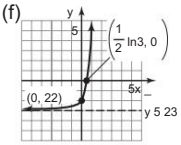
Asíntota vertical: x = - 3

(d) f $^{-1}$ 1x2 = e2x - 3

(e) Dominio de f^{-1} : 1 - q, q 2

Rango de $^{-1}$: 1 - 3, q 2

f (f)

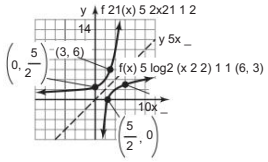


Machine Translated by Google

36. mi - 5/3 f 37. e - 1 - 23 2 , - 1 + 23 / 2 f 38. mi 1 4 f 39. mi 2 en 5 - en 3 f 40. mi - 2, 6 f 41. 5836 42. mi 1 2 , - 3 f

43. 516 44. 556 45. 51 - ln 56 46. e log3 1 - 2 + 27 2 f = c ln 1 - 2 + 27 2 / en 3 s

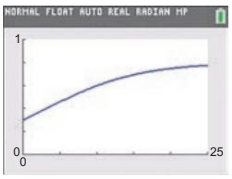
47. (a), (e)



(b) 3; (6, 3)
c) 10; (10, 4)
(d) e x ` x 7 5/2 por un 8, qb
(mi) f^-1 1x2 = 2x-1 + 2

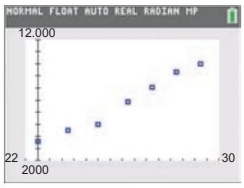
48. (a) 37,3 W (b) 6,9 dB 49. (a) 11,77 (b) 9,56 pulg.
50. (a) 9,85 años (b) 4,27 años 51. $20.398,87; 4,04%; 17,5 años
52. $41,668.97 53. Hace 24,765 años 54. 55.22 min, o 55 min, 13 seg
55. 8.153.581.530 56. 7,204 g; 0,519 gramos

57. (a) 0,3 (b) 0,8
(C)

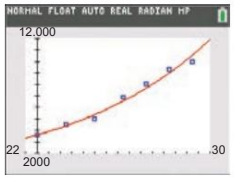


(d) En 2026

58. (un)

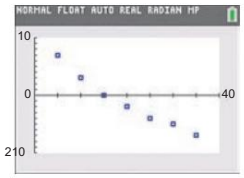


(b) y = 3610.268411.04062 x
(c) A1t2 = 3610.2684e0.0398t
(d)

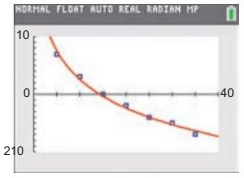


(e) 2027-28

59. (un)

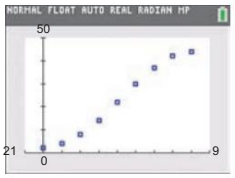


(b) y = 18,921 - 7,096 lnx
(C)

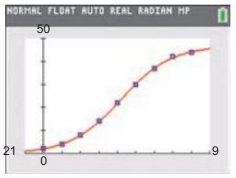


(d) Aproximadamente - 3°F

60. (un)



(b) C = 46.9292 / 1 + 21,2733e-0,7306t
(C)



d) Unas 47 personas; 50 personas
e) 2,4 días; durante la décima hora del día 3
f) 9,5 días

Prueba de capítulo (página 394)

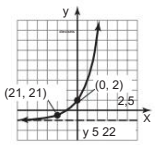
1. (a) f g = 2x 2x + 7 / + 3 ; dominio: e x ` x ≠ - 2 f (b) 1g 3/ f2 1 - 22 = 5 (c) 1f g2 1 - 22 = - 3

2. (a) La función no es uno a uno. (b) La función es uno a uno.

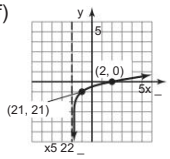
3. f _^-1 1x2 = 2 + 5x / 3x ; dominio de f = e x ` x ≠ 5/3 f, rango de f = 5y y ≠ 06; dominio de f^-1 = 5x x ≠ 06; rango de f^-1 = e y ` y ≠ 5/3f

4. El punto 1 - 5, 32 debe estar en la gráfica de f^-1 . 5. x = 5 6. b = 4 7. x = 625 8. - 2 9. 4 10. 125 11. 7

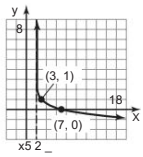
12. (a) Dominio de f: 5x - q 6 x 6 q 6 o 1 - q, q 2
(b)



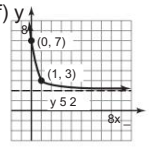
(c) Rango de f: 5y y 7 - 26 o 1 - 2, q 2
Asíntota horizontal: y = - 2
(d) f^-1 1x2 = log4 1x + 22 - 1
(e) Dominio de f^-1 : 5x 0 x 7 - 26 o 1 - 2, q 2
Rango de f^-1 : 5y 0 - q 6 y 6 q 6 o 1 - q, q 2
f (f)



13. (a) Dominio de f: 5x x 7 26 o 12, q 2
(b)



(c) Rango de f: 5y - q 6 y 6 q 6 o 1 - q, q 2
Asíntota vertical: x = 2
(d) f^-1 1x2 = 51-x + 2
(e) Dominio de f^-1 : 5x 0 - q 6 x 6 q 6o 1 - q, q 2
Rango de f^-1 : 5y y 7 26 o 12, q 2
f (f) y



14. 516 15. 5916 16. 5 - ln 26 17. e 1 - 213 - 1 + 213 / 2 , - 1 + 213 / 2 f 18. e 3 en 7 en 7f

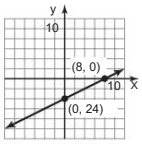
19. 52266 20. 2 + 3 log2 x - log2 1x - 62 - log2 1x + 32 21. Aproximadamente 250,39 días 22. (a) $1033,82 (b) $963,42 (c) 11,9 años

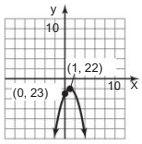
23. (a) Aproximadamente 83 dB (b) El umbral de dolor se superará si 31,623 personas gritan al mismo tiempo.

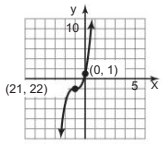
Machine Translated by Google

Revisión acumulativa (página 395)

1. Sí; nº 2. (a) 10 (b) 2x2 + 3x + 1 (c) 2x2 + 4xh + 2h2 - 3x - 3h + 1 3. a 1 $\frac{23}{2}$, $\frac{23}{2}$ b está en el gráfico. 4. 5 - 266

5. 

6. (un) 

(b) 5x - q 6 x 6 q 6 7. f1x2 = 21x - 42 ^{2} - 8 = 2x2 - 16x + 24 8. 

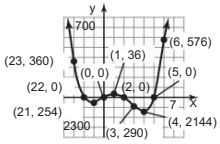
9. f1g1x2 2 = $\frac{4}{1x - 32}$ + $\frac{}{2}$; dominio: 5x x ≠ 36; 3

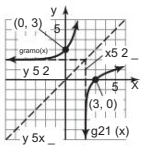
10. (a) y = 3x4

(b) intersecciones con el eje x: - 2, 0, 2, 5; intercepción y: 0

(c) - 2, 0, 2, 5: multiplicidad 1, cruces

(d) Como máximo 3 puntos de inflexión

(mi) 

11. (a), (c) 

Dominio g = rango g-1 = 1 - q, q 2

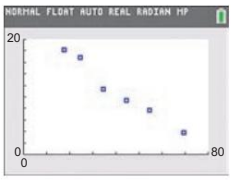
Rango g = dominio g-1 = 12, q 2

(b) g-1 1x2 = log3 1x - 22

12. e-3 $\frac{}{2}$ f 13. 526

14. (a) 5 - 16 (b) 5x x 7 - 16 o 1 - 1, q 2

c) 5256

15. (un) 

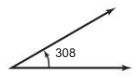
(b) logarítmico; y = 49,293 - 10,563 ln x

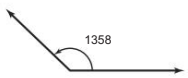
(c) Valor más alto de r

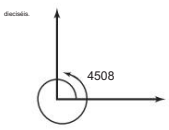
CAPÍTULO 6 Funciones trigonométricas

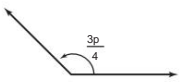
6.1 Evalúe su comprensión (página 406)

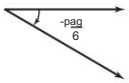
3. posición estándar 4. ángulo central 5. d 6. ru; r 2 $\frac{1}{}$ ^{2}u 7. b 8. ; t $\frac{s}{}$ $\frac{tu}{t}$ 9.T 10.F _ _

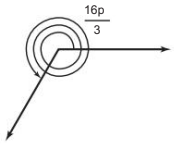
11. 

14. 



18. 

20. 

22. 

23. $\frac{pag}{6}$ 26. $\frac{11p}{4}$ 28. - $\frac{pag}{3}$ 30. 3p 32. - $\frac{4p}{3}$ 34. - $\frac{pag}{2}$ 35. 60° 38. - 390° 40. 810° 42. 27° 44. - 90° 46. - 204° 48. 0,30 49. - 0,70 52. 2,18

54. 179.91° 56. 401.07 ° 58. 531.70 ° 59. 40.17° 62. 50.24° 64. 9.15° 65. 40°19′12″ 68. 18°15′18″ 70. 19°59′24″ 71. 5m 74, 12 pies

76, 0,9 radianes 78, 3 $\frac{pag}{}$ ≈ 1,047 pulg. 79, 25 m2 82 , 213 ≈ 3,464 pies 84, 0,24 radianes 86, 3 $\frac{pag}{}$ ≈ 1,047 pulg2 88. s = 2,094 pies; A = 2.094 pies2

90. s = 14,661 yardas; A = 87,965 yd2 91. radianes, $\frac{2p}{3}$, ≈ 8,378 pulgadas; $\frac{5p}{6}$ radianes, ≈ 10,47 pulgadas 94. ≈ 19,63 m2 95. ≈ 1696,46 pies2

98. ≈ 56,4 pulg2 99. w = $\frac{1}{}$ radianes/seg, v = 240 $\frac{1}{20}$ cm/seg 102. v ≈ 18,1 millas/hora 103. ≈361,5 km>h 105. ≈ 517,1 rev/min 107. 61,54 pies

110. ≈ 756 millas/hora 111. ≈ 2486 millas/hora 113. rpm 115. ≈ 5,35 $\frac{3}{4}$ millas/hora 117. ≈ 25,51 rev/min 119. ≈ 27,872 millas/hora

121. Radio ≈ 3979 millas; circunferencia ≈ 25,000 mi 123. $\frac{3700}{4}$p pies cuadrados 125. ≈2.2 rev 133. x = - $\frac{7}{3}$ 134. e - 3, 5 $\frac{1}{}$ f 135. y = - x + 3 - 4

136. HA: y = 3; VA: x = 7 137. c = $\frac{5}{2}$ 138. mi $\frac{}{}$ f 139. 5x x ≠ - 3, x ≠ 36 140. 6x2 + 6xh + 2h2 141. 27x3 - 54x2 + 36x - 8

142, 1 - q, - 0,994, 30,20, 0,794

6.2 Evalúe su comprensión (página 423)

7. b 8. (0, 1) 9. a $\frac{22}{2}$, $\frac{22}{2}$ b 10. F 11. $\frac{y}{r}$; $\frac{x}{r}$ 12. a 13. sen t = ; $\frac{1}{}$ porque t = 2 $\frac{23}{2}$; tan t = ; $\frac{23}{3}$ = 2; segundo t = $\frac{223}{3}$; cuna t = 23

16. pecado t = $\frac{221}{5}$ porque t = - ; $\frac{2}{}$ = - ; $\frac{221}{2}$ $\frac{5221}{21}$ segundo t = - $\frac{5}{2}$; cuna t = - ; $\frac{2221}{21}$ 18. pecado t = $\frac{22}{2}$; porque t = - $\frac{22}{2}$;

tan t = - 1; csc t = 22; sección t = - 22; cuna t = - 1 20. sen t = - $\frac{1}{3}$; costo t = $\frac{222}{3}$; tan t = - ; $\frac{22}{4}$ = - 3; segundo t = $\frac{322}{4}$; cuna t = - 222

Machine Translated by Google

21. - 1 24. 0 26. - 1 28. 0 30. - 1 32. 2 $\frac{1}{122}$ + 12 34. 2 35. $\frac{1}{2}$ 38. 26 40. 4 41. 0 44. 222 + $\frac{423}{3}$ 46. 1

47. pecado $\frac{2p}{3} = \frac{23}{2}$; porque $\frac{2p}{3} = -\frac{1}{2}$; bronceado $\frac{2p}{3}$ =-23; csc $\frac{2p}{3} = \frac{223}{3}$; segundo $\frac{2p}{3}$ = - 2; cuna $\frac{2p}{3} = -\frac{23}{3}$

50. pecado 210° = - ; $\frac{1}{\cos 210°}$ = - ; bronceado 210° = ; csc 210° = $\frac{23}{2}$; segundos 210° = - 2 $\frac{23}{3}$; cuna 210° = $\frac{223}{3}$

51. pecado $\frac{3p}{4} = \frac{22}{2}$; porque $\frac{3p}{4} = -\frac{22}{2}$; broncearse $\frac{3p}{4}$ = - 1; csc $\frac{3p}{4}$ = 22; segundo $\frac{3p}{4}$ =-22; cuna $\frac{3p}{4}$ = - 1

54. pecado $\frac{8p}{3} = \frac{23}{2}$; porque $\frac{8p}{3} = -\frac{1}{2}$; bronceado $\frac{8p}{3}$ =-23; csc $\frac{8p}{3} = \frac{223}{3}$ segundo $\frac{8p}{3}$ = - 2; cuna; $\frac{8p}{3} = -\frac{23}{3}$

55. pecado 405° = $\frac{22}{2}$; cos 405° = $\frac{22}{2}$; bronceado 405° = 1; csc 405° = 22; segundos 405° = 22; cuna 405° = 1

58. sina - $\frac{\text{pag}}{6 \text{ segundo} = -\frac{1}{2}}$; cosa - $\frac{\text{pag}}{6 \text{ b} = \frac{23}{2}}$; tana- $\frac{\text{pag}}{6 \text{ segundo} = -\frac{23}{3}}$; csca - $\frac{\text{pag}}{6 \text{ b} = }$ - 2; seca - $\frac{\text{pag}}{6 \text{ b} = \frac{223}{3}}$; cota - $\frac{\text{pag}}{6 \text{ segundo} = }$ - 23

60. pecado1 - 135°2 = - ; $\frac{22}{\cos 1 - 135°2 = -\frac{22}{2}}$; tan1 - 135°2 = 1; csc1 - 135°2 = - 22; seg1 - 135°2 = - 22; cuna1 - 135°2 = 1

61. pecado $\frac{2\,5p}{2} = 1$; porque $\frac{5p}{2}$ = 0; el bronceado no está definido; csc = 1; segundo no está definido; cuna = 0 $\frac{5p}{2}$

64. pecado a - $\frac{14p}{3 \text{ segundo} = -\frac{23}{2}}$; porque un - $\frac{14p}{3 \text{ segundo} = -\frac{1}{2}}$; bronceado un - $\frac{14p}{3b = 23}$; csc a - $\frac{14p}{3 \text{ segundo} = -\frac{223}{3}}$; segundo un - $\frac{14p}{3 \text{ b} = }$ - 2; cuna un - $\frac{14p}{3 \text{ b} = \frac{23}{3}}$

65. 0,47 68. 1,07 70. 0,32 72. 3,73 74. 0,84 76. 0,02 77. sen u = ; porque tu = - ; tan u = $\frac{4}{-}$; csc u = $\frac{3}{5}$; segundo u = - ; cuna u = - 5 $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{4}$

80. pecado u = - ; $\frac{3213}{\text{porque tu} = \frac{}{13}}$; tan u = - ; $\frac{2213}{\text{csc tu} = -\frac{}{13}}$; segundo u = ; cuna u = - 2 $\frac{3}{\frac{213}{3}}$ $\frac{213}{2}$ $\frac{2}{3}$

82. pecado u = - ; $\frac{22}{\text{porque tu} = -\frac{22}{2}}$; tanu = 1; csc tu = - 22; segundo u = - 22; cuna tu = 1

84. pecado u = $\frac{3}{\text{porque tu} = 5}$; $\frac{4}{\text{tan u} = \frac{3}{4}}$; csc u = ; segundo u = ; $\frac{5}{\text{cuna u} = 5}$ $\frac{4}{3}$ 86. 0 88. 0 90. - 0.1 92. 3 94. 5 96. $\frac{23}{2}$ 98. $\frac{1}{2}$ 100. $\frac{3}{4}$

102. $\frac{23}{2}$ 104. 23 106. - $\frac{23}{2}$ 108. $\frac{1 + 23}{2}$ 110. - $\frac{1}{2}$ 112. $\frac{23}{2}$ 114. $\frac{22}{4}$ 116. (un) $\frac{22}{2}$; ap $\frac{}{4}$, $\frac{22}{2b}$ (b) a $\frac{22}{2}$, $\frac{\text{pag}}{4 \text{ b}}$ (c) ap $\frac{}{4}$, - 2b

117. Las respuestas variarán. Un conjunto de posibles respuestas es: $\frac{10p}{3}$, $\frac{4p}{3}$, $\frac{2p}{3}$, $\frac{8p}{3}$, $\frac{14p}{3}$.

119.

Ud.	bronceado U	$\frac{\text{bronceado U}}{\text{Ud.}}$
0,5	0,5463	1,0926
0,4	0,4228	1,0570
0.1	0,1003	1,0033
0,01	0,0100	1,0000
0.001	0,0010	1,0000
0.0001	0.0001	1.0000
0.00001	0,00001	1,0000

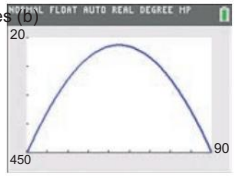
f(u) = tan u se aproxima a 1 cuando u se acerca a 0.

122. Alcance ≈ 698,76 pies, altura máxima ≈ 349,38 pies 124. R ≈ 19.541,95 m; Altura ≈ 2278,14 m

125. (a) ≈ 3,18 segundos (b) ≈ 2,96 segundos (c) ≈ 3,18 segundos

127. (a) ≈ 0,13 h (b) 0,5 h (c) ≈ 0,711 h (d) T(90°) = 1 + $\frac{2}{2 \text{ pecados } 90°}$ - $\frac{1}{2 \tan 90°}$. Pero tan 90° es indefinido, por lo que no podemos usar la fórmula de función para esta ruta. Sin embargo, la distancia sería de 2 millas en la arena y 4 millas de carretera. El tiempo total sería: $\frac{2}{2}$ + 1 = 2 horas. El camino sería dejar el Primera casa caminando 1 milla en la arena directamente hasta la carretera. Luego gira y camina 4 millas por la carretera y finalmente 1 milla en la arena hasta la segunda casa. 129. 11,9 pies 131. ≈ 70 pies

133.(a) 466,9 pies, 587,7 pies, 612,0 pies (b) u ≈ 0,678 138,8°2 o u ≈ 1,364178,2°2 (c) u ≈ 0,986156,5°2; esto es mayor que el ángulo necesario para obtener el alcance máximo. 135. (a) 16,56 pies (b)



(c) 67,5°

138. (a) valores estimados a la décima más cercana:
sen 1 ≈ 0,8; porque 1 ≈ 0,5; tan 1 ≈ 1,6; csc 1 ≈ 1,3; segundo 1 ≈ 2,0;
cuna 1 ≈ 0,6; valores reales a la décima más cercana: sen 1 ≈ 0,8; porque 1 ≈ 0,5;
tan 1 ≈ 1,6; csc 1 ≈ 1,2; segundo 1 ≈ 1,9; cuna 1 ≈ 0,6
(b) valores estimados a la décima más cercana: sen 5,1 ≈ - 0,9; porque 5,1 ≈ 0,4;
tan 5,1 ≈ - 2,3; csc 5,1 ≈ - 1,1; segundo 5,1 ≈ 2,5; cuna 5,1 ≈ - 0,4; valores
reales a la décima más cercana: sen 5,1 ≈ - 0,9; porque 5,1 ≈ 0,4;
tan 5,1 ≈ - 2,4; csc 5,1 ≈ - 1,1; segundo 5,1 ≈ 2,6; cuna 5,1 ≈ - 0,4

140. y = - $\frac{226}{5}$ 141. - $\frac{12}{13}$ 146. e x ` x 7 - $\frac{2}{5}$ f o q ¢ - $\frac{2}{5}$, ≤ 147. 4 - 3i, - 5 148. R = 134 149. 81p pies2

150. $\frac{7\{2157}{6}$ 151. f1x2 = 2x $\frac{1}{}$ 152. 3 - 3, 24

153, 3 - 5, - 42 154, 16, - 22 155 , 4x2 $\frac{x4 + 4}{}$

Machine Translated by Google

6.3 Evalúe su comprensión (página 439)

5. 2p; p 6. Todos los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\text{pag}}{2}$ 7. b 8. a 9. 1 10. F 11. $\frac{22}{2}$ 14. 1 16. 1 18. 23 20. $\frac{22}{2}$ 22. 0 24. 22 26. $\frac{23}{3}$

27. II 30. IV 32. IV 34. II 35. tan u = - ; cuna tu = - ; segundo $u = \frac{3}{4}$; csc tu = - $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{3}$ 38. tanu = 2; cuna u = $\frac{1}{2}$; segundo u = 25; csc tu = $\frac{25}{2}$

40. tan u = $\frac{23}{3}$; cuna tu = 23; segundo u = ; cuna u = - 222; segundo u = ; csc u = 2 42. tan u = - ; csc tu = - 3 $\frac{322}{4}$

43. porque tu = - $\frac{5}{13}$; tan u = - ; csc tu = 5 $\frac{13}{12}$; segundo u = - $\frac{13}{5}$; cuna u = - $\frac{5}{12}$ 46. pecado u = - $\frac{3}{4}$; tan u = ; csc tu = - ; segundo u = - ; cuna u = $\frac{5}{3}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{3}$

48. porque tu = - $\frac{12}{13}$; tan u = - $\frac{5}{12}$; csc u = $\frac{13}{-5}$; segundo u = $\frac{13}{12}$; cuna u = - 5 $\frac{12}{}$ 50. pecado u = $\frac{222}{3}$; tanu = - 222; csc u = ; segundo u = - 3; cuna u = - 23 $\frac{22}{4}$

52. porque tu = - $\frac{25}{3}$; tan u = - $\frac{225}{5}$; csc u = ; segundo u = - 2 $\frac{325}{5}$; cuna u = - $\frac{25}{2}$ 54. pecado u = - $\frac{}{2}$; porque tu $\frac{1}{= 2}$; tanu = - 23;

csc tu = - $\frac{223}{3}$; cuna u = - $\frac{23}{3}$ 56. pecado u = - $\frac{3}{5}$; porque tu = - ; csc tu = - ; segundo u = - ; cuna u = 5 $\frac{4}{3}$ 58. pecado u = $\frac{210}{10}$; porque tu = - $\frac{3210}{10}$;

csc u = 210; segundo u = - ; cuna $u = \frac{210}{3}$ = - 3 59. - $\frac{23}{2}$ 62. - $\frac{23}{3}$ 64. 2 66. - 1 68. - 1 70. $\frac{22}{2}$ 72. 0 74. - 22 76. $\frac{223}{3}$

78. 1 79. 1 82. 0 84. 1 86. - 1 88. 0 90. 0.9 92. 9 94. 0 96. Todos los números reales 97. Múltiplos impares de 100. Múltiplos impares de 2 2 $\frac{\text{pag}}{}$ $\frac{\text{pag}}{}$

102. - 1 … y … 1 104. Todos los números reales 106. y Ú 1 108. Impar; Sí; origen 110. Impar; Sí; origen 112. Incluso; Sí; eje y

114. (a) 2 $\frac{1}{}$ (b) $\frac{3}{2}$ 116. (a) - 2 (b) 6 118. (a) - 11 (b) - 33 120. ≈ 12,73 minutos 121. 130, 90, 70

123. Sea a un número real y P = 1x, y2 sea el punto del círculo unitario que corresponde a t. Considere la ecuación tan t = $\frac{y}{x}$ = a. Entonces y = ax.

Pero x2 + y2 = 1, entonces x2 + a2 x2 = 1. Entonces x = $\frac{1}{\sqrt{1 + a2}}$ y = $\frac{a}{\sqrt{1 + a2}}$; es decir, para cualquier número real a, existe un punto P = 1x, y2 sobre

círculo unitario para el cual tan t = a. En otras palabras, el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

125. Supongamos que hay un número p, 0 6 p 6 2p, para el cual sen1u + p2 = sen u para todo u. Si u = 0, entonces sen10 + p2 = sen p = sen 0 = 0, entonces p = p.

Si tu = $\frac{\text{pag}}{2}$, entonces sina $\frac{}{2}$ + pb = sina p $\frac{}{2}$b. Pero p = p. Así, sina 3p $\frac{}{2}$ b = - 1 = sina p $\frac{}{2}$ b = 1. Esto es imposible. Por lo tanto, el positivo más pequeño

número p para el cual sen1u + p2 = sen u para todo u es 2p. 127. segundo u = ; dado que $\frac{1}{\text{porque cos}}$ u tiene período 2p, también lo tiene sec u.

porque tú

129. Si P = 1x, y2 es el punto del círculo unitario correspondiente a u, entonces Q = 1 - x, - y2 es el punto del círculo unitario correspondiente a u + p. De este modo,

tan1u + p2 = $\frac{- y}{- x}$ = $\frac{y}{x}$ = tan u. Supongamos que existe un número p, 0 6 p 6 p, para el cual tan1u + p2 = tan u para todo u. Entonces, si u = 0, entonces

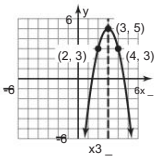
tan p = tan 0 = 0. Pero esto significa que p es múltiplo de p. Como no existe ningún múltiplo de p en el intervalo 10, p2, esto es una contradicción. Por tanto, el periodo de

f1u2 = tan u es p.

131. Sea P = 1x, y2 el punto del círculo unitario correspondiente a u. Entonces csc u = $\frac{1}{y}$ = $\frac{1}{\text{sen u}}$; seg u = $\frac{1}{x}$ = $\frac{1}{\text{porque u}}$; cuna u = $\frac{x}{y}$ = $\frac{1}{y/x}$ = $\frac{1}{\text{broncearte}}$.

133. 1sin u cos f2 ^{2} + 1sin u pecado f2 ^{2} + cos2 u = sen2 u cos2 f + sen2 u sen2 f + cos2 u = sen2 u1cos2 f + sen2 f2 + cos2 u = sen2 u + cos2 u = 1

136. $\frac{7}{5}$ 137. - $\frac{7}{13}$ 143. 1 f g2 1x2 = x2 - 14x + 46 144.



Vértice: (3, 5)
eje de simetría: x = 3

145. 5ln 6 + 46 146. 9 147. e 89 $\frac{}{}$ 16 f

148. - 8 y - 3 149. {21}

150. c = 35 151. 10, 32, 1 - 5, 02

152. 3x - 5 + $\frac{3}{2}$h

6.4 Evalúe su comprensión (página 452)

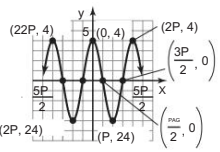
3. 1; $\frac{\text{pag}}{2}$ 4. 3; pág. 5. 3; 3 $\frac{\text{pag}}{}$ 6. T 7. F 8. T 9. d 10. d 11. (a) 0 (b) - 2 $\frac{\text{pag}}{}$ … X … $\frac{\text{pag}}{2}$ (c) 1 (d) 0, p, 2p

(e) f1x2 = 1 para x = - $\frac{3p}{2}$, $\frac{\text{pag}}{}$; f1x2 = - 1 para x = - 2 $\frac{\text{pag}}{2}$, $\frac{3p}{2}$ (f) - $\frac{5p}{6}$, - $\frac{\text{pag}}{6}$, $\frac{7p}{6}$, $\frac{11p}{6}$ (g) 5x *f* x = kp, k un número entero6

14. Amplitud = 5; período = 2p 16. Amplitud = 3; período = $\frac{\text{pag}}{2}$ 17. Amplitud = 6; período = 2 20. Amplitud = $\frac{1}{}$; período = $\frac{4p}{7}$

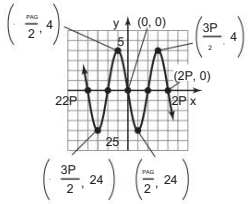
22. Amplitud = $\frac{10}{9}$; período = 5 24. F 26. A 28. H 30. C 32. J

34.



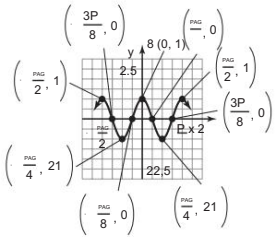
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 4, 44

35.



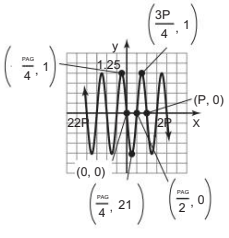
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 4, 44

38.



Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 1, 14

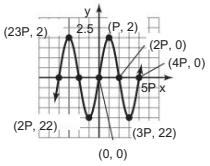
39.



Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 1, 14

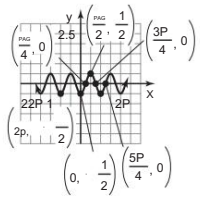
Machine Translated by Google

42.



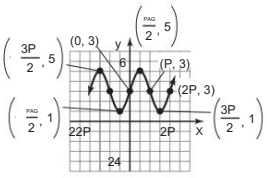
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 2, 24

43.



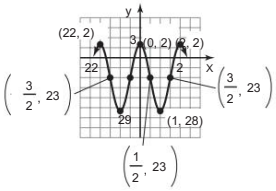
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: c - 1/2, 1/2 días

46.



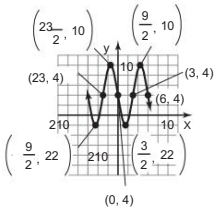
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 31, 54

48.



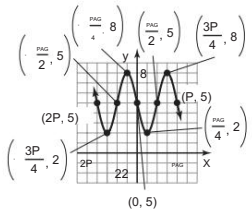
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 8, 24

49.



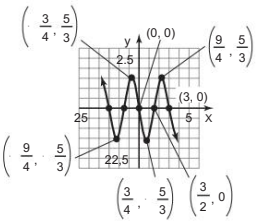
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 2, 104

52.



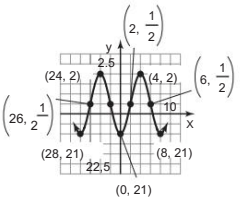
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 32, 84

54.



Dominio: 1 - q, q 2
Rango: c - 5/3, 5/3 días

56.

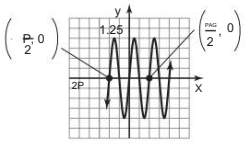


Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 1, 24

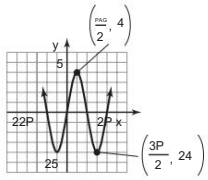
57. y = {3 sin12x2 60. y = {3 sin1px2 61. y = 5 cosa p 4 xb 64. y = - 3 cos a 1 2 xb 66. y = 70. 3/4 sen12px2 68. y = - sen a 3 2xb _

y = - cos a 4p 3 xb + 1 72. y = 3 sen ap 2 xb 74. y = - 4 cos13x2 76. 2/pag 78. 12/pag

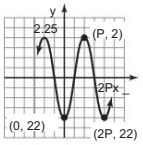
80. 1f g2 1x2 = sen 14x2



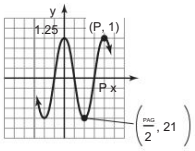
1g f2 1x2 = 4 sen x



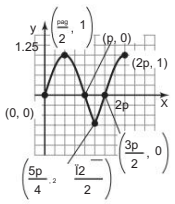
82. 1f g2 1x2 = - 2 porque x



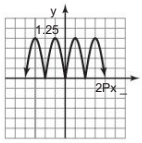
1g f2 1x2 = cos1 - 2x2



83.

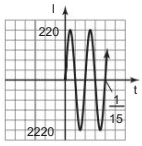


85.



88. Período = 1/30 s

Amplitud = 220 amperios



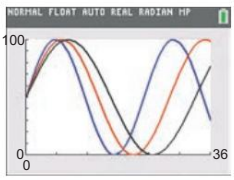
89. (a) P1t2 = [V0 pecado 12pft2]2/R = V02/R pecado2 12pft2 (b) Dado que la gráfica de P tiene amplitud y período V02/2R es de la forma y = A cos1vt2 + B, 1/2f

entonces A = - y B = Desde 2R. V02/2R 1/— = 2p/v, entonces v = 4pf. Por lo tanto, P1t2 = - cos 14pft2 + V02/2R 2R V02/2R = V02/2R [1-cos14pft2].

91. (a) 120 (b) 80 (c) 70 latidos por minuto 93. (a) 75.4°F (b) 28.1°F (c) 6 meses 95. (a) 205 pies (b) 5 pies (c) 3 (d) 4,3 mph

97. (a) Potencial físico: v = 2p/pag; potencial emocional: v = 14, 23 2p/33

(b)



(c) No (d) El potencial físico alcanza su punto máximo a los 15 días después de cumplir 20 años. El potencial emocional es del 50% a los 17 días, con un máximo a los 10 días y un mínimo a los 24 días. El potencial intelectual comienza bastante alto, cae a un mínimo a los 13 días y aumenta a un máximo a los 29 días.

99. 10, A cos1 - BC2 + A2, a (12k + 12p)/B + C, 0b k un número entero 105. 2x + h - 5 106. 12, 52 107. 10, 52, a - qb 113. 1 - 5/3, 0b, un - 7/3, 0b 108. 5 - 86

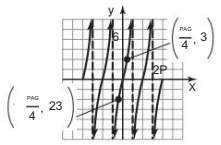
109. 17,4 años 110. e ln7 3 ≈ 0,649 f 111. y = 2x + 7 112. c - 19/12, q, - 24 a 4 3, qb 114. 51 + 2106

6.5 Evalúe su comprensión (página 463)

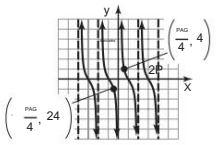
3. origen; múltiplos impares de pag/2 4. eje y; múltiplos impares de pag/2 5. b 6. T 7. 0 10. 1

12. seg x = 1 para x = - 2p, 0, 2p; seg x = - 1 para x = - p, p 14. - 3p/2, - pag/2, pag/2, 3p/2 15. - 3p/2, - pag/2, pag/2, 3p/2

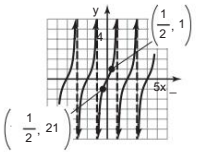
Machine Translated by Google

18. 

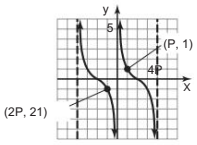
Dominio: e x ` x ≠ kp/2, k es un número entero impar f
Rango: 1 - q, q 2

20. 

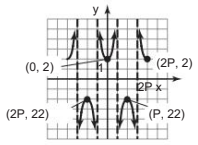
Dominio: 5x x ≠ kp, k es un número entero6
Rango: 1 - q, q 2

21. 

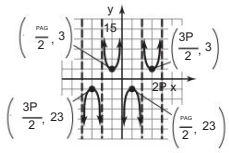
Dominio: 5x|x no es igual a un entero impar6
Rango: 1 - q, q 2

23. 

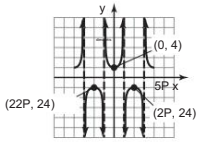
Dominio: 5x|x ≠ 4kp, k es un número entero6
Rango: 1 - q, q 2

26. 

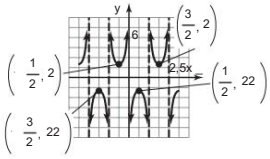
Dominio: e x ` x ≠ kp/2, k es un número entero impar f
Rango: 5y|y … - 2 o y Ú 26

28. 

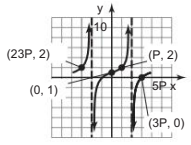
Dominio: 5x 0 x ≠ kp, k es un número entero6
Rango: 5y 0 y … - 3 o y Ú 36

29. 

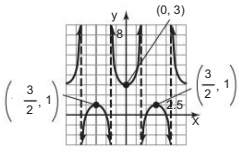
Dominio:5x 0 x ≠ kp, k es un entero impar6
Rango: 5y 0 y … - 4 o y Ú 46

32. 

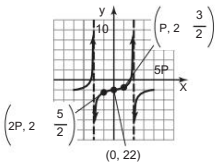
Dominio: 5x 0 x no es igual a un número entero6
Rango: 5y 0 y … - 2 o y Ú 26

34. 

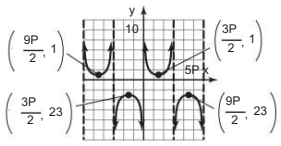
Dominio: 5x 0 x ≠ 2pk, k es un entero impar6
Rango: 1 - q, q 2

36. 

Dominio: e x ` x ≠ 3/4 k, k es un número entero impar f
Rango: 5y|y … 1 o y Ú 36

38. 

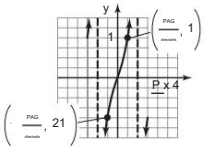
Dominio: 5x 0 x ≠ 2pk, k es un entero impar6
Rango: 1 - q, q 2

40. 

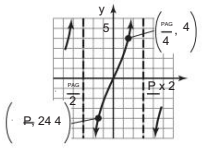
Dominio: 5x 0 x ≠ 3pk, k es un número entero6
Rango: 5y|y … - 3 o y Ú 16

42. 213/pag 44. 613/pag

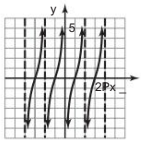
46. 1f g2 1x2 = tan14x2



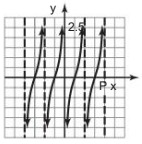
1g f2 1x2 = 4 tan x

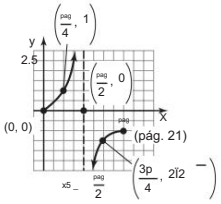


48. 1f g2 1x2 = - 2 cuna x



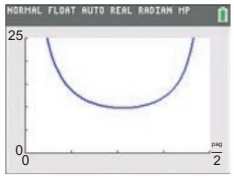
1g f2 1x2 = cuna 1 - 2x2

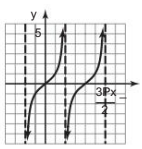


50. 

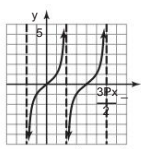
51. (a) L1u2 = + 3/porque tú 4/pecado u
= 3 seg u + 4 csc u

(c) ≈0,83 (d) ≈9,86 pies

(b) 

53. 

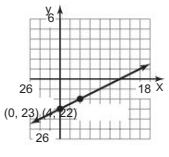
y 5 bronceado x



y 5 2cuna (x1 _ PAG/2

55. Asíntotas verticales: x = kp, k un número entero
Dominio: 5x x ≠ kp, k un número entero6
Rango: 5y y … 06 o 1 - q, 04

56. 15p - 2q22 125p2 + 10pq2 + 4q42 57. Avellana: 4 horas; Gwyneth: 6 horas 58. 5 - 1, 36

59. 

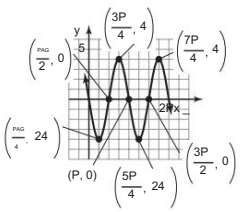
60. 1 - q, 02 14, q 2 61. 5 62. x + c - 3 63. 10, - 22, a 3 2/2, 0b, 1 - 2, 02 64. 21x + 12 + 52 65. c 2 5, qb

Machine Translated by Google

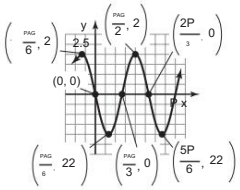
6.6 Evalúe su comprensión (página 474)

1. cambio de fase 2. Falso

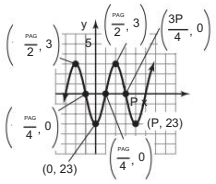
3. Amplitud = 4
Periodo = p
Cambio de fase = $\frac{pag}{2}$



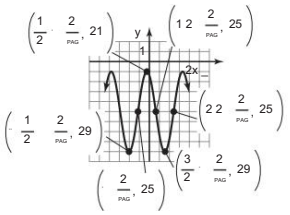
6. Amplitud = 2
Periodo = $\frac{2p}{3}$
Cambio de fase = $-\frac{pag}{6}$



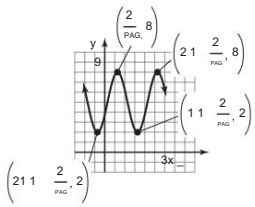
8. Amplitud = 3
Periodo = p
Cambio de fase = $-\frac{pag}{4}$



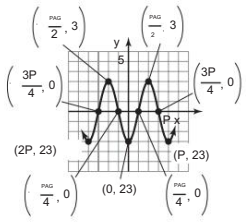
10. Amplitud = 4
Periodo = 2
Cambio de fase = $-\frac{p}{2}$



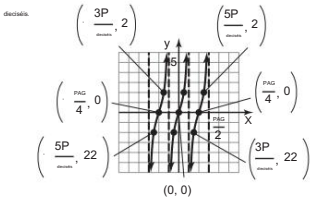
12. Amplitud = 3
Periodo = 2
Cambio de fase = $\frac{2}{pag}$



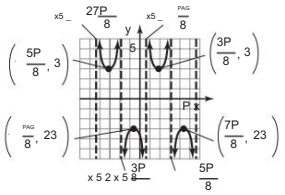
14. Amplitud = 3
Periodo = p
Cambio de fase = $\frac{pag}{4}$



diecisiete.

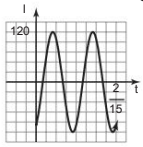


18.

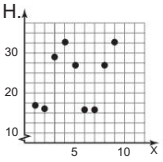


20. y = 2 sinc 2ax - 2 bd o $\frac{1}{y}$ = 2 sin12x - 12 22. y = 3 sin c 2 $\frac{1}{3 \text{ hachas} +}$ $\frac{1}{3}$ bd o y = 3 sina 2 $\frac{x +}{9 \text{ segundo}}$ $\frac{2}{}$

24. Periodo = s $\frac{1}{15}$
Amplitud = 120 amperios
Cambio de fase = s $\frac{1}{90}$

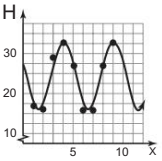


25. (a) H.



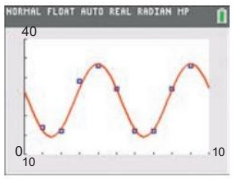
(b) y = 8,5 sen c 2p $\frac{11}{5}$ hacha - $\frac{}{4}$ bd + 24,5 o y = 8,5 sen a 2p $\frac{x -}{5}$ $\frac{11p}{10 \text{ b} + 24,5}$

(c) H

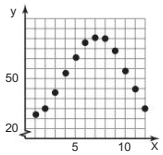


(d) y = 9,46 sen (1,247x + 2,096) + 24,088

(mi)

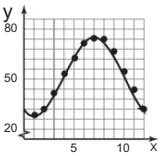


28. (a) 80



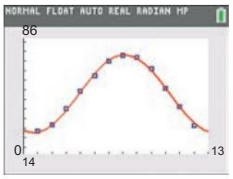
(b) y = 23,65 sen cp $\frac{}{6}$ 1x - 42 d + 51,75 o y = 23,65 sen ap $\frac{x -}{6}$ $\frac{2p}{3 \text{ b} + 51,75}$

(c) y



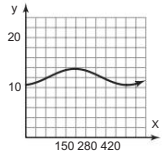
(d) y = 24,25 sen10,493x - 1,9272 + 51,61

(mi)



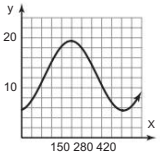
30. (a) 16.1 horas que son las 4:06 pm (b) y = 3.8 sin(0.16px - 0.076p) + 4.4 (c) 8.2 pies

31. (a) y = 1,615 sina 2p $\frac{}{365}$ x - 1,39b + 12,135
(b) 12,42 horas
(C)



(e) Las horas reales de luz solar el 1 de abril de 2018 fueron 12,43 horas. Esto está cerca de la cantidad prevista de 12,42 horas.

34. (a) y = 6,96 sina 2p $\frac{}{365}$ x - 1,39b + 12,41
(b) 13,63 horas
(C)



(d) Las horas reales de luz solar el 1 de abril de 2018 fueron 13,37 horas. Esto está cerca de la cantidad prevista de 13,63 horas.

Machine Translated by Google

35. y = 51 sin 5p 1t + 0,92 d + 55 o y = 51 sina 5p t + b + 55 38. f 1x2 = 39. mi f 40. 64x2 + 240xy + 225y2 41. 2213

42. mi f 43. y = u3>2 - 4u1>2 o y = 1u - 42 2u 44. 2a2 - x2 45,8 pies * 19 pies 46, x = - 3 47,3 + 2log2 x + 5log2 y

Ejercicios de repaso (página 480)

1. radianes 2. radianes 3. 315° 4. - 450° 5. 6. 7. - 222 + 323 8. 3 9. 0 10. 0 11. 1 12. 1 13. 1 14. - 1 15. - 1

16. porque tu = ; tanú = ; csc u = ; segundo u = ; cuna u = 5 17. csc tu = - 4 , pecado u = - , tan u = - 3 , porque tu = 5, segundo u =

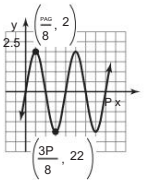
18. cuna u = - tan u = - 12, 5 , sen u = - porque u = sec u = 13, 13, 19. sen u = - csc u = - tan u = 25, 24, 229 , segundo u = , cuna u =

20. porque tu = tanú = - ; csc tu = - ; segundo u = cuna u = - 21. segundo u = , cuna tu = , porque tu = , pecado u = , csc tu =

22. seno = - ; porque tu = ; tanu = - 222; csc tu = - ; cuna u = -

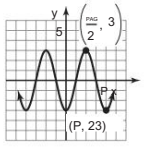
23. sinú = ; porque tu = - ; tanu = - 2 ; csc u = 25; segundo u = -

24.



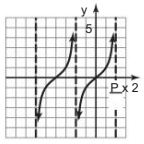
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 3, 24

25.



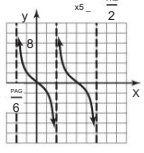
Dominio: 1 - q, q 2
Rango: 3 - 3, 34

26.



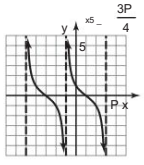
Dominio: e x 2 x ≠ , k es un número entero impar f
Rango: 1 - q, q 2

27.



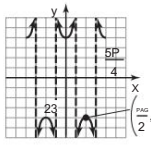
Dominio: e x 2 x ≠ + k # 3 , un número entero f
Rango: 19 q, q 2

28.



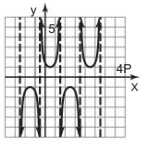
Dominio: e x 2 x ≠ - k es + kp, k es un número entero f
Rango: 1 - q, q 2

29.



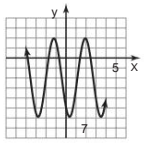
Dominio: e x 2 x ≠ , k es un número entero impar f
Rango: 5y y … - 4 o y Ú 46

30.



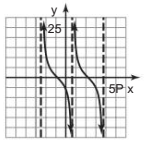
Dominio: e x 2 x ≠ - + kp, k es un número entero f
Rango: 5y y … - 1 o y Ú 16

31.



Dominio: 1 - q, q 2
Rango: [- 6, 2]

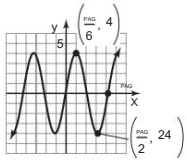
32.



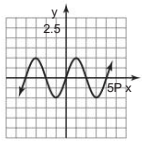
Dominio: ex 2 x ≠ + k # 3p, k es un número enterof
Rango: 1 - q, q 2

33. Amplitud = 4; Periodo = 34. Amplitud = 2; Período = 3

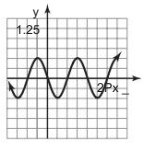
35. Amplitud = 4
Periodo =
Cambio de fase = 0



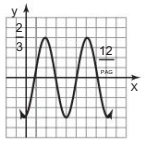
36. Amplitud = 1
Periodo = 4p
Cambio de fase = - p



37. Amplitud = 2
Periodo =
Cambio de fase =



38. Amplitud = 3
Periodo = 2
Cambio de fase =



39. y = 5 porque 40. y = - 7sina p 4 xb 41. 0.38 42. 1.02 43. El lado terminal de u en el cuadrante II implica sen u 7 0 csc u 7 0
porque u 6 0 seg u 6 0
tan u 6 0 cuna u 6 0

sin t = , cos t = - 5, tan t = - 226, cot u = - 44. IV 45.

46. pecado t = , porque t = - , tan t = - 2 47. Dominio = {xx no es múltiplo de p}, rango = {yy … - 1 o y Ú 1}, período = 2p

48. (a) 32,34° (b) 63°10′48″

Machine Translated by Google

49. Longitud = 3,14 pies, área ≈ 4,71 pies cuadrados 50. 8p ≈ 25,13 pulgadas; $\frac{16p}{3}$ ≈ 16,76 pulg. 51. w = 360 rad/h ≈ 57,30 rev/h

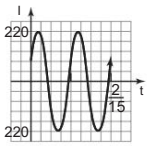
52. 0,1 revolución/seg = $\frac{pag}{5}$ radianes/seg

53. (a) $\frac{1}{15}$

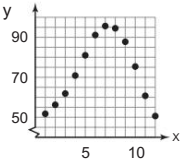
(b) 220

(c) $-\frac{1}{180}$

(d)



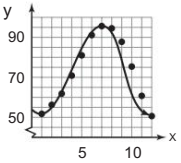
54. (a) y



(b) y = 20 sinc p $\frac{}{6}$ 1x - 42 días + 75 o

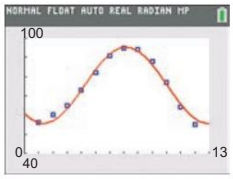
y = 20 sen ap $\frac{}{6}$ x - $\frac{2p}{3}$ b + 75

(c) y

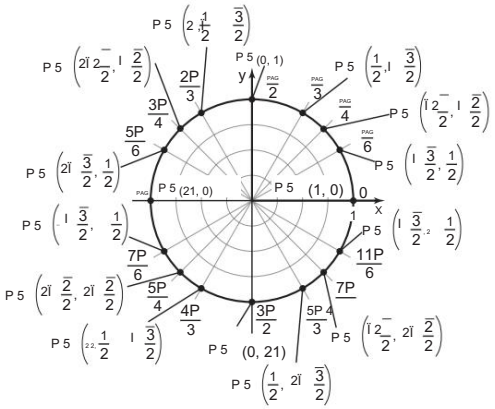


(d) y = 19,81 sen10,543x - 2,2962 + 75,66

(mi)



55.



Prueba de capítulo (página 482)

1. $\frac{13p}{9}$ 2.- $\frac{20p}{9}$ 3. $\frac{13p}{180}$ 4. - 22,5° 5. 810° 6. 135° 7. $\frac{1}{2}$ 8. 0 9. - 2 $\frac{1}{}$ 10. - $\frac{13}{3}$ 11. 2 12. $\frac{311 - 122}{2}$ 13. 0,292 14. 0,309

15. - 1.524 16. 2.747 17.

	sen U cos U tan U sec U csc U cot U					
U en QI	+	+	+	+	+	+
U en QII	+	-	-	-	+	-
U en QIII	-	-	+	-	-	+
U en QIV	-	+	-	+	-	-

18. - $\frac{3}{5}$

19. porque tu = - $\frac{216}{7}$; tan u = - ; csc u = ; segundo u = - ; cuna u = - 5 $\frac{516}{12}$ $\frac{7}{}$ $\frac{716}{12}$ $\frac{216}{5}$

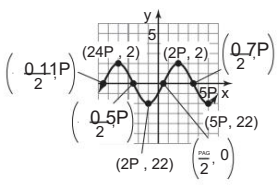
20. pecado u = - ; tan u = - ; csc tu = - ; $\frac{15}{3}$ $\frac{15}{}$ $\frac{315}{}$

segundo u = ; cuna u = - 2 $\frac{3}{}$ $\frac{215}{5}$

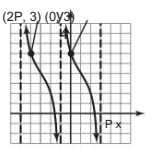
21. pecado u = $\frac{12}{13}$; porque tu = - 13; csc tu = $\frac{5}{12}$; segundo u = - $\frac{13}{5}$ $\frac{13}{}$; cuna u = - $\frac{5}{12}$

22. $\frac{2\,7153}{53}$ 23. - $\frac{5\,51146}{146}$ 24. - $\frac{1}{2}$

25.



26.



27. y = - 3 sina3x + $\frac{3p}{}$
4 segundo

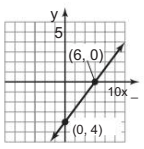
28. 78.93 pies2

29. 143,5 rpm

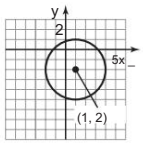
Revisión acumulativa (página 483)

1. e - 1, 2 f 2. y - 5 = - 31x + 22 o y = - 3x - 1 3. x2 + 1y + 22 $\frac{1}{}$ 2 = 16

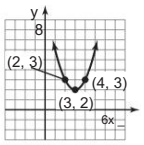
4. Una línea; pendiente $\frac{2}{3}$; intercepta (6, 0) y 10, - 42



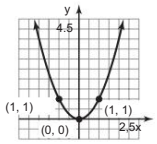
5. Un círculo; centro 11, - 22; radio 3

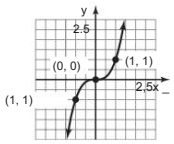


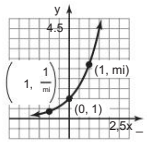
6.

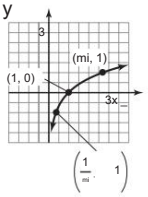


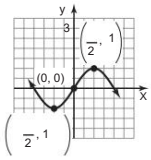
Machine Translated by Google

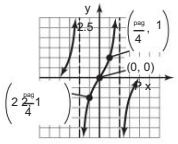
7. (un) 

(b) 

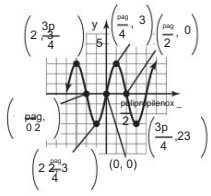
(C) 

(d) y 

(mi) 

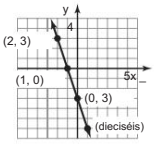
(F) 

8.f -1 1x2 = 1x + 22 9. - 2 10. 3

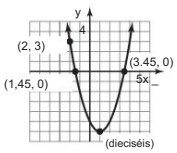


11. 3 - 313 12. y = 213x2 13. y = 3 cos ap 6xb

14. (a) f1x2 = - 3x - 3;
metro = - 3; 1 - 1, 02, 10, - 32

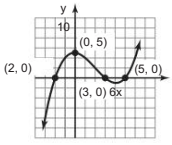


(b) f1x2 = 1x - 12 - 6; 10, 252,
1 - 16 + 1, 02, 116 + 1, 02

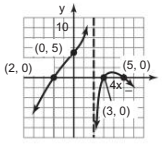


(c) Tenemos que y = 3 cuando x = - 2 e y = - 6 cuando x = 1.
Ambos puntos satisfacen y = aex . Por lo tanto, para 1 - 2, 32
tenemos 3 = ae-2 , lo que implica que a = 3e2 . Pero para 11, - 62 tenemos
- 6 = ae1 , lo que implica que a = - 6e-1 . Por lo tanto, no hay
función exponencial y = aex que contiene 1 - 2, 32 y 11, - 62.

15. (a) f1x2 = 1x + 22 1x - 32 1x - 52



(b) R1x2 = - 31x 1x + 22 1x - 32 1x - 52 - 22



CAPÍTULO 7 Trigonometría analítica

7.1 Evalúe su comprensión (página 495)

5. x = sen y 6. 0 … x … p 7. T 8. T 9. T 10. d 11. 0 14. - 15. 0 17. 20. 21. 24. 26. - 27. 0. 10 30. 1.37

32. 0,51 34. - 0,38 36. - 0,12 38. 1,08 39. 42. - 43. - 45. - 48. 50. No definido 51. 4 54. 4 55. No definido 58. p

60. f -1 1x2 = pecado-1
Rango de f = Dominio de f -1 = 3 - 3, 74
Rango de f -1 =c-

61. f -1 1x2 = cos-1 a -
Rango de f = Dominio de f -1 = 3 - 2, 24
Rango de f -1 = c 0,

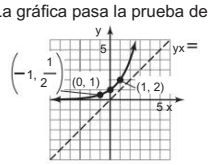
64. f -1 1x2 = - tan-1 1x + 32 - 1
Rango de f = Dominio de f -1 = 1 - q, q 2
Rango de f -1 = un - 1 - - 1b

66. f -1 1x2 = csin-1 a x3b - 1d
Rango de f = Dominio de f -1 = 3 - 3, 34
Rango de f -1 =c-

67. mi 2 f 70. e - 4 f 72. 5 236 74. 5 - 16

76. (a) 13,92 ho 13 h, 55 min (b) 12 h (c) 13,85 ho 13 h, 51 min
78. (a) 13,47 ho 13 h, 28 min (b) 12 h (c) 13,43 ho 13 h, 26 min
80. (a) 12 h (b) 12 h (c) 12 h (d) Son las 12 h. 81. 3,35 minutos

84. (a) 3 unidades cuadradas (b) unidades cuadradas 86. 4250 mi 88. e - 89.c- 2 d 90. La gráfica pasa la prueba de la línea horizontal.



91. f -1 1x2 = log2 1x - 12 92. (2x + 1)- 23 2(x2 + 3)- 3(- x2 - x + 3)

93. y en 94. 20 mph 95.

96. sen u = tan u = 25, = 24, segundo u csc tu = , cuna u =

97. Cuadrante II 98.

Machine Translated by Google

7.2 Evalúe su comprensión (página 502)

4. x = segundo y; Ú1; 0; p 5. coseno 6. F 7. T 8. T 10. 6 11. $-\frac{\text{pag}}{2}$ 14. $\frac{\text{pag}}{6}$ $\frac{2p}{3}$ 18. $\frac{3p}{4}$ 20. $-\frac{\text{pag}}{4}$ 21. 1,32 24. 0,46 26. - 0,34 28. 2,72

30. - 0,73 32. 2,55 33. $\frac{22}{2}$ 36. $-\frac{23}{3}$ 38. 2 40. 22 42. $-\frac{22}{2}$ 44. $\frac{223}{3}$ 46. $\frac{3p}{4}$ 48. $-\frac{\text{pag}}{3}$ 50. $\frac{22}{4}$ 51. $\frac{25}{2}$ 54. $-\frac{214}{2}$

56. $-\frac{3210}{10}$ 58. 25 60. - 4 $\frac{\text{pag}}{}$ 61. $\frac{1}{21 + u2}$ 64. $\frac{tu}{21- u2}$ 66. $\frac{2u2 - 1}{tu}$ 68. $\frac{2u2 - 1}{tu}$ 70. $\frac{1}{tu}$ 72. $\frac{5}{13}$ 74. $\frac{3p}{4}$ 76. $-\frac{3}{4}$ 78. $\frac{5}{13}$

80. $\frac{5p}{6}$ 82. - 215 83. (a) u = 31.89° (b) 54.64 pies de diámetro (c) 37.96 pies de altura 85. (a) u = 22.3° (b) v0 = 2940.23 pies/s 87. 22 - x2

90. - 5i, 5i, - 2, 2 91. Tampoco 92. $\frac{7p}{4}$ 93. $\frac{5p}{2}$ ≈ 7,85 pulg. 94. (a) a- 5 $\frac{31}{2}$, 2 b (b) Cóncavo hacia abajo (c) Creciente: a- q, - 2 d ; decreciente: c - $\frac{5}{2}$, qb

95. 5 - 3, 36 96. 5x x Ú 3, x ≠ 4, x ≠ 76 o 3 - 3, 42 14, 72 17, q 2 97. y = 4 sin361x - 12 4 o y = 4 sin 16x - 62

98. $-\frac{x + c}{21 - x2 + 21 - c2}$ 99. $-\frac{323 + 6}{5p}$

7.3 Evalúe su comprensión (página 510)

7. F 8. T 9. T 10. F 11. d 12. a 13. e 7p $\frac{}{6}, \frac{11p}{6}$f 16.e 7p $\frac{}{6}, \frac{11p}{6}$f 18.e 3p $\frac{}{4}, \frac{7p}{4}$f 20.e 2p $\frac{}{3}, \frac{4p}{3}$f 22.e 3p $\frac{}{4}, \frac{5p}{4}$f 24.ep _ $\frac{}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}$f

26. episodio $\frac{}{4}, \frac{3p}{4}, \frac{5p}{4}, \frac{7p}{4}$f 27.ep _ $\frac{}{2}, \frac{7p}{6}, \frac{11p}{6}$f 29.ep _ $\frac{}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}$f 32.e 4p $\frac{}{9}, \frac{8p}{9}, \frac{16p}{9}$f 34.e 3p $\frac{}{4}, \frac{7p}{4}$f 36.e 11p $\frac{}{6}$f

37. eu ` u = 40. eu ` u = 44. eu u ≠ 22kpf; pag 46. eu ` u = 48. eu ` u = 49. 50.41, 2.736 $\frac{\text{pag}}{6}$ + 2kp, tu = $\frac{5p}{6}$ + kpf; pag $\frac{}{6}, \frac{5p}{6}, \frac{13p}{6}, \frac{17p}{6}, \frac{25p}{6}, \frac{29p}{6}$ $\frac{5p}{6}$ + kpf; 5p $\frac{}{6}, \frac{11p}{6}, \frac{17p}{6}, \frac{23p}{6}, \frac{29p}{6}, \frac{35p}{6}$

4.516 54. $\frac{\text{pag}}{2}$ + 2kp, tu = $\frac{3p}{2}$ + 2 kp f; pag $\frac{}{2}, \frac{3p}{2}, \frac{5p}{2}, \frac{7p}{2}, \frac{9p}{2}, \frac{11p}{2}$ 52. 51.37, $\frac{\text{pag}}{6}$ + kpf; episodio $\frac{}{6}, \frac{7p}{6}, \frac{13p}{6}, \frac{19p}{6}, \frac{25p}{6}, \frac{31p}{6}$f

52.69, 3.596 56. 51.82, 4.466 58. 52.08, pag 226 60. 50.73, 2.416 62. ep $\frac{\text{pag}}{3}$ + kp, u = $\frac{2p}{3}$ + kp f; 8p $\frac{}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}, \frac{7p}{3}, \frac{8p}{3}$ $\frac{8p}{3}$ + 4kp, tu = $\frac{10p}{3}$ + 4 kp f; 8p $\frac{}{3}, \frac{10p}{3}, \frac{20p}{3}, \frac{22p}{3}, \frac{32p}{3}, \frac{34p}{3}$

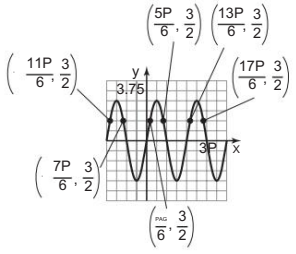
$\frac{}{2}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{3p}{2}$f

63. episodio $\frac{}{2}, \frac{7p}{6}, \frac{11p}{6}$f 66. mi 0, $\frac{\text{pag}}{4}, \frac{5p}{4}$f 68.ep _ $\frac{}{2}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{3p}{2}$f 70. 5p6 72. ep $\frac{}{4}, \frac{5p}{4}$f 74. mi 0, $\frac{\text{pag}}{3}$, pág. $\frac{5p}{3}$f 76.ep _ $\frac{}{6}, \frac{5p}{6}, \frac{3p}{2}$f 78.ep _ $\frac{}{2}$f

79. 506 82. ep $\frac{}{3}, \frac{5p}{3}$f 84. Ninguna solución real 85. 5 - 1.31, 1.98, 3.846 88. 50.526 90. 51.266 92. 5 - 1.02, 1.026

94, 50, 2,156 96 , 50,76, 1,356 98 , 3 $\frac{\text{pag}}{}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}$

100. (a) - 2p, - p, 0, p, 2p, 3p, 4p (b)

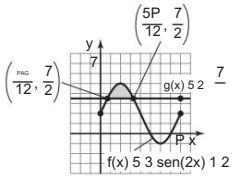


(c) e - $\frac{11p}{6}, -\frac{7p}{6}, \frac{\text{pag}}{6}, \frac{5p}{6}, \frac{13p}{6}, \frac{17p}{6}$f

(d) e x ` - $\frac{11p}{6}$ 6x6- _ _ $\frac{7p}{6}$ o $\frac{\text{pag}}{6}$ 6x6 _ _ $\frac{5p}{6}$ o $\frac{13p}{6}$ 6x6 _ _ $\frac{17p}{6}$f

102. (a) e x ` x = - $\frac{\text{pag}}{4}$ + kp, k un número entero f (b) $\frac{\text{pag}}{2}$ 6x6-4 _ _ $\frac{\text{pag}}{}$ o un - $\frac{\text{pag}}{2}, -\frac{\text{pag}}{4 \text{ segundo}}$

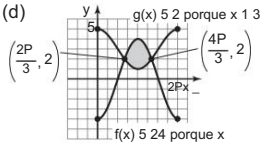
104. (a), (d)



- (b) ep $\frac{12}{}, \frac{5p}{12}$f

(c) e x ` p 12 6x6 _ _ $\frac{5p}{12}$f o ap $\frac{12}{}, \frac{5p}{12 \text{ segundo}}$

106. (a), (d)



(b) y 2p $\frac{}{3}, \frac{4p}{3}$f

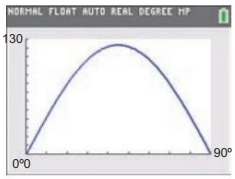
(c) e x ` 2p 3 6x6 _ _ $\frac{4p}{3}$ por un 2p $\frac{}{3}, \frac{4p}{3 \text{ segundo}}$

107. (a) 0 s, 0,43 s y 0,86 s (b) 0,21 s (c) [0, 0,01] [0,41, 0,43] [0,86, 0,90]

109. (a) 150 mi (b) 6.06, 8.44, 15.72, 18.11 min (c) Antes de 6.06 min, entre 8.44 y 15.72 min, y después de 18.11 min (d) No 111. 2.03, 4.91

Machine Translated by Google

113. (a) 30°, 60° (b) 123,6 m 116. 14,90° 117. Sí, varía de 1,25 a 1,34. 120. 1,31 121. uB = 49,8°

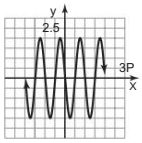
(C) 

124. eu ` u = $\frac{5p}{6}$ + kp, donde k es cualquier número entero f 127. x = log6 y 128. $\frac{9 - \sqrt{217}}{4}$, $\frac{9 + \sqrt{217}}{4}$

129. tanu = - $\frac{1}{3}$; csc u = - 210; segundo u = ; cuna u = - 3 130. Amplitud: 2

Periodo: p

Cambio de fase: $\frac{pag}{2}$



131. 5x x 7 36 o 13, q 2 132. 3p cm ≈ 9.425 cm 133. a = 6 134. impar 135. y = - x + $\frac{5}{2}$ $\frac{21}{2}$ 136. - $\frac{2p}{3}$

7.4 Evalúe su comprensión (página 520)

3. identidad; condicional 4. - 1 5. 0 6. T 7. F 8. T 9. c 10. b 11. porque u $\frac{1}{}$ 13. $\frac{1 + \text{pecado u}}{\text{porque tú}}$ 15. $\frac{1}{\text{pecado u porque u}}$ 18. 2 20. $\frac{3 \text{ pecado u} + 1}{\text{pecado u} + 1}$

21. csc u # porque u = # $\frac{1}{\text{porque u}}$ = sen u $\frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}$ = cot u 24. 1 + tan2 1 - u2 = 1 + 1 - tan u2 ^{2} = 1 + tan2 u = seg2 u

25. cos u1tan u + cot u2 = cos ua sen u $\frac{}{\text{porque tú}}$ + $\frac{\text{porque tú}}{}$ sen ub = cos ua $\frac{\text{sen2 u + cos2 u}}{}$ cos u sen ub = cos ua cos u sen ub = $\frac{1}{}$ $\frac{1}{\text{pecado u}}$ = csc u

28. tan u cot u - cos2 u = tan u # tan u $\frac{1}{}$ - cos2 u = 1 - cos2 u = sen2 u 29. 1seg u - 12 1seg u + 12 = sec2 u - 1 = tan2 u

32. 1sec u + tan u2 1sec u - tan u2 = sec2 u - tan2 u = 1 34. cos2 u11 + tan2 u2 = cos2 u sec2 u = cos2 u # = 1 $\frac{1}{\text{cos2 tu}}$

36. 1sen u + cos u2 ^{2} + 1sin u - porque u2 ^{2} = sen2 u + 2 sen u cos u + cos2 u + sen2 u - 2 sen u cos u + cos2 u

= sen2 u + cos2 u + sen2 u + cos2 u = 1 + 1 = 2

38. sec4 u - sec2 u = sec2 u1sec2 u - 12 = 11 + tan2 u2 tan2 u = tan4 u + tan2 u

40. seg u - tan u = $\frac{1}{\text{porque tú}}$ - $\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}}$ = $\frac{1 - \text{pecado u}}{\text{porque tú}}$, $\frac{1 + \text{pecado u}}{1 + \text{pecado u}}$ = $\frac{1 - \text{pecado2 u}}{\text{porque u11 + sen u2}}$ = $\frac{\text{cos2 tu}}{\text{cos u11 + sen u2 42.}}$ = $\frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado u}}$

3 sen2 u + 4 cos2 u = 3 sen2 u + 3 cos2 u + cos2 u = 31sen2 u + cos2 u2 + cos2 u = 3 + cos2 u

44. 1 - 1 $\frac{\text{cos2 tu}}{\text{+ sen u}}$ = 1 - = 1 - $\frac{1 - \text{pecado2 u}}{1 + \text{pecado u}}$ $\frac{11 + \text{sen u2 11 - sen u2}}{1 + \text{pecado u}}$ = 1 - 11 - sen u2 = sen u

46. $\frac{1 + \text{bronceado v}}{1 - \text{bronceado v}}$ = $\frac{1 + \frac{1}{\text{cuna v}}}{1 - \frac{1}{\text{cuna v}}}$ = $\frac{\text{cuna v} + 1}{\text{cuna v} - 1}$ = $\frac{\text{cuna v} + 1}{\text{cuna v - 1}}$ 48. + $\frac{\text{te veo}}{\text{csc u}}$ $\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}}$ = $\frac{\frac{1}{\text{porque tú}}}{\frac{1}{\text{pecado u}}}$ + tan tu = $\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}}$ + tan u = tan u + tan u = 2 tan u

50. $\frac{1 + \text{pecado u}}{1 - \text{pecado u}}$ = $\frac{1 + \frac{1}{\text{csc u}}}{1 - \frac{1}{\text{csc u}}}$ = $\frac{\text{csc u} + 1}{\text{csc u} - 1}$ = $\frac{\text{csc u} + 1}{\text{csc u - 1}}$

51. $\frac{1 - \text{pecado v}}{\text{porque v}}$ + $\frac{\text{porque v}}{1 - \text{pecado v}}$ = $\frac{11 - \text{pecado v2}}{\text{porque v11 - pecado v2}}$ ^{2} + cos2 v = $\frac{1 - 2 \text{ senv} + \text{sen2v} + \text{cos2v}}{\text{porque v11 - pecado v2}}$ = $\frac{2 - 2 \text{ pecado v}}{\text{porque v11 - pecado v2}}$ = $\frac{211 - \text{pecado v2}}{\text{porque v11 - pecado v2}}$ = $\frac{2}{\text{porque v}}$ = 2 segundos v

54. $\frac{\text{pecado u}}{\text{pecado u - porque u}}$ = $\frac{1}{\frac{\text{pecado u - porque u}}{\text{pecado u}}}$ = $\frac{1}{1 - \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}}$ = $\frac{1}{1 - \text{cuna}}$

55. 1seg u - tan u2 ^{2} = seg2 u - 2 seg u tan u + tan2 u = cos2 u $\frac{1}{\text{cos2 tu}}$ - $\frac{2 \text{ pecado u}}{\text{cos2 tu}}$ + $\frac{\text{pecado2 tu}}{\text{cos2 tu}}$ = $\frac{1 - 2 \text{ sen u} + \text{sen2 u}}{\text{cos2 tu}}$ = $\frac{11 - \text{pecado u2}}{1 - \text{pecado2 u}}$ ^{2} = $\frac{11 - \text{sen u2}}{11 - \text{sen u2 11 + sen u2}}$ ^{2}

= $\frac{1 - \text{pecado u}}{1 + \text{pecado u}}$

58. + $\frac{\text{porque tú}}{1 - \text{tan tú}}$ $\frac{\text{pecado u}}{1 - \text{cuna}}$ = $\frac{\text{porque tú}}{1 - \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}}}$ + $\frac{\text{pecado u}}{1 - \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}}$ = $\frac{\text{porque tú}}{\text{porque u - pecado u}}$ + $\frac{\text{pecado u}}{\text{pecado u - porque u}}$ = $\frac{\text{cos2 tu}}{\text{porque u - pecado u}}$ + $\frac{\text{pecado2 tu}}{\text{pecado u - porque u}}$

= $\frac{\text{cos2 u - sen2 u}}{\text{porque u - pecado u}}$ = $\frac{\text{1cos u - sen u2 1cos u + sen u2}}{\text{porque u - pecado u}}$ = sen u + porque u

60. tan u + 1 $\frac{\text{porque tú}}{\text{+ sen u}}$ = $\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}}$ + $\frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado u}}$ = $\frac{\text{sen u11 + sen u2 + cos2 u}}{\text{cos u11 + sen u2}}$ = $\frac{\text{sen u + sen2 u + cos2 u}}{\text{porque u11 + sen u2}}$ = $\frac{\text{pecado u + 1}}{\text{cos u11 + sen u2}}$ = $\frac{1}{\text{porque tú}}$ = segundo u

62. $\frac{\text{tan u + seg u - 1}}{\text{tan u - seg u + 1}}$ = $\frac{\text{tan u + 1seg u - 12}}{\text{tan u - 1seg u - 12}}$, $\frac{\text{tan u + 1seg u - 12}}{\text{tan u + 1seg u - 12}}$ = $\frac{\text{tan2 u + 2 tan u1sec u - 12 + sec2 u - 2 sec u + 1}}{\text{tan2 u - 1seg2 u - 2 seg u + 12}}$

= $\frac{\text{seg2 u - 1 + 2 tan u1seg u - 12 + seg2 u - 2 seg u + 1}}{\text{seg2 u - 1 - seg2 u + 2 seg u - 1 2 seg}}$ = $\frac{\text{2 seg2 u - 2 seg u + 2 tan u1seg u - 12}}{\text{- 2 + 2 segundos}}$

= $\frac{\text{u1sec u - 12 + 2 tan u1sec u - 12}}{\text{21seg u - 12 21seg u - 12}}$ = $\frac{\text{21seg u - 12 1seg u + tan u2}}{}$ = tan u + seg u

Machine Translated by Google

64. $\frac{\text{bronceado u - cuna u}}{\text{tan u + cuna u}} = \frac{\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} - \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}}{\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} + \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}} = \frac{\text{sen2 u - cos2 u}}{\text{porque te pecas}} = \frac{\text{sen2 u - cos2 u}}{\text{sen2 u + cos2 u}} = \frac{\text{sen2 u - cos2 u}}{1} = \text{sen2 u - cos2 u}$

porque te pecas

66. $\frac{\text{bronceado u - cuna u}}{\text{tan u + cuna u}} + 1 = \frac{\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} - \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}}{\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} + \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}} + 1 = \frac{\text{sen2 u - cos2 u}}{\text{sen2 u + cos2 u}} + 1 = \text{sen2 u - cos2 u + 1 = sen2 u + 11 - cos2 u2 = 2 sen2 u}$

porque te pecas _ porque te pecas _

68. $\frac{\text{segundo u + tan u}}{\text{cuna u + porque u}} = \frac{\frac{1}{\text{porque tú}} + \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}}}{\frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}} + \text{porque tú}} = \frac{\frac{1 + \text{pecado u}}{\text{porque tú}}}{\frac{\text{porque u + porque u sen u}}{\text{pecado u}}} = \frac{1 + \text{pecado u}}{\text{porque tú}}, \frac{\text{pecado u}}{\text{porque u11 + sen u2}} = \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}}, \frac{1}{\text{porque tú}} = \text{tan u seg u}$

70. $\frac{1 - \text{tan2 u}}{1 + \text{tan2 u}} + 1 = 1 + \text{tan2 u}$ $\frac{1 - \text{tan2 u} + 1 + \text{tan2 u}}{1 + \text{tan2 u}} = \frac{2}{1 + \text{tan2 u}} = \frac{2}{\text{segundo2 tu}} = 2 \cos 2 u$

71. $\frac{\text{sec u - csc u}}{\text{sec u csc u}} = \frac{\text{te veo}}{\text{sec u csc u}} - \frac{\text{csc u}}{\text{sec u csc u}} = \frac{1}{\text{csc u}} - \frac{1}{\text{te veo}} = \text{sen u - porque u}$

74. $\text{seg u - cos u} = -\cos u + \frac{1}{\cos u}$ $\frac{1 - \text{cos2 u}}{\text{porque tú}} = \frac{\text{pecado2 tu}}{\text{porque tú}} = \text{sen u \# } \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} = \text{sen u tan u}$

76. $\frac{1}{1 - \text{pecado u}} + \frac{1}{1 + \text{pecado u}} = \frac{1 + \text{sen u} + 1 - \text{sen u}}{11 + \text{sen u2 } 11 - \text{sen u2 seg}} = \frac{2}{1 - \text{pecado2 u}} = \frac{2}{\text{cos2 tu}} = 2 \text{ seg2 u}$

78. $\frac{\text{te veo}}{1 - \text{pecado u}} = \frac{\text{te veo}}{1 - \text{pecado u}}, \frac{1 + \text{pecado u}}{1 + \text{pecado u}} = \frac{\text{u11 + sen u2}}{1 - \text{pecado2 u}} = \frac{\text{seg u11 + sen u2}}{\text{cos2 tu}} = \frac{1 + \text{pecado u}}{\text{cos3 tu}}$

80. $\frac{1 \text{ segundo v - tan}^2 + 1}{\text{v2 csc v1 segundo v - tan v2}} = \frac{\text{seg2 v - 2 seg v tan v + tan2 v + 1}}{\frac{1}{\text{pecado v}} \frac{\text{porque v}}{\text{porque v}} - \frac{\text{pecado v}}{\text{porque v b}}} = \frac{\text{2 seg2 v - 2 seg v tan v}}{\frac{1}{\text{pecado v a 1 porque v}} \frac{\text{porque v}}{\text{porque v b}}} = \frac{\frac{2}{\text{cos2 v}} - \frac{2 \text{ pecado v}}{\text{cos2 v}}}{\frac{1 - \text{pecado v}}{\text{pecado v porque v}}} = \frac{2 - 2 \text{ pecado v}}{\text{cos2v _}}, \frac{\text{pecado v porque v}}{1 - \text{pecado v}}$

$= \frac{211 - \text{pecado v2}}{\text{porque v}}, \frac{\text{pecado v}}{1 - \text{pecado v}} = \frac{2 \text{ pecado v}}{\text{porque v}} = 2 \tan v$

82. $\frac{\text{pecado u + porque u}}{\text{porque tú}} - \frac{\text{pecado u - porque u}}{\text{pecado u}} = \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} + 1 - 1 + \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}} = \frac{\text{sen2 u + cos2 u}}{\text{porque te pecas}} = \frac{1}{\text{porque te pecas}} = \text{seg u csc u}$

84. $\frac{\text{sen3 u + cos3 u}}{\text{pecado u + porque u}} = \frac{\text{1sen u + cos u2 1sen2 u - sen u cos u + cos2 u2}}{\text{pecado u + porque u}} = \text{sen2 u + cos2 u - sen u cos u = 1 - sen u cos u}$

86. $\frac{\text{cos2 u - sen2 u}}{1 - \text{tan2 u}} = \frac{\text{cos2 u - sen2 u}}{1 - \frac{\text{pecado2 tu}}{\text{cos2 u}}} = \frac{\text{cos2 u - sen2 u}}{\frac{\text{cos2 u - sen2 u}}{\text{cos2 tu}}} = \text{cos2 u}$

88. $\frac{12 \text{ cos2 u - 12}^2}{\text{cos4 u - sen4 u}} = \frac{[2 \text{ cos2 u - 1sen2 u + cos2 u2}]^2}{\text{1cos2 u - sen2 u2 1cos2 u + sen2 u2}} = \frac{\text{1cos2 u - sen2 u2}^2}{\text{cos2 u - sen2 u}} = \text{cos2 u - sen2 u = 11 - sen2 u2 - sen2 u = 1 - 2 sen2 u}$

90. $\frac{1 + \text{sen u + porque u}}{1 + \text{sen u - porque u}} = \frac{\text{11 + sen u2 + porque u}}{\text{11 + sen u2 - porque u}}, \frac{\text{11 + sen u2 + porque u}}{\text{11 + sen u2 + porque u}} = \frac{\text{1 + 2 sen u + sen2 u + 211 + sen u2 porque u + cos2 u}}{\text{1 + 2 sen u + sen2 u - cos2 u}}$

$= \frac{\text{1 + 2 sen u + sen2 u + 211 + sen u2cos u + 11 - sen2 u2}}{\text{1 + 2 sen u + sen2 u - 11 - sen2 u2}} = \frac{\text{2 + 2 sen u + 211 + sen u2cos u}}{\text{2 pecado u + 2 pecado2 u}}$

$= \frac{\text{211 + sen u2 + 211 + sen u2cos u}}{\text{2 pecado u11 + pecado u2}} = \frac{\text{211 + sen u2 11 + cos u2}}{\text{2 pecado u11 + pecado u2}} = \frac{1 + \text{porque tú}}{\text{pecado u}}$

92. $\text{1a sen u + b cos u2}^2 + \text{1a porque u - b sen u2}^2 = \text{a2 sen2 u + 2ab sen u cos u + b2 cos2 u + a2 cos2 u - 2ab sen u cos u + b2 sen2 u}$

$= \text{a2 1sen2 u + cos2 u2 + b2 1cos2 u + sen2 u2 = a2 + b2}$

94. $\frac{\text{bronceado a + bronceado b}}{\text{cuna a + cuna b}} = \frac{\text{bronceado a + bronceado b}}{\frac{1}{\text{broncearse un}} + \frac{1}{\text{bronceado b}}} = \frac{\text{bronceado a + bronceado b}}{\frac{\text{bronceado b + bronceado a}}{\text{a tan b}}} = \text{1tan a + tan b2 \# = tan a } \frac{\text{broncearse a broncearse b}}{\text{tan a + tan b tan}}$

96. $\text{1sin a + cos b2}^2 + \text{1cos b + sen a2 1cos b - sen a2 = 1sen2 a + 2 sen a cos b + cos2 b2 + 1cos2 b - sen2 a2}$

$= \text{2 cos2 b + 2 sen a cos b = 2 cos b1cos b + sen a2 = 2 cos b1sen a + cos b2}$

98. $\text{ln 0seg u 0 = ln 0 cos u 0}^{-1} = -\text{ln 0 porque u 0}$

100. $\text{ln 0 1 + cos u 0 + ln 0 1 - cos u 0 = ln1 0 1 + cos u 0 0 1 - cos u 0 2 = ln 0 1 - cos2 u 0 = ln 0sin2 u 0 = 2 ln 0sen u 0}$

102. $\text{g1x2 = seg x - cos x = } \frac{1}{\text{porque x}} - \text{porque x = } \frac{1}{\text{porque x}} - \frac{\text{cos2x _}}{\text{porque x}} = \frac{\text{1 - cos2 x}}{\text{porque x}} = \frac{\text{pecado2 x}}{\text{porque x}} = \text{pecado x \# } \frac{\text{pecado x}}{\text{porque x}} = \text{pecado x \# tan x = f1x2}$

Machine Translated by Google

104. $f1u2 = \frac{1 - \text{pecado } u}{\text{porque tú}} - \frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado } u} = \frac{1 - \text{pecado } u}{\text{porque tú}} \cdot \frac{1 + \text{pecado } u}{1 + \text{pecado } u} - \frac{\text{porque tú}}{1 + \text{pecado } u} \cdot \frac{\text{porque tú}}{\text{porque tú}} = \frac{1 - \text{pecado2 } u}{\text{porque u11 + sen u2}} - \frac{\cos 2 \text{ tu}}{\text{porque u11 + sen u2}}$

$= \frac{\cos 2 \text{ tu}}{\cos u11 + \text{sen u2}} - \frac{\cos 2 \text{ tu}}{\text{porque u11 + sen u2}} = 0 = g1u2$

106. $\overline{216 + 16 \tan 2 \text{ u}} = \overline{21621 + \tan 2 \text{ u}} = \overline{42\sec 2 \text{ u}} = 4 \sec u$, ya que sec u 7 0 para - $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 y 6 $\frac{\text{pag}}{2}$

107. 1050 seg u (2 seg2 u - 1) = 1050 $\frac{1}{\text{porque u}\not\text{¢}2 \overline{\text{2 tu}}}$ - 1≤ = 1050 porque u¢2 $\frac{1}{\cos 2 \text{ tu}} - \frac{\cos 2 \text{ tu}}{\cos 2 \text{ u}} \leq = 1050 \cos u \not\text{¢} 2 - \cos 2 u \leq$

$= 1050 \frac{1}{\text{porque u} \not\text{¢} 1 + \cos 2 u} \overline{\cos 2 u} = 1050 \frac{(1 + \text{pecado2 u})}{\cos 3 \text{ tu}}$

110. Sea u = sen-1 1 - x2. Entonces - x = sen u. Entonces, x = - sen u = sen1 - u2 porque la función seno es impar. Esto significa - u = sen-1 x, y u = - sen-1 x.
Entonces, sen-1 1 - x2 = - sen-1 x.

115. Máximo, 1250 116. 1f g2 1x2 = x - 2 $\frac{x - 1}{}$ 117. sinú = $\frac{5}{13}$; porque tu = $\frac{12}{13}$; tanú = - $\frac{5}{12}$; csc tu = $\frac{13}{-5}$; segundo u = $\frac{13}{12}$; cuna u = - 5$\frac{12}{}$ 118. - $\frac{2}{\text{pag}}$

119. 4213 $\overline{120}$. $\frac{48}{5}$ pag m2 ≈ 30.159 m2 121. 18 millas 122. - $\frac{\overline{-289}}{8}$ 123. 1x - 62 ^{2} + 1 año + 22 ^{2} = 9 124. 5x 6 6 x … 96 o 16, 94

7.5 Evalúe su comprensión (página 532)

7. (a) - (b) - 8. F 9. F 10. T 11. a 12. d 13. - 4 $\frac{1}{}$ 1 22 + 262 16. 2 - 23 18. $\frac{1}{4}$ 1 26 + 222 19. 1125 $\frac{1}{4}$ 1 22 - 262

21. - 4 $\frac{1}{}$ 1 26 + 222 24. 26 - 22 26. $\frac{1}{2}$ 27. 0 30. 1 31. - 1 34. 2 $\frac{1}{}$ 35. (un) $\frac{225}{25}$ (b) $\frac{}{25}$ (C) $\frac{225}{5}$ (d) 2

38. (un) $\frac{4 - 323}{10}$ (b) $\frac{- 3 - 423}{10}$ (C) $\frac{4 + 323}{10}$ (d) $\frac{2523 + 48}{39}$ 40. (a) - $\frac{5+1223}{26}$ (b) $\frac{12 - 523}{26}$ (C) $\frac{- 5 + 1223}{26}$ (d) $\frac{- 240 + 16923}{69}$

42. (a) - $\frac{222}{3}$ (b) $\frac{- 222 + 23}{6}$ (C) $\frac{- 222 + 23}{6}$ (d) $\frac{9 - 422}{7}$ 44. $\frac{1 - 226}{6}$ 46. $\frac{23 - 222}{6}$ 48. $\frac{822 - 923}{5}$

49. sina p$\overline{2}$ + ub = pecado $\frac{\text{pag}}{2}$ 2 cos u + cos sen $\frac{\text{pag}}{2}$ u = 1 # cos u + 0 # sen u = cos u

52. sen1p - u2 = sen p cos u - cos p sen u = 0 # cos u - 1 - 12 sen u = sen u

54. sen1p + u2 = sen p cos u + cos p sen u = 0 # cos u + 1 - 12 sen u = - sen u

56. tan1p - u2 = $\frac{\tan p - \tan u}{1 + \tan p \tan u} = \frac{0 - \tan tu}{1 + 0 \# \tan tu} = - \tan u$

58. siná 3p$\overline{2}$ + ub = pecado $\frac{3p}{2}$ cos u + cos sen $\frac{3p}{2}$ u = - 1 # cos u + 0 # sen u = - cos u

60. sen1a + b2 + sen1a - b2 = sen a cos b + cos a sen b + sen a cos b - cos a sen b = 2 sen a cos b

61. $\frac{\text{sen1a + b2}}{\text{sen a cos b}} = \frac{\text{sen a cos b + cos a sen b}}{\text{pecado a cos}} = \frac{\frac{\text{pecado a porque b}}{\text{pecado a porque b}} + \frac{\text{porque un pecado b}}{\text{pecado a porque b}}}{= 1 + \text{cuna a tan b}}$

64. $\frac{\cos 1a + b2}{\text{porque a porque b}} = \frac{\text{b cos a cos b - pecado a pecado b}}{\text{porque a porque b}} = \frac{\frac{\text{porque a porque b}}{\text{cos a cos b cos a cos b sen a}} - \frac{\text{pecado a pecado b}}{}}{= 1 - \tan a \tan b}$

66. $\frac{\text{sen1a + b2}}{\text{pecado1a - b2}} = \frac{\text{sen a cos b + cos a sen b}}{\text{pecado a cos b - cos a pecado b}} = \frac{\frac{\text{cos b + cos a sen b}}{\text{porque a porque b}}}{\frac{\text{pecado a cos b - cos a pecado b}}{\text{porque a porque b}}} = \frac{\frac{\text{pecado a porque b}}{\text{porque a porque b}} + \frac{\text{porque un pecado b}}{\text{porque a porque b}}}{\frac{\text{pecado a porque b}}{\text{porque a porque b}} - \frac{\text{porque un pecado b}}{\text{porque a porque b}}} = \frac{\text{bronceado a + bronceado b}}{\text{bronceado a - bronceado b}}$

68. $\cot 1a + b2 = \frac{\cos 1a + b2}{\text{sen1a + b2}} = \frac{\text{porque a cos b - pecado a pecado b}}{\text{sen a cos b + cos a sen b}} = \frac{\frac{\text{porque a cos b - pecado a pecado b}}{\text{pecado a pecado b}}}{\frac{\text{sen a cos b + cos a sen b}}{\text{pecado a pecado b}}} = \frac{\frac{\text{porque a porque b}}{\text{pecado a pecado}} - \frac{\text{pecado a pecado b}}{\text{pecado a pecado b}}}{\frac{\text{b pecado a cos b}}{\text{pecado a pecado b}} + \frac{\text{porque un pecado b}}{\text{pecado a pecado b}}} = \frac{\text{cuna a cuna b - 1}}{\text{cuna b + cuna a}}$

70. $\text{seg1a + b2} = \frac{1}{\cos 1a + b2} = \frac{1}{\text{porque a cos b - pecado a pecado b}} = \frac{\frac{1}{\text{pecado a pecado b}}}{\frac{\text{porque a cos b - pecado a pecado b}}{\text{pecado a pecado b}}} = \frac{\frac{1}{\text{pecado un}} \cdot \frac{1}{\text{pecado b}}}{\frac{\text{porque a porque b}}{\text{pecado a pecado b}} - \frac{\text{pecado a pecado b}}{\text{pecado a pecado b}}} = \frac{\text{csc a csc b}}{\text{cuna a cuna b - 1}}$

72. sen1a - b2 sen1a + b2 = 1sen a cos b - cos a sen b2 1sen a cos b + cos a sen b2 = sen2 a cos2 b - cos2 a sen2 b
= sen2 a11 - sen2 b2 - 11 - sen2 a2sen2 b = sen2 a - sen2 b

74. sen1u + kp2 = sen u cos kp + cos u sen kp = 1sen u2 1 - 12 ^{k} + 1cos u2 102 = 1 - 12 ^{k} sen u, k cualquier número entero

76. $\frac{23}{2}$ 77. - $\frac{24}{25}$ 80. - $\frac{33}{65}$ 82. $\frac{63}{65}$ 84. $\frac{48 + 2523}{39}$ 86. $\frac{4}{3}$ 87. u21 - $\overline{v2}$ - v21 - u2 : - 1 … u … 1; - 1... v ... 1

90. $\frac{\text{u21- } \overline{\text{v2 - v}}}{}$: - q 6 u 6 q; - 1 … v … 1 92. 21 + u2 $\frac{\text{uv - 21 - u}\overline{221 - \text{v2}}}{\text{v21 - u2 + u21 - v2}}$: - 1… tu … 1; - 1… v … 1 94.ep $\frac{}{2}$, $\frac{7p}{6f}$ 95.ep _ $\overline{4f}$ 98.e 11p $\overline{6 f}$

Machine Translated by Google

99. $\operatorname{sen}1\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{v} + \cos^{-1} v2 = \operatorname{sen}1\operatorname{sen}^{-1} v2\cos 1\cos^{-1} v2 + \cos 1\operatorname{sen}^{-1} v2\operatorname{sen}1\cos^{-1} v2 = 1v2\,1v2 + 21 - v221 - v2 = v2 + 1 - v2 = 1$

102. $\frac{\operatorname{sen}1x + h2 - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\cos x\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x11 - \cos h2}{h}$ porque x # $\frac{\text{pecado h}}{h}$ - pecado x # $= \frac{1 - \text{porque h}}{h}$

(a) $\tan(\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3) = \tan((\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2) + \tan^{-1} 3) = 1 - \tan(\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2)\tan(\tan^{-1} 3)$ 103. $\frac{\tan(\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2) + \tan(\tan^{-1} 3)}{}$

$$= \frac{\frac{\text{bronceado}(\tan^{-1} 1) + \text{bronceado}(\tan^{-1} 2)}{1 - \text{bronceado}(\tan^{-1} 1)\tan(\tan^{-1} 2)} + 3}{1 - \frac{\text{bronceado}(\tan^{-1} 1) + \text{bronceado}(\tan^{-1} 2)}{1 - \text{bronceado}(\tan^{-1} 1)\tan(\tan^{-1} 2)}\#\,3} = \frac{\frac{1+2}{1-1\#2} + 3}{\frac{1+2}{1 - \text{n.º } 3\,1 - 1\text{ n.º } 2}} = \frac{\frac{3}{-1} + 3}{1 - \#\,\frac{3}{-1}} = \frac{-3+3}{1+9} = \frac{0}{10} = 0$$

(b) De la definición de la función tangente inversa, 0 6 $\tan^{-1} 1$ 6 $\frac{\text{pag}}{2}$, 0 6 bronceado-1 2 6 $\frac{\text{pag}}{2}$, y 0 6 $\tan^{-1} 3$ 6 $\frac{\text{pag}}{2}$,

entonces 0 6 $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$ 6 $\frac{3p}{2}$.

En el intervalo a0, 3p $\overline{2}$ b, tan u = 0 si y sólo si u = p. Por lo tanto, de la parte (a), $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = p$.

105. (a) 12400 - 1200232 $\overline{\text{pulg2}}$ (b) 11350 + 675232 $\overline{\text{cm2}}$ 107. $\tan u = \tan 1u2 - u12 = 1 + \frac{\text{bronceado u2 - bronceado u1}}{\tan u1\tan u2} = \frac{m2 - m1}{1 + m1m2}$

110. Sean a = $\operatorname{sen}^{-1} v$ y b = $\cos^{-1} v$. Entonces sen a = cos b = v, y como sen a = cosa p $\overline{2}$ - ab, cosa p $\overline{2}$ - ab = porque b.

Si v Ú 0, entonces 0… a… $\frac{\text{pag}}{2}$, jabón $\overline{2}$ - ab y b están ambos en c 0, … $\frac{\text{pag}}{2}$d. Si v 6 0, entonces - $\frac{\text{pag}}{2}$ < a < 0, entonces ap $\overline{2}$ - ab y b ambos se encuentran en a $\frac{\text{pag}}{2}$, PD.

De cualquier manera, cosa p $\overline{2}$ - ab = cos b implica $\frac{\text{pag}}{2}$ - a = b, o a + b = $\frac{\text{pag}}{2}$.

112. Sea a = $\tan^{-1}\frac{1}{v}$ y b = $\tan^{-1} v$. Porque v ≠ 0, a, b ≠ 0. Entonces tan a = $\frac{1}{v} = \frac{1}{\tan b}$ = cuna b, y desde

tan a = cota p $\overline{2}$ - ab, cota p $\overline{2}$ - ab = cuna b. Porque v 7 0, 0 6 a 6 Entonces $\frac{\text{pag}}{2}$, y así ap $\overline{2}$ - ab y b ambos se encuentran en a0, $\frac{\text{pag}}{2}$b.

cota p $\overline{2}$ - ab = cuna b implica $\frac{\text{pag}}{2}$ - a = b, o a = 2 $\frac{\text{pag}}{}$ - b.

113. 2 cuna 1a - b2 = $\frac{2}{\text{bronceado 1a - b2}} = 2\,\#\,\frac{1 + \text{bronceado a bronceado b}}{\tan a - \tan b} = 2\,\#\,\frac{1 + 1x + 12\,1x - 12}{1x + 12 - 1x - 12} = 2\,\#\,\frac{1 + x2 - 1}{x + 1 - x + 1} = \frac{2x2}{2} = x2$

115. bronceado $\frac{\text{pag}}{2}$ no está definido; tana p $\overline{2}$ - ub = $\frac{\text{sina p } \overline{2} - \text{ub}}{\text{cosa p } \overline{2} - \text{ub}} = \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}$ = cuna u.

116. a - $\frac{1}{3}$, - $\frac{5}{9}$b, 1 - 5, 12 117. 510° 118. $\frac{9p}{2}$ m2≈14.14 m2 119. seno = - $\frac{225}{5}$; porque tu = $\frac{25}{5}$; csc tu = - $\frac{25}{2}$; segundo u = 25; cuna u = - 2 $\frac{1}{}$

120. f1x2 = $\frac{1}{1x + 22\,4}$ ^{2} - 3 121. 566 122. $\log 7\,\frac{x3\,y2}{z5}$ 123. 144x18 y14 124. 52, 66 125. $1x\,\frac{14x + 24}{+ 32\,1>4}$, x7 - 3

7.6 Evalúe su comprensión (página 543)

1. pecado2 u; 2 cos2 u; 2 pecado2 u $\frac{\text{tu}}{2.\,2}$ 3. sen u 4. T 5. F 6. F 7. b 8. c 9. (a) 25 $\frac{24}{}$ (b) $\frac{7}{25}$ (C) $\frac{210}{10}$ (d) $\frac{3210}{10}$

12. (a) $\frac{24}{25}$ (b) - $\frac{7}{25}$ (C) $\frac{215}{5}$ (d) - $\frac{15}{5}$ 14. (a) - $\frac{212}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) C 3 + 26 d) C 3 - 26 6

16. (un) $\frac{422}{9}$ (b) - 9 $\frac{7}{}$ (C) $\frac{23}{3}$ (d) $\frac{26}{3}$ 18. (a) - 5 $\frac{4}{}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) C5 + 22 $\frac{10}{}$ (d) C 5 - 22 $\frac{10}{}$

20. (a) - 5 $\frac{3}{}$ (b) - 5 $\frac{4}{}$ (C) $\frac{1}{2C\,10 - 215}$ (d) - $\frac{1}{2C10 + 215}$ 21. $\frac{32 - 22}{2}$ 24. 1 - 22 26. - $\frac{32 + 23}{2}$

28. $\frac{2}{}$ = 12 - 222 32 + 22 30. - 32 + 22 $\frac{32 - 22}{2}$ 32. - $\frac{4}{5}$ 34. $\frac{31015 - 252}{10}$ 36. $\frac{4}{3}$ 38. - $\frac{7}{8}$ 40. $\frac{210}{4}$ 42. - $\frac{215}{3}$

43. $\operatorname{sen}4 u = 1\operatorname{sen}2 u2^{\,2} = \text{un}\left(\frac{1-\cos 12u2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ [1 - 2 cos12u2 + cos2 12u2] = 4 $\frac{1}{}$ - $\frac{1}{2\,4}$cos12u2 + $\frac{1}{}$ cos2 12u2

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 12u2 + \frac{1}{4}, \frac{1+\cos 14u2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 12u2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8\,8}\cos 14u2 = \frac{3}{} - \frac{1}{2}\cos 12u2 + \frac{1}{8}\cos 14u2$$

46. $\operatorname{sen}2 u\cos 2 u = \frac{1-\cos 12u2}{2}\cdot\frac{1+\cos 12u2}{2} = \frac{1}{4}$ 31 - cos2 12u2 4 = $\frac{1}{4\,c\,1 - \frac{1+\cos 14u2}{2}}$ re = $\frac{1}{4\,c\,\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\cos 14u2$ d = $\frac{1}{8} - \frac{1}{8}$ porque 14u2

48. cos13u2 = 4 cos3 u - 3 cos u 50. sen15u2 = 16 sen5 u - 20 sen3 u + 5 sen u 52. cos4 u - sen4 u = 1cos2 u + sen2 u2 1cos2 u - sen2 u2 = cos12u2

Machine Translated by Google

54. $\text{cuna12u2} = \frac{1}{\tan 12u2} = \frac{1 - \tan 2\,u}{2\ \text{bronceado}} = \frac{1 - \frac{1}{\text{cuna2 u}}}{2\,\frac{1}{\#\ \text{cuna}}} = \frac{\frac{\text{cuna2 u - 1}}{\text{cuna2 tu}}}{\frac{2}{\text{cuna}}} = \frac{\text{cuna2 u - 1}}{\text{cuna2 tu}}, \frac{\text{cuna}}{2} = \frac{\text{cuna2 u - 1}}{2\ \text{cunas}}$

56. $\text{seg12u2} = \frac{1}{\cos 12u2} = \frac{1}{2\cos 2\,u - 1} = \frac{1}{\frac{2}{\text{segundo2 tu}} - 1} = \frac{1}{\frac{2 - \text{seg2 u}}{\text{segundo2 tu}}} = \frac{\text{segundo2 tu}}{2 - \text{seg2 u}}$ 58. cos2 12u2 - sen2 12u2 = cos12 # 2u2 = cos14u2

60. $\frac{\cos 12u2}{1 + \text{pecado12u2}} = \frac{\cos 2\,u - \text{sen2 u}}{1 + 2\ \text{sen u cos u}} = \frac{1\cos u - \text{sen u2 }1\cos u + \text{sen u2}}{\text{sen2 u + cos2 u + 2 sen u cos u}} = \frac{1\cos u - \text{sen u2 }1\cos u + \text{sen u2}}{1\text{sen u + cos u2 }1\text{sen u + cos u2}} = \frac{\text{porque u - pecado u}}{\text{porque u + sen u}}$

$= \frac{\frac{\text{porque u - pecado u}}{\text{pecado u}}}{\frac{\text{porque u + sen u}}{\text{pecado u}}} = \frac{\frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}} - \frac{\text{pecado u}}{\text{pecado u}}}{\frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}} + \frac{\text{pecado u}}{\text{pecado u}}} = \frac{\text{cuna u - 1}}{\text{cuna u + 1}}$

62. $\text{seg2}\,\frac{tu}{2} = \frac{1}{\cos 2\ \text{es}_{\text{segundo}}} = \frac{1}{\frac{1 + \text{porque tú}}{2}} = \frac{2}{1 + \text{porque tú}}$

6. $\text{cuna2}\,\frac{v}{2} = \frac{1}{\tan 2\ \text{av}_{\text{2 segundo}}} = \frac{1}{\frac{1 - \text{porque v}}{1 + \text{porque v}}} = \frac{1 + \text{porque v}}{1 - \text{porque v}} = \frac{1 + \frac{1}{\text{segundo v}}}{1 - \frac{1}{\text{segundo v}}} = \frac{\frac{\text{segundos v + 1}}{\text{segundo v}}}{\frac{\text{segundo v - 1}}{\text{segundo v}}} = \frac{\text{segundos v + 1}}{\text{segundo v}}, \frac{\text{segundo v}}{\text{segundo v - 1}} = \frac{\text{segundos v + 1}}{\text{segundo v - 1}}$

66. $\frac{1 - \tan 2\ \text{au}_{\text{2 segundo}}}{1 + \tan 2\ \text{au}_{\text{2 segundo}}} = \frac{1 - \frac{1 - \text{porque tú}}{1 + \text{porque tú}}}{1 + \frac{1 - \text{porque tú}}{1 + \text{porque tú}}} = \frac{\frac{1 + \text{porque u - 11 - porque u2}}{1 + \text{porque tú}}}{\frac{1 + \text{porque u + 1 - porque u}}{1 + \text{porque tú}}} = \frac{2\ \text{porque tú}}{1 + \text{porque tú}}, \frac{1 + \text{porque tú}}{2} = \text{porque tú}$

68. $\frac{\text{pecado13u2}}{\text{pecado u}} - \frac{\cos 13u2}{\text{porque tú}} = \frac{\text{sin13u2 porque u - cos13u2sin u}}{\text{pecado u porque u}} = \frac{\text{pecado13u-u2}}{\frac{1}{2}\ 12\ \text{pecado u porque u2}} = \frac{2\ \text{pecado12u2}}{\text{pecado12u2}} = 2$

69. $\tan 13u2 = \tan 1u + 2u2 = 1 - \tan u\ \frac{\tan u + \tan 12u2}{\tan 12u2} = \frac{\text{bronceado} + \frac{2\ \text{bronceado}}{1 - \tan 2\,u}}{1 - \frac{\text{bronceado u12 bronceado u2}}{1 - \tan 2\,u}} = \frac{\tan u - \tan 3\,u + 2\tan u}{1 - \tan 2\,u - 2\tan 2\,u} = \frac{3\tan u - \tan 3\,u}{1 - 3\tan 2\,u}$

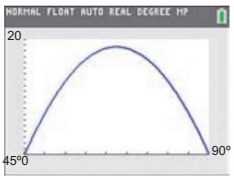
72. $\frac{1}{2}\ 1\ln 0\ 1 - \cos 12u2\ 0 - \ln 22 = \ln a\ \frac{0\ 1 - \cos 12u2\ 0}{2}^{1/2}\ b = \ln 0\text{sen2 u }0^{1/2} = \ln 0\sin u\ 0$ 73. $\text{ep}\ \frac{}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}$ f 76. mi $0, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}$ f

78. y $0, \frac{\text{pag}}{3}, \frac{\text{pag}}{2}, \frac{2p}{3}, \text{pág.}\ \frac{4p}{3}, \frac{3p}{2}, \frac{5p}{3}$ f 80. No hay solución real 82. e $0, \frac{\text{pag}}{3}, \text{pág.}\ \frac{5p}{3}$ f 84. $\frac{23}{2}$ 86. $\frac{7}{25}$ 88. $\frac{24}{7}$ 90. $\frac{24}{25}$ 92. $\frac{1}{5}$ 94. $\frac{25}{7}$ 96. $0, \frac{\text{pag}}{3}, \text{pág.}\ \frac{5p}{3}$

98. $\frac{\text{pag}}{2}, \frac{3p}{2}$ 100. $\frac{\text{pag}}{2}, \frac{7p}{6}, \frac{3p}{2}, \frac{11p}{6}$ 101. (a) 1115222 - 11522 pulg.2 o 115223 - 212 pulg.2 (b) 116222 + 1622 cm2 o 16223 + 212 cm2

103. (a) $W = 2D(\csc u - \cot u) = 2D\,¢\ 1\ \frac{}{\text{pecado u}} - \frac{\text{porque tú}}{\text{sen u}} \leq = 2D\,¢\ 1 - \cos \text{sen u} \leq = 2D\tan \frac{tu}{2}$ (b) u = 26,14°

105. (a) $R = \frac{v0^2\ 22}{\text{discales}}\ \text{porque u 1sin u - porque u2}$ (b) $\frac{3p}{8}$ o 67,5° (d)



tu = 67,5°

un $\frac{3p}{8}$ radianesb hacen que R sea el más grande.

$= \frac{v0^2\ 22}{32}\ 12\ \text{porque u sen u - 2 cos2 u2}$

(c) 3212 - 222 ≈ 18,75 pies

R = 18,75 pies

$= \frac{v0^2\ 22}{32}\ [\text{pecado 12u2 - porque 12u2 - 1}]$

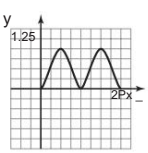
107. $A = \frac{1}{2}\ \text{h1base2} = \text{ha 1}\ \frac{}{2\ \text{baseb}} = \text{s cos}\ \frac{tu}{2}\ \#\ \text{s pecado}\ \frac{tu}{2} = \frac{1}{2}\ \text{s2 sen u}$ 109. $\text{sen12u2} = 4 + x2\ \frac{4x}{}$ 111. $-\frac{1}{4}$

$\frac{\cos 2\ ¢a\ 2 \leq - \text{sen2 }¢a\ 2 \leq}{\text{cosa}}$

113. Si $z = \tan ¢\ a\ 2 \leq$, entonces $\frac{1 - z2}{2z} = \frac{1 - \tan 2\ ¢a\ 2 \leq}{2\tan ¢\ la2 \leq} = \frac{\cos 2\ ¢a2 \leq}{2\tan ¢\ la2 \leq} = \frac{\cos 2\ ¢a2 \leq}{2\tan ¢\ la2 \leq} = \frac{\text{cosa}\quad \cos ¢a2 \leq}{\cos 2\ ¢a2 \leq\ 2\text{pecado}¢a2 \leq}$

$= \frac{\text{cosa}}{2\text{pecado}¢a2 \leq \cos ¢a\ 2 \leq} = \frac{\text{cosa}}{\text{siná}} = \text{cota}$

115. y



117. $\text{pecado}\,\frac{\text{pag}}{24} = \frac{22}{4}\ 44 - 36 - 22;\ \text{porque}\ \frac{\text{pag}}{24} = \frac{22}{4}\ 44 + 36 + 22$

Machine Translated by Google

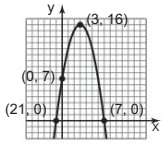
120. $\sin^3 u + \sin^3(u + 120°)/2 + \sin^3(u + 240°)/2 = \sin^3 u + (\sin u \cos 120° + \cos u \sin 120°)^2/2 + (\sin u \cos 240° + \cos u \sin 240°)^2/2$

$= \sin^3 u + \left(-\frac{1}{2}\sin u + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u\right)^3/2 + \left(-\frac{1}{2}\sin u - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u\right)^3/2$

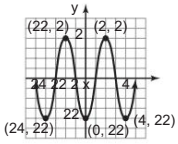
$= \sin^3 u + \frac{1}{8}(3\cos^3 u - 9\cos^2 u \sin u + 3\cos u \sin^2 u - \sin^3 u) - \frac{1}{8}(\sin^3 u + 3\sin^2 u \cos u + 9\sin u \cos^2 u + 3\cos^3 u)$

$= \frac{3}{4}\sin^3 u - \frac{9}{4}\cos^2 u \sin u = \frac{3}{4}[\sin^3 u - 3\sin u(1 - \sin^2 u)] = \frac{3}{4}(4\sin^3 u - 3\sin u) = -\frac{3}{4}\sin 3u$ (del ejemplo 2)

121. $-\frac{1}{2}$ 123. $y = x - 4$ 124. 2



125. $\frac{\sin 2u}{2} = \frac{2\sin u}{2}$ 126.



127. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ 128. $f^{-1}(x) = \frac{5x + 3}{2x + 1}$

129. mi $= \sqrt{2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\cos 45°} = \sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$ mi $\approx 3{,}6$ mi; $f = e$ en $9 - e$ en $128 - 3f \approx 56{,}5486$

130. 13 131. 6 132. $D = \frac{6x - 5y + 3}{5x - 4y + 4}$

7.7 Evalúe su comprensión (página 549)

2. $\frac{1}{2}\sin\frac{2u}{2} - 1$ b 4. $-2a\frac{1}{2}\sin\frac{2u}{2} + 1$b6. $\frac{2\sin^2 u}{2}$ 7. $\frac{1}{2}[\cos(2u - 2u) - \cos(6u + 2u)]$ 10. $\frac{1}{2}[\sin(6u + 2u) + \sin(2u + 2u)]$ 12. $\frac{1}{2}[\cos(2u + 2u) + \cos(8u - 2u)]$

14. $\frac{1}{2}[\cos u - \cos(3u + 2u)]$ 16. $\frac{1}{2}[\sin(2u + 2u) + \sin u]$ 17. $2\sin u \cos(3u + 2u)$ 20. $2\cos(3u + 2u)\cos u$ 22. $2\sin(2u + 2u)\cos u$ 24. $2\sin u \sin\frac{tu}{2}$

26. $\frac{\sin u + \sin(3u + 2u)}{\cos u + \cos(3u + 2u)} = \frac{2\sin(2u + 2u)\cos u}{2\cos(2u + 2u)\cos(2u + 2u) + 2\sin(2u + 2u)\sin u - \cos(3u + 2u)} = \frac{2\sin(2u + 2u)\cos u}{\cos(4u + 2u) + \cos(2u + 2u)\cos u - \cos(3u + 2u)} = \frac{\sin(2u + 2u)\cos u}{\cos(2u + 2u)\cos u} = \tan(2u + 2u)$

28. $\frac{\sin(4u + 2u) + \sin(2u + 2u)}{\cos(4u + 2u) + \cos(2u + 2u)} = \frac{2\sin(3u + 2u)\cos u}{2\cos(3u + 2u)\cos u} = \frac{\sin(3u + 2u)}{\cos(3u + 2u)} = \tan(3u + 2u)$

30. $\frac{\sin(2u + 2u) + \sin 2u}{\cos(2u + 2u) + \cos 2u} = \frac{2\sin(2u + 2u)\cos u}{2\cos(2u + 2u)\cos u} = \frac{\sin(2u + 2u)}{\cos(2u + 2u)} = \tan(2u + 2u)$

32. $\sin u[\sin u + \sin(3u + 2u)] = \sin u[2\sin(2u + 2u)\cos u] = \cos u[2\sin(2u + 2u)\sin u] = \cos u\left[2 \cdot \frac{1}{2}[\cos u - \cos(3u + 2u)]\right] = \cos u[\cos u - \cos(3u + 2u)]$

34. $\frac{\cos(4u + 2u) + \cos(8u + 2u)}{\cos(4u + 2u) + \cos(8u + 2u)} = \frac{2\cos(6u + 2u)\cos(2u + 2u)}{2\cos(6u + 2u)\cos(2u + 2u)} = \frac{\cos(6u + 2u)}{\cos(6u + 2u)} = \tan(6u + 2u)$

36. $\frac{\sin(4u + 2u) + \sin(8u + 2u)}{\cos(4u + 2u) - \cos(8u + 2u)} = \frac{2\sin(6u + 2u)\cos(-2u)}{2\sin(-2u)\sin(6u + 2u)} = \frac{\sin(6u + 2u)}{\cos(6u + 2u)} \cdot \frac{\cos(2u + 2u)}{\sin(2u + 2u)\tan(2u + 2u)} = \tan(6u + 2u)[-\cot(2u + 2u)] = -\frac{\tan(6u + 2u)}{\tan(2u + 2u)}$

38. $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}} = \tan\frac{a+b}{2}\cot\frac{a-b}{2}$

40. $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} = \tan\frac{a+b}{2}$

42. $1 + \cos(2u + 2u) + \cos(4u + 2u) + \cos(6u + 2u) = [1 + \cos(6u + 2u)] + [\cos(2u + 2u) + \cos(4u + 2u)] = 2\cos^2(3u + 2u) + 2\cos(3u + 2u)\cos(1 - u)$

$= 2\cos(3u + 2u)[\cos(3u + 2u) + \cos u] = 2\cos(3u + 2u)[2\cos(2u + 2u)\cos u] = 4\cos u \cos(2u + 2u)\cos(3u + 2u)$

44. $\sin^4 u\cos^2 u = (\sin^2 u)^2\cos^2 u = \left(\frac{1-\cos(2u + 2u)}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+\cos(2u + 2u)}{2}\right) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4u + 2u))(1 - \cos^2(2u + 2u))$

$= \frac{1}{8}(1 - \cos(4u + 2u))(1 - \cos(2u + 2u))\left(\frac{1+\cos(4u + 2u)}{2}\right) = \frac{1}{16}(1 - \cos(4u + 2u))(2 - 1 + \cos(4u + 2u))$

$= \frac{1}{16}(1 - \cos(4u + 2u))(1 - \cos(4u + 2u))(1 + \cos(4u + 2u)) = (1 - \cos(4u + 2u))^2(1 + \cos(4u + 2u))$

$= \frac{1}{16}(1 - 2\cos(4u + 2u) + \cos^2(4u + 2u))(1 + \cos(4u + 2u)) = \frac{1}{16}(1 - \cos(4u + 2u) - \cos^2(4u + 2u) + \cos^3(4u + 2u))$

$= \frac{1}{16}\left(1 - \cos(4u + 2u) - \frac{1+\cos(8u + 2u)}{2} + \cos(4u + 2u)\left(\frac{1+\cos(8u + 2u)}{2}\right)\right)$

$= \frac{1}{32}(2 - 2\cos(4u + 2u) - 1 - \cos(8u + 2u) + \cos(4u + 2u) + \cos(4u + 2u)\cos(8u + 2u))$

$= \frac{1}{32}(1 - \cos(4u + 2u) - \cos(8u + 2u) + \cos(4u + 2u)\cos(8u + 2u))$

$= \frac{1}{32} - \frac{1}{32}\cos(4u + 2u) - \frac{1}{32}\cos(8u + 2u) + \frac{1}{32}\cos(4u + 2u)\cos(8u + 2u)$

46. $\sin^6 u = (\sin^2 u)^3 = \left(\frac{1-\cos(2u + 2u)}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(1 - \cos(4u + 2u))^3$

$= \frac{1}{8}(1 - 2\cos(4u + 2u) + \cos^2(4u + 2u))(1 - \cos(4u + 2u)) = \frac{1}{8}(1 - 2\cos(4u + 2u) + \frac{1+\cos(8u + 2u)}{2})(1 - \cos(4u + 2u))$

$= \frac{1}{16}(2 - 4\cos(4u + 2u) + 1 + \cos(8u + 2u))(1 - \cos(4u + 2u)) = \frac{1}{16}(3 - 4\cos(4u + 2u) + \cos(8u + 2u))(1 - \cos(4u + 2u))$

$= \frac{1}{16}(3 - 3\cos(4u + 2u) - 4\cos(4u + 2u) + 4\cos^2(4u + 2u) + \cos(8u + 2u) - \cos(8u + 2u)\cos(4u + 2u))$

$= \frac{1}{16}\left(3 - 7\cos(4u + 2u) + 4\left(\frac{1+\cos(8u + 2u)}{2}\right) + \cos(8u + 2u) - \frac{1}{2}(\cos(12u + 2u) + \cos(4u + 2u))\right)$

$= \frac{1}{32}(6 - 14\cos(4u + 2u) + 4 + 4\cos(8u + 2u) + 2\cos(8u + 2u) - \cos(4u + 2u) - \cos(4u + 2u)\cos(8u + 2u))$

$= \frac{1}{16}(5 - 15\cos(4u + 2u) + 6\cos(8u + 2u) - \cos(4u + 2u)\cos(8u + 2u)) = \frac{5}{32} - \frac{15}{32}\cos(4u + 2u) + \frac{3}{16}\cos(8u + 2u) - \frac{1}{32}\cos(4u + 2u)\cos(8u + 2u)$

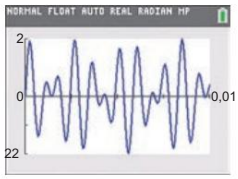
Machine Translated by Google

48. y 0, $\frac{\text{pag}}{3}, \frac{\text{pag}}{2}, \frac{2p}{3}$, pág. $\frac{4p}{3}, \frac{3p}{2}, \frac{5p}{3}$ f 50. e 0, $\frac{\text{pag}}{5}, \frac{2p}{5}, \frac{3p}{5}, \frac{4p}{5}$, pag, $\frac{6p}{5}, \frac{7p}{5}, \frac{8p}{5}, \frac{9p}{5}$ f

51. (a) y = 2 sin12061pt2 cos1357pt2

(b) ymáx = 2

(C)



53. Iu = Ix cos2 u + Iy sen2 u - 2Ixy sen u cos u = Ix cos2 u + Iy sen2 u - Ixy sen 2u

= Ix a cos 2u + 1 b + Iy a 1 - cos 2u b - Ixy pecado 2u

= $\frac{Ix}{2}$ porque 2u + $\frac{Ix}{2}$ + $\frac{yo}{2}$ - $\frac{yo}{2}$ porque 2u - Ixy sin 2u

= $\frac{Ix + Iy}{2}$ + $\frac{Ix - Iy}{2}$ porque 2u - Ixy sin 2u

Iv = Ix sen2 u + Iy cos2 u + 2Ixy sen u cos u = Ix a 1 - cos 2u b + Iy a cos 2u + 1 b + Ixy pecado 2u

= $\frac{Ix}{2}$ - $\frac{Ix}{2}$ porque 2u + $\frac{yo}{2}$ porque 2u + $\frac{yo}{2}$ + Ixy pecado 2u

= $\frac{Ix + Iy}{2}$ - $\frac{Ix - Iy}{2}$ porque 2u + Ixy sin 2u

55. sen1a - b2 = sen a cos b - cos a sen b

sen1a + b2 = sen a cos b + cos a sen b

sen1a - b2 + sen1a + b2 = 2 sen a cos b

sen a cos b = $\frac{1}{2}$[sen1a + b2 + sen1a - b2]

57. 2 porque $\frac{a+b}{2}$ porque $\frac{a-b}{2}$ = 2 # $\frac{1}{2}$c cosa a + b + $\frac{a-b}{2}$ b + cosa a + b - $\frac{a-b}{2}$ hab = porque $\frac{2a}{2}$ + porque $\frac{2b}{2}$ = porque a + porque b

60. sen12a2 + sen12b2 + sen12g2 = 2 sen1a + b2 cos1a - b2 + sen12g2 = 2 sen1a + b2 cos1a - b2 + 2 sen g cos g

= 2 sen1p - g2 cos1a - b2 + 2 sen g cos g = 2 sen g cos1a - b2 + 2 sen g cos g = 2 sen g[cos1a - b2 + cos g]

= 2 sen ga2 cos $\frac{a - b + g}{2}$ porque $\frac{a-b-g}{2}$ b = 4 sen g cos $\frac{pag - 2b}{2}$ porque $\frac{2a-p}{2}$ = 4 sin g cosa p $\frac{\text{pag}}{2}$ -bb cosaa- $\frac{\text{pag}}{\text{2 segundo}}$

= 4 sen g sen b sen a = 4 sen a sen b sen g

61.5136 62. Amplitud: 5; Período: $\frac{\text{pag}}{2}$; Cambio de fase: $\frac{\text{pag}}{4}$ 63. $\frac{226}{7}$

64. f $^{-1}$ 1x2 = sen-1 a x + 53b; Rango de f = Dominio de f 69. c 1 $^{-1}$ = 3 - 8, - 24; Rango de f $^{-1}$ =c- $\frac{\text{pag}}{2}, \frac{\text{pag}}{2}$ días 65. - $\frac{23}{3}$ 66. f1x2 = 1x - 32 3 ^{2} - 5

67. 4800 rpm 68. h = $\frac{2A}{b}$ $\frac{}{2}$, 3d 70. $\frac{2}{3}$

Ejercicios de repaso (página 552)

1. Dominio: 5x - 1… x … 16; Rango: e y ` - 3. Dominio: $\frac{\text{pag}}{2}$ … y … $\frac{\text{pag}}{2}$ f 2. Dominio: 5x - 1… x … 16; Rango: 5y 0 … y … p6

5x - q 6 x 6 q 6; Rango: e y ` - 5. Dominio: 5x @ x Ú 16; $\frac{\text{pag}}{2}$ 6 y 6 $\frac{\text{pag}}{2}$ f 4. Dominio: 5x @ x Ú 16; Rango: e y ` 0 … y … p, y ≠ $\frac{\text{pag}}{2}$ f

Rango: e y ` - $\frac{\text{pag}}{2}$ … y … $\frac{\text{pag}}{2}$, y ≠ 0 f 6. Dominio: 5x - q 6 x 6 q 6; Rango: 5y 0 6 y 6 p6

7. $\frac{\text{pag}}{2}$ 8. $\frac{\text{pag}}{2}$ 9. $\frac{\text{pag}}{4}$ 10. - 6 $\frac{\text{pag}}{}$ 11. $\frac{5p}{6}$ 12. - 3 $\frac{\text{pag}}{}$ 13. $\frac{\text{pag}}{4}$ 14. $\frac{3p}{4}$ 15. $\frac{3p}{8}$ $\frac{3p}{\text{diciséis.}}$ $\frac{3p}{4}$ 17. - $\frac{\text{pag}}{3}$ 18. $\frac{\text{pag}}{7}$ 19. - 9 $\frac{\text{pag}}{}$ 20. 0,9 21. 0,6 22. 5 23. No definido

24. - 6 $\frac{\text{pag}}{}$ 25. pág. 26. - 23 27. $\frac{223}{3}$ 28. $\frac{4}{5}$ 29. - 3 $\frac{4}{}$ 30. f $^{-1}$ (x) = $\frac{1}{3}$ pecado- 1 x2b; Rango de f = Dominio de f $^{-1}$ = [- 2, 2]; Rango de f $^{-1}$ =c- $\frac{\text{pag}}{6}, \frac{\text{pag}}{\text{6 días}}$

31. f $^{-1}$ 1x2 = cos-1 13 - x2; Rango de f = Dominio de f $^{-1}$ = 32, 44; Rango de f $^{-1}$ = 30, p4 32. 21 - u2 33. u2u2 - 1 $\frac{tu}{}$

34. tan u cot u - sen2 u = 1 - sen2 u = cos2 u 35. cos2 u(1 + tan2 u) = cos2 u sec2 u = 1

36. 5 cos2 u + 3 sen2 u = 2 cos2 u + 31cos2 u + sen2 u2 = 3 + 2 cos2 u

37. $\frac{1 - \text{porque tú}}{\text{pecado u}}$ + $\frac{\text{pecado u}}{1 - \text{porque tú}}$ = $\frac{11 - \cos u2^{2} + \text{pecado2 u}}{\text{sen u11 - cos u2}}$ = $\frac{1 - 2 \text{ porque u} + \text{cos2 u} + \text{sen2 u}}{\text{pecado u11 - porque u2}}$ = $\frac{211 - \text{porque u2}}{\text{pecado u11 - porque u2}}$ = 2 csc u

38. $\frac{\text{porque tú}}{\text{porque u - pecado u}}$ = $\frac{\frac{\text{porque tú}}{\text{porque tú}}}{\frac{\text{porque u - pecado u}}{\text{porque tú}}}$ = $\frac{1}{1 - \frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}}}$ = $\frac{1}{1 - \tan tú}$ 39. $\frac{\text{csc u}}{1 + \text{csc u}}$ = $\frac{\frac{1}{\text{pecado u}}}{1 + \frac{1}{\text{pecado u}}}$ = $\frac{1}{1 + \text{pecado u}}$ = $\frac{1}{1 + \text{pecado u}}$, $\frac{1 - \text{pecado u}}{1 - \text{pecado u}}$ = $\frac{1 - \text{pecado u}}{1 - \text{pecado2 u}}$ = $\frac{1 - \text{pecado u}}{\text{cos2 tu}}$

40. seg u - cos u = - cos u = cos u $\frac{1}{}$ $\frac{1 - \text{cos2 u}}{\text{porque tú}}$ = $\frac{\text{pecado2 tu}}{\text{porque tú porque tú}}$ = pecado u. $\frac{\text{pecado u}}{}$ = sin utan u

41. $\frac{1 + \text{porque tú}}{\text{cosecu}}$ = sen u(1 + cos u) = sen u(1 + cos u).1 - cos u $\frac{}{1 - \text{porque tú}}$ = $\frac{\text{sen u(1 - cos2 u)}}{1 - \text{porque tú}}$ = $\frac{\text{pecado u(pecado2 u)}}{1 - \text{porque tú}}$ = $\frac{\text{pecado3 tu}}{1 - \text{porque tú}}$

42. cuna u - tan u = $\frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}$ - $\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}}$ = $\frac{\text{cos2 u - sen2 u}}{\text{pecado u porque u}}$ = $\frac{1 - 2 \text{ pecado2 u}}{\text{pecado u porque u}}$

Machine Translated by Google

43. $\frac{\text{pecado(a-b)}}{\text{cos a cos b}} = \frac{\text{pecado a cos b - pecado b cos a}}{\text{cos a cos b}} = \frac{\text{pecado a porque b}}{\text{porque a porque b}} - \frac{\text{pecado b porque a}}{\text{porque a porque b}} = \frac{\text{pecado un}}{\text{porque un}} - \frac{\text{pecado b}}{\text{porque b}} = \text{tan a - tan b}$

44. $\frac{\text{cos1a - b2}}{\text{porque a porque b}} = \frac{\text{cos a cos b + sen a sen b}}{\text{porque a porque b}} = \frac{\text{porque a porque b}}{\text{porque a porque b}} + \frac{\text{pecado a pecado b}}{\text{porque a porque b}} = 1 + \text{tan a tan b}$

45. 11 + porque u2tan $\frac{tu}{2}$ = 11 + cos u2 # = sen u $\frac{\text{pecado u}}{\text{1 + porque tú}}$

46. 2 cuna u cuna 2u = 2 $\frac{\text{porque tú}}{\text{# sinu}}$, $\frac{\text{porque 2u}}{\text{sin2u}} = \frac{\text{2 cosu1cos2 u - sen2 u2}}{\text{2 sen2 u cosu sen2 u = 1 - 2 sen2}^2} = \frac{\text{cos2 u - sen2 u}}{\text{12u2 = cos14u2}} = \text{cuna2 u - 1}$

47. 1- 8 sen2 u cos2 u = 1 - 212 sen u cos u2

48. $\frac{\text{sen13u2cos u - sen u cos13u2}}{\text{sin12u2}} = \frac{\text{pecado12u2}}{\text{sen12u2 cos12u2 + cos14u2 - 2 sen13u2}} = 1$ 49. $\frac{\text{pecado12u2 + pecado14u2}}{\text{2 cos13u2 cos1 - u2}} = \text{tan13u2}$

50. $\frac{\text{cos12u2 - cos14u2}}{\text{cos12u2 + cos14u2 23}}$ - tan u tan13u2 = 2 $\frac{\text{sen1 - u2}}{\text{cos13u2 cos1 - u2}}$ - tan u tan13u2 = tan13u2 tan u - tan u tan13u2 = 0

51. $\frac{\text{- 1}}{\text{222}}$ 52. $\frac{1}{22}$ 53. $\frac{1}{4}$(26 + 22) 54. 1 55. 1 56. 0 57. 2 + 23 58. $\frac{\text{42 - 22}}{2}$ 59. (un) $\frac{\text{- 327 + 12}}{20}$ (b) - $\frac{\text{9 + 427}}{20}$

(C) - $\frac{\text{327 + 12}}{20}$ (d) $\frac{\text{3(27 - 4)}}{\text{9 + 427}}$ (mi) $\frac{327}{8}$ (f) - $\frac{7}{25}$ (gramo) $\frac{220}{5}$ (h) $\frac{256}{8}$ 60. (un) $\frac{\text{23 - 222}}{6}$ (b) $\frac{\text{226 + 1}}{6}$ (C) $\frac{\text{23 + 222}}{6}$

(d) $\frac{\text{322 - 423}}{\text{12 + 26}}$ (mi) $\frac{422}{9}$ (f) $\frac{1}{2}$ (gramo) $\frac{\text{42 - 23}}{2}$ (h) $\frac{\text{418 + 1222}}{6}$ 61. (a) - 65 $\frac{63}{65}$ (b) $\frac{\text{33}}{\text{65}}$ (c) $\frac{\text{33}}{\text{65}}$ (d) - 16 $\frac{63}{24}$ (mi) $\frac{24}{25}$ (f) - $\frac{119}{169}$

(gramo) $\frac{2213}{13}$ (h) - $\frac{210}{10}$ 62. (un) $\frac{\text{- 23 - 222}}{6}$ (b) $\frac{\text{1 - 226}}{6}$ (C) $\frac{\text{- 23 + 222}}{6}$ (d) $\frac{\text{822 + 923}}{23}$ (mi) - $\frac{23}{2}$ (f) - 9 $\frac{7}{23}$ (gramo) $\frac{23}{3}$

(h) $\frac{23}{2}$ 63. (a) 1 (b) 0 (c) - 9 $\frac{1}{425}$ (d) No definido (e) $\frac{425}{9}$ (f) - 9 $\frac{1}{230}$ (gramo) $\frac{230}{6}$ (h) - $\frac{\text{2633-25}}{6}$ 64. $\frac{\text{4 + 323}}{10}$

sesenta y cinco. - $\frac{\text{32119 + 527}}{\text{15 - 2833}}$ 66. - $\frac{\text{48 + 2523}}{39}$ 67. - $\frac{22}{10}$ 68. - $\frac{24}{25}$ 69. - $\frac{7}{25}$ 70. episodio $\frac{5p}{3}$ ' 3f 71.e 2p $\frac{5p}{3}$ ' 3f 72.e 3p $\frac{7p}{4}$ ' 4f

73. e 0, $\frac{\text{pag}}{\text{, p, 2}}$ $\frac{3p}{2f}$ 74.ep _ $\frac{2p}{3}$ ' $\frac{2p}{3}$ ' $\frac{4p}{3}$ ' $\frac{5p}{3}$ f 75. 50.25, 2.896 76. e 0, $\frac{2p}{3}$, pág. $\frac{4p}{3}$ f 77. mi 0, $\frac{\text{pag}}{6}$ ' $\frac{5p}{6f}$ 78.ep _ $\frac{\text{pag}}{6}$ ' $\frac{5p}{2}$ ' $\frac{5p}{6f}$ 79.ep _ $\frac{5p}{3}$ ' 3f

80. ep $\frac{\text{pag}}{4}$ ' $\frac{3p}{2}$ ' $\frac{3p}{4}$ ' $\frac{3p}{2f}$ 81.ep _ $\frac{23}{2}$ ' pf 82. 0.78 83. - 1.11 84. 1.77 85. 1.23 86. 2.90 87. 51.116 88. 50.876 89. 52.226 90. e - 2 f 91. 506

92. sen 15° = B 1 - cos 30 $\frac{\text{23}}{2}$ =T 1- $\frac{\text{23}}{2}$ = C2-23 $\frac{\text{22-13}}{2}$; sen 15° = sen(45° - 30°) = sen 45° cos 30° - cos 45° sen 30°

= $\frac{22}{2}$, $\frac{23}{2}$ - $\frac{22}{2}$, $\frac{1}{2}$ = $\frac{26}{4}$ - $\frac{22}{4}$ = $\frac{\text{26 - 22}}{4}$; J 22 - 13 R = $\frac{\text{2 - 13}}{4}$ = $\frac{\text{412 - 232}}{\text{4 # 4}}$ = $\frac{\text{8 - 423}}{\text{diciembre}}$ = $\frac{\text{6 - 2212 + 2}}{\text{diciembre}}$

=¢ $\frac{\text{26 - 22}}{4}$ ≤ 2

93. cos12u2 = 2 cos2 u - 1

Prueba de capítulo (página 554)

diciembre _ $\frac{\text{pag}}{2}$ 2. - $\frac{\text{pag}}{4}$ 3. - $\frac{\text{pag}}{3}$ 4. $\frac{\text{pag}}{2}$ 5. $\frac{\text{pag}}{4}$ 6. - $\frac{\text{pag}}{6}$ 7. $\frac{\text{pag}}{5}$ 8. $\frac{7}{3}$ 9. 3 10. - 3 $\frac{4}{}$ 11. 0,39 12. 0,78 13. 1,25 14. 0,20

15. $\frac{\text{csc u + cuna u}}{\text{seg u + tan u}} = \frac{\text{csc u + cuna u}}{\text{segundo u + tan u}} , \frac{\text{csc u - cuna u}}{\text{csc u - cuna u}} = \frac{\text{csc2 u - cot2 u}}{\text{1seg u + tan u2 1csc u - cot u2}} = \frac{1}{\text{1seg u + tan u2 1csc u - cot u2}}$

= $\frac{1}{\text{1seg u + tan u2 1csc u - cot u2}} , \frac{\text{segundo u - tan u}}{\text{segundo u - tan u}} = \frac{\text{segundo u - tan u}}{\text{1sec2 u - tan2 u2 1csc u - cot u2}} = \frac{\text{segundo u - tan u}}{\text{csc u - cuna u}}$

16. sen u tan u + cos u = sen u # + cos u = cos u $\frac{\text{pecado u}}{\text{pecado u}}$ $\frac{\text{pecado2 tu}}{\text{porque tú}} + \frac{\text{cos2 tu}}{\text{porque}} = \frac{\text{sen2 u + cos2 u}}{\text{porque}} = \frac{1}{\text{porque tú}} = \text{segundo u}$

17. tan u + cot u = + cos u $\frac{\text{pecado u}}{\text{pecado u}}$ $\frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}} = \frac{\text{pecado2 tu}}{\text{pecado u porque u}} + \frac{\text{u cos2 u}}{\text{pecado u porque u}} = \frac{\text{u sen2 u + cos2 u}}{\text{pecado u porque u}} = \frac{1}{\text{pecado u porque u}} = \frac{2}{\text{2 pecado u porque u}} = \frac{2}{\text{pecado12u2}} = 2\text{csc12u2}$

18. $\frac{\text{sen1a + b2}}{\text{bronceado a + bronceado b}} = \frac{\text{sen a cos b + cos a sen b}}{\frac{\text{pecado un}}{\text{porque un}} + \frac{\text{pecado b}}{\text{porque b}}} = \frac{\text{sen a cos b + cos a sen b}}{\frac{\text{pecado a porque b}}{\text{porque a porque b}} + \frac{\text{porque un pecado b}}{\text{porque a porque b}}} = \frac{\text{sen a cos b + cos a sen b}}{\text{sen a cos b + cos a sen b}}$

porque a porque b

= $\frac{\text{sen a cos b + cos a sen b}}{1} , \frac{\text{porque a porque b}}{\text{sen a cos b + cos a sen b}} = \text{porque a porque b}$

19. sen13u2 = sen1u + 2u2 = sen u cos12u2 + cos u sen12u2 = sen u # 1cos2 u - sen2 u2 + cos u # 2 sen u cos u = sen u cos2 u - sen3 u + 2 sen u cos2 u

= 3 sen u cos2 u - sen3 u = 3 sen u11 - sen2 u2 - sen3 u = 3 sen u - 3 sen3 u - sen3 u = 3 sen u - 4 sen3 u

20. $\frac{\text{bronceado u - cuna u}}{\text{tan u + cuna u}} = \frac{\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} - \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}}{\frac{\text{pecado u}}{\text{porque tú}} + \frac{\text{porque tú}}{\text{pecado u}}} = \frac{\text{sen2 u - cos2 u}}{\text{pecado u porque u}} = \frac{\text{sen2 u - cos2 u}}{\text{sen2 u + cos2 u}} = \frac{\text{11 - cos2 u2 - cos2 u}}{1} = 1 - 2\cos2\text{ u 21, 4}$ $\frac{1}{\text{1 26 + 222}}$

Machine Translated by Google

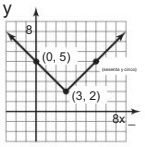
22. 2 + 23 23. $\frac{25}{5}$ 24. $\frac{12285}{49}$ 25. $\frac{2213\ 1\ 25 - 32}{39}$ 26. $\frac{2 + 23}{4}$ 27. $\frac{26}{2}$ 28. $\frac{22}{2}$ 29. episodio $\frac{3}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}$ f 30. 50, 1.911, pág. 4.3736

31. y $\frac{3p}{8}, \frac{7p}{8}, \frac{11p}{8}, \frac{15p}{8}$f 32. 50.285, 3.4276 33. 50.253, 2.8896

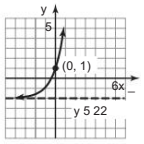
Revisión acumulativa (página 555)

1. e - 1- 26 $\frac{}{3}, \frac{- 1 + 213}{6}$ f 2. y + 1 = - 11x - 42, o x + y = 3; 622; 11, 22 3. simetría del eje x; 10, - 32, 10, 32, 13, 02

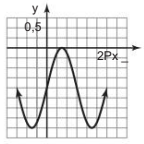
4. y



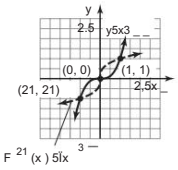
5.



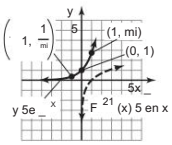
6.



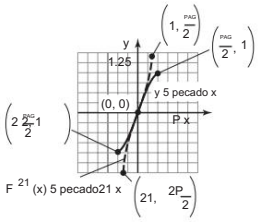
7. (un)



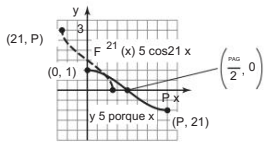
(b)



(C)



(d)



8. (a) - $\frac{222}{3}$ (b) $\frac{22}{4}$ (C) $\frac{422}{9}$ (d) $\frac{7}{9}$ (e) C 3 + 222 $\frac{}{2}$ (f) - C 3 - 2226 $\frac{}{}$ 9. $\frac{25}{5}$ 10 a) - $\frac{222}{3}$ (b) - $\frac{222}{3}$ (c) $\frac{7}{9}$ (d) $\frac{422}{9}$ (mi) $\frac{26}{3}$

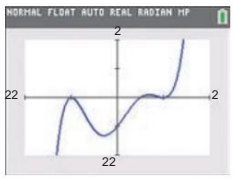
11. (a) f1x2 = 12x - 12 1x - 12 1 ^{2}1x + 12 ^{2};

$\frac{}{2}$ multiplicidad 1; 1 y - 1 multiplicidad 2

(b) 10, - 12; un 12, 0b; 1 - 1, 02; 11, 02

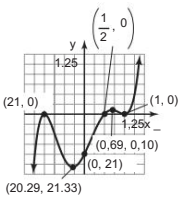
(c) y = 2x5

(d)



(e) Valor mínimo local - 1,33 en x = - 0,29,
Valor mínimo local 0 en x = 1
Valor máximo local 0 en x = - 1,
Valor máximo local 0,10 en x = 0,69

(F)



(g) Creciente: 1 - q,- 14, 3 - 0,29, 0,694, 31,q 2
Decreciente: 3 - 1, - 0,294, 30,69,14

12. (a) mi - 1, - 2 $\frac{1}{f}$

(b) 5-1, 16

(c) 1 - q, - 12 una - $\frac{1}{2}$, qb

(d) 1 - q, - 14 31, q 2

CAPÍTULO 8 Aplicaciones de funciones trigonométricas

8.1 Evalúe su comprensión (página 565)

4. F 5. b 6. ángulo de elevación 7. T 8. F 9. sen u = $\frac{5}{13}$; porque tu = $\frac{12}{13}$; tanu = $\frac{5}{5\ 213}$ cuna u = ; segundo u = 12; $\frac{13}{12}$; csc tu = $\frac{13}{5}$

12. pecado u = $\frac{2213}{13}$; porque tu = ; tan u = $\frac{3213}{13}$ $\frac{2}{3}$; cuna u = $\frac{3}{}$; segundo u = ; csc tu = 2 $\frac{}{2}$

14. pecado u = $\frac{23}{2}$; porque tu = $\frac{1}{2}$; tanu = 23; cuna u = ; segundo tu = 2; csc tu = $\frac{223}{3}$

16. pecado u = $\frac{26}{3}$; porque tu = $\frac{23}{3}$; tanu = 22; cuna u = ; segundo u = 23; csc tu = $\frac{26}{2}$

18. pecado u = $\frac{25}{5}$; porque tu = ; tan u = $\frac{225}{5}$ $\frac{1}{}$ = 2; cuna tu = 2; segundo u $\frac{25}{2}$; csc tu = 25

19. 0 22. 1 24. 0 26. 0 28. 1 29. a ≈ 13,74, c ≈ 14,62, A = 70° 32. b ≈ 5,03, c ≈ 7,83, A = 50° 34. a ≈ 0,71, c ≈ 4,06, B = 80°

36. b ≈ 10,72, c ≈ 11,83, B = 65° 38. b ≈ 3,08, a ≈ 8,46, A = 70° 39. c ≈ 5,83, A ≈ 59,0°, B ≈ 31,0° 42. b ≈ 4,58, A ≈ 23,6°, B ≈ 66,4°

44. A = 30°, B = 60° 46. 4,59 pulg.; 6,55 pulg. 48. (a) 5,52 pulg. o 11,83 pulg. 49. Aproximadamente 61,87 pies 51. 985,91 pies 53. 137,37 m 55. 80,5°

57. (a) 111,96 pies/seg o 76,3 mi/h (b) 82,42 pies/seg o 56,2 mi/h (c) Menos de 18,8° 59. (a) 2,4898 * 1013 millas (b) 0,000214° 61,554,52 pies

63. S76.6°E 65. El terraplén tiene 30,5 m de altura. 67. 3.83 mi 69. 1978.09 pies 71. 60.27 pies 73. Los edificios están separados por 7984 pies.

75. Aproximadamente 60,9° 77. 38,9° 79. La bola blanca debe golpear la banda superior a 3,34 pies de la esquina superior izquierda. 81. 76,94 pulgadas 86. Sí

87. $\frac{26 - 22}{4}$ o $\frac{22}{4}$ 1 23 - 12 88. 0,236, 0,243, 0,248 89. ep $\frac{}{2}, \frac{7p}{6}, \frac{11p}{6}$ f 90. $\frac{21}{4}$ = 5,25 91,3 + 25 92,1 93,65

94. (x + 4)2 + y2 = 5 95. (- q, q)

Machine Translated by Google

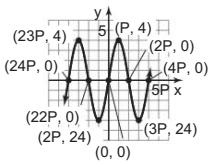
8.2 Evalúe su comprensión (página 578)

5. un 6. $\frac{\text{pecado A}}{a} = \frac{\text{pecado b}}{b} = \frac{\text{pecado C}}{C}$ 7. d 8. F 9. F 10. caso ambiguo 11. a ≈ 3,23, b ≈ 3,55, A = 40° 14. a ≈ 3,25, c ≈ 4,23, B = 45°
16. C = 95°, c ≈ 9,86, a ≈ 6,36 18. A = 40°, a = 2, c ≈ 3,06 20. C = 100°, b ≈ 2,06, c ≈ 4,81 22. A = 69°, a ≈ 6,23, c ≈ 4,88
24. B = 40°, a ≈ 5,64, b ≈ 3,86 25. C = 100°, a ≈ 1,31, b ≈ 1,31 27. Un triángulo; B ≈ 30,7°, C ≈ 99,3°, c ≈ 3,86
30. Un triángulo; C ≈ 23,8°, A ≈ 41,2°, a ≈ 6,55 32. Un triángulo rectángulo; B = 90°, C = 60°, c ≈ 12,12
34. Dos triángulos; C1 ≈ 30,9°, A1 ≈ 129,1°, a1 ≈ 9,07 o C2 ≈ 149,1°, A2 ≈ 10,9°, a2 ≈ 2,20 36. Sin triángulo
38. Dos triángulos; A1 ≈ 29°, B1 ≈ 139°, b1 ≈ 9,47 o A2 ≈ 151°, B2 ≈ 17°, b2 ≈ 4,22
39. 1490,48 pies 41. 335,16 pies 43. Aproximadamente 111,07 pies y 106,07 pies 45. Aproximadamente 143,1 yardas 47. Adam recibe 100,6 millas de viajero frecuente más.
49. (a) La estación Able está a unas 143,33 millas del barco: la estación Baker está a unas 135,58 millas del barco. (b) Aproximadamente 41 minutos
51, 84,7°; 183,72 pies 53. 2,64 mi 55. 38,5 pulg. 57. 449,36 pies 59. 187.600.000 km o 101.440.000 km 61. El diámetro es 252 pies.

63. $\frac{a-b}{C} = \frac{a}{C} - \frac{b}{C} = \frac{\text{pecado A}}{\text{pecado C}} - \frac{\text{pecado b}}{\text{pecado C}} = \frac{\text{pecado A - pecado B}}{\text{pecado C}} = \frac{2 \text{ senas A - 2b cosa A + B}}{2 \text{ pecado } \frac{C}{2} \text{ porque } \frac{C}{2}} = \frac{\text{Sina A - B 2 b cosa p } \frac{2}{2} - \frac{C}{2}}{\text{pecado } \frac{C}{2} \text{ porque } \frac{C}{2}} = \frac{\text{Sina A - B}}{\text{porque } \frac{C}{2}}$

65. $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{a-b}{C}}{\frac{a+b}{C}} = \frac{\frac{\text{pecado } \frac{A-B}{2} \text{ porque } \frac{C}{2}}{\text{porque } \frac{A-B}{2} \text{ pecado } \frac{C}{2}}}{} = \frac{\text{bronceado } \frac{A-B}{2}}{\text{cuna } \frac{C}{2}} = \frac{\text{bronceado } \frac{A-B}{2}}{\text{bronceado } \frac{A+B}{2}} = \frac{\text{bronceado } \frac{A-B}{2}}{\text{bronceado } \frac{A+B}{2}}$

71. mi - 3, $-\frac{4}{3}$, 3 f 72. 325 ≈ 6.71 73. $-\frac{115}{7}$ 74.



75. loga100 = 0.2x 76. 199.668 77. y = $\frac{1}{3}$ 78. y = $\frac{3}{2}$x - 2
79. Tampoco 80. un 6 $\sqrt{13}$, qb

8.3 Evalúe su comprensión (página 585)

3. Cosenos 4. a 5. b 6. F 7. F 8. T 9. b ≈ 2,95, A ≈ 28,7°, C ≈ 106,3° 12. c ≈ 3,75, A ≈ 32,1°, B ≈ 52,9°
14. A ≈ 48,5°, B ≈ 38,6°, C ≈ 92,9° 15. A ≈ 127,2°, B ≈ 32,1°, C ≈ 20,7° 17. c ≈ 2,57, A ≈ 48,6°, B ≈ 91,4°
20. a ≈ 3,98, B ≈ 29°, C ≈ 76° 22. b ≈ 6,46, A ≈ 48,4°, C ≈ 26,6° 24. c ≈ 2,98, A = 39,1°, B = 70,9°
25. A ≈ 43,6°, B = 90°, C ≈ 46,4° 28. A = 60°, B = 60°, C = 60° 30. A ≈ 29,8°, B ≈ 65,8°, C ≈ 84,3°
32. A ≈ 127,1°, B ≈ 43,8°, C ≈ 9,2° 34. A = 85°, a = 14,56, c = 14,12 36. A = 40,8°, B = 60,6°, C = 78,6° 38. A = 80°, b = 8,74, c = 13,80
40. C = 90°, a = 4,93, b = 6,30 42. Dos triángulos: B1 = 35,4°, C1 = 134,6°, c1 = 12,29; B2 = 144,6°, C2 = 25,4°, c2 = 7,40
44. B = 24,5°, C = 95,5°, a = 10,44 45. Aproximadamente 143,1 yardas 47. (a) ≈ 23,6° (b) ≈ 14,6 horas 49. (a) ≈ 46,18 pies (b) ≈ 50,42 pies
(c) ≈ 95,5° 52. (a) 492,58 pies (b) 269,26 pies 53. (a) 59,2 mm (b) macho 55. (a) a ≈ 9,9°, b ≈ 8,3° (b) 21,73 yd (c) ≈ 0,36 yardas o 13 pulgadas.
57. 342,33 pies 59. Las zapatas deben estar separadas 7,65 pies.
61. Supongamos que 0 6 u 6 p. Entonces, por la Ley de los Cosenos, d2 = r 2 2 + r - 2r porque u = 4r $\frac{1 - \text{porque tú}}{2}$ b 1 d = 2r B 1 - porque $\frac{tu}{2}$ = 2r sen $\frac{tu}{2}$.

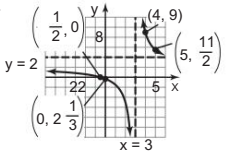
Dado que, para cualquier ángulo en 10, p2, d es estrictamente menor que la longitud del arco subtendido por u, es decir, d 6 ru, entonces 2r sen 2 $\frac{tu}{2}$ 6 ru, o 2 pecado $\frac{tu}{2}$ 6 uds.

Desde cos $\frac{tu}{2}$ 6 1, entonces, para 0 6 u 6 p, sen u = 2 sen 2 $\frac{tu}{2}$ porque $\frac{tu}{2}$ 6 2 pecado $\frac{tu}{2}$ 6 uds. Así sen u 6 u para 0 6 u 6 p.

63. pecado $\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{porque C}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{a2 + b2 - c2}{2ab}}{2}} = \sqrt{\frac{2ab - a2 - b2 + c2}{4ab}} = \sqrt{\frac{c2 - 1a - b2}{4ab}} = \sqrt{\frac{1c + a - b2 1c + b - a2}{4ab}}$

$= \sqrt{\frac{12s - 2b2 12s - 2a2}{4ab}} = \sqrt{\frac{1s - a2 1s - b2}{ab}}$

70.



71. e ln 4 - ln 3 f 72. sen u = $\frac{\text{en 3}}{}$ $\frac{216}{7}$; csc u = ; segundo u = - ; cuna u = - 5 $\frac{716}{12}$ $\frac{7}{}$ $\frac{516}{12}$ 73. y = - 3 pecado(4x)

74. $f^{-1}(x) = \frac{Un - 2x}{5x}$ 75. $\frac{2}{3}$ 76. $\frac{4 \# 3x}{x3>2}$ hacha # en 3 - $\frac{1}{2}$ b 77. a - q, $\frac{2}{5}$ re c $\frac{3}{4}$, qb 78. $\frac{8p}{15}$

79. Cuadrante II; 2 intersecciones x

8.4 Evalúe su comprensión (página 592)

3. $\frac{1}{2}$ ab pecado C 4. 2s(s - a)(s - b)(s - c); $\frac{1}{2}$ (a + b + c) 5. 6 6. T 7. c 8. c 9. 2.83 12. 17.46 14. 13.42 15. 9.56 17. 4.60

20. 3,86 22. 2,72 23. 210 26. 6,93 28. 74,15 29. K = $\frac{1}{2}$ab sen C = a $\frac{1}{2}$ sen C # 2 $\frac{\text{un pecado B}}{\text{pecado A}} = \frac{\text{a2 sen B sen C}}{\text{2 pecado A}}$ 32. K ≈ 9,1 34. 32,14

36. 8.29 37. Un segmento ≈ 1.92 pies cuadrados 39. $5446.38

Machine Translated by Google

41. 18,18 m2 43. El área del plato de home es aproximadamente 216,5 pulg2 45. K = $\frac{1}{2}$ r 2 1u + sen u2 47. El área del terreno es 7517,4 pies2 .

49. Haciendo d = 0 se obtiene

K = 21s - a2 1s - b2 1s - c2 1s - 02 - abc # 0 # cos2 u = 2s1s - a2 1s - b2 1s - c2 donde s = $\frac{1}{2}$ 1a + b + c + 02 = $\frac{1}{2}$ 1a + b + c2

52. (a) Área ∆OAC = 2 $\frac{1}{}$ OC CA = 2 $\frac{1}{}$, $\frac{\text{jefe}}{1}$, $\frac{\text{C.A.}}{1}$ = $\frac{1}{2}$ pecado a porque a

(b) Área ∆OCB = 2 $\frac{1}{}$ antes de Cristo OC $\frac{1}{}$ = 2 $\frac{\text{antes de Cristo}}{}$, $\frac{\text{jefe}}{}$ = $\frac{1}{2}$ 2 pecado b porque b

(c) Área ∆OAB = 2 $\frac{1}{}$ BD OA = 2 $\frac{1}{}$ $\frac{\text{BD}}{}$ = $\frac{1}{2}$ OB sen1a + b2

(d) $\frac{\text{porque un}}{\text{porque b}}$ = $\frac{\frac{\text{jefe}}{1}}{\frac{\text{jefe}}{}}$ = OB

(e) Área ∆OAB = Área ∆OAC + Área ∆OCB

$\frac{1}{2}$ OB pecado(a + b) = $\frac{1}{2}$ pecado a porque a + $\frac{1}{2}$ 2 pecado b porque b

pecado(a + b) = $\frac{1}{}$ sen a cos a + OB sen b cos b

pecado(a + b) = $\frac{\text{porque b}}{\text{porque un}}$ pecado a porque a + $\frac{\text{porque un}}{\text{porque b}}$ pecado b porque b

pecado(a + b) = pecado a cos b + cos a pecado b

53. 31,145 pies2 56. (a) El perímetro y el área son ambos 36. El triángulo dado es un triángulo perfecto. (b) El perímetro y el área son ambos 24. El triángulo dado es un triángulo perfecto.

57. K = $\frac{1}{2}$ ah = ab sen C 1 h = b sen C = $\frac{\text{a pecado B pecado C}}{\text{pecado A}}$

59. POQ = 180° - a A $\frac{}{2}$ + $\frac{B}{2}$b = 180° - $\frac{1}{2}$ (180°-C) = 90° + $\frac{C}{2}$, y pecado a90° + $\frac{C}{2}$ b = porque $\frac{C}{2}$. Entonces, r = $\frac{\frac{\text{A}}{\text{c pecado pecado 2}}\ \frac{\text{B}}{2}}{\text{pecado a90° + }\frac{\text{C}}{\text{2 segundo}}}$ = $\frac{\frac{\text{A}}{\text{c pecado pecado 2}}\ \frac{\text{B}}{2}}{\text{porque }\frac{\text{C}}{2}}$.

61. cuna $\frac{A}{2}$ + cuna $\frac{B}{2}$ + cuna $\frac{C}{2}$ = $\frac{\text{s - un}}{\text{r}}$ + $\frac{\text{s - b}}{\text{r}}$ + $\frac{\text{s - c}}{\text{r}}$ = $\frac{\text{3s - (a + b + c)}}{\text{r}}$ = $\frac{\text{3s - 2s}}{\text{r}}$ = $\frac{\text{s}}{\text{r}}$ 66. Valor máximo; 17 67. 1 - q, - 32 [- 1, 32

68. pecado t = $\frac{12}{3}$, porque t = - $\frac{17}{3}$, tan t = - $\frac{114}{7}$, csc t = $\frac{312}{2}$, segundo t = - $\frac{317}{7}$, cuna t = - $\frac{114}{2}$

69. csc u - sen u = - sen u = sen u $\frac{\text{1 - pecado2 u}}{\text{pecado u}}$ = $\frac{\text{cos2 tu}}{\text{pecado u}}$ = porque u $\frac{\text{porque tú}}{\text{# sen u 1}}$ = porque u cot u

70. 1 - q, - 52 h 15, q 2 71. P(w) = 2w + 22144 - w2 72. { $\frac{3}{2}$, { , 71, {2, {3, {6 73. 32.39, 2.414 74. 5 - 2, 96 75. y = - 2x

8.5 Evalúe su comprensión (página 601)

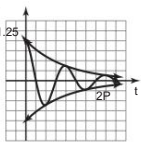
4. armónico simple; amplitud 5. armónico simple; amortiguado 6. T 7. d1t2 = - 5 cos1pt2 9. d1t2 = - 7 cos a 2 $\frac{}{\text{5 cucharadas}}$

11. d1t2 = - 5 sen1pt2 13. d1t2 = - 7 sen a 2 $\frac{}{}$ 5 tb 15. (a) Armónico simple (b) 5 m (c) $\frac{2p}{3}$ s (d) $\frac{3}{2p}$ oscilación/s

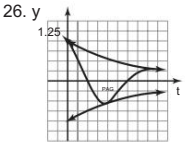
18. (a) Armónico simple (b) 8 m (c) 1 s (d) 1 oscilación/s 20. (a) Armónico simple (b) 9 m (c) 8p s (d) $\frac{1}{8p}$ oscilación/s

22. (a) Armónico simple (b) 7 m (c) $\frac{2}{3}$ s (d) $\frac{3}{2}$ oscilaciones/s

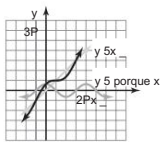
23. y



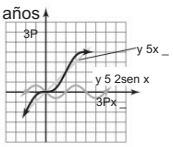
26. y



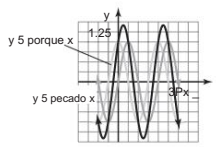
27.



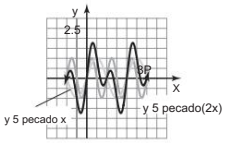
30. años



32.

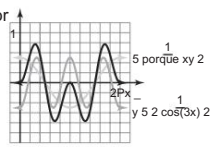


34.



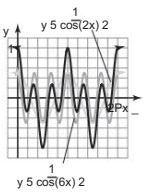
36. (a) f1x2 = 2 $\frac{1}{}$ 3cos x -cos 13x24

(por



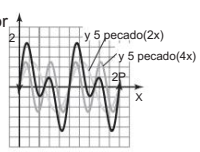
38. (a) G1x2 = 3cos $\frac{1}{2}$ 6x2 + cos12x24

(b)



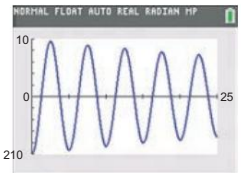
40. (a) H1x2 = sen14x2 + sen12x2

(por



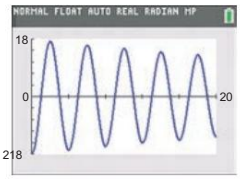
42. (a) d1t2 = - 10e -0,7t>50 porque un B $\frac{25}{p2}$ - $\frac{0,49}{2500}$ TB

(b)



44. (a) d1t2 = - 18e -0,6t>60 porque a B $\frac{}{p2}$ - $\frac{0,36}{3600}$ TB

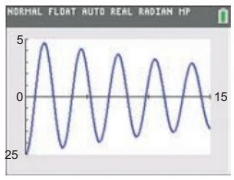
(b)



Machine Translated by Google

46. (a) d1t2 = - 5e -0,8t>20 porque un B 4p2 $\frac{\sqrt{\quad}}{9}$ - $\frac{0,64}{400\ TB}$

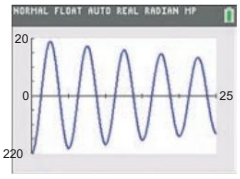
(b)



48. (a) El movimiento está amortiguado. el bob tiene masa m = 20 kg con un factor de amortiguación de 0,7 kg/s

(b) 20 m hacia la izquierda

(C)

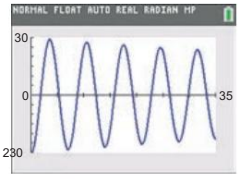


(d) 18,33 m hacia la izquierda (e) d S 0

50. (a) El movimiento está amortiguado. el bob tiene masa m = 40 kg con un factor de amortiguación de 0,6 kg/s

(b) 30 m hacia la izquierda

(C)

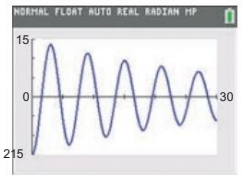


(d) 28,47 m hacia la izquierda (e) d S 0

52. (a) El movimiento está amortiguado. el bob tiene masa m = 15 kg con un factor de amortiguación de 0,9 kg/s

(b) 15 m hacia la izquierda

(C)

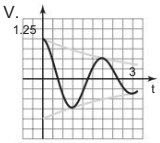


(d) 12,53 m hacia la izquierda (e) d S 0

53. v = 1254p, d = 0,50 cos(1254pt)

56. v = 880p; d1t2 = 0,01 pecado(880pt)

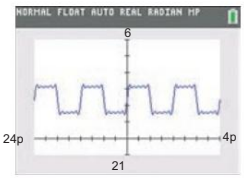
57. (a) V.



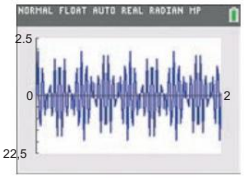
(b) En t = 0, t = 2; en t = 1, t = 3

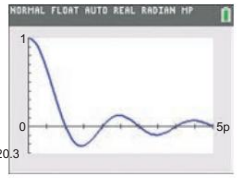
(c) Durante los intervalos aproximados 0,35 6 t 6 0,67, 1,29 6 t 6 1,75 y 2,19 6 t … 3

59.

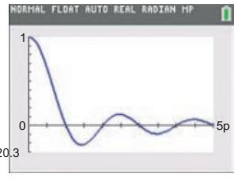


61.

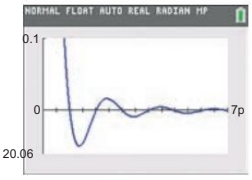




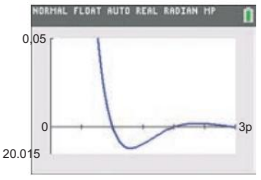
67. y = $\frac{1}{x}$ pecado x



y = $\frac{1}{x^2}$ pecado x



y = $\frac{1}{x^3}$ pecado x



69. $f^{-1}(x) = \frac{4x - 3}{x - 1}$ 70. $\log_7 u\frac{xy^3}{x + y}$ b 71. 546 72. (a) $\frac{3\sqrt{110}}{10}$ (b) $\frac{\sqrt{110}}{10}$ (c) $\frac{1}{3}$ 73. g(f(x)) = 10 - 5x; Dominio: a - q, 5 d 74. $-\frac{\sqrt{3}}{12}$ $\frac{\sqrt{716}}{12}$

75. y = - x + $\frac{3}{2}$ $\frac{11}{2}$ 5e1>26 77. 3 - 5, 84 78. c - 2, 5 d

Ejercicios de repaso (página 605)

1. pecado u = $\frac{4}{5}$; porque tu = $\frac{3}{5}$; tan u = $\frac{4}{3}$; cuna u = $\frac{3}{4}$; segundo u = $\frac{5}{3}$; csc tu = $\frac{5}{4}$ 2. pecado u = $\frac{\sqrt{23}}{2}$; porque tu = $\frac{1}{2}$; tanu = $\sqrt{23}$; cuna u = $\frac{1}{\sqrt{23}}$; segundo tu = 2; csc tu = $\frac{2\sqrt{23}}{3}$

3. 0 4. 1 5. 1 6. A = 70°, b ≈ 3,42, a ≈ 9,40 7. a ≈ 4,58, A ≈ 66,4°, B ≈ 23,6° 8. C = 75°, a ≈ 2,6, c ≈ 5

9. B ≈ 56,8°, C ≈ 23,2°, b ≈ 4,25 10. Sin triángulo 11. b ≈ 3,32, A ≈ 62,8°, C ≈ 17,2° 12. sen B ≈ 1,15.

Pero esto no es posible ya que la función seno no puede exceder 1. Por tanto, no existe ningún triángulo. 13. Sin triángulo 14. A ≈ 46,6°, B ≈ 104,5°, C ≈ 28,9°

15. c ≈ 2,32, A ≈ 16,1°, B ≈ 123,9° 16. A ≈ 35°, B ≈ 105° 17. A ≈ 39,6°, B ≈ 18,6°, C ≈ 121,9°

18. Dos triángulos: B1 ≈ 13,4°, C1 ≈ 156,6°, c1 ≈ 6,86 o B2 ≈ 166,6°, C2 ≈ 3,4°, c2 ≈ 1,02 19. b ≈ 11,52, c ≈ 10,13, C ≈ 60°

20. a ≈ 5,23, B ≈ 46,0°, C ≈ 64,0° 21. 1,93 22. 30,31 23 , 6 24. 3,80 25. El área del triángulo es aproximadamente 10,6 pies cuadrados

26. Un segmento ≈ 0,74 pulg2 27. A ≈ 34,84°, B ≈ 55,16° 28. 23,32 pies 29. 2,15 millas 30. 132,55 pies/min 31. 12,7° 32. 29,97 pies 33. 6,22 millas

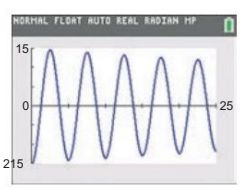
34. (a) 131,8 millas (b) 23,1° (c) 0,21 h 35. 8798,67 pies cuadrados 36. S4,0°E 37. (a) uc = 16,7° (b) 1,44 pies 38. (a) uc′ = 5,7° (b) 0,50 pies

39. d1t2 = - 3 porque ap $\sqrt{2}$ tb 40. (a) Armónico simple (b) 6 pies (c) ps (d) $\frac{1}{\pi}$ oscilación/es

41. (a) Armónico simple (b) 2 pies (c) 2 s (d) 2 $\frac{1}{2}$ oscilación/es

42. (a) d1t2 = - 15e-0,75t>80 cos a B 4p2 $\frac{\sqrt{\quad}}{25}$ - $\frac{0.5625}{6400\ TB}$

(b)

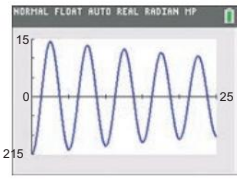


43. (a) El movimiento está amortiguado. La pesa tiene masa m = 20 kg. con un factor de amortiguación de 0,6 kg/s.

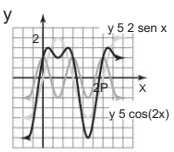
(b) 15 m hacia la izquierda (c)

(d) 13,92 m hacia la izquierda

(e) d S 0



44. y



Machine Translated by Google

Prueba de capítulo (página 608)

1. pecado u = $\frac{25}{5}$; porque tu = $\frac{225}{5}$; tan u = $\frac{1}{2}$; csc u = 25; segundo u = $\frac{25}{2}$; cuna u = 2 2. 0 3. a = 15,88, B ≈ 57,5°, C ≈ 70,5°

4. b ≈ 6,85, C = 117°, c ≈ 16,30 5. A ≈ 52,4°, B ≈ 29,7°, C ≈ 97,9° 6. b ≈ 4,72, c ≈ 1,67, B = 105° 7. Sin triángulo

8. c ≈ 7,62, A ≈ 80,5°, B ≈ 29,5° 9. 15,04 unidades cuadradas 10. 19,81 unidades cuadradas 11. 61,0° 12. 1,3° 13. El área de la región sombreada es 9,26 cm2 .

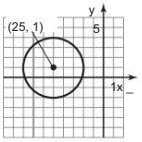
14. 54,15 unidades cuadradas 15. Madison tendrá que nadar aproximadamente 2,23 millas. 16. 12,63 unidades cuadradas 17. Las longitudes de los lados son 15, 18 y 21.

18. d1t2 = 5(sen 42°) sina pt $\overline{3}$ b o d ≈ 3.346 sina pt $\overline{\text{3 segundo}}$

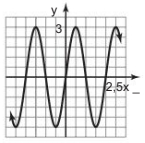
Revisión acumulativa (página 609)

1. y $\overline{\beta}$ ', 1 f

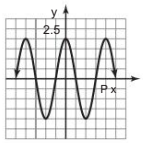
2. 1x + 52 ^{2} + 1 año - 12 ^{2} = 9



3. 5x x … - 1 o x Ú 46 4.

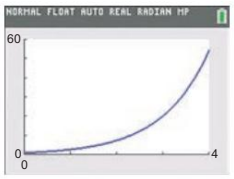


5.

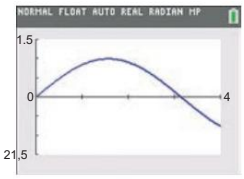


6. (a) - $\frac{225}{5}$ (b) $\frac{25}{5}$ (c) - 5 $\frac{4}{}$ (d) - 5 $\frac{3}{}$ (e) B 5 - 15$\overline{10}$ (f) - B 5 + 15$\overline{10}$

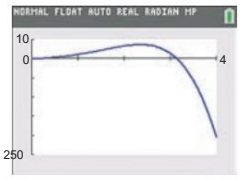
7. (un)



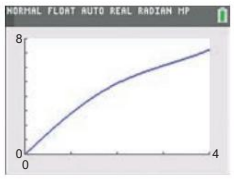
(b)



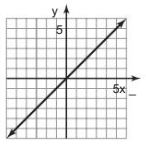
(C)



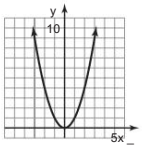
(d)



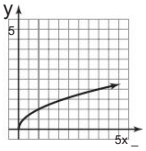
8. (una)



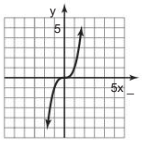
(b)



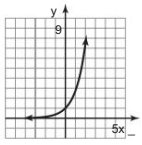
(c) y



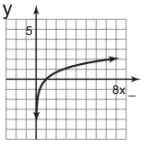
(d)



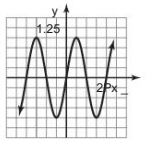
(mi)



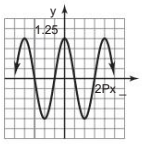
(f) y



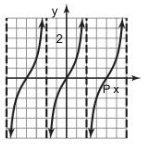
(gramo)



(h)



(i)



9. Dos triángulos: A1 ≈ 59,0°, B1 ≈ 81,0°, b1 ≈ 23,05
o A2 ≈ 121,0°, B2 ≈ 19,0°, b2 ≈ 7,59

10. mi - 2i, 2i, $\frac{1}{3}$, 1, 2f

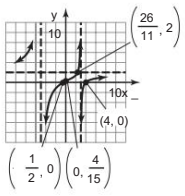
11. R1x2 = $\frac{12x + 12}{1x + 52}\frac{1x - 42}{1x - 32}$; dominio: 5x x ≠ - 5, x ≠ 36

Intercepciones: a - $\frac{1}{2}$, 0b, 14, 02, a0, 4 $\overline{\text{15 segundo}}$

Sin simetría

Asíntotas verticales: x = - 5, x = 3

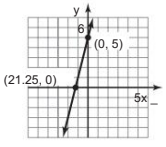
Asíntota horizontal: y = 2



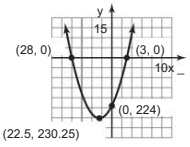
Interseca la asíntota horizontal, y = 2, en el punto a 26 $\overline{11}$, 2b

12. 52.266 13. 516 14. (a) e - $\frac{5}{4}$ f (b) 526 (c) mi - 1 - 3213 $\frac{\overline{\quad}}{2}$, $\frac{- 1 + 3213\ \overline{\quad}}{2}$ f (d) e x ` x 7 - $\frac{5}{4}$ para un - $\frac{5}{4}$, qb

(e) 5x - 8 … x … 36 o 3 - 8, 34 (f)



(gramo)

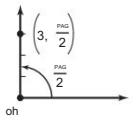


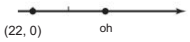
Machine Translated by Google

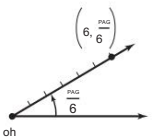
CAPITULO 9 Coordenadas Polares; Vectores

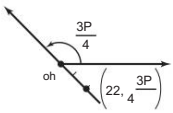
9.1 Evalúe su comprensión (página 619)

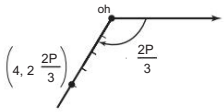
7. polo; eje polar 8. r cos u; r sen u 9. b 10. d 11. T 12. F 13. A 16. C 18. B 20. A

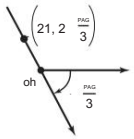
22. 

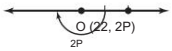
24. 

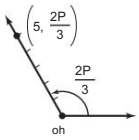
25. 

28. 

30. 

31. 

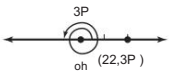
34. 

35. 

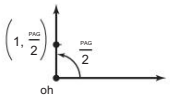
(a) a5, - 4p / 3 segundo

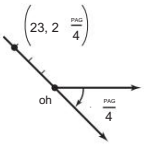
(b) a - 5, 5p / 3 segundo

(c) a5, 8p / 3 segundo

38. 

(a) 12, - 2p2
(b) 1-2, p2
(c) 12, 2p)

40. 

42. 

(a) a1, - (a) a3 3p / 2 segundo (b) a - 1, (b) a - 3, (c) a3, 11p 5p / 4 segundo 3p / 2 segundo 7p / 4 segundo

(c) a1, 5p / 3 segundo 4 segundo

43. 10, 32 46. 1 - 2, 02 48. 1 - 323, 32 50. 122, - 222 52. a - 523 / 2, 5 / 2 segundo

54. 12, 02 55. 1 - 2.57, 7.052

58. 1 - 4.98, - 3.852 59. 13, 02 62. 11, p2

63. a22, - pag / 4b 66. a10, pág. 3b 68. 12,47, - 1,022

70. 19.30, 0.472 72.r 2 = 3 / o r = 2 26 / 2 73. r2 cos2 u - 4r sen u = 0 76. r 2 pecado 2u = 1

78. r cos u = 4 79. x2 + y2 - x = 0 o ax - 2 b 1 / 2 +y2 = 1 / 4 82. 1x2 + y22 3>2 - x = 0

84. x2 + y2 = 4 86. y2 = 81x + 22

87. (a) 1 - 10, 362 (b) a22349, 180° + tan -1 a - 89. (a) 18 / 5 bb ≈ 137,36, 105,5°2 (c) 1 - 3, - 352 (d) a21234 , 180° + tan-1 a 35 / 3 bb ≈ 135,13, 265,1°2

180, 25°2; 1110, - 5°2 (b) 172,50, 33,812; 1109,58, - 9,592 (c) 342,5 mph 94.e 19 / 15 f 95. 2 o 0 ceros reales positivos; 1 cero real negativo

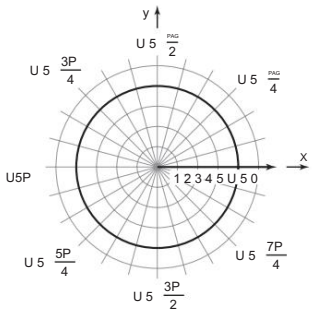
96. un - 5 / 4, 9 / 2b 97. 10, - 112 98. 13 - 18i 99. ep 5p / 12, 13p / 12, 17p / 12 f 100. C = 78°, a ≈ 9,27, b ≈ 6,15 101. 26 + 22 / 4 o 2211 + 232 / 4

102. e3x 13x - 22 / 5x3 103. sen5 x = sen x1sen2 x2 2 = sen x11 - cos2 x2 2 = senx11 - 2 cos2 x + cos4 x2 = sen x - 2 cos2 x sen x + cos4 x sen x

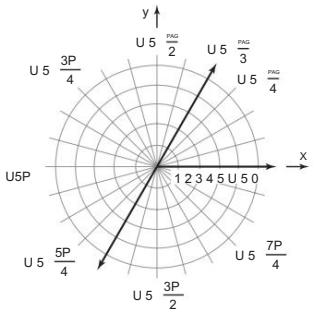
9.2 Evalúe su comprensión (página 633)

7. ecuación polar 8. F 9. - u 10. p - u 11. 2n; n 12. T 13. c 14. b

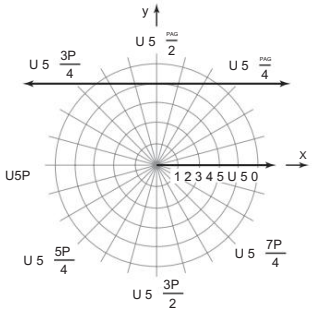
15. x2 + y2 = 16; círculo, radio 4, centro en el polo



17. y = 23x ; línea a través del poste, haciendo una ángulo de pag / 3 con eje polar

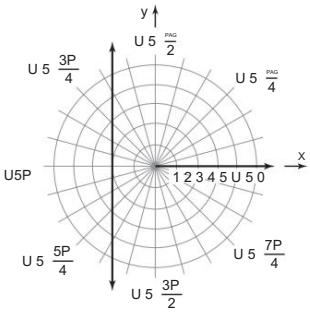


20. y = 4; Línea horizontal a 4 unidades por encima del poste.

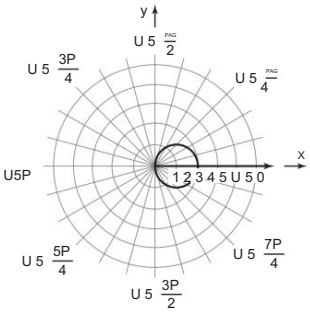


Machine Translated by Google

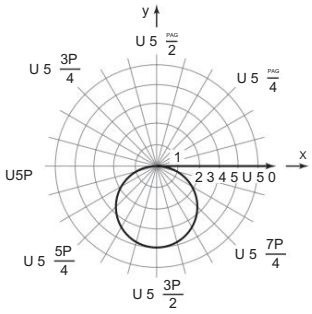
21. x = - 2; línea vertical 2 unidades a la izquierda del poste



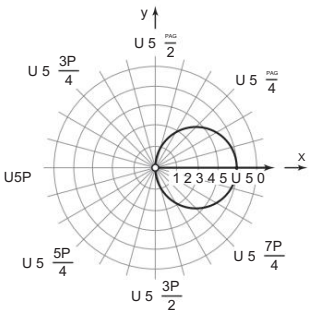
23. 1x - 12 ^{2} + y2 = 1; círculo, radio 1, centro 11, 02 en coordenadas rectangulares



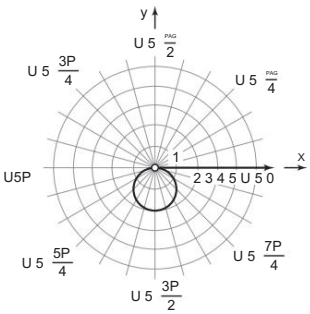
26. x2 + 1y + 22 ^{2} = 4; círculo, radio 2, centro 10, - 22 en coordenadas rectangulares



28. 1x - 22 2+y2 = 4, x ≠ 0; círculo, radio 2, centro 12, 02 en coordenadas rectangulares, agujero en 10, 02

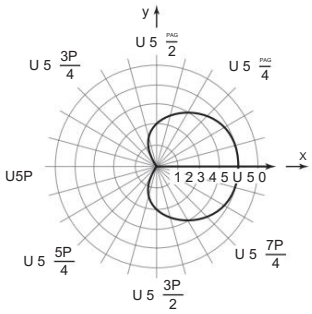


30. x2 + 1y + 12 ^{2} = 1, y ≠ 0; círculo, radio 1, centro 10, - 12 en coordenadas rectangulares, agujero en 10, 02

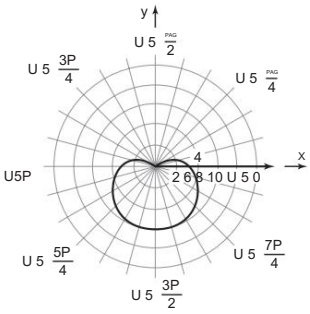


32. E 34. F 36. H 38. D

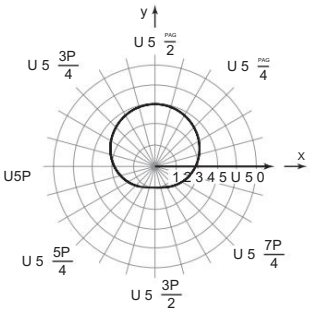
39. cardioide



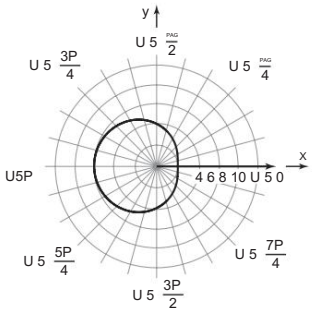
42. cardioide



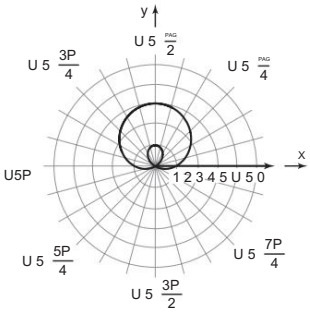
44. Limaçon sin bucle interior



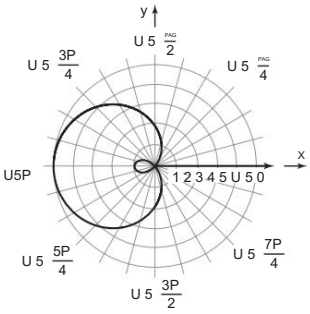
45. Limaçon sin bucle interior



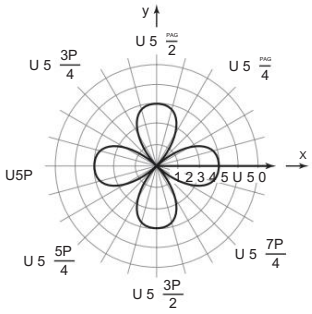
47. Limaçon con bucle interior



50. Limaçon con bucle interior

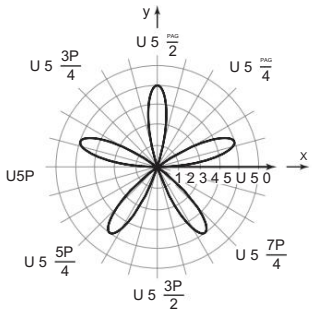


51. rosa

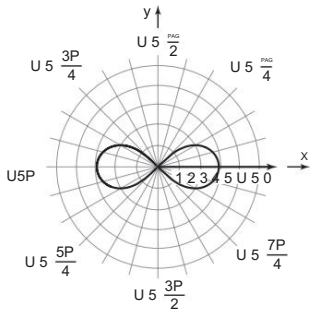


Machine Translated by Google

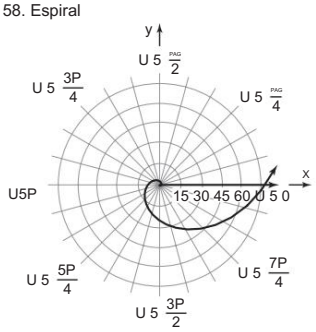
54. rosa



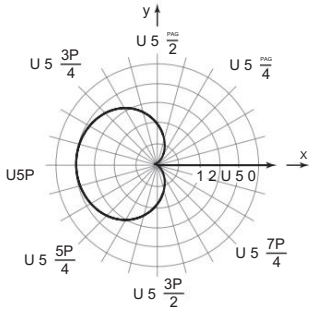
55. Lemniscata



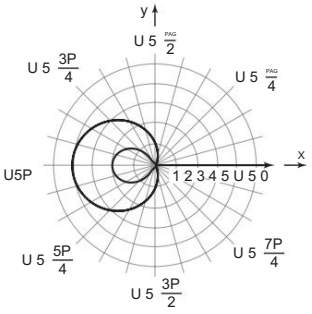
58. Espiral



60. cardioide



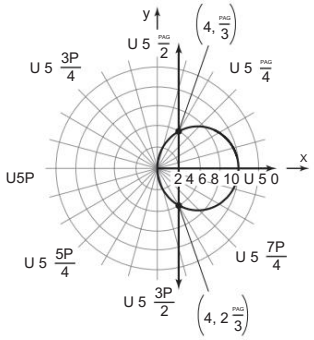
62. Limaçon con bucle interior



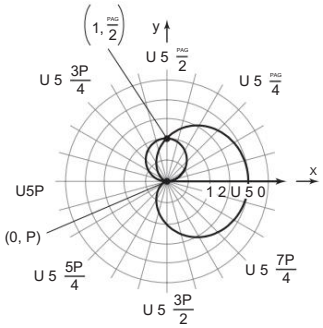
64. r = 3 + 3 porque tu

66. r = 7 + 3 sen u

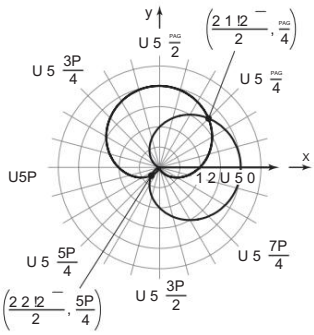
68.



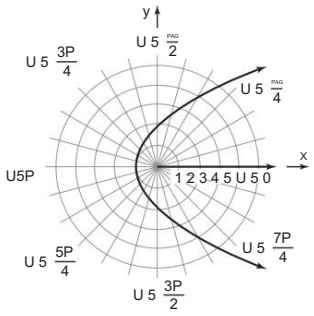
70.



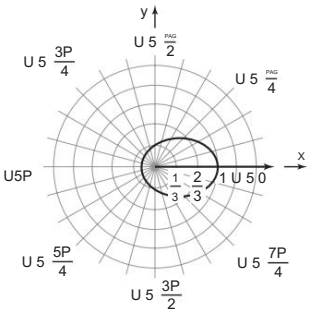
72.



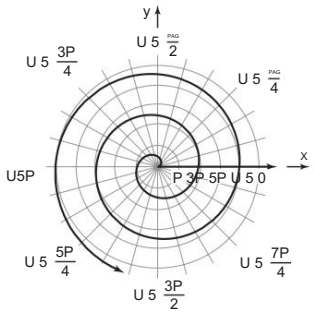
74.



76.

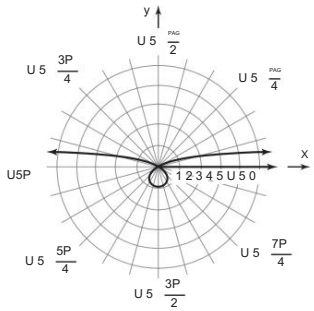


78.

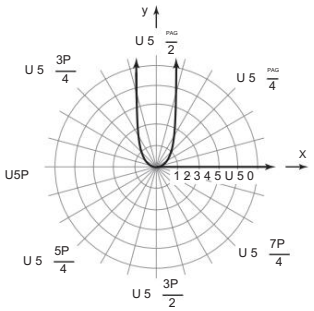


Machine Translated by Google

80.



82.



83. r sen u = a

y = un

85. r = 2a sen u

2 r = 2ar sen u

x2 + y2 = 2ay

x2 + y2 - 2ay = 0

x2 + 1y - a2 = a2 2

Circulo, radio a, centro

10, a2 en rectangular

coordenadas

87. r = 2a porque tu

2 r = 2ar porque u

x2 + y2 = 2ax

x2 - 2ax + y2 = 0

1x - a2 2 + y2 = a2

Círculo, radio a, centro 1a,

02 en coordenadas

rectangulares

89. (a) 5 nudos (b) 6 nudos (c) 10 nudos (d) aproximadamente 80° a 150° (e) ≈9 nudos; aproximadamente 90° a 100°

92. 1x2 + y22 2 = x2 - y2

93. (a) r 2 = porque tu; r 2 = cos1p - u2

2 r = - porque tu

No equivalente; la prueba falla.

1 - r2 2 = cos1 - u2 = cos u

La nueva prueba funciona.

(b) r 2 = pecado u: r 2 = sen1p - u2

2 r = pecado u

La prueba funciona.

1 - r2 2 = sen1 - u2 = - sen u

No equivalente; la nueva prueba falla.

97. 5x 0 3 6 x … 86, o 13, 84 98. 420° 99. Amplitud = 2; período = $\frac{2p}{5}$ 100. Asíntota horizontal: y = 0; Asíntota vertical: x = 4 101, 3

102. 6230 ≈ 32,86 unidades cuadradas 103. e 5 4f 104.e- $\frac{5}{2}, \frac{4}{3}$ f 105. y = - 4x - 5 106. cos3 x = cos x cos2 x = cos x11 - sen2 x2 = cos x - sen2 x cos x

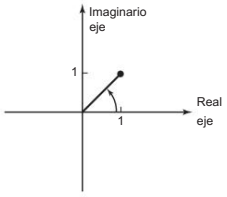
Problemas históricos (página 643)

1. (a) 1 + 4i, 1 + yo (b) - 1, 2 + yo

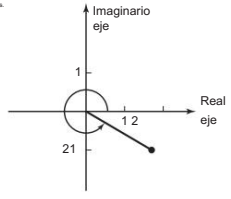
9.3 Evalúe su comprensión (página 643)

5. real; imaginario 6. magnitud; módulo; argumento 7. r1 r2ei1u1+u22 8. F 9. tres 10. T 11. c 12. a

13.

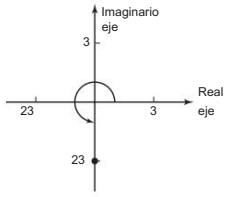


22acosp $\frac{}{4}$ + peco $\frac{pag}{4b}$; 22ei # p>4



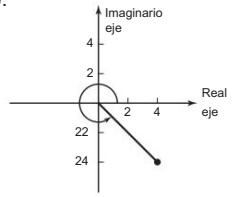
2acos 11p $\frac{}{6}$ + peco $\frac{11p}{6b}$; 2ei # 11p>6

18.



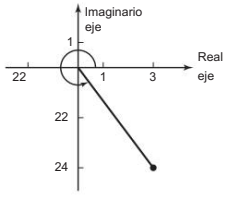
3acos 3p $\frac{}{2}$ + peco $\frac{3p}{2b}$; 3ei # 3p>2

20.



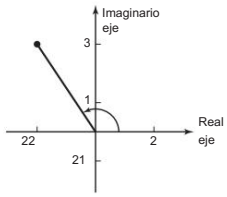
422acos 7p $\frac{}{4}$ + peco $\frac{7p}{4b}$; 422ei # 7p>4

22.



51cos 5,356 + i sen 5,3562; 5ei # 5.356

24.



2131cos 2,159 + i sen 2,1592; 213ei # 2.159

25. - 1 + 23i 28. 222 - 222i 30. - 3i 32. - 7 34. - 0,035 + 0,197i 36. 1,970 + 0,347i

37. zw = 8acosp $\frac{}{3}$ + peco $\frac{pag}{3b}$ o 8ei # p>3 ; $\frac{z}{w} = \frac{1}{2}$ acos p $\frac{}{9}$ + peco $\frac{pag}{9b}$ o $\frac{1}{2}$ ei # p>9

40. zw = 12acos 2p $\frac{}{9}$ + peco $\frac{2p}{9b}$ o 12ei # 2p>9 ; $\frac{z}{w} = \frac{3}{4}$ años 11p $\frac{}{9}$ + peco $\frac{11p}{9b}$ o $\frac{3}{4}$ ie # 11p>9

42. zw = 4acos 9p $\frac{}{40}$ + peco $\frac{9p}{40b}$ o 4ei # 9p>40; $\frac{z}{w} = \cos 40$ $\frac{pag}{}$ + yo pecado $\frac{pag}{40}$ o ei # p>40

44. zw = 422 acos p $\frac{}{12}$ + peco $\frac{pag}{12b}$ o 422ei # p>12; $\frac{z}{w}$ = 22 acos 5p $\frac{}{12}$ + peco $\frac{5p}{12b}$ o 22ei # 5p>12 45. - 32+3223i; 64ei # 2p>3 48. 32i ; 32ei # p>2

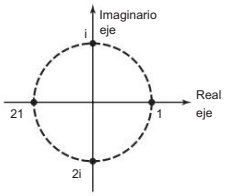
50. $\frac{27}{2}$ + $\frac{2723}{2}$ -i ; $\frac{27}{2}$ ei # p>3 52. $\frac{2522}{2}$ + $\frac{2522}{2}$ i; 25ei # 3p>4 54. - 4+ 4i; 422ei # 3p>4 56. - 23+14.142i; 27ei # 2.590

58. 26 2ei # p>12, 26 2ei # 3p>4, 26 2ei # 17p>12 60. 24 8ei # 5p>12, 24 8ei # 11p>12, 24 8ei # 17p>12, 24 8ei # 23p>12

62. 2ei # 3p>8, 2ei # 7p>8, 2ei # 11p>8, 2ei # 15p>8 64. ei # p>10, ei # p>2 , ei # 9p>10, ei # 13p>10, ei # 17p>10

Machine Translated by Google

65. 1, yo, - 1, - yo



67. Mira la fórmula 172. zk = 1 r para todo k.

69. Mira la fórmula 172. Los zk están espaciados por un ángulo de $\frac{2p}{norte}$.

71. Dado que las funciones seno y coseno tienen cada una un período 2p,
cos u = cos1u + 2kp2 y sen u = sin1u + 2kp2, k es un número entero. Entonces, reiu
= r1cos u + i senu2 = r 31cos1u + 2kp2 + i sen1u + 2kp24 = rei1u+2kp2 , k un número entero.

73. Supongamos que el teorema es verdadero para n Ú 1.

Para norte = 0:

z0 = r 0 ei10 # 0 = r 3cos10 # u2+ isin10 # u2 4

u2 1 = 1 # 3cos 0 + isin 04

1 = 1 # 31 + 04

1 = 1 verdadero

Para números enteros negativos:

zn = 1zn2 -1 = 3r n ei1nu2 4 -1 = 1r n [cos1nu2 + isin1nu2]2 -1 con n Ú 1

$= \frac{1}{r^{norte}[\cos 1nu2 + isin1nu2]} = \frac{1}{r^{norte}[\cos 1nu2 + isin1nu2]} \cdot \frac{\cos 1nu2 - isin1nu2}{\cos 1nu2 - isin1nu2}$

$= \frac{\cos 1nu2 - isin1nu2}{r^{n}\,1\cos 2\,1nu2 + sen2\,1nu2\,2} = \frac{\cos 1nu2 - isin1nu2}{r^{-}} = r^{-n}[\cos 1nu2 - isin1nu2]$

= r -n [cos1 - nu2 + isin1 - nu2] = r Por tanto, -n ei1-nu2

el teorema de De Moivre es válido para todos los números enteros.

76. x + iy = ln7 + i12kp2, k un número entero 77. ≈40,50 78. $\frac{4}{3}$ p 79. 2y23 3x2 y2 80. Mínimo: f a 6 $\frac{}{5 \text{ segundo} = -\frac{\text{decisés}}{5}}$

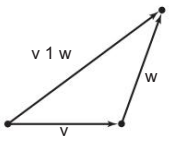
81. A ≈ 26,4°, B ≈ 36,3°, C ≈ 117,3° 82. loga $\frac{x3\ y2}{}$ 83. 56216 84. 1f g2 1x2 = 75x6 - 20x3 85. y = - $\frac{3}{2}$x + 8

z5 86. 216 seg2 x - 16 = 2161 seg2 x - 12 = 216 tan2 x = 4 tanx

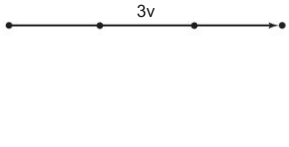
9.4 Evalúe su comprensión (página 655)

1. vector 2. 0 3. unidad 4. posición 5. horizontal; vertical 6. resultante 7. T 8. F 9. a 10. b

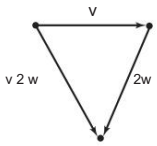
11.



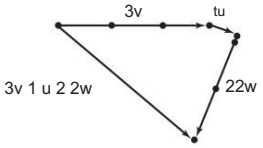
13.



decisés.



18.



20. T 22. F 24. F 26. T 28. v = 3i + 4j 29. v = 2i + 4j 32. v = 8i - j 34. v = - i + j 35. 5 38. 22 40. 213 42. 1 43. -j

46. 289 48. 234 - 213 50. yo 52. yo - 5 $\frac{3}{}$ $\frac{4}{}$ j 53. yo - $\frac{12}{5}$ $\frac{12}{2}$ j 56. 14 58. v = $\frac{815}{5}$ yo + $\frac{415}{5}$ j, o v = - yo - $\frac{815}{5}$ $\frac{415}{5}$ j

60. 5 - 2 + 221, - 2 - 221 6 61. v = $\frac{5}{2}$ yo + $\frac{523}{2}$ j 64. v = - 7i + 723 j 66. v = $\frac{2513}{2}$ i - $\frac{25}{2}$ j 67, 45° 70, 150° 72 , 333,4° 74, 258,7°

76. F = $\frac{15}{2}$ yo + $\frac{1523}{2}$ j 78. F = (3523 + 3022)i + (35 + 3022)j 79. (a) va = 550j, vw = 5522i + 5522j

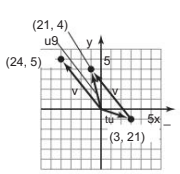
(b) vg = 5522i + (550 + 5522)j (c) El avión viaja con una velocidad terrestre de 632,6 mph en una dirección aproximada de 7,1° al este del norte (N 7,1° E)

82. (a) va = 25022i + 25022j, vw = 4023i + 40j, vg = (25022 + 4023)i + (25022 + 40)j (b) El avión viaja con una velocidad terrestre de 506,4 km/h (c) N 42,94° E 84. Aproximadamente 3669 lbb 85. El rumbo del barco debe ser de unos 11,5° aguas arriba. La velocidad del barco directamente al otro lado del río es de aproximadamente 14,7 km/h. El tiempo para cruzar el río es de 3.06 min. 87. (a) N7.05°E (b) 12 min 89. La tensión en el cable izquierdo es de aproximadamente 845,2 lb y la tensión en el cable derecho es de aproximadamente 1000 lb 91. Tensión en la parte derecha: 1088,4 lb; tensión en la parte izquierda: 1089,1 lb 93. m = 0,36

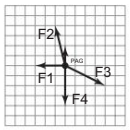
95. 10.2951 lb 97. El camión debe tirar con una fuerza de 4891.6 lb

99. (a) 1 - 1, 42

(b)



101.



103. Aproximadamente 8,2° al norte del este.

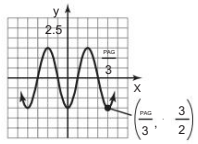
107. 5296

108. - 3x1x + 22 1x - 62

109. 23

110. Amplitud = ; período = 2 $\frac{3}{}$ $\frac{pag}{3}$

Cambio de fase = - $\frac{pag}{2}$



111. 15 112. 1x - 102 115. 2 + 1 año + 22 2 = 49 113. x–intersecciones: - 3, - 2, 3; intersección con el eje y: - 18 114, 55 - 111, 5 + 1116

1x + 32 1x2 + 92 o x3 + 3x2 + 9x + 27 116. 1f g2 1u2 = 225 - 15 sen u2 2 = 225 - 25 sen2 u = 22511 - sen2 u2 = 225 cos2 u = 5 cos u

Problema histórico (página 665)

1ai + bj2 # 1ci + dj2 = ac + bd

Parte real [1a + bi2 1c + di2] = parte real[1a - bi2 1c + di2] = parte real[ac + adi - bci - bdi2] = ac + bd

Machine Translated by Google

9.5 Evalúe su comprensión (página 665)

2. producto escalar 3. ortogonal 4. paralelo 5. T 6. F 7. d 8. b 9. (a) 0 (b) 90° (c) ortogonal 12. (a) 0 (b) 90° (c) ortogonal

14. (a) 13 - 1 (b) 75° (c) ninguno de los dos 16. (a) - 50 (b) 180° (c) paralelo 18. (a) 0 (b) 90° (c) ortogonal 20. 3

21. v1 = $\frac{5}{2}$ i - $\frac{5}{}$ j, v2 = - 2 2 $\frac{1}{}$ i - $\frac{1}{}$ j 24. v1 = - i - 2 5 $\frac{1}{}$ $\frac{2}{5}$ j, v2 = 5 $\frac{6}{}$ i - $\frac{3}{}$ j 26. v1 = 5 $\frac{14}{5}$ yo + $\frac{7}{}$ j, v2 = yo - 5 5 $\frac{1}{}$ $\frac{2}{5}$ j 27. 12i - 9j o - 12i + 9j

29,63 pies-libra 31. (a) 7I7 ≈ 0,0361; la intensidad de los rayos del sol es de aproximadamente 0,0361 W/cm2

(b) W = 18; Se recogen dieciocho vatios de energía (c) Los vectores I y A deben estar paralelos a los paneles solares orientados hacia el sol.

33. Fuerza necesaria para evitar que la Sienna ruede colina abajo: 737,6 lb; fuerza perpendicular a la colina: 5248.4 lb 35. Timmy debe ejercer 75.05 lb. 37. 44.42°

39. Sea v = ai + bj. Entonces 0 # v = 0a + 0b = 0.

41. v = cos ai + sen aj, 0… a… p; w = cos bi + sen bj, 0… b… p. Si u es el ángulo entre v y w, entonces v # w = cos u, ya que 7 v 7 = 1 y 7 w 7 = 1.
Ahora u = a - b o u = b - a. Como la función coseno es par, v # w = cos1a - b2. Además, v # w = cos a cos b + sin a sin b.
Entonces cos1a - b2 = cos a cos b + sen a sen b.

43. 1 7 w 7 v + 7 v 7 w2 # 1 7 w 7 v - 7 v 7 w2 = 7 w 7 2 v # v - 7 w 7 7 v 7 v # w + 7 v 7 7 w 7 w # v - 7 v 7 2 w # w = 7 w 7 2 v # v - 7 v 7 2 w # w = 7 w 7 2 7 v 7 2 - 7 v 7 2 7 w 7 2 = 0

46. 3.3013 47. - 223, 223

49. (a) Si u = a1i + b1 j y v = a2i + b2 j, entonces, dado que 7 u 7 = 7 v 7 , $a1^2 + b1^2$ = 7 u 7 2 = 7 v 7 2 2 + b2 a2 ^{2},
1u + v2 # 1u - v2 = 1a1 + a22 1a1 - a22 + 1b1 + b22 1b1 - b22 = 1a1 ^{2} + b1 22 - 1a2^2 + b2 22 = 0.

(b) Se puede hacer que los catetos del ángulo correspondan a los vectores u + v y u - v.

52. 12 53. 2 $\frac{9}{}$ 54. 11 - sen2 u2 11 + tan2 u2 = 1cos2 u2 1sec2 u2 = cos2 u # $\frac{1}{\cos^2 u}$ = 1

55. V1x2 = x119 - 2x2 113 - 2x2, o V1x2 = 4x3 - 64x2 + 247x 56. e ln 3 + ln 16 + ln 7 $\frac{}{\text{En 7 - En 2}}$ f 57. f1x2 = 23 x + 4 + 9

58. Asíntotas verticales: x = - 3, x = 5; Asíntota horizontal: y = 2 59. - $\frac{23}{2}$ 60. Vértice: 19, - 442; cóncava arriba

61. 1f g2 1x2 = $\frac{1}{3\ 13\ \tan x2^2 + 94\ 3>2}$ = $\frac{1}{19\ \tan2\ x + 92\ 3>2}$ = $\frac{1}{391\tan2\ x + 12\ 4\ 3>2}$ = $\frac{1}{19\ \text{seg}2\ x2\ 3>2}$ = $\frac{1}{27\ 0\text{seg}3\ x\ 0}$

9.6 Evalúe su comprensión (página 675)

2. componentes 3. 1 4. F 5. T 6. a 8. Todos los puntos de la forma 1x, 0, z2 9. Todos los puntos de la forma 1x, y, 22 12. Todos los puntos de la forma 1 - 4, y, z2

14. Todos los puntos de la forma 11, 2, z2 15. 221 18. 233 20. 226 22. 12, 0, 02; 12, 1, 02; 10, 1, 02; 12, 0, 32; 10, 1, 32; 10, 0, 32

24. 11, 4, 32; 13, 2, 32; 13, 4, 32; 13, 2, 52; 11, 4, 52; 11, 2, 52 26. 1 - 1, 2, 22; 14, 0, 22; 14, 2, 22; 1 - 1, 2, 52; 14, 0, 52; 1 - 1, 0, 52 28. v = 3i + 4j - k

29. v = 2i + 4j + k 32. v = 8i - j 33. 7 36. 23 38. 222 39. - j - 2k 42. 2105 44. 238 - 217 46. i 47. $\frac{3}{7}$ yo - $\frac{6}{}$ j - 7 $\frac{2}{7}$ k

49. yo + $\frac{23}{3}$ $\frac{23}{3}$ j + $\frac{23}{3}$ k 51.v # w = 0; u = 90° 54. v # w = - 2, u ≈ 100,3° 56. v # w = 0; tu = 90° 58. v # w = 52; tu = 0°

59. a ≈ 64,6°; b ≈ 149,0°; gramo ≈ 106,6°; v = 71cos 64,6°i + cos 149,0°j + cos 106,6°k2

62. a = b = g ≈ 54,7°; v = 231cos 54,7°i + cos 54,7°j + cos 54,7°k2 64. a = b = 45°; gramo = 90°; v = 221cos 45°i + cos 45°j + cos 90°k2

66. a ≈ 60,9°; segundo ≈ 144,2°; ≈ 71,1°; v = 2381cos 60,9°i + cos 144,2°j + cos 71,1°k2 67. (a) d = a + b + c = 87, - 5,79 (b) 11,09 pies

g 70. (x - 3)2 + (y - 2)2 + (z - 2)2 = 16 72. Radio = 4, centro (1, 3, 0) 74. Radio = 3, centro(1, - 3, - 2)

76. Radio = $\frac{3}{22}$, centro (4, 0, 3) 78. newton-metros = - 8 (julios) 79. newton-metros = - 6 (julios) 80. e x ` 2 6 x … $\frac{13}{5}$ para a2, 13 días

81. 2x2 + 2x - 5 82. 2 $\frac{1}{}$ 83. c = 325 ≈ 6,71; A ≈ 26,6°; B ≈ 63,4° 84. 525 85. P1x2 = x4 - 2x3 + 11x2 - 2x + 10

86. f $^{-1}$ 1x2 = $\frac{8x + 5}{x}$ 87. $\frac{24}{\text{pag}}$ 88. 9p - 18 unidades cuadradas

9.7 Evalúe su comprensión (página 681)

1. T 2. T 3. T 4. F 5. F 6. T 7. 2 10. 4 12. - 11A + 2B + 5C 14. - 6A + 23B - 15C

15. (a) 5i + 5j + 5k (b) - 5i - 5j - 5k (c) 0 (d) 0 17. (a) i - j - k (b) - i + j + k (c) 0 (d) 0

20. (a) - i + 2j + 2k (b) i - 2j - 2k (c) 0 (d) 0 22. (a) 3i - j + 4k (b) - 3i + j - 4k (c) 0 (d) 0 24. - 9i - 7j - 3k

26. 9i + 7j + 3k 28. 0 30. - 27i - 21j - 9k 32. - 18i - 14j - 6k 34. 0 36. - 25 38. 25 40. 0

41. Cualquier vector de la forma c1 - 9i - 7j - 3k2, donde c es un escalar distinto de cero 44. Cualquier vector de la forma c1 - i + j + 5k2, donde c es un escalar distinto de cero

46. 2166 48. 2555 49. 234 52. 2998 53. 230 $\frac{5}{}$ yo + $\frac{2}{230}$ j + $\frac{1}{230}$ k o - $\frac{5}{230}$ i - $\frac{2}{230}$ j - k 55, 98 unidades cúbicas

$\frac{1}{230}$

jk

57. u * v = 3 i a1 b1 c1 a2 b2 c2 3 = 1b1c2 - b2c12i - 1a1c2 - a2c12j + 1a1b2 - a2b12k

7 u * v 7 2 = 21b1c2 - b2c12 ^{2} + 1a1c2 - a2c12 ^{2} + 1a1b2 - a2b12 22 2

= $b1^2c2^2$ - 2b1b2c1c2 + $b2^2c1^2$ + $a1^2c2^2$ - 2a1a2c1c2 + $a2^2c1^2$ + $a1^2b2^2$ - 2a1a2b1b2 + $a2^2b1^2$

7 tu 7 2 = $a1^2 + b1^2 + c1^2$. 7v72___ = $a2^2 + b2^2 + c2^2$

Machine Translated by Google

7 u 7 2 7 v 7 2 = 1a1a2 + b1 2 2 + b2 2 + c2 22 = a1 2 a2 2 2 + a1 b2 2 + a1 2 c2 2 2 2 + b1 2 a2 + b1 2 b2 2 + b1 2 c2 + a2 c1 2 2 2 + b2 2 c1 + c1 c2 2

1u # v2 2 = 1a1a2 + b1b2 + c1c22 2 = 1a1a2 + b1b2 + c1c22 1a1a2 + b1b2 + c1c22

2 = a1 2 a2 + a1a2b1b2 + a1a2c1c2 + b1b2c1c2 + b1b2a1a2 + b1 2 b2 2 + b1b2c1c2 + a1a2c1c2 + c1 2 c2 2

= a1 2 a2 2 2 + b1 2 b2 2 + c1 c2 + 2a1a2b1b2 + 2b1b2c1c2 + 2a1a2c1c2

7u 7 2 7v 7 2 - 1u # v2 _ _ 2 2 = a1 2 b2 + a1 2 c2 2 + b1 2 a2 2 2 + a2 c1 2 + b2 2 c1 2 + b1 2 c2 - 2a1a2b1b2 - 2b1b2c1c2 - 2a1a2c1c2, que es igual a 7 u * v 7 2 .

59. Según el problema 58, dado que u y v son ortogonales, 7 u * v 7 = 7 u 7 7 v 7 . Si además u y v son vectores unitarios, 7 u * v 7 = 1 # 1 = 1.

61. Supongamos que u = ai + bj + ck, v = di + ej + fk y w = li + mj + nk. Entonces u * v = 1bf - ec2i - 1af - dc2j + 1ae - db2k,

u * w = 1bn - mc2i - 1an - lc2j + 1am - lb2k, y v + w = 1d + l2i + 1e + m2j + 1f + n2k.

Por lo tanto, 1u * v2 + 1u * w2 = 1bf - ec + bn - mc2i - 1af - dc + an - lc2j + 1ae - db + am - lb2k y u * 1v + w2 = [b1f + n2 - 1e + m2c]i - [a1f + n2 - 1d + l2c]j + [a1e + m2 - 1d + l2b]k

= 1bf - ec + bn - mc2i - 1af - dc + an - lc2j + 1ae - db + am - lb2k, que es igual a 1u * v2 + 1u * w2.

64. Sean v = v1i + v2 j + v3k y w = w1i + w2 j + w3k.

Entonces 2v * 3w = 61v * w2 = 63 1v2w3 - v3w22i - 1v1w3 - v3w12j + 1v1w2 - v2w12k4.

v # 12v * 3w2 = 63 1v2w3 - v3w22v # i - 1v1w3 - v3w12v # j + 1v1w2 - v2w12v # k4

= 63 1v2w3 - v3w22v1 - 1v1w3 - v3w12v2 + 1v1w2 - v2w12v3 4 = 0

Dado que v # 12v * 3w2 = 0, v es ortogonal a 2v * 3w.

De manera similar, w # 12v * 3w2 = 0, por lo que w también es ortogonal a 2v * 3w.

66. $\frac{\text{pag}}{4}$ 67. 117, 4.222, 1 - 17, 1.082 68. f -1 1x2 = log7 1x - 52 + 1 69. log4 x - 3log4 70. 2 71. 5x x ≠ -4, x ≠ 46 72. 2 $\frac{211}{4}$

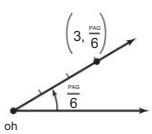
73. 1823 unidades cuadradas 74. $\frac{x - 16}{x1\ 2x + 42}$ 75. - $\frac{\text{pag}}{3}$

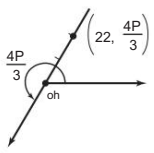
Ejercicios de repaso (página 684)

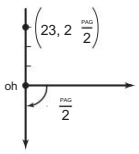
1. un $\frac{323}{2}$, $\frac{3}{\text{2 segundo}}$

2. 11, 23 2

3. 10, 32





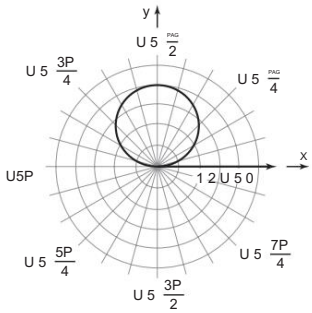


4. ¢-822, 5. 4 ≤, ¢822, 5p 4 ≤

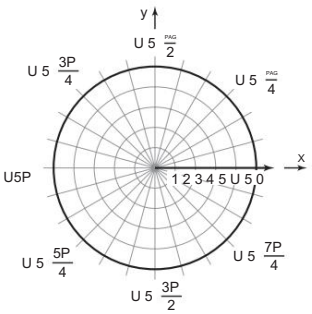
¢2,5p 6 ≤ o ¢ - 2, - 6 ≤

6. (5, p) o (- 5, 0)

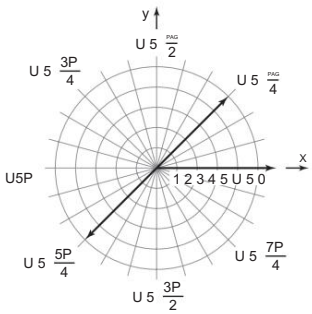
7. (a) x2 + 1y - 12 2 = 1
(b) círculo, radio 1, centro 10, 12 en coordenadas rectangulares



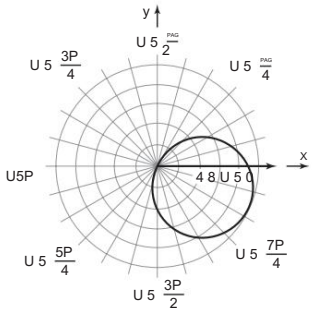
8. (a) x2 + y2 = 25
(b) círculo, radio 5, centro en el polo



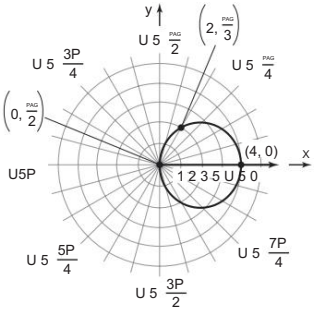
9. (a) x - y = 0
(b) línea a través del poste, formando un ángulo de $\frac{\text{pag}}{4}$ con eje polar



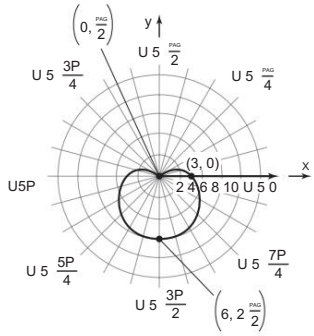
10. (a) 1x - 42 2 + 1 año + 22 2 = 25
(b) círculo, radio 5, centro 14, - 22 en coordenadas rectangulares



11. Círculo; radio 2, centro 12, 02 en coordenadas rectangulares; simétrico con respecto al eje polar

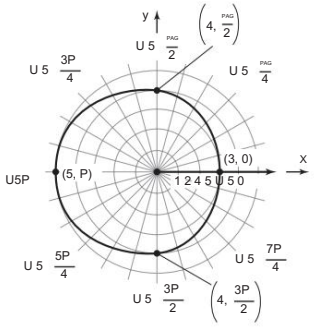


12. Cardioide; simétrico con respecto a la línea tu = $\frac{\text{pag}}{2}$



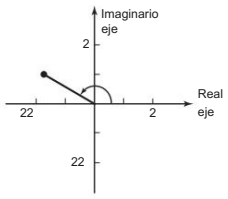
Machine Translated by Google

13. Limaçon sin bucle interior; simétrico con respecto al eje polar



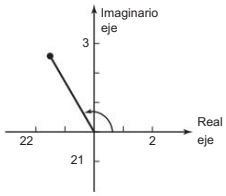
14. $2213\,(\cos 146{,}3° + i \sin 146{,}3°)$

16. $-23 + yo$

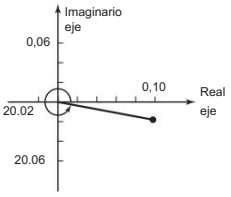


15. 51cos 5,640 + i sen 5,6402; 5ei # 5.640

17. $-\frac{3}{2} + \frac{323}{2}i$



18. 0,10 - 0,02i



19. $zw = \text{porque}\ \frac{13p}{18} + \text{peco}\ \frac{13p}{18}\ \text{o ei \# 13p>18};\quad \frac{z}{w} = \text{porque}\ \frac{pag}{6} + \text{peco}\ \frac{pag}{6}\ \text{o ei \# p>6}$

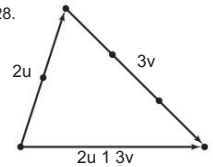
20. $\frac{3}{4\not{c}2p^3} + yo\ \text{peca}\not{d}o2p\ 3 \le$

21. $zw = 5\text{acosp}\ \frac{}{36} + \text{peco}\ \frac{pag}{36}\ \text{bo 5ei \# p>36};\quad \frac{z}{w} = 5\text{acosp}\ \frac{}{12} + \text{peco}\ \frac{pag}{12}\ \text{bo 5ei \# p>12}$ 22. $\frac{27}{2} + \frac{2723}{2}i$; 27ei # p>3

23. $\frac{5210}{2}$ (1 - i) 24, 16 25. - 8432 + 5376 i 26, 0,6180 - 1,9021 i

27.

28.



29.v = 2i - 4j; 7 v 7 = 225 30. v = - i + 3j; 7 v 7 = 210 31. 2i - 2j 32. - 20i + 13j

33. 25 34. 25 + 5 ≈ 7.24 35. - i + $\frac{215}{5}$ $\frac{15}{5}$j 36. v = $\frac{3}{2}$yo + $\frac{323}{2}$j 37. 120° 38. 243 ≈ 6.56

39. v = 3i - 5j + 3k 40. 21i - 2j - 5k 41. 238 42. 0 43. 3i + 9j + 9k 44. 0

45. $yo + \frac{119}{19}$ $\frac{3119}{19}$j + $\frac{3119}{19}$k o - i - j - k 46. v # w = - 11; tu ≈ 169,7° $\frac{119}{19}$ $\frac{3119}{19}$ $\frac{3119}{19}$

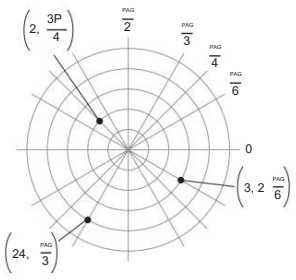
47.v # w =-4; tu ≈ 153,4° 48. v # w = 1; tu ≈ 70,5° 49. v # w = 0; u = 90° 50. Paralelo 51. Ninguno

52. Ortogonal 53. v1 = i - 5 $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$j; v2 = yo + $\frac{6}{10}$ $\frac{8}{10}$j 54. v1 = 5 $\frac{9}{10}$13i + j2; v2 = - j 55. a ≈ 56,1°; b ≈ 138°; gramo ≈ 68,2°

56. 2283 57. - 2i + 3j - k 58. 0 59. 229 ≈ 5,39 mph; 0,4 mi 60. Cable izquierdo: 1843,21 lb; cable derecho: 1630.41 lb 61. 50 ft-lb 62. Se necesita una fuerza de 697.2 lb para evitar que la camioneta ruede colina abajo. La magnitud de la fuerza sobre la colina es 7969,6 lb.

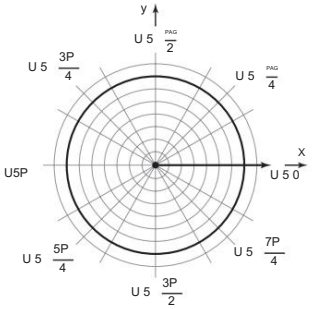
Prueba de capítulo (página 686)

1–3.

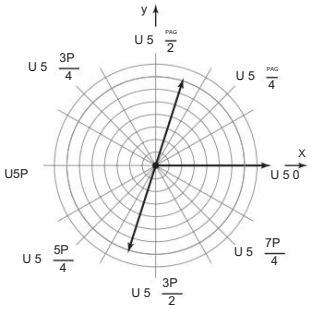


4. a4, pag$_{\text{cerrado}}$

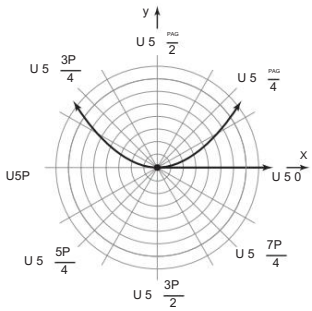
5. x2 + y2 = 49



6. $\frac{y}{x} = 3$ o y = 3x



7. 8y = x2



8.r _ ^{2} cos u = 5 es simétrico con respecto al polo, el eje polar y la recta u = $\frac{pag}{2}$

9. r = 5 sen u cos2 u es simétrico con respecto a la recta u = $\frac{pag}{2}$. Las pruebas de simetría respecto del polo y del polar 2.

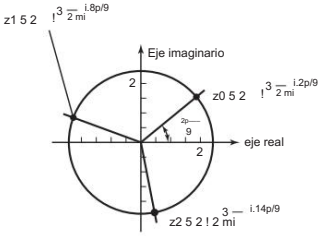
El eje falla, por lo que la gráfica de r = 5 sen u cos2 u puede o no ser simétrica con respecto al polo o eje polar.

10. z # w =6acos $107p\frac{}{180}$ + peco _ $\frac{107p}{180b}$; 6ei # 107p>180 11. $\frac{w}{z} = \frac{3}{2}$ años $33p\frac{}{20}$ + peco$33p\frac{}{20b}$; 3 $\frac{}{2}$ ie # 33p>20

12. w5 = 243acos $11p\frac{}{18}$ + peco _ $\frac{11p}{18b}$; 243ei # 11p>18

Machine Translated by Google

13. z0 = 223 2ei # 2p>9, z1 = 223 2ei # 8p>9, z2 = 223 2ei # 14p>9



14. v = 8522, - 522 9 15. 7 v 7 = 10 16. u = v / } v } =h 22 / 2 , - 22 / 2 yo

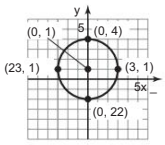
17. 315° fuera del eje x positivo 18. v = 522i - 522j 19. v1 + 2v2 - v3 = 6i - 10j

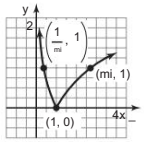
20. Los vectores v1 y v4 son paralelos. 21. Los vectores v2 y v3 son ortogonales.
22. 172,87° 23. - 9i - 5j + 3k 24. a ≈ 57,7°, b ≈ 143,3°, g 26. ≈ 74,5° 25. 2115
El cable debe poder soportar una tensión de aproximadamente 670,82 lb.

Revisión acumulativa (página 687)

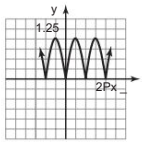
- 3, 36 2. y = 13 / 3 x 3. x2 + 1y - 12 1. 5 2 = 9

4. e x ` x 6 1 / 2 f o a - q, 2 b 1 / 5. Simetría con respecto al eje y 6.

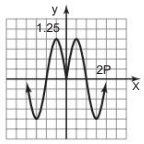




7.

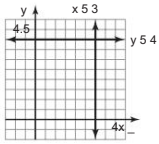


8.

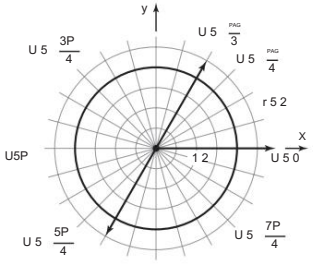


9. - pag / 6

10.



11.



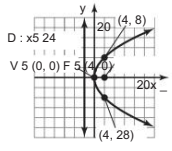
12. Amplitud: 4; período: 2

CAPÍTULO 10 Geometría analítica

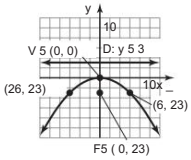
10.2 Evalúe su comprensión (página 696)

7. parábola; eje de simetría 8. latus rectum 9. c 10. 13, 22 11. d 12. F 14. B 16. E 18. H 20. C

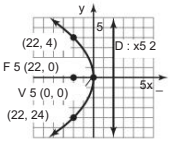
21. y2 = 16x



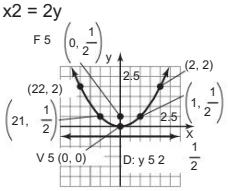
24. x2 = - 12y



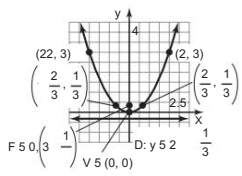
26. y2 = - 8x



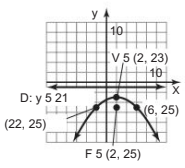
28. x2 = 2y



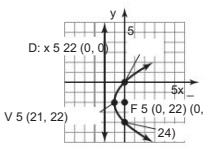
29. x2 = y 4 / 3



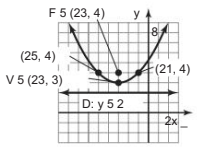
31. 1x - 22 2 = - 81 años + 32



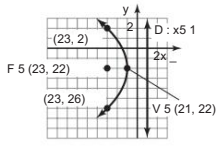
34. 1 año + 22 2 = 41x + 12



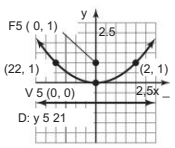
36. 1x + 32 2 = 41 años - 32



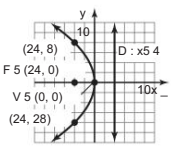
38. 1 año + 22 2 = - 81x + 12



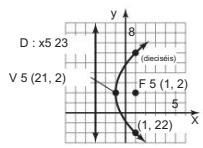
40. Vértice: 10, 02; foco: 10, 12; directriz: y = - 1



41. Vértice: 10, 02; foco: 1 - 4, 02; directriz: x = 4

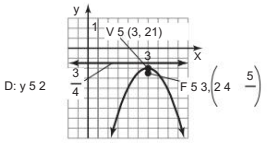


44. Vértice: 1 - 1, 22; foco: 11, 22; directriz: x = - 3

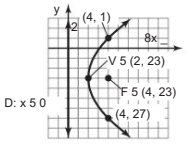


Machine Translated by Google

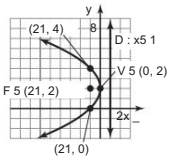
46. Vértice: 13, - 12; enfocar: a3, - 4b; directriz: y = - $\frac{3}{4}$



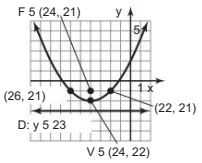
48. Vértice: 12, - 32; enfocar: 14, - 32; directriz: x = 0



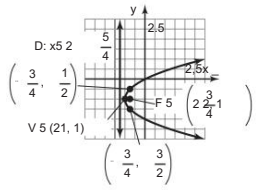
49. Vértice: 10, 22; foco: 1 - 1, 22; directriz: x = 1



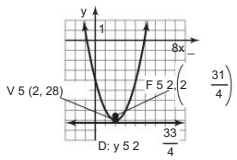
52. Vértice: 1 - 4, - 22; enfocar: 1 - 4, - 12; directriz: y = - 3



54. Vértice: 1 - 1, - 12; enfoque: un - $\frac{3}{4}$, - 1b; directriz: x = - 4 $\frac{5}{}$



56. Vértice: 12, - 82; foco: a2, - $\frac{31}{4}$b; directriz: y = - $\frac{33}{4}$



58. 1 año - 12 ^{2} = x 60. 1 año - 12 ^{2} = - 1x - 22

62. x2 = 41y - 12 64. y2 = 1x + 22 $\frac{1}{2}$

66, 20 pies 68 , 24,31 pies, 18,75 pies, 7,64 pies

69. 3,2 pies desde la base del plato, a lo largo del eje de la parábola

71, 1 pulgada desde el vértice, a lo largo del eje de simetría.

74. La profundidad del reflector debe ser de 3,125 pies.

75. El calor se concentrará a unos 3,52 pies de la base, a lo largo del eje de simetría.

77. (a) y = - $\frac{444}{(237,5)x2 + 444}$ (b) 567 pies: 119,7 pies; 478 pies: 267,3 pies; 308 pies: 479,4 pies (c)No; las alturas calculadas utilizando el modelo no se ajustan a las alturas reales

79. Cy2 + Dx = 0, C ≠ 0, D ≠ 0

Cy2 = -Dx

y2 = - $\frac{D}{cx}$

Esta es la ecuación de una parábola con vértice en 10, 02 y eje de simetría el eje x.

El enfoque es un - $\frac{D}{4C}$, 0b; la directriz es la recta x = $\frac{D}{4C.}$ La parábola se abre hacia el cierto si - $\frac{D}{C}$ 7 0 y hacia la izquierda si - 6 0 $\frac{D}{C}$

81. Cy2 + Dx + Ey + F = 0, C ≠ 0

Cy2 + Ey = - Dx - F

y2 + $\frac{mi}{Ci}$ = - $\frac{D}{Cx}$ - $\frac{F}{C}$

sí + $\frac{mi}{2Cb_}^2$ = - $\frac{D}{Cx}$ - $\frac{F}{C}$ + $\frac{E2}{4C2}$

sí + $\frac{mi}{2Cb_}^2$ = - $\frac{D}{cx}$ + $\frac{E2-4CF__}{4C2}$

(a) Si D ≠ 0, entonces la ecuación se puede escribir como

sí + $\frac{mi}{2Cb_}^2$ = - $\frac{D}{hacha\ c}$ - $\frac{E2-4CF__}{4\ CD\ b.}$

Esta es la ecuación de una parábola con vértice en un y eje de simetría paralelo al eje x. $\frac{E2-4CF__}{4\ CD}$, - $\frac{mi}{2Cb_}$

(b)–(d) Si D = 0, la gráfica de la ecuación no contiene puntos si E2 - 4CF 6 0, es una sola línea horizontal si E2 - 4CF = 0, y son dos líneas horizontales si E2 - 4CF 7 0.

83. 10, 22, (0, - 2), (- 36, 0); simétrico con respecto al eje x. 84. 556 85. sen u = ; porque tu = - ; csc u = ; segundo u = - ; $\frac{\sqrt{5289}}{89}$ $\frac{\sqrt{8289}}{89}$ $\frac{\sqrt{289}}{5}$ $\frac{\sqrt{289}}{8}$

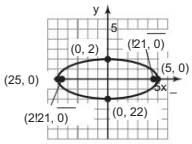
cuna u = - $\frac{8}{5}$ 86. - $\frac{\sqrt{2210}}{3}$ 87. $\frac{\sqrt{11213}}{6}$ 88. 1x + 122 ^{2} + 1 año - 72 ^{2} = 6 89. $6600 90. $\frac{en\ 2}{4}$ 91. cos 17° 92. 5 - 1, 2, 3, 66

10.3 Evalúe su comprensión (página 706)

7. elipse 8. b 9. 10, - 52; 10, 52 10, 5; 3; x 11. 1 - 2, - 32; 16, - 32 12. a 14. C 16. B

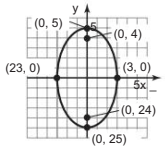
17. Vértices: 1 - 5, 02, 10, 52

Focos: 1 - 221, 02, 1221, 02



20. Vértices: 10, - 52, 10, 52

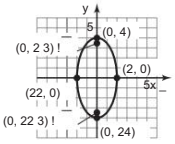
Focos: (0, - 4), 10, 42



21. $\frac{x2}{4}$ + $\frac{y2}{\text{diecisés}}$ = 1

Vértices: 10, - 42, 10, 42

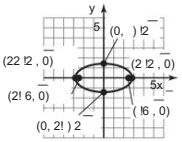
Focos: 10, - 2232, 10, 2232



24. $\frac{x2}{8}$ + $\frac{y2}{2}$ = 1

Vértices: 1- 222, 02, 1222, 02

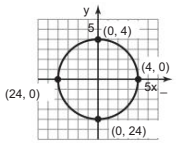
Focos: 1 - 26, 02, 1 26, 02



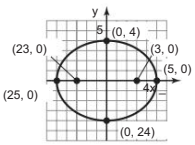
26. $\frac{x2}{16}$ + $\frac{y2}{\text{diecisés}}$ = 1

Vértices: 1 - 4, 02, 14, 02,

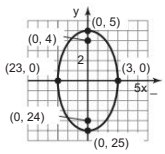
10, - 42, 10, 42; Enfoque: 10, 02



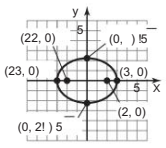
27. $\frac{x2}{25}$ + $\frac{y2}{\text{diecisés}}$ = 1



29. $\frac{x2}{9}$ + $\frac{y2}{25}$ = 1

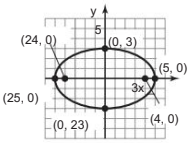


32. $\frac{x2}{9}$ + $\frac{y2}{5}$ = 1

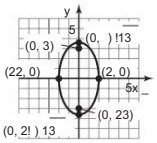


Machine Translated by Google

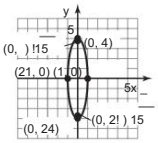
34. $\frac{x2}{25} + \frac{y2}{9} = 1$



36. $\frac{x2}{4} + \frac{y2}{13} = 1$



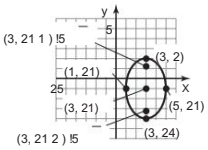
38. $x2 + = \frac{y2}{\text{dieciséis}}$



40, $\frac{1x + 12}{4}^2 + 1 \text{ año} - 12^2 = 1$

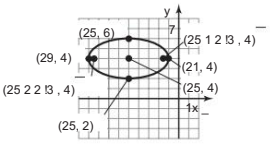
42. $1x - 12^{2+} \frac{y2}{4} = 1$

44. Centro: 13, - 12; vértices: 13, - 42, 13, 22; focos: 13, - 1 - 252, 13, - 1 + 252



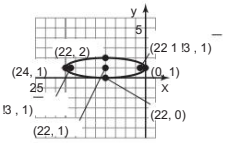
46. $\frac{1x + 52}{\text{dieciséis}}^2 + \frac{1 \text{ año} - 42}{4}^2 = 1$

Centro: 1 - 5, 42; vértices: 1 - 9, 42, 1 - 1, 42; focos: 1 - 5 - 223, 42, 1 - 5 + 223, 42



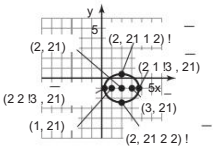
47. $\frac{1x + 22}{4}^2 + 1 \text{ año} - 12^2 = 1$

Centro: 1 - 2, 12; vértices: 1 - 4, 12, 10, 12; focos: 1 - 2 - 23, 12, 1 - 2 + 23, 12



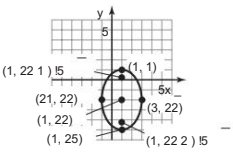
50. $\frac{1x - 22\ 3}{2}^2 + \frac{1 \text{ año} + 12}{2}^2 = 1$

Centro: 12, - 12; vértices: 12 - 23, - 12; 12 + 23, - 12; focos: 11, - 12, 13, - 12



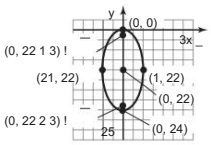
52. $\frac{1x - 12\ 4}{2}^2 + \frac{1 \text{ año} + 22}{9}^2 = 1$

Centro: 11, - 22; vértices: 11, - 52, 11, 12; focos: 11, - 2 - 252, 11, - 2 + 252

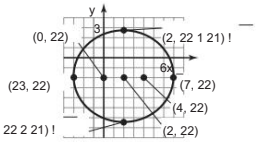


54. $x2 + \frac{1 \text{ año} + 22}{4}^2 = 1$

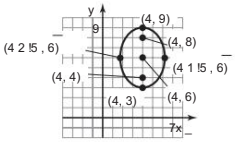
Centro: 10, - 22; vértices: 10, - 42, 10, 02; focos: 10, - 2 - 232, 10, - 2 + 232



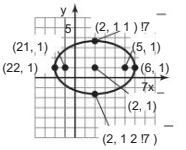
55. $\frac{1x - 22}{25}^2 + \frac{1 \text{ año} +}{22\ 21}^2 = 1$



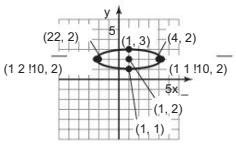
58. $\frac{1x - 42\ 5}{2}^2 + \frac{1 \text{ año} - 62}{9}^2 = 1$



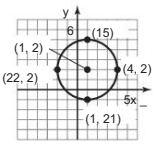
60. $\frac{1x - 22}{16}^2 + \frac{1 \text{ año} - 12}{7}^2 = 1$



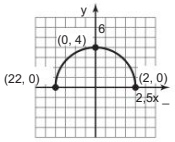
62. $\frac{1x - 12}{10}^2 + 1 \text{ año} - 22^2 = 1$



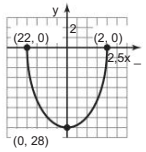
64. $\frac{1x - 12}{9}^2 + \frac{1 \text{ año} - 22}{9}^2 = 1$



66.



68.



70. $\frac{x2}{324} \quad \frac{y2}{81} = 1$ 71. El techo tendrá 40 pies de altura en el centro 74. 40 pies, y ≈ 17,32 pies; 30 pies y ≈ 21,65 pies; 50 pies y ≈ 13.82 pies 75. Para obtener el ancho de la elipse en x = 10, necesitamos duplicar el valor de y. Por lo tanto, el ancho a 10 pies del vértice es 52,8 pies. 77. El agujero elíptico tendrá un eje mayor de longitud 2241 pulgadas y un eje menor de longitud 8 pulgadas. 79. Perihelio: 70,5 millones de millas; segundo ≈ 72,95 * 106 ; $\frac{x2}{5329} + \frac{y2}{5325.75} = 1$

81. Distancia media: 453,4 millones de millas; perihelio: 422,8 millones de millas; = 1,83, a = 20 millones de millas, c = 13 millones de millas, afelio: 33 millones de millas

$\frac{x2}{205571.56} + \frac{y2}{26.811,72}$

85,8214 cm ≈ 29,93 cm 88,525 - 4

89. (a) Ax2 + Cy2 + F = 0

Ax2 + Cy2 = -F

Si A y C son del mismo signo y F es de signo opuesto, entonces la ecuación toma la forma

$\frac{x2}{\text{a - Fa Ab}} + \frac{y2}{\text{a - C b}} = 1$, donde - y - son positivos. Esta es la ecuación de una elipse con centro en 10, 02.

$\frac{F}{C.A.} \quad \frac{F}{}$

(b) Si A = C, la ecuación se puede escribir como x2 + y2 = - A. $\frac{F}{}$ Esta es la ecuación de un círculo con centro en 10, 02 y radio igual a A - $\frac{F}{A.}$

92. Ceros: 5 - 223, 5 + 223; intersecciones x: 5 - 223, 5 + 223 93. Dominio: 5x x ≠ 56; Asíntota horizontal: y = 2; Asíntota vertical: x = 5

94. 617,1 pies-libra 95. b ≈ 10,94, c ≈ 17,77, B = 38° 96. ep $\frac{7p}{30}, \frac{13p}{30 \text{ f}}$ 97. $\frac{10}{7}$ 98, 5 - 0,53976 99, 4x - 7 100 , 51646

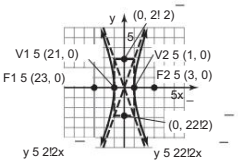
101. 5 - 3 - 225, - 3 + 2256

Machine Translated by Google

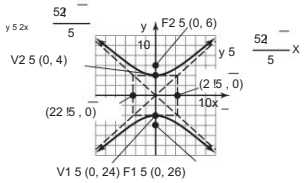
10.4 Evalúe su comprensión (página 719)

7. hipérbola 8. eje transversal 9. b 10. 12, 42; (2, - 2) 11. 12, 62; 12, - 42 12. c 13. 2; 3; x 14. y = - x; y = 9 $\frac{4}{}$ $\frac{4}{9}$x 15.B 18.A

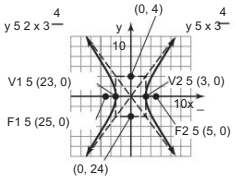
19. $x2 - \frac{y2}{8}$ =



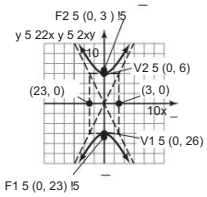
21. $\frac{y2}{16} - \frac{x2}{20} = 1$



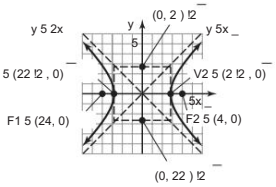
24. $\frac{x2}{9} - \frac{y2}{\text{daciséis}} = 1$



26. $\frac{y2}{36} - \frac{x2}{9} = 1$

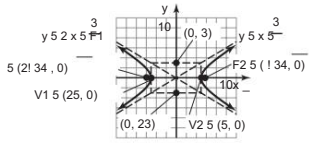


28. $\frac{x2}{8} - \frac{y2}{8} = 1$



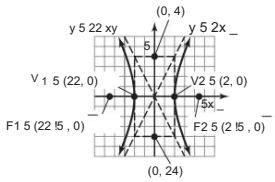
30. $\frac{x2}{25} - \frac{y2}{9} = 1$

Centro: 10, 02
Eje transversal: eje x
Vértices: 1 - 5, 02, 15, 02
Focos: 1 - 234, 02, 1 234, 02
Asíntotas: y = { x $\frac{3}{5}$



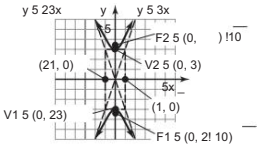
31. $\frac{x2}{4} - \frac{y2}{\text{daciséis}} = 1$

Centro: 10, 02
Eje transversal: eje x
Vértices: 1 - 2, 02, 12, 02
Focos: 1 - 225, 02, 1225, 02
Asíntotas: y = {2x



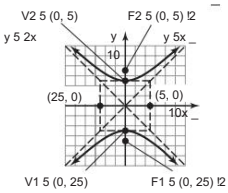
34. $\frac{y2}{9}$ - x2 = 1

Centro: 10, 02
Eje transversal: eje y
Vértices: 10, - 32, 10, 32
Focos: 10, - 2102, 10, 2102
Asíntotas: y = {3x



36. $\frac{y2}{25} - \frac{x2}{25} = 1$

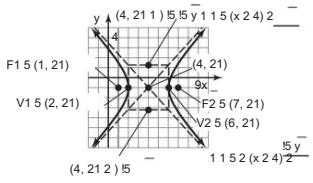
Centro: 10, 02
Eje transversal: eje y
Vértices: 10, - 52, 10, 52
Focos: 10, - 5222, 10, 5222
Asíntotas: y = {x



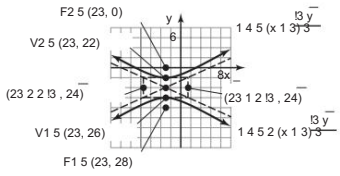
38. x2 - y2 = 1

40. $\frac{y2}{36} - \frac{x2}{9} = 1$

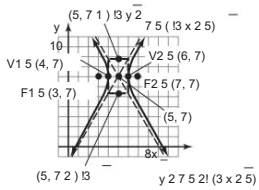
41. $\frac{1x - 42^2}{4} - \frac{1 \text{ año} + 12^2}{5} = 1$



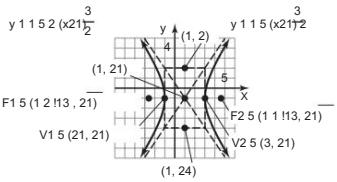
44. $\frac{1 \text{ año} + 42^2}{4} - \frac{1x + 32^2}{12} = 1$



46. $1x - 52^2 - \frac{1 \text{ año} - 72^2}{3} = 1$

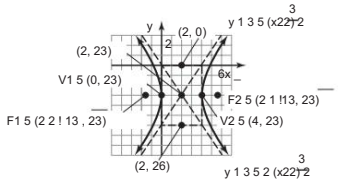


48. $\frac{1x - 12^2}{4} - \frac{1 \text{ año} + 12^2}{9} = 1$



50. $\frac{1x - 22^2}{4} - \frac{1 \text{ año} + 32^2}{9} = 1$

Centro: 12, - 32
Eje transversal: paralelo al eje x
Vértices: 10, - 32, 14, - 32
Focos: 12 - 213, - 32, 12 + 213, - 32
Asíntotas: y + 3 = { 2 $\frac{3}{}$ 1x - 22



Machine Translated by Google

52, $\frac{(1x - 2)^2}{4} - (1x + 2)^2 = 1$

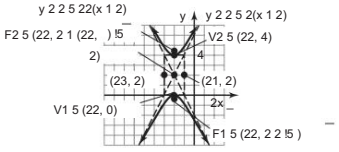
Centro: 1 - 2, 22

Eje transversal: paralelo al eje y

Vértices: 1 - 2, 02, 1 - 2, 42

Focos: 1 - 2, 2 - 252, 1 - 2, 2 + 252

Asíntotas: y - 2 = {21x + 22



54, $\frac{(1x + 1)^2}{4} - \frac{(1y + 2)^2}{4} = 1$

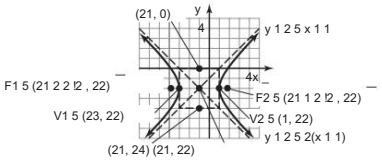
Centro: 1 - 1, - 22

Eje transversal: paralelo al eje x

Vértices: 1 - 3, - 22, 11, - 22

Focos: 1 - 1 - 222, - 22, 1 - 1 + 222, - 22

Asíntotas: y + 2 = { 1x + 12



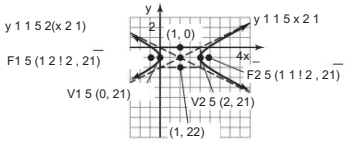
56. $(1x - 1)^2 - 1y^2 + 1 = 2$ Centro: 11, - 12

Eje transversal: paralelo al eje x

Vértices: 10, - 12, 12, - 12

Focos: 11 - 22, - 12, 11 + 22, - 12

Asíntotas: y + 1 = { 1x - 12



58, $\frac{(1x - 2)^2}{4} - (1x + 1)^2 = 1$

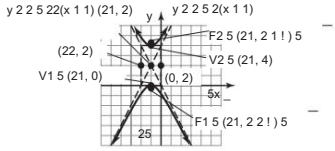
Centro: 1 - 1, 22

Eje transversal: paralelo al eje y

Vértices: 1 - 1, 02, 1 - 1, 42

Focos: 1 - 1, 2 - 252, 1 - 1, 2 + 252

Asíntotas: y - 2 = {21x + 12



60, $\frac{(1x - 3)^2}{4} - \frac{(1y + 2)^2}{22\ 16} = 1$

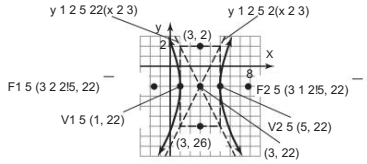
Centro: 13, - 22

Eje transversal: paralelo al eje x

Vértices: 11, - 22, 15, - 22

Focos: 13 - 225, - 22, 13 + 225, - 22

Asíntotas: y + 2 = {21x - 32



62, $\frac{(1x - 1)^2}{4} - (1x + 2)^2 = 1$

Centro: 1 - 2, 12

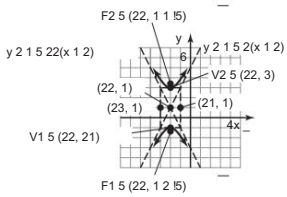
Eje transversal: paralelo al eje y

Vértices:

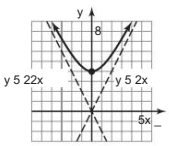
1 - 2, - 12, 1 - 2, 32

Focos: 1 - 2, 1 - 252, 1 - 2, 1 + 252

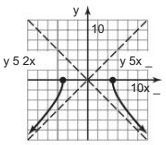
Asíntotas: y - 1 = {21x + 22



64.



66.



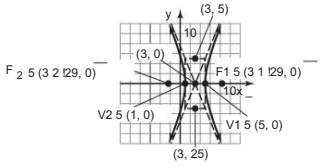
68. Centro: 13, 02

Eje transversal: paralelo al eje x

Vértices: 11, 02, 15, 02

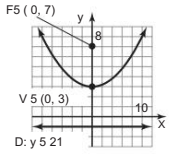
Focos: 13 - 229, 02, 13 + 229, 02

Asíntotas: $y = \{ 1x - 32 \frac{5}{2}$



70. Vértice: 10, 32; foco: 10, 72;

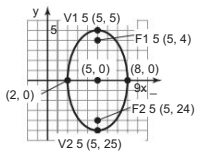
directriz: y = - 1



72. $\frac{(1x - 5)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{25} = 1$

Centro: 15, 02; vértices: 15, 52, 15, - 52;

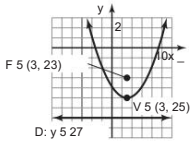
focos: 15, - 42, 15, 42



74. $(1x - 3)^2 = 81y + 5^2$

Vértice: 13, - 52; foco: 13, - 32;

directriz: y = - 7



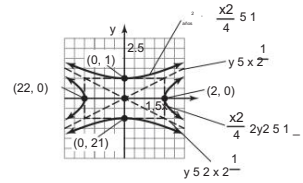
75. El espectáculo de fuegos artificiales está a 50 138 pies al norte de la persona en el punto A. 77. La torre tiene 592,4 pies de altura. 79. (a) asíntotas y = {x

(b) $\frac{x2}{16\ 16\ la} - \frac{y2}{} = 1$, x Ú 0 81. 81 $\frac{y2}{} - \frac{x2}{88} = 1$ 83. Si la excentricidad es cercana a 1, la “apertura” de la hipérbola es muy pequeña. A medida que e aumenta, la abertura se hace más grande.

85. $\frac{x2}{4}$ - y2 = 1; asíntotas y = { x $\frac{1}{2}$

$\frac{x2}{}$ $\frac{1}{2}$

y2 - = 1; asíntotas y = { x 4



Machine Translated by Google

87. Ax2 + Cy2 + F = 0
Ax2 + Cy2 = -F

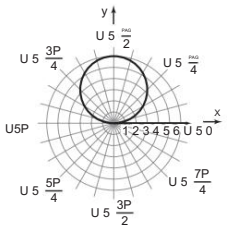
Si A y C son de signo opuesto y F ≠ 0, esta ecuación se puede escribir como $\frac{x2}{a - \frac{F}{A}b} + \frac{y2}{a - \frac{F}{C}b} = 1$,

$\frac{F}{A}$ $\frac{F}{C}$ son de signo opuesto. Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en 10, 02. La transversal donde - y - AC

El eje es el eje x si - $\frac{F}{A}$ 7 0; el eje transversal es el eje y si - 6 0. $\frac{F}{A}$

89. Amplitud = $\frac{1}{2}$; Periodo = $\frac{2p}{3}$; Cambio de fase = - $\frac{pag}{3}$;
Desplazamiento vertical = 5

92. x2 + 1y - 32 ^{2} = 9; círculo, radio 3,
centro en 10, 32 en coordenadas rectangulares



90. c ≈ 13,16, A ≈ 31,6°, B = 48,4°

91. 16, - 6232

93. f $^{-1}$ 1x2 = lna x - 43 b + 1 94. $\frac{9p}{4} - \frac{9}{2}$ ≈ 2,57 unidades cuadradas

95. 5 - 46 96. un 1 $\frac{}{2}$, - $\frac{3}{2b}$ 97. $\frac{216 - x2}{4}$

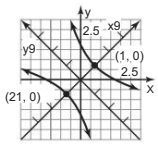
10.5 Evalúe su comprensión (página 728)

5. cuna12u2 = $\frac{A - C}{B}$ 6. d 7. B2 - 4AC 6 0 8. c 9. T 10. F 11. Parábola 14. Elipse 16. Hipérbola

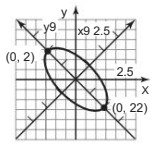
18. Hipérbola 20. Círculo 21. x = 1x′ - y′2, y = 1x′ + y′2 24. x = 1x′ - y′2, y = 1x′ + y′2 $\frac{22}{2}$

26. x = $\frac{1}{2}$1x′ - 23y′2, y = $\frac{1}{2}$1 23x′ + y′2 28. x = 1x′ - 2y′2, y = 12x′ + y′2 30. x = 1x′ - 2y′2, y = 12x′ + 3y′2 $\frac{213}{13}$ $\frac{213}{13}$

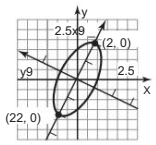
31. u = 45° (ver Problema 21)
2x′ - y′ ^{2} = 1
3 hipérbola
Centro en origen
El eje transversal es el eje x′@.
Vértices en 1 {1, 02



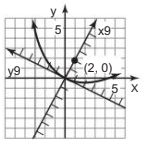
34. u = 45° (ver Problema 23)
2x′ + y′ ^{2} = 1
4 elipse
Centro a las 10, 02
El eje mayor es el eje y′@.
Vértices en 10, {22



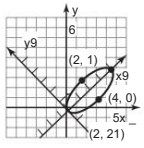
36. u = 60° (ver Problema 25)
$\frac{X'^2}{4}$ + y′ ^{2} = 1
Elipse
Centro a las 10, 02
El eje mayor es el eje x′@.
Vértices en 1 {2, 02



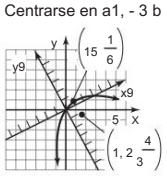
37. u ≈ 63° (ver Problema 27)
y′ 2 = 8x′
Parábola
Vértice en 10, 02
Enfoque a las 12, 02



40. u ≈ 34° (ver Problema 29)
$\frac{1x' - 22}{4}^2$ + y′ ^{2} = 1
Elipse
Centro a las 12, 02
El eje mayor es el eje x′@.
Vértices en 14, 02 y 10, 02



42. cuna12u2 = $\frac{7}{24}$;
u = sen-1 a $\frac{}{}$3b ≈ 37°
1x′ - 12 ^{2} = - 6ay′ - 6 b $\frac{1}{}$
Parábola
Vértice en a1, 1 segundo $\frac{}{4}$
Centrarse en a1, - 3 b



Machine Translated by Google

44. Hipérbola 46. Hipérbola 48. Parábola 50. Elipse 52. Elipse 53. 23,6°

55. Consulte la ecuación (6): A′ = A cos2 u + B sen u cos u + C sen2 u

B′ = B1cos2 u - sen2 u2 + 21C - A2 1sen u cos u2

C′ = A sen2 u - B sen u cos u + C cos2 u

D′ = D cos u + E sen u

E′ = - D sen u + E cos u

F′ = F

2 57. Usa el problema 55 para encontrar B′ - 4A′C′. Después de mucha cancelación, B′2 - 4A′C′ = B2 - 4AC.

60. La distancia entre P1 y P2 en el plano x′y′ es igual a 21x2 = 2- x1 = 2 + 1y2 = = 2 - y1 2.

Suponiendo que x′ = x cos u - y sen u y y′ = x sen u + y cos u, entonces 1x2 = = 2 - x1

2 = 1x2 cos u - y2 sen u - x1 cos u + y1 sen u2 = cos2 u1x2 2

- x12 - 2 sen u cos u1x2 - x12 1y2 - y12 + sen2 u1y2 - y12 = sen2 u1x2 - x12 + 2 sen u cos u1x2 2, y

1y2 = = 2 - y1 2 x12 + sen2 u1x2 - x12 + sen2 u1y2 - y12 + cos2 u1y2 - 2 - x12 1y2 - y12 + cos2 u1y2 - y12 = 1x2 sen u + y2 cos u - x1 sen u - y1 cos u2 = cos2 u1x2 - 2.

Por lo tanto, 1x2 = 2- x1 = 2 y12 + 1y2 = = 2 - y1

1x2 - x12 + 1y2 y12 cos u sen2 u2 = 1 by2 y12 sen2 u + cos2 u1 - x12 = 2 2.

63. A ≈ 39,4°, B ≈ 54,7°, C ≈ 85,9° 64. 38,5 65. r

67. - 212x + 32 2 152x2 + 96x + 32 / 14x2 - 12 9 68. y = - 5 69. 556 70. 8.33 71. 8

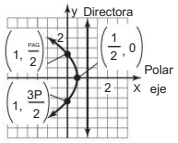
10.6 Evalúe su comprensión (página 735)

3. cónico; enfocar; directriz 4. parábola; hipérbola; elipse 5. b 6. T 8. Parábola; La directriz es perpendicular al eje polar, 1 unidad a la derecha del polo.

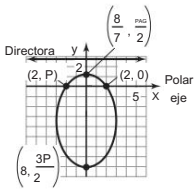
10. Hipérbola; La directriz es paralela al eje polar, unidades 4/3 por debajo del polo.

11. Elipse; La directriz es perpendicular al eje polar, unidades 3/2 a la izquierda del polo.

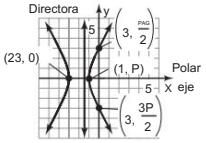
13. Parábola; directriz es perpendicular a la eje polar, 1 unidad a la derecha del polo; el vértice está en 2, 0b.



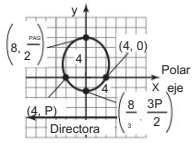
16. Elipse; directriz es paralela al eje polar, eje 8/3 unidades por encima del poste; los vértices están en un 8/7, pag 2b y a8, 3p 2b.



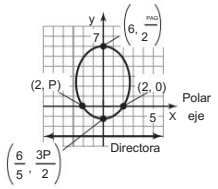
17. Hipérbola; la directriz es perpendicular a la eje polar, 3 unidades a la izquierda del polo; 2 los vértices están en 1 - 3, 02 y 11, p2.



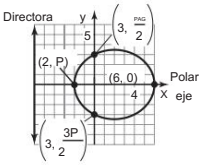
20. Elipse; la directriz es paralela al eje polar, 8 unidades por debajo del polo; los vértices están en a8, pág. 2b y un 8 3, 3p 2b.



22. Elipse; la directriz es paralela a la polar eje, 3 unidades por debajo del polo; los vértices están en a6, pág. 2b y 6 5, 3p 2b.



24. Elipse; la directriz es perpendicular al eje polar, 6 unidades a la izquierda del polo; los vértices están en 16, 02 y 12, p2.



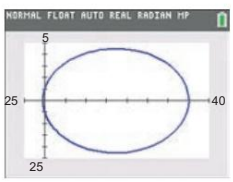
25. y2 + 2x - 1 = 0 28. 16x2 + 7y2 + 48y - 64 = 0 30. 3x2 - y2 + 12x + 9 = 0 32. 4x2 + 3y2 - 16y - 64 = 0

34. 9x2 + 5y2 - 24y - 36 = 0 36. 3x2 + 4y2 - 12x - 36 = 0 38. r = 1 / 1 + pecado u 40. r = 5 12 / - 4 porque u 42.r = _ 12 / 1 - 6 pecado u

43. Utilice d1D, P2 = p - r cos u en la derivación de la ecuación (6).

45. Utilice d1D, P2 = p + r sen u en la derivación de la ecuación (6).

47. Afelio: 35 UA; perihelio: 0,587 AU



49. 0,0125 m 51. v0 = B 2GMe r0 52. 27,81 53. Amplitud = 4; Período = 10p

54. pb3, pag, 5p / 3 f 55. 26 56. r = 24 / pag pies 57. ≈19,83 años

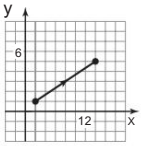
58. Decreciente: 3 - 1, 04; Creciente: 3 - 2, - 14 y 30, q 2 59. k = 12 / 5 60. f1x2 = - 3 1 / 1x + 32 2 + 8 61. 40 unidades cuadradas

Machine Translated by Google

10.7 Evalúe su comprensión (página 746)

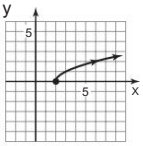
2. curva plana; parámetro 3. b 4. a 5. F 6. T

7. y



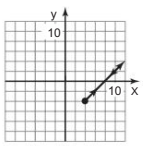
x - 3y + 1 = 0

10. y



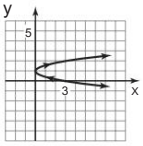
y = 2x - 2

12.



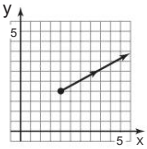
y = x - 8

14. y



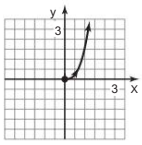
x = 31 años - 12 ^{2}

16. y



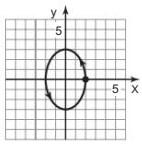
2y = 2 + x

18.



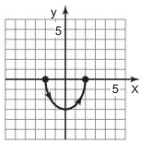
y = x3

19.



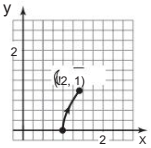
$\frac{x2}{4} + \frac{y2}{9} = 1$

22.



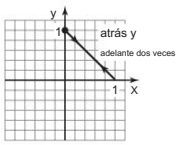
$\frac{x2}{4} + \frac{y2}{9} = 1$

24. y



x2 - y2 = 1

26.



x + y = 1

28. x1t2 = t o x1t2 = $\frac{t+1}{4}$

y1t2 = 4t - 1 y1t2 = t

30. x1t2 = t o x1t2 = t ^{3}

y1t2 = t ^{2} + 1 y1t2 = t ^{6} + 1

32. x1t2 = t o x1t2 = 23 t

y1t2 = t ^{3} y1t2 = t

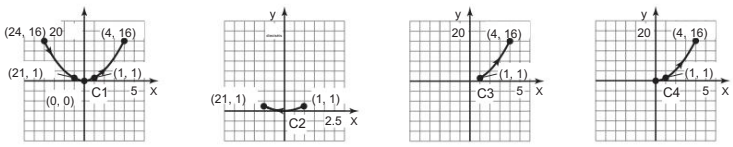
33. x1t2 = t o y1t2 = t x1t2 = t ^{3}

2/3, t Ú 0 y1t2 = t ^{2}, t Ú 0

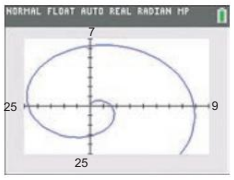
36. x1t2 = t + 2, y1t2 = t, 0 … t … 5 38. x1t2 = 3 cos t, y1t2 = 2 sen t, 0 … t … 2p

39. x1t2 = 2 cos1pt2, y1t2 = - 3 sen1pt2, 0 … t … 2 42. x1t2 = 2 sen12pt2, y1t2 = 3 cos12pt2, 0 … t … 1

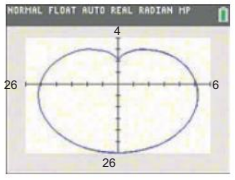
44. y



46.



48.



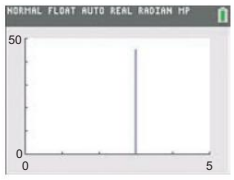
49. (a) x1t2 = 3 (o cualquier número excepto 0)

y1t2 = - 16t ^{2} + 50t + 6

(b) 3,24 segundos

(c) 1,56 s; 45,06 pies

(d)

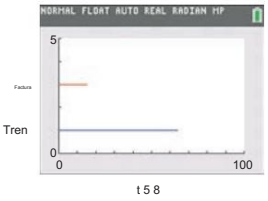


51. (a) Tren: x1 1t2 = t ^{2}, y1 1t2 = 1;

Factura: x2 1t2 = 51t - 52, y2 1t2 = 3

(b) Bill no tomará el tren.

(C)



53. (a) x1t2 = 1145 cos 20°2t

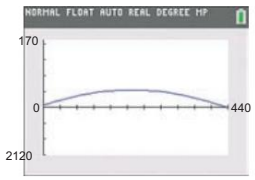
y1t2 = - 16t ^{2} + 1145 sen 20°2t + 5

(b) 3,20 segundos

(c) 435,65 pies

(d) 1,55 s; 43,43 pies

(mi)



56. (a) x1t2 = 140 cos 45°2t

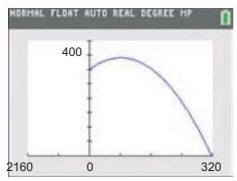
y1t2 = - 4,9t ^{2} + 140 sen 45°2t + 300

(b) 11,23 s

c) 317,52 m

(d) 2,89 s; 340,82 metros

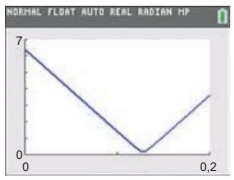
(mi)



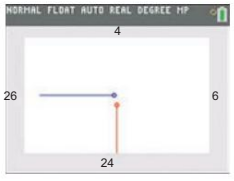
58. (a) Camry: x1t2 = 40t - 5, y1t2 = 0; Chevy Impala: x1t2 = 0, y1t2 = 30t - 4

(b) d = 2140t - 52 (c) ^{2} + 130t - 42 ^{2}

(d) 0,2 millas; 7,68 minutos

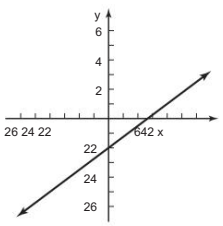


(mi)

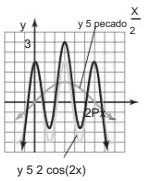


59. (a) x = (v0 cos u)t, y = - $\frac{1}{2}$gt2 + (v0 sen u)t + h. (b) La altura máxima de la pelota: aproximadamente 245 pies (c) Aproximadamente 484 pies (d) La pelota despeja al monstruo verde a 175,72 pies 61. La orientación es de 1x1, y12 a 1x2, y22. 64. x1m2 = , y1m2 = 1 $\frac{R11 - m22}{1 + m2\ 1 + m2}$ $\frac{2mR}{-\ q\ 6\ m\ 6\ q}$,

67.



68.



69. Aproximadamente 2733 millas

70. (a) Armónico simple (b) 2 m (c) $\frac{2}{\frac{pag}{2}}$ s (d) oscilaciones/s $\frac{}{pag}$

71. y = 2x - $\frac{11}{2}$ 72. - $\frac{1}{1x + 32\ ^2}$ 73. $\frac{26 - 22}{4}$ 74. mi 3 f 75. c = $\frac{223}{3}$

Machine Translated by Google

Ejercicios de repaso (página 751)

1. Parábola; vértice (0, 0), foco (0, 3), directriz x = - 3 2. Hipérbola; centro (0, 0), vértices (3, 0) y (- 3, 0), focos (5, 0) y (- 5, 0), asíntotas y = { $\frac{4}{3}$x 3. Elipse; centro(0, 0), vértices (6, 0) y (- 6, 0), focos (323, 0) y (- 323, 0)

4. Parábola; vértice (3, 1), foco (5, 1), directriz x = 1 5. 2 $\frac{x2}{}$ - $\frac{y2}{8}$ = 1: Hipérbola; centro 10, 02, vértices 1 22, 02 y 1 - 22, 02, focos 1 210, 02 y 1 - 210, 02, asíntotas y = 2x e y = - 2x 6. Parábola; vértice ¢ - $\frac{3}{2}$, 3≤, foco ¢ - $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ ≤, directriz y = $\frac{7}{2}$

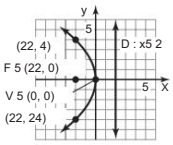
7. Hipérbola; centro (- 1, 1), vértices (3, 1) y (- 5, 1), focos (- 6, 1) y (4, 1), asíntotas $\frac{x+1}{4}$ = { o $\frac{y - 1}{3}$ 3x - 4y + 7 = 0; 3x + 4y = 1

8. Elipse; centro (1, - 3), vértices (1, 223 - 3) y (1, - 223 - 3), focos (1, 22 - 3) y (1, - 22 - 3)

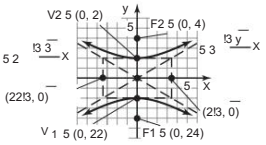
9. Parábola; vértice ¢ 1$\frac{}{2}$, - 1≤, foco ¢3 $\frac{}{2}$, - 1≤, directriz x = - $\frac{1}{2}$

10. $\frac{1x - 12^2}{4}$ + $\frac{1 año + 12^2}{9}$ = 1: Elipse; centro 11, - 12, vértices 11, 22 y 11, - 42, focos 11, - 1 + 252 y 11, - 1 - 252

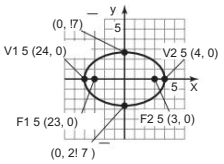
11. y2 = - 8x



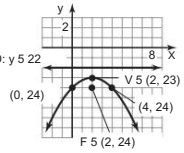
12. $\frac{y2}{4}$ - $\frac{x2}{12}$ = 1



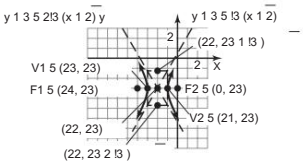
13. $\frac{x2}{16}$ + $\frac{y2}{7}$ = 1



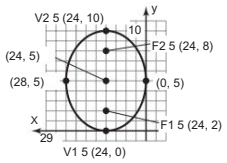
14. 1x - 22 ^{2} = - 41 años + 32



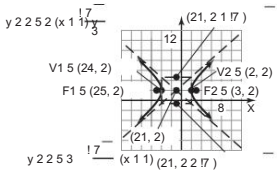
15. 1x + 22 ^{2} - $\frac{1 año + 32^2}{3}$ = 1



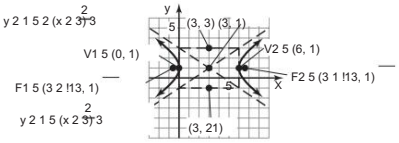
$\frac{1x + 42^2}{dieciséis}$ + $\frac{1 año - 52^2}{25}$ = 1



17. $\frac{1x + 12^2}{9}$ - $\frac{1 año - 22^2}{7}$ = 1



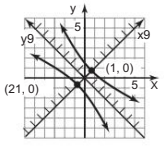
18. $\frac{1x - 32^2}{9}$ - $\frac{1 año - 12^2}{4}$ = 1



19. Parábola 20. Elipse
21. Parábola 22. Hipérbola
23. Elipse

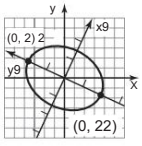
2 24.x ' - $\frac{y' ^2}{9}$ = 1

Hipérbola
Centro en el origen
Eje transversal el eje x'@
Vértices en 1 {1, 02



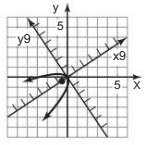
25. $\frac{X' ^2}{2}$ + $\frac{y' ^2}{4}$ = 1

Elipse
Centro en el origen
Eje mayor el eje y'@
Vértices en 10, {22

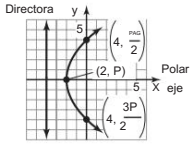


26. y' ^{2} = - $\frac{4213}{13}$X'

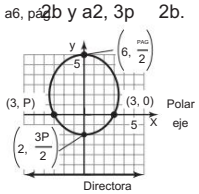
Parábola
Vértice en el origen
Centrarse en el eje x'@ en a - $\frac{213}{13}$, 0b



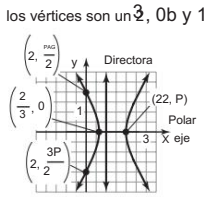
27. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar 4 unidades a la izquierda del polo; el vértice es 12, p2.



28. Elipse; la directriz es paralela al eje polar 6 unidades por debajo del polo; los vértices son a6, pá2b y a2, 3p 2b.



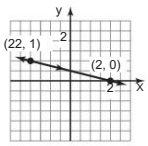
29. Hipérbola; la directriz es perpendicular al eje polar 1 unidad a la derecha del polo; los vértices son un 3, 0b y 1 - 2, p2.



Machine Translated by Google

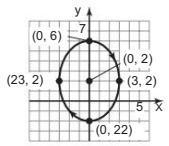
30. x2 - 4y - 4 = 0 31. 3x2 - y2 - 8x + 4 = 0

32.



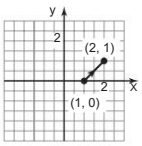
x + 4y = 2

33.



$\frac{x2}{9} + \frac{1 \text{ año} - 22^2}{\text{décadas}} = 1$

34.



1 + y = x

35. x1t2 = t, y1t2 = - 2t + 4, - q 6 t 6 q

x1t2 = $\frac{t - 4}{-2}$, y1t2 = t, - q 6 t 6 q

36. x1t2 = 4 cosa p $\frac{}{2}$ tb, y1t2 = 3 sina p $\frac{}{2}$ tb, 0… t … 4 37. $\frac{x2}{5} - \frac{y2}{}$ = 1 38. La elipse 4 16 $\frac{x2}{} + \frac{y2}{7} = 1$

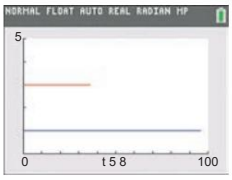
39 $\frac{1}{4}$ pies o 3 pulgadas 40 19,72 pies, 18,86 pies, 14,91 pies 41 450 pies

42. (a) Tren: x1 1t2 = t $\frac{3}{2}^2$, y1 = 1

María: x2 1t2 = 61t - 22, y2 = 3

(b) María no quiere tomar el tren.

(C)



43. (a) x1t2 = 180 cos 35°2t

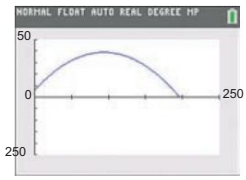
y1t2 = - 16t ^{2} + 180 sen 35°2t + 6

(b) 2,9932 s

(c) 1,4339 s; 38,9 pies

(d) 196,15 pies

(mi)



Prueba de capítulo (página 752)

1. Hipérbola; centro: 1 - 1, 02; vértices: 1 - 3, 02 y 11, 02; focos: 1 - 1 - 213, 02 y 1 - 1 + 213, 02; asíntotas: y = - $\frac{3}{2}$1x + 12 y y = $\frac{3}{2}$1x + 12

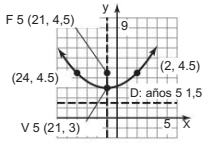
2. Parábola; vértice: a1, - 2 b; foco: a1, 3 $\frac{}{2}$b; directriz: y = - $\frac{5}{2}$

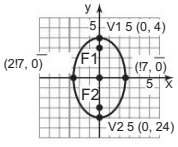
3. Elipse; centro: 1 - 1, 12; focos: 1 - 1 - 23, 12 y 1 - 1 + 23, 12; vértices: 1 - 4, 12 y 12, 12

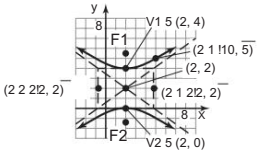
4. 1x + 12 ^{2} = 61 años - 32

5. $\frac{x2}{7} + \frac{y2}{\text{décadas}} = 1$

6. $\frac{1 \text{ año} - 22^2}{4} - \frac{1x - 22^2}{8} = 1$

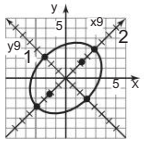




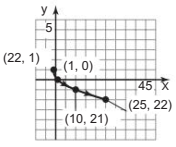


7. Hipérbola 8. Elipse 9. Parábola

2 10.x ′ + 2y′ ^{2} = 1. Esta es la ecuación de una elipse con centro en 10, 02 en el plano x′y′@. Los vértices están en 1 - 1, 02 y 11, 02 en el plano x′y′@.



11. Hipérbola; 1x + 22 ^{2} - $\frac{y2}{3}$ = 1 12. y = 1 - B x + 2 $\frac{}{3}$



13. El micrófono debe ubicarse a pies de la base del reflector, a lo largo de su eje de simetría. $\frac{2}{3}$

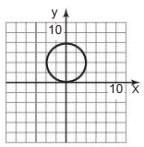
Revisión acumulativa (página 753)

1. - 6x + 5 - 3h 2. e - 5, - $\frac{1}{3}$, 2 f 3. 5x - 3 … x … 26 o [- 3, 2]

4. (a) Dominio: 1 - q, q 2; rango: 12, q 2 (b) y = log3 1x - 22; dominio: 12, q 2; rango: 1 - q, q 2 5. (a) 5186 (b) 12, 184

6. (a) y = 2x - 2 (b) 1x - 22 ^{2} + y2 = 4 (c) $\frac{x2}{9} + \frac{y2}{4} = 1$ (d) y = 21x - 12 ^{2} (e) y2 - = 1 (f) y = 4x $\frac{x2}{3}$

7. tu = $\frac{\text{pag}}{12}$ { pk, k es cualquier número entero; tu = $\frac{5p}{12}$ { pk, k es cualquier número entero 8. u = $\frac{\text{pag}}{6}$ 9. r = 8 sen u



10. e x ` x ≠ $\frac{3p}{4}$ { pk, k es un número entero f 11. 522,5°6 12. y = $\frac{x2}{5}$ + 5

Machine Translated by Google

CAPÍTULO 11 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

11.1 Evalúe su comprensión (página 766)

3. F 4. consistente; independiente 5. (3, - 2) 6. consistente; dependiente 7. b 8. a 10. e 2 # 2 - 1 - 12 = 5 5 # 2 + 21 - 12 = 8

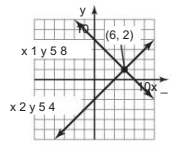
11. $\frac{1}{2} = 4$ re 3 # 2 - 4 # 2 $\frac{1}{2}$

1 # 4 + 1 = 3 2 14.c 4 - 1 = 3

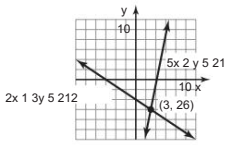
1 - 1 - 12 - 2 = 0 16. c 3 # 1 + 3 1 2 1 1 2 1 2 2 3 # 2 2 = 4 - 8

2 - 31 - 22 + 2 = 10 18. c 3 5 # 2 2 + 3 2 1 - 2 2 2 + 2 # 2 = 8

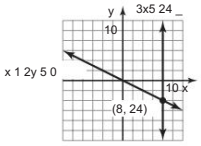
20. x = 6, y = 2; 16, 22



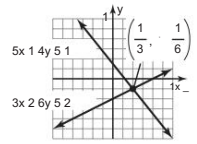
21. x = 3, y = - 6; 13, - 62



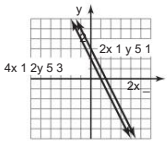
24. x = 8, y = - 4; 18, - 42



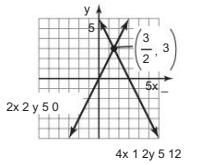
1 26. x = , y = - 3 6 $\frac{1}{3}$; un 1 $\frac{1}{6}$ segundo



27. Inconsistente



3 30. x = 2, y = 3; un 3, 3b



31. 51x, y2 x = 4 - 2y, y es cualquier número real6, o e 1x, y2 ` y = ; un 2 $\frac{4 - x}{2}$, x es cualquier número real f 34. x = 1, y = 1; 11, 12 36. x = $\frac{3}{2}$, y = 1; un 3, 1b

y = 3; 14, 32 40. x = , y = - 3 6 2 5 38. x = 4, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{6}$ b 42. x = $\frac{1}{5}$ 3 y = $\frac{1}{5}$; un 1, $\frac{1}{3}$ b 44. x = 6, y = 3, z = - 1; 16, 3, - 12

45. x = 2, y = - 1, z = 1; 12, - 1, 12 47. Inconsistente 50. 51x, y, z2 x = 5z - 2, y = 4z - 3; z es cualquier número real6 52. Inconsistente

1 54. x = 1, y = 3, z = - 2; 11, 3, - 22 56. x = - 3, y = 61. 5 lb 63. Teléfono $\frac{1}{2}$, z = 1; un - 3, $\frac{1}{2}$, 1b 57. Longitud 75 pies; ancho 25 pies 59. Comercial: 17; no comercial: 52

inteligente: $720; tableta: $415,00 66. Velocidad promedio del viento 20 mph; velocidad aérea promedio 220 mph 67. 140 juegos de $10 y 60 juegos de $45

5 69. $19,92 72. Mezcle 20 mg del primer compuesto con 50 mg del segundo. 73. a = 4 $\frac{7}{-4}$, segundo = , c = 2 76. Y = 8000, r = 0,06 78. I1 = $\frac{15}{79}$, yo2 = $\frac{70}{79}$, I3 = $\frac{55}{79}$

80. 160 asientos de orquesta, 410 principales y 230 de balcón 81. 1,5 pollo, 2 maíz, 2 leche

83. Si x = precio de las hamburguesas, y = precio de las papas fritas y z = precio de las colas,

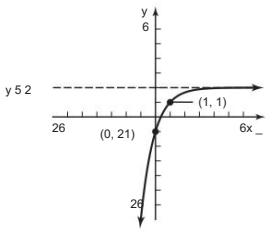
x $2.13		$2.01	$1.86
$ 0,89		$0.93	$0.98
z	$0.62	$0.74	$0,89

41 1 z, - z, y = + 60 3 +0,60 … z … +0,90. entonces x = 2,75

No hay suficiente información:

85. Le tomará a Beth 60 h, a Bill 24 h y a Edie 40 h. 87. x = $\frac{a}{c}$, y = ba, z = $\frac{b}{c}$; una $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ b

91.



92. (a) 212x - 32 3 1x3 + 52 110x3 - 9x2 + 202 (b) 713x - 52 -1/2 1x + 32 -3/2 93. pag 9

94. 2acos5p + isin5p 6 b = 2ei # 5p>6 95. 56, 12, 18, 24, 306 96. = $\frac{x2}{100} + \frac{y2}{36} = 1$

6 97. zw = 12acos7p 12 12b = 12ei # 7p>12; $\frac{z}{w}$ 3acos11p 12 + peco $\frac{11p}{12}$ b = 3ei # 11p>12

98. $4709.29 99. - 3 pag 100. 31,5 unidades cuadradas

11.2 Evalúe su comprensión (página 780)

matriz 2. aumentada 3. tercero; quinto 4. b 5. T 6. c 8. c 1 - 5 6 d 4 3 2 5 1. - 0,04 - 6 2 2 d 0,10 2 0,06 9. e 2 3 - 2 d 12. c 0,01

3 3 0 5 1 - 1 3 - 2 0 2 18. 2 1 2 - 1 - 3 4 0 5

14.C 1 - 1 1 1 2 3 10 2 16. C 1 5 3 - 1 3 2 1S 19. e x2 - 5y2 = 15 2 1 2 - 3 1 ` - 2 9 d

D 1 1 - 1 1 4 10 0 toneladas

Machine Translated by Google

22. • x- 5y + 4z = 6 132 ; C 12-2403-3 21 S 24. c x - 3y + 6z = 6 132 ; C 15-1003- 6 - 12S

26. c 5x4x3y + yz1=4z2 =12 132 ; C0 - 9 16 3 22S 28. e y x = 5 1 Coherente; x = 5, y = - 1 o 15, - 12

29. c x = 1 Inconsistente

32. c x + 2z = 1 Coherente:

34.c _ x3 + 2x4 = 3 Coherente:

36.c _ Coherente:

38. d x1 + x4 = 2 Coherente:

c x es cualquier número real o 51x, y, z2 x = - 1 - 2z, y = - 2 + 4z, z es cualquier real número 6

c x4 es cualquier número real o 51x1, x2, x3, x42x1 = 1, x2 = 2 - x4, x3 = 3 - 2x4, x4 es cualquier número real6

c x1, x2, x3, x4 son números reales o 51x1, x2, x3, x42 x1 = 2 - 4x4, x2 = 3 - x3 - 3x4, x3, x4 son cualquier número real6

c x4 es cualquier número real o 51x1, x2, x3, x42 x1 = - 2 - x4, x2 = 2 - 2x4, x3 = x4, x4 es cualquiera número real6

39. x = 6, y = 2; 16, 22 42. x = , y = 3 ; un 3, b 44. x = 4 - 2y, y es cualquier número real; 5 1x, y2 x = 4 - 2y, y es cualquier número real6

46. x = , y = 1; un 3, 1b 48. x = , y = ; un 4, 1b 49. x = 8, y = 2, z = 0; 18, 2, 02 52. x = 1, y = 2, z = - 1; 11, 2, - 12

54. Inconsistente 55. x = 5z - 2, y = 4z - 3, donde z es cualquier número real; 5 1x, y, z2 x = 5z - 2, y = 4z - 3, z es cualquier número real6

58. Inconsistente 60. x = 1, y = 3, z = - 2; 11, 3, - 22 62. x = - 3, y = 2 , z = 1; un - 3, , 1b 64. x = , y = 3 , z = 1; un 3, , 1b

66. x = 1, y = 2, z = 0, w = 1; 11, 2, 0, 12 68. y = 0, z = 1 - x, x es cualquier número real; 5 1x, y, z2 y = 0, z = 1 - x, x es cualquier número real6

70. x = 2, y = z - 3, z es cualquier número real; 5 1x, y, z2 x = 2, y = z - 3, z es cualquier número real6 71. x = , y = z = 18, 9 ; un 9, 18, segundo

74. x = - z - 5 w, y = - 5 + z + w, donde z y w son números reales cualesquiera;

e 1x, y, z, w2 ` x = - z - w, y = - 5 + z + w, z y w son números reales f

76. y = - 2x2 + x + 3 78. f(x) = 2x3 - 2x2 + 8 80. 1 filete de salmón, 2 huevos al horno y 1 calabaza bellota

81. $2000 en letras del tesoro, $17,000 en bonos del tesoro, $1000 en bonos corporativos 84. 2 Deltas, 9 Betas y 13 Sigmas 85. I1 = 1, I2 = 3, I3 = 8, I4 = 4

88. (un)

Cantidad invertida en		
8%	12%	dieciséis%
0	10.000	5000
1000	8000	6000
5000	0	10.000

(b)

Cantidad invertida en		
8%	12%	dieciséis%
10.000	10.500	0
15.000	0	5000
12.500	5000	2500

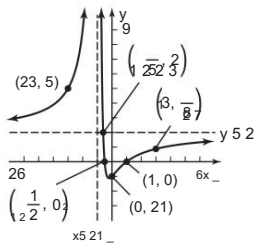
(c) Todo el dinero invertido al 8% proporciona $2400, más de lo que se requiere

90.

Suplemento 1	Suplemento 2	Suplemento 3
150 mg	25 mg	0 mg
148 mg	20 mg	8 mg
146 mg	15 mg	16 mg
144 mg	10 mg	24 mg

94. 5x 0 - 1 6 x 6 66, o 1 - 1, 62

95.



Machine Translated by Google

96. 5x x es cualquier número real6, o 1 - q, q 2 97. 2.42 98. 27y12 $\frac{8x3}{}$ 99, $\frac{1 \text{ año} - 52^2}{16} - \frac{1x - 42^2}{9} = 1$

100, 18 - 18 23i; 36ei # 5p>3 101. $3007.44 102. 2 $\overline{\text{pag}}$ 103. $\frac{2x + h}{x2\ 1x + h2^2}$

11.3 Evalúe su comprensión (página 792)

1. ad - bc 2. ` 5 - 3 - `3 3. F 4. F 5. F 6. a 7. 22 10. - 2 11. 10 14. - 26 15. x = 6, y = 2; 16, 22 18. x = 3, y = 2; 13, 22

20. x = 8, y = - 4; 18, - 42 22. x = - 3, y = 5; 1 - 3, 52 24. No aplicable 26. x = , y = 2 $\frac{1}{}$ $\frac{3}{4}$; un $\frac{3}{2}$, 4b 28. x = 5b $\frac{1}{10}$, 5 y = $\frac{2}{}$; un $\frac{2}{10}$,

30. x = $\frac{3}{2}$, y = 1; un $\frac{3}{2}$, 1b 32. x = $\frac{4}{}$, y = 3 $\frac{1}{5}$; un $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ b 33. x = 1, y = 3, z = - 2; 11, 3, - 22 36. x = - 2, y = $\frac{1}{3}$, z = 1; un - 2, $\frac{1}{3}$, 1b

38. No aplicable 40. x = 0, y = 0, z = 0; 10, 0, 02 42. No aplicable 44. - 4 45. 12 48. 8 50. 8 52. - 5 54. 11 $\frac{13}{}$ 56. 0 o - 9

57. 1y1 - y22x - 1x1 - x22y + 1x1y2 - x2y12 = 0

$$1y1 - y22x + 1x2 - x12y = x2y1 - x1y2$$

$$1x2 - x12y - 1x2 - x12y1 = 1y2 - y12x + x2y1 - x1y2 - 1x2 - x12y1$$

$$1x2 - x12\ 1y - y12 = 1y2 - y12x - 1y2 - y12x1$$

$$y - y1 = x2 - \frac{y2 - y1}{x1}\ 1x - x12$$

59. El triángulo tiene un área de 5 unidades cuadradas. 61. 50,5 unidades cuadradas 63. (x + 2)2 + (y - 4)2 = 25

65. Si a = 0, tenemos

por = s

cx + dy = t

Por lo tanto, $y = \frac{s}{b}$ y

$x = \frac{t - dy}{c} = \frac{\text{tuberculosis - ds}}{\text{antes de Cristo}}$

Usando la regla de Cramer, obtenemos

$x = \frac{\text{sd - tuberculosis}}{\text{- antes de Cristo}} = \frac{\text{tuberculosis - sd}}{\text{antes de Cristo}}$

$y = \frac{\text{- sc}}{\text{- antes de Cristo}} = \frac{s}{b}$

Si b = 0, tenemos

hacha = s

cx + dy = t

Dado que D = ad ≠ 0, entonces
a ≠ 0 y d ≠ 0.

Por lo tanto, $x = \frac{s}{a}$ y

$y = \frac{t - cx}{d} = \frac{ta - cs}{\text{anuncio}}$

Usando la regla de Cramer, obtenemos

$x = \frac{\text{Sistema del Sur}}{\text{anuncio}} = \frac{s}{a}$

$y = \frac{ta - cs}{\text{anuncio}}$

Si c = 0, tenemos

hacha + por = s

dy = t

Dado que D = ad ≠ 0, entonces
a ≠ 0 y d ≠ 0.

Por lo tanto, $y = \frac{t}{}$ y d

$x = \frac{s - por}{a} = \frac{sd - bt}{\text{anuncio}}$

Usando la regla de Cramer, obtenemos

$x = \frac{sd - bt}{\text{anuncio}}$

$y = \frac{en}{\text{anuncio}} = \frac{t}{d}$

Si d = 0, tenemos

hacha + por = s

cx = t

Dado que D = - bc ≠ 0, entonces
b ≠ 0 y c ≠ 0.

Por lo tanto, $x = \frac{t}{c}$ y

$y = \frac{s - hacha}{b} = \frac{sc - en}{\text{antes de Cristo}}$

Usando la regla de Cramer, obtenemos

$x = \frac{\text{- tuberculosis}}{\text{- antes de Cristo}} = \frac{t}{c}$

$y = \frac{en - sc}{\text{- antes de Cristo}} = \frac{sc - en}{\text{antes de Cristo}}$

67. $\begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ 3a21 & a22 & ka21 \\ a31 & a32 & ka22 \\ & & ka23 \end{matrix}$ a33 3 = - ka21 1a12a33 - a32a132 + ka22 1a11a33 - a31a132 - ka23 1a11a32 - a31a122

$$= k[- a21\ 1a12a33 - a32a132 + a22\ 1a11a33 - a31a132 - a23\ 1a11a32 - a31a122] = k\ 3\ a11\ a12\ \begin{matrix} a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}\ 3$$

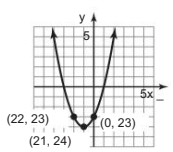
69. $\begin{matrix} a21 & a22 & a23 \\ 3\ a11 & a31 & ka21\ a12 + ka22\ a13 + ka23 \end{matrix}$ a33 3 = 1a11 + ka212 1a22a33 - a32a232 - 1a12 + ka222 1a21a33 - a31a232 + 1a13 + ka232 1a21a32 - a31a222

= a11a22a33 - a11a32a23 + ka21a22a33 - ka21a32a23 - a12a21a33 + a12a31a23
- ka22a21a33 + ka22a31a23 + a13a21a32 - a13a31a22 + ka23a21a32 - ka23a31a22

= a11a22a33 - a11a32a23 - a12a21a33 + a12a31a23 + a13a21a32 - a13a31a22

$$= a11\ 1a22a33 - a32a232 - a12\ 1a21a33 - a31a232 + a13\ 1a21a32 - a31a222 = 3\ a11\ a12\ \begin{matrix} a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}\ 3$$

70.v = 9i - 4j; 297 71. { $\frac{1}{2}$, { , $\frac{5}{2}$, {1, {2, {5, {10

72. 

73. 0 74. 522acos 3p $\frac{}{4}$ + isin $\frac{3p}{}$ 4b; 522ei # 3p > 4 75.f -1 1x2 = 5x-3 + 1 76. 425

77. 8x3 - 60x2 + 150x - 125 78. $\frac{x - 93}{x1\ 2x + 7 + 102}$ 79. y = $\frac{5}{2}$x - 22

Machine Translated by Google

Problemas históricos (página 808)

1. (a) 2 - 5i · c 2 - 5 2 5d , 1 + 3i · c 1 3 - 3 1 d (b) c 2 2a 1 3 - 3 1 5 d = c 17 1 d (c) 17 + yo (d) 17 +

a2 + b2 0

2. cabdc a - ba d = c 0 b2 + a2 d ; el producto es un número

3. (a) x = k1ar + bs2 + l1cr + ds2 = r1ka + lc2 + s1kb + ld2
y = m1ar + bs2 + n1cr + ds2 = r1ma + nc2 + s1mb + nd2 real. (b) A = + cmka + nbc + kbod + dd ma

11.4 Evalúe su comprensión (página 808)

1. cuadrado 2. T 3. F 4. inversa 5. T 6. A-1 B 7. a 8. d 9. c 4 4 - 5 4 d 10. c 0 12 - 20 24 d 11. 12 13.c - 8 7 - 15 22d 15. c 2 8 2 3 9d

2 22 - 18 22 34 - 22 - 18 10 - 14 7 - 12

17. C 3 1 0 14 - 14 28 S 20. No definido 22. C 15 21 11 7 16 22 S 24. c 25 20 9 14 26. C - 13 D 1 17 - 7 34 S 27. c - 2 4 2 8 2 1 4 6 d 30. c 5 14 9 16 d

32. No definido 34. C 9 4 27 20 S 36. c 1 - 1 34 13 - 1 2 días 37. £ 11 5 2 3§ 40. - 1 - una T 1 a 2 — 42. C - 3 - 3 5 - 2 S - 2 4 2 - 1 1 44. 5 7 1 7 3 7 9 7 1 7 4 7 3 7 2 7 1 7V F -

46. x = - 4, y = 7; 1 - 4, 72 48. x = - 5, y = 10; 1 - 5, 102 49. x = 2, y = - 1; 12, - 12 52. x = 1 2, y = 2; un 2, 2b 54. x = - 2, y = 1; 1 - 2, 12

56. x = , y = 3 a ; un 2 , 3 a b 58. x = 5, y = - 2, z = - 3; 15, - 2, - 32 60. x = 1 1 — , y = - 2 2 — , z = 1; un 2 , 1 2 1 , 1b

62. x = - , y = 34 7 — 85 7 , z = 12 7 ; a - 34 7 , 85 7 , 12 7 b 64. x = 1 — , y = 1, z = 2 3 ; un 3 2 , 1 — 66. c 4 2 2 1 2 1 0 3 b 0 1 d SC 1 2 1 3 1 1 2 0 4 0 1 2 1 4 0 1 2 0 1 SSD 1 0 0 4 1 2 1 cuchara

68. c 15 3 1 1 10 2 2 1 0 1 0 1 d S 0 1 § SD 1 0 0 4 1 10 2 3 1 1 5 15 0 1 5 15 0 2 3

70.C -3 1 1 - 1 1 - 4 - 7 0 1 0 2 5 3 1 0 0 0 0 1 SSC 1 - 3 2 5 1 - 4 - 7 0 1 0 T 1 - 1 3 0 1 0 0 1 0 CSS 1 0 7 2 5 0 - 6 - 12 0 1 - 1 14 † 1 0 1 3S

71. C - 0,02 0,02 - 2,05 S 0 1 0 1 0 1 2 1 0 - 1 6 — 1 6 1 7 0 3 7 VSF 1 2 5 0 0 6 0 0 1 2 1 0 - 1 6 — 1 6 1 7 1 6 11 42V 0,06 0,02 - 0,57 0,41 74. - 0,02 0,05 0,03 - 0,03 0,02 0,01 - 0,04 0,00 0,01 D 0,02 - 0,04 - 0,01 0,07 0,06 toneladas

76. x = 4,54, y = - 6,42, z = - 24,08; 14,54, - 6,42, - 24,082 78. x = - 1,10, y = 2,54, z = 8,30; 1-1,10, 2,54, 8,302

5 80. x = - 5, y = 7; 1 - 5, 72 82. x = - 4, y = 2, z = 5 2 ; a - 4, 2, 2 b 84. Inconsistente;

z - 5 5 5 86. x = - z + , y = 1 1 1 — — — 6 5 , donde z es cualquier número real; e (x, y, z) x = 1 5 z + 1 1 , y = z - 5 —5 — 6 5 , z es cualquier número real f

- 87. (a) A = J 9 6 R ; B = J 71,00 158,30 R (b) AB = J 2063,7 1375,8 R ; La matrícula total de Nikki es $2063,7 y la matrícula total de Joe es $1375,8.

89. a) J 250 750 600 650 550 800 Rb) C 15 9 4 S (c) J 12.000 17.900 R (d) [0,10 0,05] (e) $2185,00

Machine Translated by Google

91. (a) K-1 = ≥ 1 0 - 1 - 1 1 1 ¥ (b) M = 1 20 8 9 19 ≥ 13 6 21 14 ¥ (c) Las matemáticas son divertidas = 234 X3 6 - 2 - 7 d 5

95. (a) B3 = A + A2 + A3 = 5 3 2 5 4 4 2 2 4 2 2 2 3 2 3 mil 2 3 4 2 5 1 2 3 U ; Sí, todas las páginas pueden llegar a todas las demás páginas con 3 clics. (b) Página 3

97. (a) (523 - 4, 5 + 423) (b) R-1 = 3 2 1 2 0 - 1 2 3 2 0 mi 0 0 1 U ; Esta es la matriz de rotación necesaria para que las coordenadas traducidas vuelvan al coordenadas originales.

99. a = - 2 1, segundo = 1 ; un = - 2 1 2, segundo = 1 2; a = 0, b = 0; a = - 1, b = 0 104. x6 - 4x5 - 3x4 + 18x3

105.v # w =-5; tu = 180° 106. 50, 36 107. 2u2 - 1 tu 108.4 + 423i 109.x2 - x2 + 8x - 9 9 o 1x + 92 1x - 12 1x - 32 1x + 32

110. 5x x … 5, x ≠ - 36 111. 3x1x + 42 1x + 62 1x - 62 112. 2p + 4 ≈ 10.28 unidades cuadradas

113. (f gramo)(x) = B25a 25 segundo xb - 4 2 2 5 segundos x = 24 seg2 x - 4 2 5 segundos x = 241seg2 x - 12 2 5 segundos x = 24 bronceado2 x 2 5 segundos x = 2 bronceados x 2 5 segundos x = 2 pecado x porque x , 5 porque x 2 = 5 pecado x

11.5 Evalúe su comprensión (página 819)

5. Adecuado 8. Incorrecto; 1 + 9 x2 - 4 10. Incorrecto; x - 1 + 5x - 6 x2 + 2x - 15 12. Correcto 13. Incorrecto; 5x + 22x - 1 x2 - 4

16. Incorrecto; 1 + - 21x - 62 1x + 42 1x - 32 17. + - 4 x 4 x - 1 20.x 1 + - x x2 + 1 - 1 x - 1 + 2 x - 2 23. 1 4 x + 1 + 3 4 x - 1 + 1 2 1x - 12 2

25. 1 12 x - 2 + - 1 12 1x + 42 x2 + 2x + 4 28. 1 4 x - 1 + 1 4 1x - 12 2 + - 1 4 x + 1 + 1 4 1x + 12 2 30. + - 5 x + 2 5 x + 1 + - 4 1x + 12 2 32. 1 4 x + 1 x2 + - 1 4 1x + 4) x2 + 4

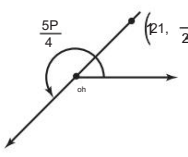
34. 2 3 x + 1 + 1 3 1x + 12 x2 + 2x + 4 36. 2 7 3x - 2 + 1 7 2x + 1 38. 3 4 x + 3 + 1 4 x - 1 39. + 1 x2 + 4 2x - 1 1x2 + 42 2 42. - 1 x + 2 x -3 + - 1 x + 1

44. 4 + x -2 - 3 x - 1 + - 1 1x - 12 2 46. x 1x2 + 162 2 + - 16x 1x2 + 162 3 48. - 8 7 2x + 1 + 4 7 x - 3 50. - 2 9 x + - 1 3 x2 + 1 6 x - 3 + 1 18 x + 3

52. x - 2 + 10x - 11 ; x2 + 3x - 4x + 4 51 5 + - 1 5 x - 1 ; x - 2 + 51 5 x + 4 - 1 5 x - 1 54. x - x x2 + 1

56. x2 - 4x + 7 + + ; x2 + 4x + 4 - 11x - 32 x + 2 - 11 - 10 1x + 22 2 ; x2 - 4x + 7 - x + 2 11 - 10 1x + 22 2

58.x + 1+ 2x3 + x2 - x + 1 x4 - 2x2 + 1 x + 1 , 1 + 1 4 1x + 12 2 + 1 x - 1 + 3 4 1x - 12 2 ; x + 1 + 1 x + 1 + 1 4 1x + 12 2 + 1 x - 1 + 3 4 1x - 12 2

60. 2 ex + 2 + 1 ex - 1 61. 3,85 años 62. - 2 63. 1 64. ¢ 22 2 , 22 2 ≤;  65. Impar 66. f -1 1x2 = log8 1x + 42 + 3

Machine Translated by Google

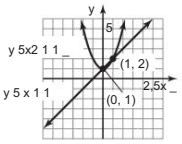
67. $\frac{y2}{25} - \frac{x2}{144} = 1$ 68. e x ` x Ú 5 f o c 6 $\frac{6}{5}$ ’ qb 69. D = $\frac{2x - 4 años}{4x - 2y + 1}$ 70. y = $\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$

Problema histórico (página 826) x

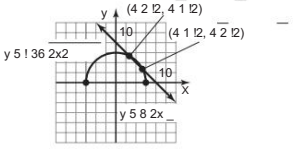
= 6 unidades, y = 8 unidades

11.6 Evalúe su comprensión (página 826)

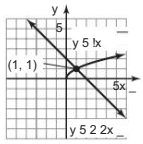
6.



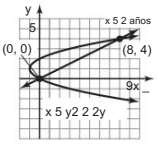
8.



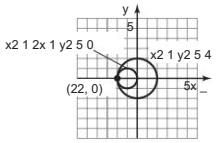
9.



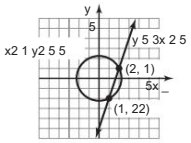
12.



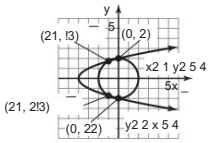
13.



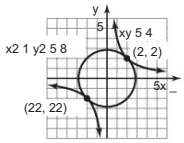
15.



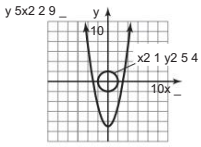
18.



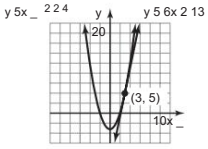
20.



22. Sin puntos de intersección



24.



26. x = 1, y = 4; x = - 1, y = - 4; x = 222, y = 22; x = - 222, y = - 22 o 11, 42, 1 - 1, - 42, 1222, 222, 1 - 222, - 222

28. x = 0, y = 2; x = - 1, y = - 1 o 10, 22, 1 - 1, - 12 29. x = 0, y = - 1; x = $\frac{5}{2}$, y = - 2 $\frac{7}{2}$ o 10, - 12, un $\frac{5}{2}$ ’ $\frac{7}{2}$ segundo

32. x = $\frac{1}{3}$, y = $\frac{9}{2}$ 3 $\frac{1}{2}$ o un $\frac{3}{2}$ ’ $\frac{9}{2}$ b, a3, 1 segundo

34. x = 3, y = 2; x = 3, y = - 2; x = - 3, y = 2; x = - 3, y = - 2 o 13, 22, 13, - 22, 1 - 3, 22,1 - 3, - 22

36. x = $\frac{1}{2}$, y = 2 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$, y = - ; x = $\frac{3}{2}$ y = ; x = - , y = - 2 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ o un $\frac{3}{2}$ ’ $\frac{3}{2}$ b, un $\frac{3}{2}$ ’ $\frac{3}{2}$ b, a - $\frac{1}{2}$ ’ $\frac{3}{2}$ b, a - $\frac{1}{2}$ ’ $\frac{3}{2}$ segundo

38. x = 22, y = 222; x = - 22, y = - 222 o 122, 2222, 1 - 22, - 2222 40. No existe una solución real.

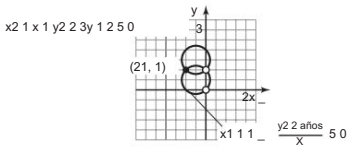
42. x = $\frac{8}{3}$, y = $\frac{2210}{3}$; x = $\frac{8}{3}$, y = $\frac{2210}{3}$; x = $\frac{8}{3}$, y = - $\frac{2210}{3}$; x = - $\frac{8}{3}$, y = - $\frac{2210}{3}$ o un $\frac{8}{3}$ ’ $\frac{2210}{3}$ b, a - $\frac{8}{3}$ ’ $\frac{2210}{3}$ b, un $\frac{8}{3}$ ’ - $\frac{2210}{3}$ b, a - $\frac{8}{3}$ ’ - $\frac{2210}{3}$ b 44. x = 1, y = $\frac{1}{2}$; x = - 1, y = ; x = 1, y = -; x = - 1, y = - 2 $\frac{1}{2}$ o a1, 1 2b, a - 1, 2b, a1, - 2b, a - 1, - 2b

46. No existe ninguna solución real.

47. x = 23, y = 23; x = - 23, y = - 23; x = 2, y = 1; x = - 2, y = - 1 o 123, 232, 1 - 23, - 232, 12, 12, 1 - 2, - 12

49. x = 0, y = - 2; x = 0, y = 1; x = 2, y = - 1 o 10, - 22, 10, 12, 12, - 12 52. x = 2, y = 8 o 12, 82 54. x = 81, y = 3 o 181, 32

55.

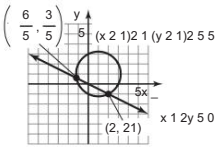


58. x = 0,48, y = 0,62 60. x = - 1,65, y = - 0,89

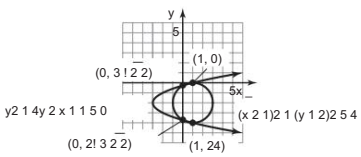
62. x = 0,58, y = 1,86; x = 1,81, y = 1,05; x = 0,58, y = - 1,86; x = 1,81, y = - 1,05

64. x = 2,35, y = 0,85

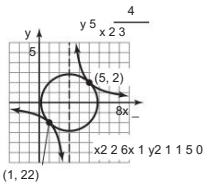
66.



68.



70.



71, 5 y 7; - 5 y - 7 73. 4 y 4; - 4 y - 4 75. - y - 8 $\frac{1}{7}$ 77. $\frac{11}{3}$ 80. 7 pulg. por 4 pulg. 82. 5 cm y 7 cm 83. tortuga: 4,5 m/h, liebre 5 m/h

Machine Translated by Google

85, 19 cm por 11 cm 87, x = 20 pies; y = 10 pies 89. y = 4x - 4 92. y = 2x + 1 94. y = - $\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ 96. y = 2x - 3

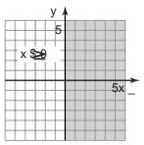
97.r1 = _ $\frac{-b + 2b2 - 4ac}{2a}$; r2 = $\frac{-b - 2b2 - 4ac}{2a}$ 100. l = $\frac{P + 2P2 - 16A}{4}$; w = $\frac{P - 2P2 - 16A}{4}$ 103. mi - 3 - 265, $\frac{-3 + 265}{7}$ F

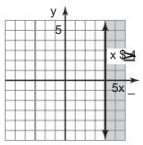
104. y = - $\frac{2}{}$x - 3 105. sen u = - 5 $\frac{7}{25}$; porque tu = - $\frac{24}{25}$; tan u = $\frac{7}{24}$; csc tu = - $\frac{25}{7}$; segundo u = $\frac{25}{24}$ 106. ≈ - 15,8° 107. 1x + 32 ^{2} + 1 año - 42 ^{2} = 100

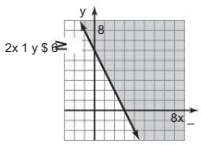
108. 5x - 3 6 x 6 76 o 1 - 3, 72 109. y = - 225 - 1x - 42 ^{2} 110. 2x2 - 20x + 49 111. - 1x - $\frac{24}{82}$ 1x + h - 82 112. - $\frac{48x + 15}{12x - 52}^{10}$

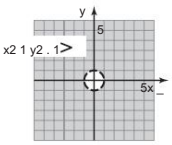
11.7 Evalúe su comprensión (página 835)

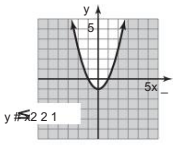
7. guiones; sólido 8. semiplanos 9. F 10. b

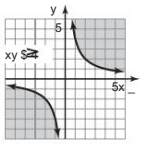
12. 

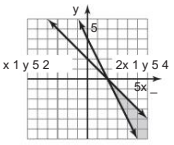
13. 

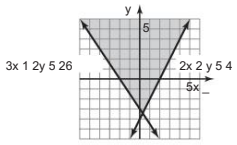
15. 

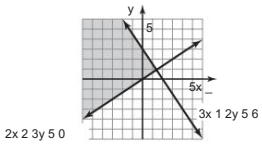
17. 

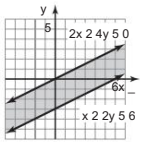
20. 

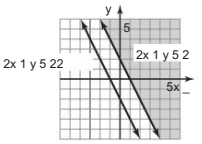
22. 

23. 

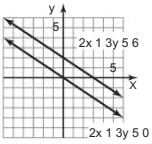
26. 

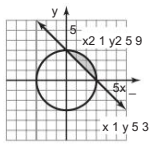
28. 

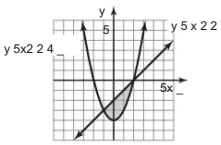
29. 

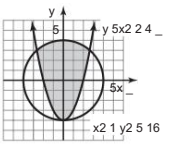
32. 

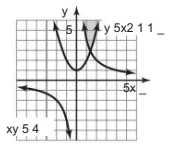
34. Sin solución



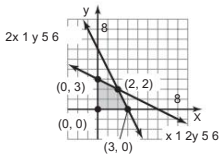
36. 

37. 

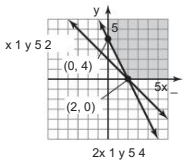
40. 

42. 

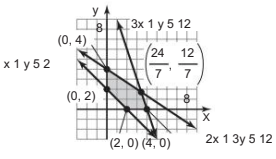
44. Limitado



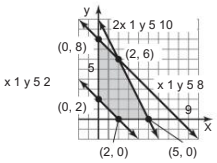
45. Ilimitado



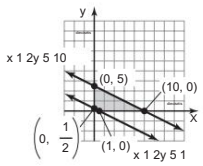
48 Acotado



50. Limitado



52. Encerrado

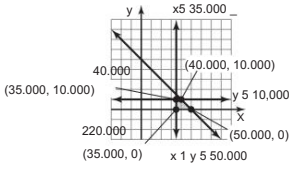


54. x … 4
x + y … 6
x Ú 0
d y Ú 0

56. y Ú 15
x + y … 50
x - y ... 0
e x … 20
x Ú 0

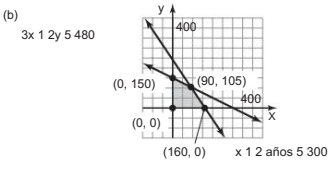
57. (a) dx + y ... 50,000
x Ú 35.000
y ... 10.000
y Ú 0

(b)



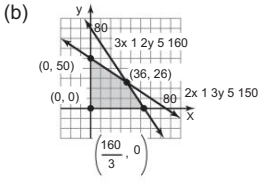
59. (un) x Ú 0
y Ú 0
x + 2y … 300
d 3x + 2y … 480

(b)



61. (un) 2x + 3y … 150
x Ú 0
d 3x + 2y … 160
y Ú 0

(b)

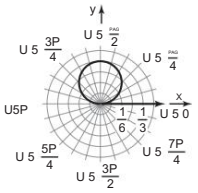


Machine Translated by Google

63. 5 - 1 - 2i, - 1 + 2i6

64. x2 + ay - 6b $\frac{1}{6}^2 = \frac{1}{36}$;

circulo con radio $\frac{1}{6}$ y centrar a0, 1 6b;



65. f1 - 12 = - 5; f122 = 28; Entonces, hay un valor x entre - 1 y 2 para el cual f1x2 = 0. 66. e 0, $\frac{2p}{3}, \frac{4p}{3f}$

67. 5x - 3 … x … 16 o 3 - 3, 14 68. $8823.30

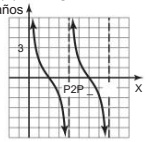
69. 18.75 caballos de fuerza 70. 5y = x 71. 5x x Ú - 2, x ≠ 236

72. Creciente: a - q, - $\frac{1}{3}$b, 15, q2; Decreciente: a - $\frac{1}{3}$, 5b

11.8 Evalúe su comprensión (página 842)

1. función objetivo 2. T 4. El valor máximo es 11; el valor mínimo es 3. 5. El valor máximo es 65; El valor mínimo es 4.
8. El valor máximo es 67; el valor mínimo es 20. 10. El valor máximo de z es 12 y ocurre en el punto 16, 02.
11. El valor mínimo de z es 4 y ocurre en el punto 12, 02. 14. El valor máximo de z es 20 y ocurre en el punto 10, 42.
16. El valor mínimo de z es 8 y ocurre en el punto 10, 22. 18. El valor máximo de z es 50 y ocurre en el punto 110, 02.
19. Produce 8 descensos y 24 cross-country; $1760; $1920 que es la ganancia al producir 16 de descenso y 16 de cross-country.
21. Alquile 15 mesas rectangulares y 16 mesas redondas por un costo mínimo de $1252. 23. (a) $10 000 en bonos basura y $10 000 en letras del Tesoro
(b) $12 000 en bonos basura y $8 000 en letras del Tesoro 25. 120 lb de carne molida deben mezclarse con 60 lb de carne de cerdo.
27. Fabricar 10 patines de carreras y 15 patines artísticos. 29. Pida 2 muestras de metal y 4 muestras de plástico; $34

31. (a) Configurar con 10 asientos de primera clase y 120 asientos de clase turista. (b) Configurar con 15 asientos de primera clase y 120 asientos de clase turista. 34. mi - $\frac{1}{32}$, 1 f
35. años



Dominio: 5x 0 x ≠ kp, k es un número entero}; rango: 1 - q, q 2

36. 89,1 años 37. y = 3x + 7 38. 5 y 11 39. $13.303,89

40. $\frac{x2}{16} + \frac{y2}{}$ = 1 41. f-1 1x2 = - 25 43. $\frac{x + 7}{5x - 2}$ 42. 15x2 1x - 72 1>2 13x - 142

Cóncavo hacia arriba: (3, q); cóncavo hacia abajo: 1 - q, 32

Ejercicios de repaso (página 846)

1. x = , y = - 4 $\frac{3}{}$ $\frac{1}{20}$ 4o ($\frac{3}{}$, - $\frac{1}{20}$) 2. x = 2, y = $\frac{1}{2}$ o a2, $\frac{}{12}$ b 3. x = 2, y = - 1 o 12, - 12 4. x = 1, y = 1 o (1, 1)

5. Inconsistente 6. x = 2, y = 3 o 12, 32 7. Inconsistente 8. x = - 1, y = 2, z = - 3 o (- 1, 2, - 3)

9. x = z + $\frac{7}{4}$ $\frac{39}{48}$ y = $\frac{9}{}$z + $\frac{69}{8}$, donde z es cualquier número real, o e (x, y, z) ` x = $\frac{7}{4}$z + $\frac{39}{}$, y = 4 $\frac{9}{8}$z + $\frac{69}{8}$, z es cualquier número real f 10. Inconsistente

11. mi 3x + 2y + 5z = - 1
8x + 12y = 8l

12. • 2x + 7z = 3z = 2

13. A + C = C 0 1 2 8S

14. 6A = C6 - 0 12 24S

15. AB = C 7 - 28 - 4 10 S

16. antes de Cristo 7 - J 45 13

17. $\frac{}{2}$ - 1
re 1 $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{}$ 3 toneladas

18. $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{7}$ $\frac{3}{7}$
$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ - $\frac{2}{7}$
F - $\frac{3}{7}$ - $\frac{4}{7}$ $\frac{1}{7}$V

19. Singular 20. x = $\frac{2}{}$, y = 5 $\frac{1}{10}$ o un $\frac{}{2}$, $\frac{1}{10}$ b 21. x = 9, y = $\frac{13}{3}$, z = $\frac{13}{3}$ o a9, 13 $\frac{}{3}$, $\frac{13}{}$ 3 segundo

22. Inconsistente 23. x = - , y = - 5 $\frac{1}{}$ $\frac{7}{5}$, z = - $\frac{6}{5}$ o ¢- $\frac{1}{5}$, - $\frac{7}{5}$, - $\frac{6}{5}$ ≤

24. z = - 1, x = y + 1, donde y es cualquier número real, o 5 1x, y, z2 0 x = y + 1, z = - 1, y es cualquier número real6

25. x = 4, y = 2, z = 3, t = - 2 o (4, 2, 3, - 2) 26. 5 27. 73 28. - 100 29. x = 2, y = - 1 o 12, - 12 30. x = 2, y = 3 o 12, 32

31. x = - 1, y = 2, z = - 3 o 1 - 1, 2, - 32 32. 24 33. - 8 34. $\frac{- \frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x - 4}$ 35. $\frac{- 3}{x - 1} + \frac{3}{x} + \frac{4}{x2}$ 36. $\frac{- \frac{1}{10}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{10x} + \frac{9}{10}}{x2 + 9}$

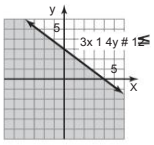
37. $\frac{x}{+ x2 + 4}$ $\frac{- 4x}{1x2 + 42^2}$ 38. $\frac{\frac{1}{2}}{x2 + 1} + \frac{\frac{1}{4}}{x - 1} + \frac{- \frac{1}{4}}{x + 1}$ 39. x = 0, y = 5; x = - 3, y = - 4 o (0, 5), (- 3, - 4)

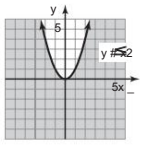
40. x = 222, y = 22; x = - 222, y = - 22 o 1222, 222, 1 - 222, - 222

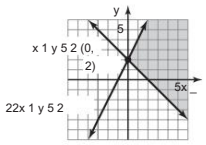
41. x = 0, y = 0; x = - 3, y = 3; x = 3, y = 3 o 10, 02, 1 - 3, 32, 13, 32

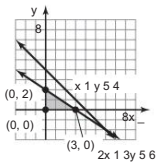
42. x = 22, y = - 22; x = - 22, y = 22; x = $\frac{4}{3}$22, y = - $\frac{2}{3}$22; x = - $\frac{4}{3}$22, y = $\frac{2}{3}$22 o 122, - 222, 1 - 22, 222, un 4 $\frac{}{3}$22, - $\frac{2}{3}$ 22b, a - $\frac{4}{3}$22, $\frac{2}{3}$ 22b 43. x = 1, y = - 1 o 11, - 12

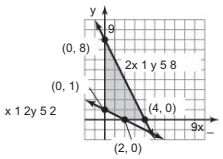
Machine Translated by Google

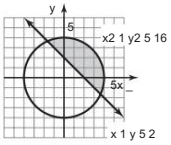
44. 

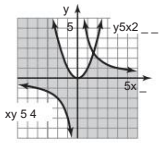
45. 

46. Ilimitado 

47. Limitado 

48. Limitado 

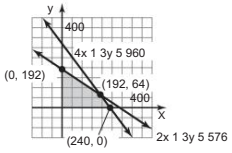
49. 

50. 

51. El valor máximo es 32 cuando x = 0 e y = 8. 52. El valor mínimo es 3 cuando x = 1 e y = 0. 53. 10 54. A es cualquier número real, A ≠ 10.

1 2 x2 - x +
—1 56. Mezcle 70 libras de café de $6,00 y 30 libras de café de $9,00. 57. Compra 1 pequeño, 5 medianos y 2 grandes. 55. y = - 3 3

58. (un) x Ú 0
y Ú 0
4x + 3y … 960
d 2x + 3y … 576

(b) 

59. Lancha rápida: 36,67 km/h; Río Aguarico: 3,33 km/
h 60. Bruce: 4 h; Bryce: 2 h; Marty: 8
h 61. Produce 35 motores de gasolina y 15 motores diésel; La fábrica produce un exceso de 15 motores de gasolina y 0 motores diésel.

Prueba del capítulo (página

848) 1. x = 3, y = - 1 o 13, - 12 2. Inconsistente

3. x = - z + 18 17 , y = z - 7 7 , donde z es cualquier número real, o e (x, y, z) ` x = - z + 18, y = z - 7 17 7 , z es cualquier número real f

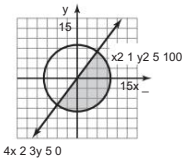
1 4. x = 3, y = - 2, z = 0 o a 1 3 , - 2 - 1 1 - 2, 0b 5. C 4 - 5 5 - 5 30 0 - 25 10 S 6. c 3x 2y 1 4z 3z 6 - 11 1x + 0y + 8z = 2 - o c 3x 2y + 4z 6 - 11 x + 8z = 2

4 10 26
1 - 11 - 3 5 1 - 11 2
7. C 5 6 12 S 8. C - 11 - 29 69 - C 4 - 1 26 3S
17
10. c 16 3 - 10 d 11. - 5 3 3 - 4
2 - 2 - 2 3
D 2 2 1 2 T 12. C 3 - 4 - 5 7S

1 1
1 13. x = 2, y = 3 o un 12, 3b 14. x = - 4 y + 7, donde y es cualquier número real, o e 1x, y2 ` x = - 4 y + 7, y es cualquier número real f

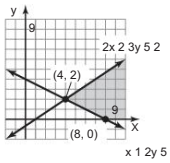
15. x = 1, y = - 2, z = 0 o 11, - 2, 02 16. Inconsistente 17. - 29 18. - 12

19. x = - 2, y = - 5 o 1 - 2, - 52 20. x = 1, y = - 1, z = 4 o (1, - 1, 4) 21. 11, - 32 y 11, 32 22. 13, 42 y 11, 22

23. 

24. $\frac{3}{x+3} + \frac{-2}{(1x+3)^2}$

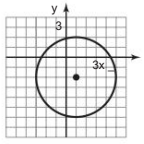
25. $\frac{1}{x} + \frac{3}{1x+2} + \frac{5x}{(1x+2)^2}$

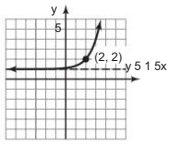
26. Ilimitado 

27. El valor máximo de z es 64 y ocurre en el punto 10, 82. 28. Los jeans cuestan $24.50, las camisolas cuestan $8.50 y las camisetas cuestan $6.00.

Revisión acumulativa (página 849)

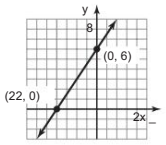
1 1
1. mi 0, 2 f 2. 556 3. mi - 1, - 2 , 3 f 4. 5 - 26 5. e 5 2 f 6. 1 ln 3 f 7. impar; simétrico con respecto al origen

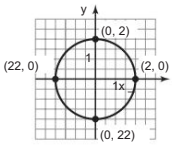
8. Centro: 11, - 22; radio = 4 

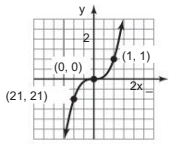
9. Dominio: todos los números reales
Rango: 5y 0 y 7 16
Asíntota horizontal: y = 1 

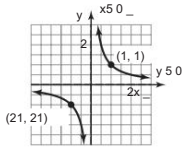
10. f^{-1} 1x2 = 5 - 2 x
Dominio de f : 5x 0 x ≠ - 26
Rango de f : 5y 0 y ≠ 06 :
Dominio de f^{-1} 5x 0 x ≠ 06
Rango de f^{-1} : 5y 0 y ≠ - 26

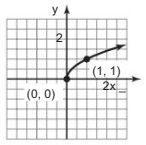
Machine Translated by Google

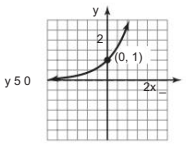
11. (un) 

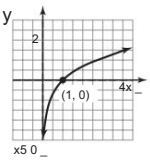
(b) 

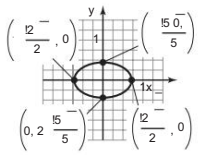
(C) 

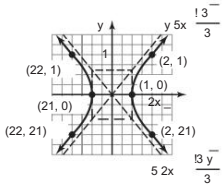
(d) 

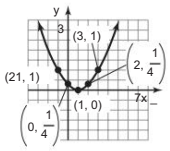
(mi) 

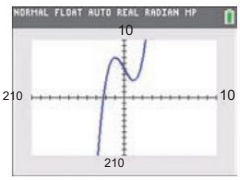
(F) 

(g) y 

(h) 

(i) 

(j) 

12. (un) 

; - 2,28 (b) Máximo local de 7 en x = - 1; mínimo local de 3 en x = 1

(c) 1 - q, - 14, 31, q 2

CAPITULO 12 Secuencias; Inducción; el teorema del binomio

12.1 Evalúe su comprensión (página 858)

3. secuencia 4. Verdadero 5. Verdadero 6. b 7. suma 8. b 10. 3,628,800 11. 504 14. 190,080 16. s1 = 1, s2 = 2, s3 = 3, s4 = 4, s5 = 5

17. a1 =, a2 =, a3 =, a4 =, a5 = 19. c1 = 1, c2 = - 4, c3 = 9, c4 = - 16, c5 = 25 22. s1 = , s2 = , s3 = 5 s4 = s5 =

24. t1 = - , t2 = 6 t3 = - t4 = t5 = - 12, 20, 30, 42 26. b1 =, b2 =, b3 =, b4 =, b5 = 27. una = 30. an =

32. un = 1 - 12 34. un = 1 - 12 n 35. a1 = 2, a2 = 5, a3 = 8, a4 = 11, a5 = 14 38. a1 = - 2, a2 = 0, a3 = 3, a4 = 7, a5 = 12

40. a1 = 4, a2 = 12, a3 = 36, a4 = 108, a5 = 324 42. a1 = 3, a2 = , a3 = , a4 = , a5 = 43. a1 = 1, a2 = 2, a3 = 2, a4 = 4, a5 = 8

46. a1 = A, a2 = A + d, a3 = A + 2d, a4 = A + 3d, a5 = A + 4d

48. a1 = 22, a2 = 32 + 12, a3 = 32 + 22 + 12,
a4 = 42 + 32 + 22 + 12,
a5 = 52 + 42 + 32 + 22 + 12

50. 3 + 4 + g+ 1n + 22 51. + 2 + +g+ 54. 1 + + +g+ 56. + +g+ 58. en 2 - en 3 + en 4 - gramo+ 1 - 12 norte En n 60. a

61. un 64. un 1 - 12 k un3kb 66.a 68. un 1a + kd2 o a [a + 1k - 12d] 70. 200 72. 820 73. 1110 76. 1560 78. 3570

80. 44.000 81. $2830 83. $25, 926,38 85. 8 pares 87. Secuencia de Fibonacci 89. (a) 3,630170833 (b) 3,669060828 (c) 3,669296668 (d) 12

91. (a) a1 = 0,4; a2 = 0,7; a3 = 1; a4 = 1,6; a5 = 2,8; a6 = 5,2; a7 = 10; a8 = 19,6
(b) Excepto por el término 5, que no tiene coincidencia, la fórmula de Bode proporciona excelentes aproximaciones para las distancias medias de los planetas al sol.
(c) La distancia media de Ceres al Sol se aproxima mediante a5 = 2,8, y la de Urano es a8 = 19,6.
(d) a9 = 38,8; a10 = 77,2 (e) La distancia de Plutón se aproxima con a9, pero ningún término se aproxima a la distancia media de Neptuno al sol.
(f) Según la ley de Bode, la distancia orbital media de Eris será de 154 AU del sol.

93. (a) an = 0,95n # l0 (b) 77 96. a0 = 2; a5 = 2,236067977; 2,236067977 98. a0 = 4; a5 = 4,582575695; 4.582575695

99. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 101. un = 1 + 2 + 3 + g+ n = a k = , y del problema 100, un+1 = .

un+1 + un = + = = 1norte + 12

105. $2654.39 106. 22 1cos 225° + i sen 225°2 107. 0 108. 1y - 42 = 161x + 32 109. y = 0

110. A = 23°,B = 42°,C = 115° 111. 112. - 2, 113. - 2, 6

Machine Translated by Google

12.2 Evalúe su comprensión (página 866)

1. aritmética 2. F 3. 17 4. T 5. d 6. c 8. sn - sn-1 = 1n + 42 - [1n - 12 + 4] = n + 4 - 1n + 32 = n + 4 - n - 3 = 1, una constante; d = 1; s1 = 5, s2 = 6, s3 = 7, s4 = 8

9. an - an-1 = 12n - 52 - [21n - 12 - 5] = 2n - 5 - 12n - 2 - 52 = 2n - 5 - 12n - 72 = 2n - 5 - 2n + 7 = 2, una constante ; d = 2; a1 = - 3, a2 = - 1, a3 = 1, a4 = 3

12. cn - cn-1 = 16 - 2n2 - [6 - 21n - 12] = 6 - 2n - 16 - 2n + 22 = 6 - 2n - 18 - 2n2 = 6 - 2n - 8 + 2n = - 2, a constante; re = - 2; c1 = 4, c2 = 2, c3 = 0, c4 = - 2

14. tn - tn-1 = a 1 2 - 1 3 nb - c 1 2 - 1 3 1n - 12d = 1 2 - 1 3 norte - un 4 2 - 1 3 norte + 1 3 b = 1 2 - 1 3 n - un 5 6 - 1 3 nb = 1 2 - 1 - 3 norte 5 6 + 1 3 norte = - 1 3, una constante; re = - 1 3 ; t1 = 3 1 , t2 = - 1 6 , t3 = - 1 2 , t4 = - 5 6

16. sn - sn-1 = ln 3n - ln 3n-1 = n ln 3 - 1n - 12 ln 3 = n ln 3 - 1n ln 3 - ln 32 = n ln 3 - n ln 3 + ln 3 = ln 3 , una constante; re = en 3; s1 = en 3, s2 = 2 en 3, s3 = 3 en 3, s4 = 4 en 3

17. an = 3n - 1; a51 = 152 20. an = 15 - 7n; a51 = - 342 22. an = 1 2 1norte - 12; a51 = 25 24. an = 22n; a51 = 5122 25. 200 28. - 531 30. 83 2

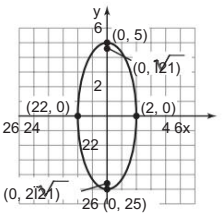
31. a1 = - 13; d = 3; an = an-1 + 3; an = - 16 + 3n 34. a1 = - 53; d = 6; an = an-1 + 6; una = - 59 + 6n

36. a1 = 28; re = - 2; an = an-1 - 2; an = 30 - 2n 38. a1 = 25; re = - 2; an = an-1 - 2; an = 27 - 2n 39. n2 42. 2 norte 19 + 5n2 43. 1260

46. 195 48. - 9312 50. 10.036 52. 12.240 54. - 1925 56. 15.960 57. - 2 3 59. 24 mandatos 61. 992 escaños 63. 2160 escaños 65. 8 años

67. 136 tejas más claras y 120 tejas más oscuras 69. {Tn = - 3.5n + 77} T6 = 56o F 72. 14 75. 16.42% 76. v = 4i - 6j

77. Elipse: Centro: 10, 02; Vértices: 10, - 52, 10, 52; Focos: 10, - 2212, 10, 2212,



78. 2 0 ≥ 3 4 - 1 ¥ = 79. x - 1 1 - x - 1 x2 + x + 1 = 80. 22 2 81. 3 - 3, 114

82. 0, 31 + 22, - 31 + 22 83. Hipérbola 84. e - 17 8 f

Problemas históricos (página 876)

1. 1 2 panes, 10 panes, 5 6 panes, 20 panes, 29 panes, 38 panes 2. (a) 1 1 6 persona (b) 2401 gatitos (c) 2800

12.3 Evalúe su comprensión (página 877)

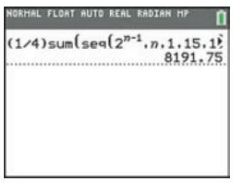
3. Geométrico 4. a 1 - r 5. b 6. T 7. F 8. T 10. r = 4; s1 = 4, s2 = 16, s3 = 64, s4 = 256

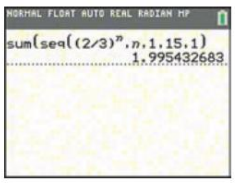
11.r = 1 2 ; a1 = - 3 2 , a2 = - 3 4 , a3 = - 3 8 , a4 = - 3 diecisés 14.r = 2; c1 = 1 4 , c2 = 1 2 , c3 = 1, c4 = 2 16. r = 71/4; e1 = 71/4, e2 = 71/2, e3 = 73/4, e4 = 7

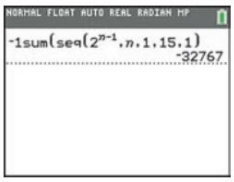
18.r = 3 2 ; t1 = 1 , t2 = 1 2 , t3 = 2 3 4 , 9 8 , t4 = 27 diecisés 19. a5 = 162; an = 2 # 3n-1 22. a5 = 5; un = 5 # 1 - 12 n-1 24. a5 = 0; un = 0

26. a5 = 923; una = 1232 norte 27. a7 = 1 64 30. a9 = 1 32. a8 = 0.00000004 34. an = 6 # 3n-1 o an = 2 # 3n 35. an = - 3 # a - 11 - 2n2 44. 1 3 segundo n-1 = un - 1 3 segundo n-2

38. un = - 1 - 32 n-1 40. un = 7 15 4 # 15n-1 = 7 # 15n-2 41. - 1 2c 1 - a 2 3 b n d 46. 1 - 2 n

47.


50.


52.


53. Converge; 2 3 56. Converge; 16 58. Converge; 5 8 60. Divergencia 62. Converge; 20 3 64. Divergencia 66. Converge; 18 5 68. Converge; 6

70. Aritmética; d = 1; 1375 72. Ninguno 74. Aritmética; re = - ; - 700 76. Ninguno 78. Geométrico; r = 3 2 ; 2c 1 - un 2 segundo 50 d

80. Geométrico; r = - 2; - 3 1 31 - 1 - 22 50 4 82. Geométrico; r = 31/2; - 23 2 11 + 232 11 - 3252 83. - 16 85. $ 36.498,11

87. (a) 1,722 pies (b) 8vo (c) 31,8 pies (d) 40 pies 89. $149.035,94 91. $51.538,15 94. $348,60 95. 1,845 * 1019 97. 10 99. $72,67 por acción

101. 20 de diciembre; $9999,92 103. 18 105. La opción A da como resultado un salario más alto en 5 años ($50 499 versus $49 522); La opción B da como resultado un total de 5 años más alto. ($225,484 versus $233,602). 107. La opción 2 resulta en la mayor cantidad: 16.038.304 dólares; La opción 1 resulta en lo mínimo: $14.700.000.

109.Sí. Una secuencia constante es a la vez aritmética y geométrica. Por ejemplo, 3, 3, 3, c es una secuencia aritmética con a1 = 3 y d = 0 y es una secuencia geométrica secuencia con a = 3 y r = 1. 113. 2.121 114. i - j 115. 17 17 4 8 15 x2 - y2 = 1 116. 54 117. 7.3 pies 118. f1x2 = - 1x + 22 1x - 12 1 x - 42 12 8 2

119. - 16t - 13 120. y = 2x - 5 121. g1x2 = 72x + 5 122. 1x - 52 1x + 52 1x - 22 1x + 22

Machine Translated by Google

12.4 Evalúe su comprensión (página 883)

1. (I) n = 1: 2 # 1 = 2 y 111 + 12 = 2

(II) Si 2 + 4 + 6 + g + 2k = k1k + 12, entonces 2 + 4 + 6 + g + 2k + 21k + 12 = 12 + 4 + 6 + g + 2k2 + 21k + 12
= k1k + 12 + 21k + 12 = k2 + 3k + 2 = 1k + 12 1k + 22 = 1k + 12 31k + 12 + 14.

4. (Yo) n = 1: 1 + 2 = 3 y 2 $\frac{1}{}$ # 1 # 11 + 52 = $\frac{1}{2}$ # 6 = 3

(II) Si 3 + 4 + 5 + g + 1k + 22 = $\frac{1}{2}$k1k + 52, luego 3 + 4 + 5 + g + 1k + 22 + 3 1k + 12 + 24
= 33 + 4 + 5 + g + 1k + 22 4 + 1k + 32 = $\frac{1}{}$k1k + 52 + k + 3 = 2 $\frac{1}{2}$ 1k2 + 7k + 62 = 2 $\frac{1}{}$ 1k + 12 1k + 62 = 1k $\frac{1}{2}$ 12 3 1k + 12 + 54.

6. (I) n = 1: 3112 - 1 = 2 y # 1 # [3 # 1 + 1] = $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ # 4 = 2

(II) Si 2 + 5 + 8 + g + 13k - 12 = $\frac{1}{2}$k13k + 12, luego 2 + 5 + 8 + g + 13k - 12 + [31k + 12 - 1]
= 32 + 5 + 8 + g + 13k - 12 4 + 13k + 22 = $\frac{1}{}$k13k + 12 + 13k + 22 = 2 $\frac{1}{2}$ 13k2 + 7k + 42 = 1k $\frac{1}{2}$12 13k + 42
= $\frac{1}{}$ 1k + 12 331k + 12 + 14.

2 8. (I) n = 1: 21-1 = 1 y 21 - 1 = 1

(II) Si 1 + 2 + 22 + g + 2k-1 = 2k - 1, entonces 1 + 2 + 22 + g + 2k-1 + 21k+12 -1 = 11 + 2 + 22 + g + 2k-12 + 2k
= 2k - 1 + 2k = 2 # 2k - 1 = 2k+1 - 1.

10.(I) n = 1: 41-1 = 1 y 3 $\frac{1}{}$ 141 - 12 = $\frac{1}{3}$ # 3 = 1

(II) Si 1 + 4 + 42 + g + 4k-1 = $\frac{1}{3}$ 14k - 12, luego 1 + 4 + 42 + g + 4k-1 + 41k+12 -1 = 11 + 4 + 42 + g + 4k-12 + 4k
= $\frac{1}{3}$ 14k - 12 + 4k = 3 $\frac{1}{}$ 34k - 1 + 3 # 4k 4 = 3 $\frac{1}{}$ 34 # 4k - 14 = 3 $\frac{1}{}$ 14k+ 1-12.

12. (yo) n = 1: 1 # $\frac{1}{2\ 1}$ = $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{1+1}$ = $\frac{1}{2}$

(II) Si + $\frac{1}{1\ \#\ 2}$ $\frac{}{2\ \#\ 3}$ + $\frac{1}{3\ \#\ 4}$ + g + $\frac{1}{k1k+12}$ = $\frac{k}{k+1}$, entonces $\frac{1}{1\ \#\ 2}$ $\frac{1}{2\ \#\ 3}$ + $\frac{1}{3\ \#\ 4}$ + g + $\frac{1}{k1k+12}$ + $\frac{1}{1k+12[1k+12+1]}$
=c $\frac{}{1\ \#\ 2}$ + $\frac{1}{2\ \#\ 3}$ + $\frac{1}{3\ \#\ 4}$ + g + $\frac{1}{k1k+12}$ re + $\frac{1}{1k+12\ 1k+22}$ = $\frac{k}{k+1}$ + $\frac{1}{1k+12\ 1k+22}$ = $\frac{k1k+22+1}{1k+12\ 1k+22}$
= $\frac{k2+2k+1}{1k+12\ 1k+22}$ = $\frac{1k+12^{\ 2}}{1k+12\ 1k+22}$ = $\frac{k+1}{k+2}$ = $\frac{k+1}{1k+12+1}$.

14. (I) n = 1: 12 = 1 y $\frac{1}{6}$ # 1 # 2 # 3 = 1

(II) Si 12 + 22 + 32 + g + k2 = $\frac{1}{6}$k1k + 12 12k + 12, luego 12 + 22 + 32 + g + k2 + 1k + 12 ^{2}
= 112 + 22 + 32 + g + k22 + 1k + 12 ^{2} = $\frac{1}{}$k1k + 12 12k + 12 + 1k + 12 6 ^{2} = $\frac{1}{6}$ 12k3 + 9k2 + 13k + 62
= $\frac{1}{6\ 6}$1k + 12 1k + 22 12k + 32 = 1k + $\frac{1}{}$12 3 1k + 12 + 14 321k + 12 + 14.

16. (yo) n = 1: 5 - 1 = 4 y 2 $\frac{1}{}$ # 1 # 19 - 12 = $\frac{1}{2}$ # 8 = 4

(II) Si 4 + 3 + 2 + g + 15 - k2 = $\frac{1}{2}$k19 - k2, luego 4 + 3 + 2 + g + 15 - k2 + 35 - 1k + 12 4
= 34 + 3 + 2 + g + 15 - k2 4 + 4 - k = $\frac{1}{2}$k19 - k2 + 4 - k = $\frac{1}{2}$ 19k - k2 + 8 - 2k2 = $\frac{1}{2}$ 1 - k2 + 7k + 82
= $\frac{1}{2}$ 1k + 12 18- k2 = $\frac{1}{2}$ 1k + 12[9 - 1k + 12].

18. (I) n = 1: 1 # 11 + 12 = 2 y 3 $\frac{1}{}$ # 1 # 2 # 3 = 2

(II) Si 1 # 2 + 2 # 3 + 3 # 4 + g + k1k + 12 = $\frac{1}{3}$k1k + 12 1k + 22, luego 1 # 2 + 2 # 3 + 3 # 4 + g + k1k + 12
+ 1k + 12[1k + 12 + 1] = [1 # 2 + 2 # 3 + 3 # 4 + g + k1k + 12] + 1k + 12 1k + 22
= $\frac{1}{3}$k1k + 12 1k + 22 + $\frac{1}{}$ # 31k + 12 1k + 22 = 3 $\frac{1}{}$ 1k + 12 1k + 22 1k + 32 = 3 $\frac{1}{3}$ 1k + 12 3 1k + 12 + 14 3 1k + 12 + 24.

19. (I) n = 1: 12 + 1 = 2, que es divisible por 2.
(II) Si k2 + k es divisible por 2, entonces 1k + ^{2} + 1k + 12 = k2 + 2k + 1 + k + 1 = 1k2 + k2 + 2k + 2. Dado que k2 + k es divisible por 2 y 2k + 2 es
12 es divisible por 2, 1k + ^{2}12 + 1k + 12 es divisible por 2.

22. (I) n = 1: 12 - 1 + 2 = 2, que es divisible por 2.
(II) Si k2 - k + 2 es divisible por 2, entonces 1k + ^{2} - 1k + 12 + 2 = k2 + 2k + 1 - k - 1 + 2 = 1k2 - k + 22 + 2k. Dado que k2 - k + 2 es divisible
12 por 2 y 2k es divisible por 2, 1k + 12^{2} - 1k + 12 + 2 es divisible por 2.

Machine Translated by Google

24. (I) n = 1: Si x 7 4 entonces x1 = x 7 4

(II) Supongamos, para algún número natural k, que si x 7 4, entonces xk 7 4. Multiplica ambos lados de la desigualdad xk 7 4 por x. Si x 7 4, entonces xk+1 7 4x 7 4.

26.(I) n = 1: a - b es factor de a1 - b1 = a - b. entonces ak+1 -

(II) Si a - b es un factor de ak - bk , bk+1 = a1ak - bk2 + bk 1a - b2.

Dado que a - b es un factor de ak - bk y a - b es un factor de a - b, entonces a - b es un factor de ak+1 - bk+1 .

27. (a) n = 1: 11 + a2 (b) ^{1} = 1 + a Ú 1 + 1 # a

Suponga que hay un número entero k para el cual se cumple la desigualdad. Entonces 11 + a2 = ^{k} Ú 1 + ka. Necesitamos demostrar que 11 + a2 $^{k+1}$ Ú 1 + 1k + 12a.

11 + a2 $^{k+1}$ 11 + a2 ^{k} 11 + a2 Ú 11 + ka2 11 + a2 = 1 + ka2 + a + ka = 1 + 1k + 12a + ka2 Ú 1 + 1k + 12a.

29. Si 2 + 4 + 6 + g + 2k = k2 + k + 2, entonces 2 + 4 + 6 + g + 2k + 21k + 12 = 12 + 4 + 6 + g + 2k2 + 2k + 2 + 1k + 12 + 2.

= k2 + k + 2 + 2k + 2 = k2 + 3k + 4 = 1k2 + 2k + 12 + 1k + 12 + 2 = 1k + 12 Pero 2 # 1 = 2 y 12 + 1 + 2 = 4. El ^{2}

hecho es que 2 + 4 + 6 + g + 2n = n2 + n, no n2 + n + 2 (Problema 1). 1 # 11 - 12 31. (I) n = 1: 3a + 11 - 12d4 = a y 1 # a + d

$$\frac{\qquad}{2} = a.$$

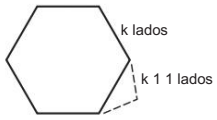
(II) Si a + 1a + d2 + 1a + 2d2 + g + [a + 1k - 12d] = ka + d $\frac{k1k - 12}{2}$, entonces

+ 1a + d2 + 1a + 2d2 + g + 3a + 1k - 12d4 + 3a + 1 1k + 12 - 12d4 = ka + d $\frac{k1k - 12\ a}{2}$ + a + kd

$$\frac{k1k - 12 + 2k\ 1k + 12}{2}\ 1k2\ 1k + 12\ 3\ 1k + 12 - \frac{14 = 1k + 12a}{2} + d = 1k + 12a + d = \frac{1k + 12a + d}{2}.$$

33. (I) n = 3: La suma de los ángulos de un triángulo es 13 - 22 # 180° = 180°.

(II) Suponga que para algún k Ú 3, la suma de los ángulos de un polígono convexo de k lados es 1k - 22 # 180°. Un polígono convexo de k + 1 lados consta de un polígono convexo de k lados más un triángulo (ver figura). La suma de los ángulos es 1k - 22 # 180° + 180° = 1k - 12 # 180° = 3 1k + 12 - 24 # 180°.



35. (a) 7; 15 (b) cn = 2n - 1 (c) (I)n = 1: un pliegue da como resultado 1 pliegue y c1 = 21 - 1 = 1.

(II) Si ck = 2k - 1, entonces ck+1 = 2ck + 1 = 212k - 12 + 1 = 2k+1 - 2 + 1 = 2k+1 - 1 (d) Cada pliegue duplica el grosor, por lo que el grosor de la pila será 225 # 0,02 mm = 671.088,64 mm (o unos 671 metros).

1 37. 52516 38. x = $\frac{}{2}$, y = - 3; un 1 $\frac{}{2}$, - 3b 39. Izquierda: 448,3 kg; derecha: 366,0 kg 40. c 7 - 3 8 d 41. $\frac{2}{x + 2}\ \frac{}{x - 1} + \frac{1}{\qquad}$ 42. 61,4°

43. e $\overline{\ln 4 + 3 7}$ ≈ 2,795 f 44. $\frac{239}{13}$ 45. x = 1

12.5 Evalúe su comprensión (página 890)

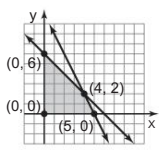
1. Triángulo de Pascal 2. 1; n 3. F 4. Teorema del binomio 5. 10 8. 21 10. 50 12. 1 14. ≈1.8664 * 1015 16. ≈1.4834 * 1013 18. x5 + 5x4 + 10x3 + 10x2 + 5x + 1
20. x6 - 12x5 + 60x4 - 160x3 + 240x2 - 192x + 64 21. 81x4 + 108x3 + 54x2 + 12x + 1 24. x10 + 5x8 y2 + 10x6 y4 + 10x4 y6 + 5x2 y8 + y10 26. x3 + 622x5/2 + 30x2 + 4022x3/ 2 + 60x + 2422x1/2 + 8 28. a5 x5 + 5a4 bx4 y + 10a3 b2 x3 y2 + 10a2 b3 x2 y3 + 5ab4 xy4 + b5 y5 29. 17,010 32. - 101,376 34. 41,472
35. 2835x3 38. 314,928x7 40. 495 42. 3360 43. 1.00501

45. a n$^{¡norte!}$nb = $\frac{}{1n - 12!\ [n - 1n - 12]!} = \frac{}{1n - 12!\ 1!} = \frac{n\ \#\ 1n - 12!}{1n - 12!}$ = norte; a nn b = $\frac{}{¡norte!\ 1n - n2!} = \frac{}{n!0!} = \frac{}{}$ = 1

48. 2norte = 11 + 12norte $^{n-1}$ = un norte 1n + un norte 1 segundo 112 112 + g+ a nn b1n= a n 0 b + an 1 b + g+a n 53. e ln 5 ln 6nb 49. 1 52. 165 _

- ln 5 f 58.8276 54. (a) 0 (b) 90° (c) Ortogonal 55. x = 1, y = 3, z = - 2;11, 3, - 22

56. Limitado



57. g1f1x2 2 = 2x2 - 4; Dominio: 1 - q, - 24 h 32, q 2 58. C = - 46

59. sen2 u + sen2 u tan2 u = sen2 u11 + tan2 u2 = sen2 u sec2 u

= sen2 u $\frac{1}{\#\ \cos2\ u}$

= tan2 u

60. $\frac{1 - 8x3}{3x2>3\ 1x3 + 12^{\ 2}}$ 61. x = 3, x = - 1 62. f1 - 22 = 5; 1 - 2, 52

Ejercicios de repaso (página 893)

3 7 9 1. a1 = - , a2 = 1, a3 = - , a4 = , a5 = - 4 6 7 8 $\frac{}{}$ $\frac{}{}$ $\frac{11}{\qquad}$ 9 2. c1 = 3, c2 = , c3 = 1, c4 = 8 $\frac{81}{64,}$ c5 = $\frac{243}{125}$ 3, a2 = 2, a3 = , a4 = , a5 = 3 9 27 4 8 3. a1 = $\frac{}{}$ $\frac{}{}$

4. a1 = 2, a2 = 0, a3 = 2, a4 = 0, a5 = 2 5. 6 + 10 + 14 + 18 = 48 6. a $^{13}_{k=1}$ 1 - 12 $^{k+1}\ \frac{1}{k}$ 7. Aritmética; d = 1; Sn = $\frac{norte}{2}$ 1n + 112 8. Ninguno

8 9. Geométrico; r = 8; Sn = $\frac{}{7}$ 18n - 12 10. Aritmética; d = 8; Sn = 2n(2n - 1) 11. Geométrico; r = $\frac{1}{2}$; Sn = 6c 1 - a 1 2 bn d 12. Ninguno

Machine Translated by Google

13. 9515 14. - 1320 15. $\frac{1093}{2187}$ ≈ 0,49977 16,682 17,61 18,1010 _ _ $\frac{1}{\quad}$ 19. 922 $\overline{20}$. 5an 6 = 55n - 46 21. {an} = {2n - 1} 22. Converge; $\frac{9}{2}$

23. Converge; $\frac{4}{3}$ 24. Divergencia 25. Converge; 8

26. (I) n = 1: 7 # 1 = 7 y $\frac{7 \# 1}{2}(1 + 1) = 7$

(II) Si 7 + 14 + 21 + g + 7k = (k + 1), entonces 7 + 14 + 21 + g + 7k + 7(k + 1) = (7 + 14 + 21 + g + 7k) + 7(k + 1) = $\frac{7k}{2}(k+1) + 7(k+1) = (k+1)\frac{7k}{2} + 7 \leq = \frac{7(k+1)}{2}[(k + 1) + 1]$

27. (I) k = 1: 4 + 4 # 51 = 24 y 51+1 - 1 = 24

(II) Si 4 + 20 + 100 + g + 4 # 5k = 5k+1 - 1, entonces 4 + 20 + 100 + g + 4 # 5k + 4 # 5k+1 = [4 + 20 + 100 + g 4 # 5k] + 4 # 5k+1 = 5k+1 - 1 + 4 # 5k+1 = 5k+1 (1 + 4) - 1 = 5(k+1)+1 - 1

28. (yo) n = 1: 13 # 1 - $22^{2} = 1$ y 2 $\frac{1}{-}$ # 1 # 36 # 12 - 3 # 1 - 14 = 1

(II) Si 12 + 42 + 72 + g+ 13k - $22^{2} = \frac{1}{2}$k16k2 - 3k - 12, entonces

12 + 42 + 72 + g+ 13k - 22^{2} + 331k + 12 - 24^{2}

= 312 + 42 + 72 + g+ 13k - 22^{2} 4+13k +12 $^{2} = \frac{1}{2}$k16k2 - 3k - 12 + 13k + 12 $^{2} = \frac{1}{2}$ 16k3 - 3k2 - k2 + 19k2 + 6k + 12

$= \frac{1}{2}$ 16k3 + 15k2 + 11k + 22 = $\frac{1}{2}$ 1k + 12 16k2 + 9k + 22 = $\frac{1}{2}$ 1k + 12 361k + 12 ^{2} - 31k + 12 - 14.

29. 10 30. 64x6 + 576x5 + 2160x4 + 4320x3 + 4860x2 + 2916x + 729 31. x5 - 35x4 + 490x3 - 3430x2 + 12005x - 16807 32. 144 33. 84

34. (a) 8 ladrillos (b) 1100 ladrillos 35. 170 36. (a) 20a 3 $\overline{}^{3} = \frac{135}{\text{diciembre}}$ pies (b) 20a $\overline{3}$ pies (c) 13 veces (d) 140 pies 37. $171,647.33 38. $56,740.76

Prueba de capítulo (página 894)

1. 0, $\frac{3}{10}, \frac{8}{11}, \frac{4}{\quad}, \frac{5}{\quad}, \frac{24}{13}$ 2. 4, 14, 44, 134, 404 3. 2 - + $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{9} = \frac{61}{36}$ 4. - $\frac{1}{3}$ - $\frac{14}{9}$ - $\frac{73}{27}$ - $\frac{308}{81}$ = - $\frac{680}{81}$ 5. $\sum_{k=1}^{10}$ 1 - 12 k una + 4 b 6. Ninguno

7. Geométrico; r = 4; Sn = $\frac{2}{3}$ 11 - 4n2 8. Aritmética: d = - 8; Sn = n12 - 4n2 9. Aritmética; re = - $\frac{1}{2}$; Sn = $\frac{\text{norte}}{4}$ 127- n2

10. Geométrico; r = $\frac{2}{5}$; Sn = $\frac{125}{3}$ c 1 - un $\overline{25}$ b n d 11. Ninguno de los dos 12. Converge; $\frac{1024}{5}$ 13. 243m5 + 810m4 + 1080m3 + 720m2 + 240m + 32

14. Primero demostramos que el enunciado es válido para n = 1. a1 + $\frac{1}{1}$ b = 1 + 1 = 2. La igualdad es verdadera para n = 1, por lo que se cumple la condición I. A continuación asumimos que a1 + $\frac{1}{1}$ b a1 + $\frac{1}{2}$ b a1 + $\frac{1}{3}$ bg a1 + $\frac{1}{k}$ b = k + 1 es cierto para algún k, y determinamos si la fórmula es válida para k + 1. a1 +

$\frac{1}{1}$ b a1 + $\frac{1}{2}$ b a1 + $\frac{1}{3}$ bg a1 + $\frac{1}{kb}$ a1 + $\frac{1}{\text{k + 1 segundo}}$ = c a1 + $\frac{1}{1}$ b a1 + $\frac{1}{2}$ b a1 + $\frac{1}{3}$ bg a1 + $\frac{1}{k}$ bd a1 + $\frac{1}{\text{k + 1 segundo}}$

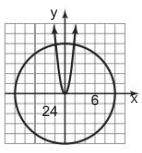
= 1k + 12 a1 + $\frac{1}{k + 1}$ b = 1k + 12 # 1 + 1k + 12 # $\frac{1}{k + 1}$ = k + 1 + 1 = k + 2

La condición II también se cumple. Entonces, la afirmación es válida para todos los números naturales.

15. Después de 10 años, el automóvil valdrá $6103,11. 16. El levantador de pesas habrá levantado un total de 8000 libras después de 5 series.

Revisión acumulativa (página 894)

1. 5 - 3, 3, - 3i, 3i6 2. (a)



(b) e aB - $\frac{\sqrt{\quad\quad}}{1 + 13601}, \frac{-1+23601}{6}$ b, a - B - $\frac{\sqrt{\quad\quad}}{1 + 13601}, \frac{-1+23601}{6}$ novio

(c) El círculo y la parábola se cortan en

a B - $\frac{\sqrt{\quad\quad}}{1 + 13601}, \frac{-1+23601}{6}$ b, a - B - $\frac{\sqrt{\quad\quad}}{1 + 13601}, \frac{-1+23601}{6}$ b

3. e lna $\overline{2}$ bf 4. y = 5x - 10 5. 1x + 12 ^{2} + 1 año - 22^{2} = 25 6. (a) 5 (b) 13 (c) 2x - 1 $\frac{6x + 3}{\quad}$ (d) e x ` x ≠ $\frac{1}{2}$f (e) $\frac{7x - 2}{x - 2}$ (f) 5xx ≠26

(g) g-1 1x2 = 1x - 12; todos los reales (h) f 2 $^{-1}$ 1x2 = ; 5x x ≠ 36 7. + x - 3 $\frac{2x}{\quad}$ $\frac{x2}{7}$ $\frac{y2}{\text{diciembre}}$ = 1 8. 1x + 12 ^{2} = 41 años - 22

9. r = 8 sen u; x2 + 1y - 42^{2} = 16 10. y 3p $\overline{2}$ f 11. $\frac{2p}{3}$ 12. (a) - $\frac{21\sqrt{5}}{4}$ (b) - $\frac{21\sqrt{5}}{15}$ (C) - $\frac{21\sqrt{5}}{8}$ (d) $\frac{7}{8}$ (e) R 1 + $\frac{\frac{115}{4}}{2} = \frac{24 + 115}{212}$

Machine Translated by Google

CAPÍTULO 13 Conteo y probabilidad

13.1 Evalúe su comprensión (página 901)

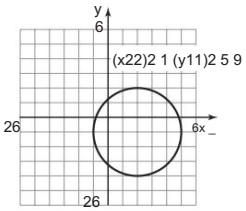
5. subconjunto; 6. finito 7. T 8. b

9. , 5a6, 5b6, 5c6, 5d6, 5a, b6, 5a , c6 , 5a, d6, 5b , c6, 5b , d6 , 5c , d6, 5a, b, c6, 5b, c, d6, 5a, c, d6, 5a, segundo, d6, 5a, segundo, c, d6

12. 25 14. 40 16. 25 17. 37 20. 18 22. 5 23. 30 arreglos diferentes 25. 90.000 números 27. 330; 46

29. (a) 15 (b) 15 (c) 15 (d) 25 (e) 40 31. (a) 100,4 millones (b) 111,6 millones 33. 576 carteras

36.



37. A ≈ 41,4°, B ≈ 41,4°, C ≈ 97,2° 38. 2, 5, - 2 39. e 1 18 f 40. 5 - 622, 0, 6226

41. x = 3, y = - 2; x = 8, y = 3 o 13, - 22, 18, 32 42. 6x3 - 31x2 + 43x - 28

43. Converge; 10 44. (a) $x = \frac{15}{8}$ (b) en x = 2 45. $\frac{5}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{7}{(x+1)^2}$

13.2 Evalúe su comprensión (página 909)

3. permutación 4. combinación 5. $\frac{n!}{(n-r)!}$ 23.5kno, 6. $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ 7, 30 10, 24 12, 1 14, 1680 15 , 28 18 , 35 20, 1 22, 10.400.600

knp, knq, kon, kop, koq, kpn, kpo, kpq, kqn, kqo, kqp, nko, nkp, nok, nop, npk, npo, npq, nqk, nqo, nqp, okn, okp, okq , onk, onp, onq, opk, opn, opq, oqk, oqn, oqp, qnp, noq, pkn, pko, pkq, pnk, pno, pnq, pok, pon, poq, poq, pqk, pqn, pqo, qkn, qko, qkp, qnk, qno, qok, qon, qop, qpk, qpn, qpo6; 60

25.5345, 346, 354, 364, 435, 436, 534, 634, 453, 463, 543, 643, 456, 465, 546, 564, 645, 654, 356, 365, 536, 635, 653, 5636 ; 24

27.5ab, ac, ad, ae, af, ag, bc, bd, be, bf, bg, cd, ce, cf, cg, de, df, dg, ef, eg, fg6; 21 29. 5123, 124, 134, 2346; 4 32. 125 33. 64 35. 720 38. 30

39. 12 355 928 42 910 _

62. 15 63. (a) 125.000; 117,600 (b) Un mejor nombre para una cerradura de combinación sería cerradura de permutación porque el orden de los números importa.

68. 10 pies cuadrados 69. (g f)(x) = 4x2 - 2x - 2 70. sen 75° = $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$; porque 15° = $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ o cos 15° = $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$ 71. a5 = 80

72. x5 + 10x4 y + 40x3 y2 + 80x2 y3 + 80xy4 + 32 y5 73. x = 3, y = - 1 o 13, - 12 74. J 6 - 6 14 5 R 75. 2acos 5p $\frac{5p}{6}$ + peco _ 6b; 2ei # 5p>6

76. $\frac{5}{x^2+2} + \frac{3x+4}{(1x^2+2)^2}$ 77. $\frac{16x-30}{(1x-3)^2 2>5}$

Problema histórico (página 918)

1. (a)5AAAA, AAAB, AABA, AABB, ABAA, ABAB, ABBA, ABBB, BAAA, BAAB, BABA, BABB, BBAA, BBAB, BBBA, BBBB6

(b) P1A gana2 = 24 $\frac{C14,22 + C14,32 + C14,42}{\text{dieciséis}} = \frac{6+4+1}{\text{dieciséis}} = \frac{11}{\text{dieciséis}}$; P1B gana2 = 24 $\frac{C14,32 + C14,42}{\text{dieciséis}} = \frac{4+1}{\text{dieciséis}} = \frac{5}{\text{dieciséis}}$

13.3 Evalúe su comprensión (página 918)

1. igualmente probable 2. complemento 3. F 4. T 6. 0, 0,01, 0,35, 1 7. Modelo de probabilidad 10. No es un modelo de probabilidad

12. (a) S = {HH, HT, TH, TT} (b) P(HH) = $\frac{1}{4}$, P(HT) = $\frac{1}{4}$, P(TH) = $\frac{1}{4}$, P(TT) = $\frac{1}{4}$

14. (a) S = 5HH1, HH2, HH3, HH4, HH5, HH6, HT1, HT2, HT3, HT4, HT5, HT6, TH1, TH2, TH3, TH4, TH5, TH6, TT1, TT2, TT3, TT4 , TT5, TT66

(b) Cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{24}$.

16. (a) S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} (b) Cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{8}$.

18. S = 51 Amarillo, 1 Rojo, 1 Verde, 2 Amarillo, 2 Rojo, 2 Verde, 3 Amarillo, 3 Rojo, 3 Verde, 4 Amarillo, 4 Rojo, 4 Verde6; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{12}$; por lo tanto, P12 Rojo2 + P14 Rojo2 = $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

20. S = {1 Amarillo adelante, 1 Amarillo atrás, 1 Rojo adelante, 1 Rojo atrás, 1 Verde adelante, 1 Verde atrás, 2 Amarillo adelante, 2 Amarillo atrás, 2 Rojo adelante, 2 Rojo atrás, 2 Verde adelante, 2 Verde atrás, 3 amarillo adelante, 3 amarillo atrás, 3 rojo adelante, 3 rojo atrás, 3 verde adelante, 3 verde atrás, 4 amarillo adelante, 4 amarillo atrás, 4 rojo adelante, 4 rojo atrás, 4 verde adelante,

4 verde hacia atrás}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{24}$; por lo tanto, P11 Rojo Atrás2 + P11 Verde Atrás2 = $\frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$.

22. S = {11 Rojo, 11 Amarillo, 11 Verde, 12 Rojo, 12 Amarillo, 12 Verde, 13 Rojo, 13 Amarillo, 13 Verde, 14 Rojo, 14 Amarillo, 14 Verde, 21 Rojo, 21 Amarillo, 21 Verde, 22 Rojo, 22 Amarillo, 22 Verde, 23 Rojo, 23 Amarillo, 23 Verde, 24 Rojo, 24 Amarillo, 24 Verde, 31 Rojo, 31 Amarillo, 31 Verde, 32 Rojo, 32 Amarillo, 32 Verde, 33 Rojo, 33 Amarillo, 33 Verde, 34 Rojo, 34 Amarillo, 34 Verde, 41 Rojo, 41 Amarillo, 41 Verde, 42 Rojo, 42 Amarillo, 42 Verde, 43 Rojo,

43 Amarillo, 43 Verde, 44 Rojo, 44 Amarillo, 44 Verde}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{48}$; así, E = 522 Rojo, 22 Verde, 24 Rojo, 24 Verde6;

P1E2 = $\frac{n1E2}{n1S2} = \frac{\quad}{48} = \frac{1}{12}$.

Machine Translated by Google

23. A, B, C, F 26. B 27. P1H2 = $\frac{4}{5}$; P1T2 = $\frac{1}{5}$ 30. P112 = P132 = P152 = $\frac{2}{}$; P122 = P142 = P162 = 9 $\frac{1}{9}$ 32. $\frac{3}{10}$ 34. $\frac{1}{2}$ 36. $\frac{1}{6}$ 37. $\frac{1}{8}$

40. $\frac{1}{4}$ 42. $\frac{1}{6}$ 44. $\frac{1}{18}$ 45. 0,55 47. 0,70 50. 0,30 51. 0,867 54. 0,62 56. 0,74 58 , 20 $\frac{17}{}$ 60. $\frac{11}{20}$ 62. $\frac{1}{2}$ 64. $\frac{19}{50}$ 66. $\frac{9}{20}$

67. (a) 0,57 (b) 0,95 (c) 0,83 (d) 0,38 (e) 0,29 (f) 0,05 (g) 0,78 (h) 0,71

69. (a) $\frac{25}{33}$ (b) $\frac{25}{33}$ 71. 0,167 73. $\frac{1}{25.989.600}$ ≈ 0,0000000385 75, 2; izquierda; 3; abajo 76. 1 - 3, 3232 77. 5226 78. 12, - 3, - 12 79. - 40

80. 1023 81. 48 mph 82. 593 83. 8p + 12 unidades cuadradas 84. $\frac{4}{x - 2} + \frac{3x - 7}{x2 + 2x + 4}$

Ejercicios de repaso (página 922)

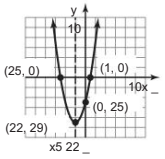
1. , 5Dave6, 5Joanne6, 5Erica6, 5Dave, Joanne6, 5Dave, Erica6, 5Joanne, Erica6, {Dave, Joanne, Erica6 2. 17 3. 24 4. 29 5. 34 6. 7
7. 45 8. 25 9. 7 10. 336 11. 56 12. 48 13. 128 14. 3024 15. 1680 16. 496 17. 1.600.000 18. 216.000
19. 256 (permitiendo números con ceros iniciales, como 011) 20. 2.522.520 21. (a) 381.024 (b) 1260 22. (a) 8,634628387 * 1045 (b) 0,6531
(c) 0,3469 23. (a) 0,038 (b) 0,962 24, 8 $\frac{1}{}$ 25. 0,5; 0,24 26. (a) 0,68 (b) 0,58 (c) 0,32

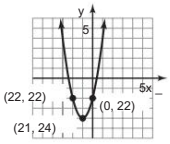
Prueba de capítulo (página 923)

1. 22 2. 3 3. 8 4. 45 5. 5040 6. 151,200 7. 462 8. Hay 54,264 maneras de elegir 6 colores diferentes de los 21 colores disponibles.
9. Hay 840 disposiciones distintas de las letras de la palabra REDIMIDO. 10. Hay 56 apuestas exactas diferentes para una carrera de 8 caballos.
11. Hay 155.480.000 matrículas posibles utilizando el nuevo formato. 12. (a) 0,95 (b) 0,30 13. (a) 0,25 (b) 0,55 14. 0,19 15. 0,000033069
16. P1exactamente 2 cuatros2 = $\frac{625}{3888}$ ≈ 0,1608

Revisión acumulativa (página 924)

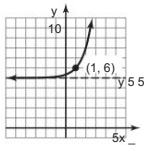
1. y $\frac{}{3}$ - $\frac{22}{3}$ i, $\frac{1}{3}$ + $\frac{22}{3}$ si _

2. 

3. 

4. 5x 3,99 … x … 4,016 o 33,99, 4,014

5. mi - $\frac{1}{2}$ + $\frac{27}{2}$ yo, $\frac{1}{-2}$ - $\frac{27}{2}$ yo, - $\frac{1}{5}$, 3f

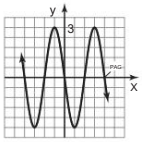
6. 

Dominio: todos los números reales

Rango: {aa 7 5}

Asíntota horizontal: y = 5

7. 2 8. y 8 3 f 9. x = 2, y = - 5, z = 3 10. 125; 700

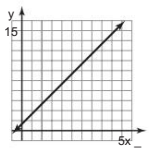
11. 

12. a ≈ 6,09, B ≈ 31,9°, C ≈ 108,1°;
área ≈ 14,46 unidades cuadradas

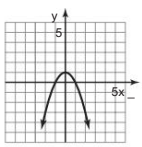
CAPÍTULO 14 Un adelanto del cálculo: el límite, la derivada y la integral de una función

14.1 Evalúe su comprensión (página 930)

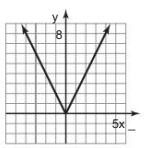
3. lím f1x2 4. no existe 5. T 6. F 7. 32 10. 1 12. 4 14. 2 16. 0 17. 3 20. 4 22. No existe
xSc

23. 

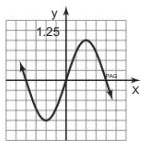
Lim f1x2 = 13
xS4

26. 

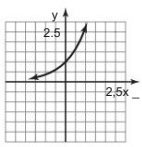
Lim f1x2 = - 3
xS2

28. 

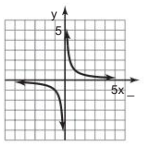
Lim f1x2 = 6
xS-3

30. 

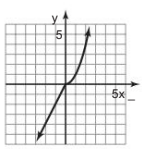
Lim f1x2 = 1
xSp/2

32. 

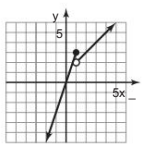
Lim f1x2 = 1
xS0

34. 

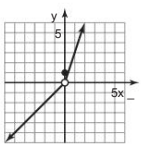
Lim f1x2 = - 1
xS-1

36. 

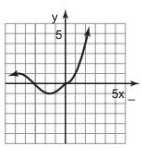
Lim f1x2 = 0
xS0

37. 

Lim f1x2 no existe.
xS1

40. 

Lim f1x2 = 0
xS0

42. 

Lim f1x2 = 0
xS0

43. 0,67 46, 1,6 48, 0

Machine Translated by Google

14.2 Evalúe su comprensión (página 937)

3. producto 4. A 5. c 6. T 7. F 8. F 9. 5 12. 4 14. - 10 15. 8 17. 8 20. - 1 22. 8 24. 3 25. - 1 27. 32 30, 2 32, 6

$\frac{7}{}$ 8 34 , 3 36, 0 37, 5 $\frac{}{}$

40. 0 42. $\frac{22}{4}$ 3 43 , 5 46, 6 48 , 0 50, 0 52. - 1 54, 1 56, 4 $\frac{}{}$

14.3 Evalúe su comprensión (página 943)

7. unilateral 8. $\lim_{x \to c^+} f(x) = R$ 9. continuo; c 10. F 11. T 12. T 14. 5x - 8 … x 6 - 6 o - 6 6 x 6 4 o 4 6 x … 66 16. - 8, - 5, - 3

18. f1 - 82 = 0; f1 - 42 = 2 20. q 21. 2 24. 1 26. El límite existe; 0 27. No 30. Sí 32. No 34. 5 35. 7 38. 1 40. 4 42. - 3

$\frac{2}{}$ $\frac{}{3}$ 44. 2

46. Continuo 48. Continuo 50. No continuo 52. No continuo 53. No continuo 56. Continuo 58. No continuo

60. Continua 61. Continua para todos los números reales 64. Continua para todos los números reales 66. Continua para todos los números reales

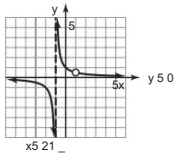
68. Continuo para todos los números reales excepto $x = \frac{kp}{2}$, donde k es un entero impar 70. Continuo para todos los números reales excepto x = - 2 y x = 2

72. Continuo para todos los números reales positivos excepto x = 1 73. Discontinuo en x = - 1 y x = 1;

1 litro $\lim_{x \to 1^-} R(x) = x - 1$ $\frac{}{2}$: agujero en $a1, \frac{1}{2}b$

$\lim_{x \to -1^-} R(x) = -q$; $\lim_{x \to -1^+} R(x) = q$;

asíntota vertical en x = - 1

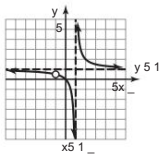


76. Discontinuo en x = - 1 y x = 1;

límite $x \to -1$ $R(x) = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{}$: agujero en $a - 1, \frac{}{2}b$

$\lim_{x \to 1^-} R(x) = -q$; $\lim_{x \to 1^+} R(x) = q$;

asíntota vertical en x = 1

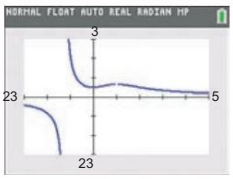


78. x = - 23 2: asíntota; x = 1: agujero

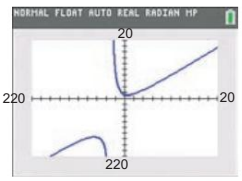
80. x = - 3: asíntota; x = 2: agujero

82. x = - 23 2: asíntota; x = - 1: agujero

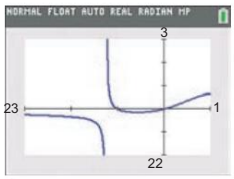
83.



85.



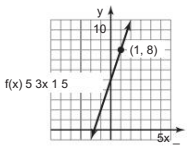
87.



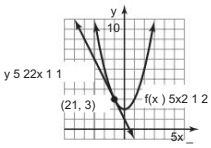
14.4 Evalúe su comprensión (página 951)

3. recta tangente 4. derivada 5. velocidad 6. T 7. T 8. T

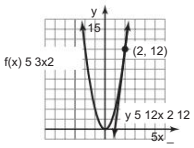
10. mtan = 3



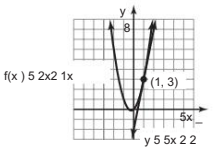
11. mtan = - 2



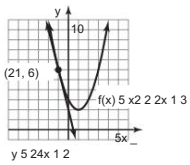
14. mtan = 12



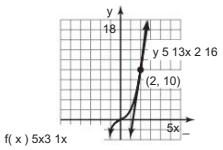
16. mtan = 5



18. mtán = - 4



20. mtan = 13



21. - 4 24. 0 26. 7 28. 7 30. 3 32. 1 33. 60 36. - 0.8587776956 38. 1.389623659 40. 2.362110222 42. 3.643914112 43. 108p pies3 /pie 46. 100p pies3 /pie 48. (a) 8 s (b) 96 pies/s (c) (- 32t + 128) pies/s

(d) 64 pies/s (e) 4 s (f) 256 pies (g) - 128 pies/s

49. (a) - $\frac{70}{}$ pies/seg (b) - 21 pies/seg (c) - 18 pies/seg 3

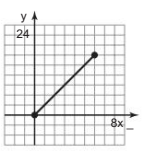
(d) s1t2 = - 2,631t (e) ^{2} - 10.269t + 999.933

Aproximadamente - 15,531 pies/seg

14.5 Evalúe su comprensión (página 958)

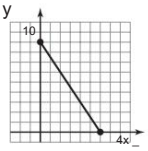
3. $yo_a^b f(x)\,dx$ 4. $L_a^b f(x)\,dx$ 6. 3 8. 56

9. (un)



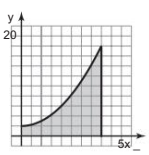
(b) 36 (c) 72 (d) 45 (e) 63 (f) 54

11. (a) y



(b) 18 (c) 9 63 45 (d) (e) $\frac{}{4}$ $\frac{}{4}$ (f) $\frac{27}{2}$

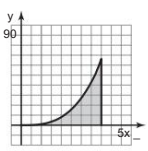
14. (a)



(b) 22 (c) $\frac{51}{2}$

(d) $L_0^4 (1x2 + 22)\,dx$ (e) $\frac{88}{3}$

16. (un)

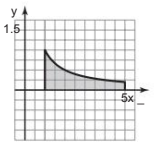


(b) 36 (c) 49

(d) $L_0^4 x3\,dx$ (e) 64

Machine Translated by Google

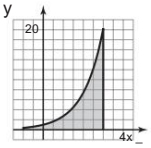
18. (un)



(b) $\frac{25}{12\,5}$ c) $\frac{4609}{2520}$

(d) $\int_1^{12} \frac{1}{x}dx$ (e) 1.609

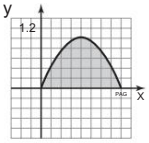
20. (a) y



(b) 11.475 c) 15.197

(d) $\int_{-1}^{3} e^x dx$ (e) 19.718

22. (a) y

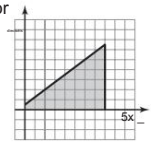


(b) 1.896 c) 1.974

(d) $\int_0^{pag} \text{pecado } x\,dx$ (e) 2

24. (a) Área bajo la gráfica de f1x2 = 3x + 1 de 0 a 4

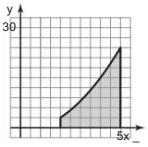
(por



(c) 28

26. (a) Área bajo la gráfica de f1x2 = x2 - 1 de 2 a 5

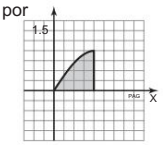
(b)



(c) 36

28. (a) Área bajo la gráfica de f1x2 = sen x de 0 a 2 pag

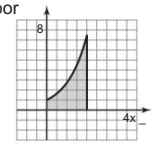
(por



(c) 1

30. (a) Área bajo la gráfica de f1x2 = ex de 0 a 2

(por



c) 6.389

31. Usando puntos finales izquierdos: n = 2: 0 + 0,5 = 0,5;

norte = 4: 0 + 0,125 + 0,25 + 0,375 = 0,75;

n = 10: 0 + 0,02 + 0,04 + 0,06 + g+ 0,18 = $\frac{10}{2}$ 10 + 0,182 = 0,9;

n = 100: 0 + 0,0002 + 0,0004 + 0,0006 + g+ 0,0198

= $\frac{100}{2}$ 10 + 0,01982 = 0,99

Usando puntos finales correctos:

norte = 2: 0,5 + 1 = 1,5; n = 4: 0,125 + 0,25 + 0,375 + 0,5 = 1,25;

n = 10: 0,02 + 0,04 + 0,06 + g+ 0,20 = $\frac{10}{2}$ 10,02 + 0,202 = 1,1;

n = 100: 0,0002 + 0,0004 + 0,0006 + g+ 0,02

= $\frac{100}{2}$ 10,0002 + 0,022 = 1,01

Ejercicios de repaso (página 960)

1. 64 2. 25 3. 6 4. 0 5. 64 6. - 4 $\frac{1}{-}$ 7. $\frac{1}{10}$ 8. $\frac{10}{9}$ 9. 0 10. $\frac{6}{23}$ 11. $\frac{83}{10}$ 12. Continuo 13. No continuo 14. No continuo 15. Continuo

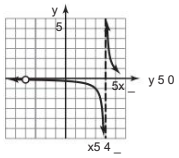
16. 5x - 6 … x 6 2 o 2 6 x 6 5 o 5 6 x … 66 17. Todos los números reales 18. 1, 6 19. 4 20. f1 - 62 = 2; f1 - 42 = 1 21. 4 22. - 2 23. - q
24. q 25. No existe 26. No 27. Sí

28. R es discontinuo en x = - 4 y x = 4.

$\lim_{xS-4}$ R1x2 = - $\frac{1}{8}$: agujero en a - 4, - $\frac{1}{8}$ b

$\lim_{xS4-}$ R1x2 = -q; $\lim_{xS4}$ +R1x2 = q:

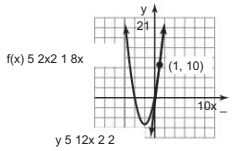
La gráfica de R tiene una asíntota vertical en x = 4.



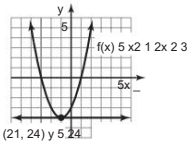
29. Indefinido en x = 2 y x = 9;

R tiene un hueco en x = 2 y una asíntota vertical en x = 9.

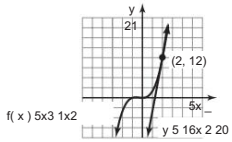
30. mtan = 12



31. mtan = 0



32. mtan = 16

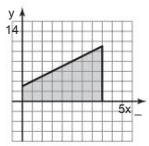


33. - 12 34. - 1 35. 11 36. - 158 37. 0.6662517653

38. (a) 7 s (b) 6 s (c) 64 pies/s (d) 1 - 32t + 962 pies/s (e) 32 pies/s (f) En t = 3 s (g) - 96 pies/seg (h) - 128 pies/seg

39. (a) $61,29/reloj (b) $71,31/reloj (c) $81,40/reloj (d) R1x2 = - 0,25x2 + 100,01x - 1,24 (e) Aproximadamente $87,51/reloj

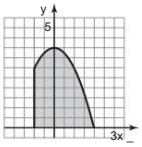
40. (un)



(b) 24 (c) 32

(d) 26 (e) 30 (f) 28

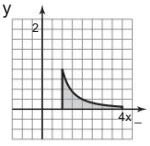
41. (un)



(b) 10 (C) $\frac{77}{8}$

(d) $\int_{-1}^{2} 14 - x22\,dx$ (e) 9

42. (a) y

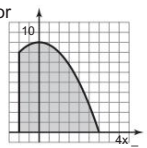


(b) $\frac{49}{36}$ ≈ 1,36c) 1,02

(d) $\int_1^4 \frac{1}{x2}$ dx (e) 0,75

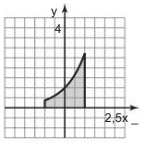
43. (a) Área bajo la gráfica de f1x2 = 9 - x2 de - 1 a 3

(por



(C) $\frac{80}{3}$

Machine Translated by Google

44. (a) Área bajo la gráfica de f1x2 = ex de - 1 a 1 (b)  c) 2,35

Prueba de capítulo (página 962)

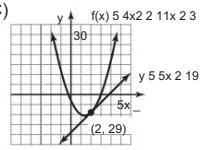
1. - 5 2. 3 $\frac{1}{}$ 3. 5 4. - 2 5. 135 6. 3 $\frac{2}{}$ 7. - 1 8. - 3 9. 5 10. 2 11. Existe límite; 2

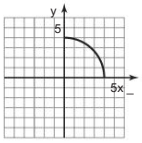
12. (a) Sí (b) No; Lim $_{xS1}$ f1x2 ≠ f112 (c) No; Lim $_{xS3}$ f1x2 no existe. (d) Sí

13. x = - 7: asíntota; x = 2: agujero

14. (a) 5

(b) y = 5x - 19

(C) 

15. (un) 

b) 13.359

(c) 4p ≈ 12,566

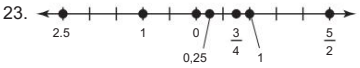
16. $\int_{yo1}^{4}$ 1 - x2 + 5x + 32 dx 17. $\frac{106}{3}$ pies/seg

APÉNDICE A Revisión

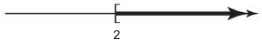
A.1 Evalúe su comprensión (página A10)

1. variable 2. origen 3. estricto 4. base; exponente o potencia 5. d 6. b 7. a 8. T 9. F 10. T 11. 51, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 96

13. 546 15. 51, 3, 4, 66 17. 50, 2, 6, 7, 86 19. 50, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 96 21. 50, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 96

23. 

25. 7 27. 7 29. 7 31. = 33. 6 35. x 7 0 37. x 6 2 39. x … 1

41. 

43.

45. 1 47. 2 49. 6 51. 4 53. - 28 55. $\frac{4}{5}$ 57. 0 59. 1 61. 5 63. 1

65. 22 67. 2 69. x = 0 71. x = 3 73. Ninguno 75. x = 0, x = 1, x = - 1 77. 5x x ≠ 56 79. 5x x ≠ - 46 81. 0° 83, 25°C 85 , 16

87. $\frac{1}{\text{décadas}}$ 89. $\frac{1}{9}$ 91. 9 93. 5 95. 4 97. 64x6 99. y2 $\frac{x4}{}$ 101. $\frac{x}{y}$ 103. - 9 $\frac{8x3z_}{\text{años}}$ 105. $\frac{16x2}{9y2}$ 107. - 4 109. 5 111. 4 113. 2 115. 15 117. 2 $\frac{-}{}$ $\frac{1}{}$ 119, 10; 0

304.006,671 125. 0,004 127. 481,890 129. 0,000 131. A = lw 133. C = pd 135. A = pr 3 $\frac{13}{4}$ $\frac{-}{}$ x2 137. V = 3 121. 81 123. $\frac{4}{}$ 139. V = x3

141. (a) $6000 (b) $8000 143. x - 4 Ú 6 145. (a) 2 … 5 (b) 6 7 5 147. (a) Sí (b) No 149. No; es más grande; 0,000333… 151. No $\frac{1}{3}$

A.2 Evalúe su comprensión (página A19)

1. derecho; hipotenusa 2. A = bh 3. C $\frac{1}{}$ = 2pr 4. similar 5. c 6. b 7. T 8. T 9. F 10. T 11. T 12. F 13. 13 15. 26 17. 25

2 19. Triángulo rectángulo; 5 21. No es un triángulo rectángulo 23. Triángulo rectángulo; 25 25. No es un triángulo rectángulo 27. 42 pulg.2 29. 28 pulg.2 31. A = 25p m2 ; C = 10p.m.

33. V = 240 pies3 ; S = 236 pies2 35. V = $\frac{500}{3}$ pcm3 ; S = 100p cm2 37. V = 648p pulg.3 ; S = 306p pulg.2 39. p unidades cuadradas 41. 2p unidades cuadradas

43. x = 4 unidades; A = 90°; B = 60°; C = 30° 45. x = 67,5 unidades; A = 60°; B = 95°; C = 25° 47. Aproximadamente 16,8 pies 49, 64 pies2

51. 24 + 2p ≈ 30,28 pies2 ; 16 + 2p ≈ 22,28 pies 53. 160 pasos 55. Aproximadamente 5,477 millas 57. Desde 100 pies: 12,2 millas; Desde 150 pies: 15,0 millas

59. No. El área se cuadriplica.

A.3 Evalúe su comprensión (página A30)

1, 4; 3 2. x4 - 16 3. x3 - 8 4. F 5. F 6. T 7. F 8. sumar; 4 15. Monomio; variables: x; $\frac{25}{}$ 9. cociente; divisor; resto 10. a 11. c 12. b 13. d 14. c

coeficiente: 2; grado: 3 17. No es un monomio; el exponente de la variable no es un número entero no negativo

19. No es un monomio; tiene más de un término 21. No es un monomio; el exponente de una de las variables no es un número entero no negativo

23. No es un monomio; tiene más de un término 25. Sí; 2 27. Sí; 0 29. No; el exponente de una de las variables no es un número entero no negativo

31. Sí; 3 33. No; el polinomio del denominador tiene un grado mayor que 0 35. x2 + 7x + 2 37. x3 - 4x2 + 9x + 7 39. - 2x3 + 18x2 - 18

41. 15y2 - 27y + 30 43. x3 + x2 - 4x 45. x2 + 6x + 8 47. 2x2 + 9x + 10 49. x2 - 49 51. 4x2 - 9 53. x2 + 8x + 16 55. 4x2 - 12x + 9

57. x3 - 6x2 + 12x - 8 59. 8x3 + 12x2 + 6x + 1 61. 4x2 - 11x + 23; resto - 45 63. 4x - 3; resto x + 1

65. 5x2 - 13; resto x + 27 67. 2x2 ; resto - x2 + x + 1 69. x2 - 2x + $\frac{1}{2}$; resto x + $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$ 71. - 4x2 - 3x - 3; resto - 7

73. x2 - x - 1; resto 2x + 2 75. x2 + ax + a2 ; resto 0 77. 1x + 62 1x - 62 79. 211 + 2x2 11 - 2x2 81. 1x + 12 1x + 102

83. 1x - 72 1x - 32 85. 41x2 - 2x + 82 87. Prima 89. - 1x - 52 1x + 32 91. 31x + 22 1x - 62 93. y2 1y + 52 1y + 62 95. 12x + 32 97 .213x + 12 1x + 12 99. 1x - 32 1x + 32 ^{2}

1x2 + 92 101. 1x - 12 2 1x2 + x + 12 103. x5 1x - 12 1x + 12 105. 14x + 32 107. - 14x - 52 14x + 12 ^{2} 109. 12y - 52 12y - 32 111. - 13x - 12 13x + 12 ^{2}

1x2 + 12 113. 1x + 32 1x - 62 115. 1x + 22 1x - 32

Machine Translated by Google

117. 13x - 52 19x2 - 3x + 72 119. 1x + 52 13x + 112 121. 1x - 12 1x + 12 1x + 22 123. 1x - 12 1x + 12 1x2 - x + 12 125. 25; 1x + 52 2

127, 9; 1 año - 32 2 129. $\frac{1}{\text{dieciséis; hacha - 4 b}}$ $\frac{1}{}$ 2 131. 213x + 42 19x + 132 133. 2x13x + 52 135. 51x + 32 1x - 22 2 1x + 12 137. 314x - 32 14x - 12

139. 613x - 52 12x + 12 2 15x - 42

141. Las posibilidades son 1x { 12 1x { 42 = x2 { 5x + 4 o 1x { 22 1x { 22 = x2 { 4x + 4, ninguna de las cuales es igual a x2 + 4.

A.4 Evalúe su comprensión (página A34)

1. cociente; divisor; resto 2. - 3)2 0 - 5 1 3. d 4. a 5. T 6. T 7. x2 - 5x - 5; resto 0 9. 3x2 + 11x + 32; resto 99

11. x4 - 3x3 + 5x2 - 15x + 46; resto - 138 13. 4x5 + 4x4 + x3 + x2 + 2x + 2; resto 7 15. 0,1x2 - 0,11x + 0,321; resto - 0,3531

17. x4 + 2x3 + 4x2 + 8x + 16; resto 0 19. No 21. Sí 23. Sí 25. No 27. Sí 29. - 9

A.5 Evalúe su comprensión (página A42)

1. términos más bajos 2. mínimo común múltiplo 3. T 4. F 5. d 6. a 7. $\frac{3}{x - 3}$ 9. $\frac{x}{3}$ 11. $\frac{4x}{2x - 1}$ 13. $\frac{y + 5}{\text{21 años + 12}}$ 15. $\frac{3}{5x1x - 22}$

17. $\frac{2x(x2 + 4x + 16)}{x + 4}$ 19. $\frac{4}{51x - 12}$ 21. - $\frac{1x - 42}{4x}$ 2 $\frac{1x - 22\ 1x + 22}{23.\ 2x - 3}$ 25. $\frac{21x2 - 22}{x1x - 22\ 1x + 22 -}$ 27. $\frac{5x}{1x - 62\ 1x - 12\ 1x + 42}$

29. $\frac{212x2 + 5x - 22}{1x - 22\ 1x + 22\ 1x + 32\ 1x - 12x13x + 22}$ 31. $\frac{5x + 1}{2\ 1x + 12\ 2}$ $\frac{x + 1}{33.x - 1}$ 35. $\frac{2x1x2 - 22}{1x + 22\ 1x2 - x - 32}$ 37. $\frac{19}{13x - 52\ 2}$ 39. $\frac{1x + 12\ 1x - 12}{1x2 + 12\ 2}$

41. $\frac{43. - 1x2 + 12}{13x + 12\ 2}$ $\frac{1x + 32\ 13x - 12}{2}$ 45. f = $\frac{\text{R1 \# R2}}{\text{1n - 12 1R1 + R22}}$ $\frac{2}{15}$

A.6 Evalúe su comprensión (página A51)

5. identidad 6. F 7. T 8. agregar; $\frac{25}{4}$ 9. discriminante; negativo 10. F 11. F 12. b 13. b 14. d 15. 576 17. 5 - 36 19. 546 21. e 5 4 f 23. 5 - 16

25. 5 - 186 27. 5 - 36 29. 5 - 166 31. 50.56 33. 526 35. 526 37. 536 39. 50, 96 41. 50, 96 43. 5216 45. 5 - 2, 26 47. 566

49. 5 - 3, 36 51. 5 - 4, 16 53. e - 1, 2 f 55. 5 - 3 4, 46 57. {2} 59. No hay solución real 61. 5 - 2, 26 63. 5 - 1, 36 65, 5 - 2, - 1, 0, 16 67 , 50, 46

69. 5 - 6, 26 71. mi - 89. $\frac{1}{2}$, 3 f 73. {3, 4} 75. b 3 2r 77.e- _ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$f 79.e- _ $\frac{3}{4}$, 2f 81. 5 - 5, 56 83. 5 - 1, 36 85. 5 - 3, 06 87. 5 - 7, 36

mi - $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$f 91.e - 1 - $\frac{17}{6}$, $\frac{- 1 + 17}{6}$ f 93. 52 - 12, 2 + 126 95. e 5 - 129 $\frac{}{2}$, $\frac{5 + 129}{2}$ f 97. e 1, 2 f 3 99. No hay solución real

101. mi - 1 - 4 15, $\frac{- 1 + 15}{4}$ f 103. e - 13 - 115 $\frac{}{2}$, $\frac{- 13 + 115}{2}$ f 105. Ninguna solución real 107. Solución real repetida

109. Dos soluciones reales desiguales 111. x = $\frac{b + c}{a}$ 113. x = $\frac{a\ B\ C}{a + b}$ 115. x = a2 117. R = R1 $\frac{R1R2}{+ R2}$ 119.R = _ $\frac{mv2}{F}$ 121.r = _ $\frac{S - un}{S}$

123. $\frac{- b + 2b2 - 4ac}{2a}$ + $\frac{- b - 2b2 - 4ac}{2a}$ = $\frac{- 2b}{2a}$ = $\frac{- b}{a}$ 125. k = - o 2 $\frac{1}{}$ $\frac{1}{2}$

127. Las soluciones de ax2 - bx + c = 0 son y $\frac{b + 2b2 - 4ac}{2a}$ $\frac{b - 2b2 - 4ac}{2a}$. 129. b

A.7 Evalúe su comprensión (página A61)

1. T 2. 5 3. F 4. real; imaginario; unidad imaginaria 5. F 6. T 7. F 8. b 9. a 10. c 11. 8 + 5i 13. - 7 + 6i 15. - 6 - 11i 17. 6 - 18i

19. 18 - 21i 21. 10 - 5i 23. 26 25. 5 $\frac{6}{}$ + $\frac{8}{}$ yo 27. 1 - 2 yo 29. 5 2 $\frac{5}{}$ - $\frac{7}{2}$ yo 31. - 2 $\frac{1}{}$ + $\frac{23}{2}$ yo 33. 2i 35. - yo 37. 1 39. - 6 41. - 10i 43. - 2 + 2i

45. 0 47. 0 49. 2i 51. 5i 53. 223i 55. 1022i 57. 5i 59. 5 - 2i, 2i6 61. 5 - 4, 46 63. 53 - 2i, 3 + 2i6 65. 53 - i, 3+ i6

67. b $\frac{}{5}$ - $\frac{1}{\text{yo, 5}}$ $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$ i r 69. b 1 $\frac{}{5}$ - $\frac{2}{5}$ yo, $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ i r 71. b - $\frac{1}{2}$ - $\frac{23}{2}$ yo, - $\frac{1}{2}$ + $\frac{23}{2}$ i r 73. 54, - 2 - 2 23 i, - 2 + 223 i6 75. 5 - 2, 2, - 2i, 2i6

77. 5 - 3i, - 2i, 2i, 3i6 79. Dos soluciones complejas que son conjugadas entre sí 81. Dos soluciones reales desiguales 83. Una solución real repetida

85. 2 - 3i 87. 6 89. 25 91. 2 + 3i ohmios 93. z + z = 1a + bi2 + 1a - bi2 = 2a; z - z = 1a + bi2 - 1a - bi2 = 2bi

95. z + w = 1a + bi2 + 1c + di2 = 1a + c2 + 1b + d2i = 1a + c2 - 1b + d2i = 1a - bi2 + 1c - di2 = z + w

A.8 Evalúe su comprensión (página A69)

1. modelado matemático 2. interés 3. movimiento uniforme 4. F 5. T 6. a 7. b 8. c 9. A = pr 11. A = s2 ; A = área, 2; r = radio, A = área

s = longitud de un lado 13. F = ma; F = fuerza, m = masa, a = aceleración 15. W = Fd; W = trabajo, F = fuerza, d = distancia

17. C = 150x; C = costo variable total, x = número de lavavajillas 19. Invierte $31,250 en bonos y $18,750 en el CD. 21. Se prestaron $11,600 al 8%.

23. Mezcle 75 libras de té Earl Grey con 25 libras de té Orange Pekoe. 25. Mezclar 156 lb de anacardos con las almendras. 27. La velocidad de la corriente es 2,286 mi/h.

29. La velocidad de la corriente es 5 mi/h. 31. Karen caminó a 3,75 pies/seg. 33. Una cancha de tenis para dobles tiene 78 pies de largo y 36 pies de ancho.

Machine Translated by Google

35. Trabajando juntos, se necesitan 12 min. 37. (a) Las dimensiones son 10 pies por 5 pies. (b) El área es 50 pies cuadrados. (c) Las dimensiones serían 7,5 pies por 7,5 pies.
(d) El área sería de 56.25 pies cuadrados. 39. El back defensivo alcanza al ala cerrada en la línea de 45 yardas del ala cerrada. 41. Agregue galones de agua. 3 —
43. Evaporar 10,67 oz de agua. 45. Se deben mezclar 40 g de oro de 12 quilates con 20 g de oro puro. 47. Mike pasa a Dan 1 — milla desde el inicio, 2 min 3
desde el momento en que Mike empezó a correr. 49. Arrancar la bomba auxiliar a las 9:45 am. 51. La tina se llenará en 1 hora. 53. Carrera: 12 millas; bicicleta: 75 millas
55. Bolt superaría a Burke por 18,25 m. 57. Las dimensiones deben ser 4 pies por 4 pies. 61. La velocidad promedio es 49.5 mi/h.
63. El porcentaje de la mezcla de la solución debe estar entre los dos porcentajes de los componentes utilizados para preparar la solución.

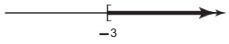
A.9 Evalúe su comprensión (página A80)

3. intervalo cerrado 4. Propiedades de multiplicación 5. T 6. T 7. T 8. F 9. T 10. F 11. d 12. c 13. 30, 24; 0 … x … 2 15. 32, q 2; x Ú 2 17. 30, 32; 0 … x 6 3 19. (a) 6 6 8 (b)
- 2 6 0 (c) 9 6 15 (d) - 6 7 - 10 21. (a) 7 7 0 (b) - 1 7 - 8 (c) 12 7 - 9 (d) - 8 6 6 23. (a) 2x + 4 6 5 (b) 2x - 4 6 - 3 (c) 6x + 3 6 6 (d) - 4x - 2 7 - 4

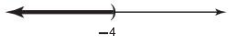
25. 30, 44

27. 34, 62

29. 3 - 3, q 2



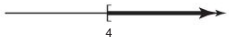
31. 1 - q, - 42



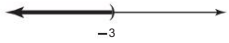
33. 2… x … 5

35. - 4 6 x … 3

37. x Ú 4



39.x6-3 _ _

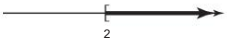


41. 6 43. 7 45. Ú 47. 6 49. … 51. 7 53. Ú 55. 0 6

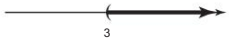
57. x 6 1 — 6 1 — 6 1 — 6 0
x 5 - 5

59. 5x|x 6 46 o 1 - q, 42

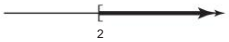
61. 5x|x Ú 26 o 32, q 2



63. 5x|x 7 36 o 13, q 2

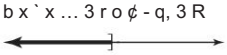


65. 5x|x Ú 26 o 32, q 2

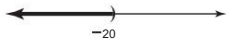


67. 5x|x 7 - 76 o 1 - 7, q 2

69. b x ` x … 2 — 3 r o ¢ - q, 2 — 3 R

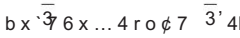


71. 5x|x 6 - 206 o 1 - q, - 202

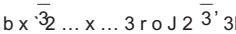


73. b x ` x Ú 4 — 3 r o J 4 — 3 ’ q ≤

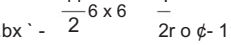
75. b x ` 7 — 3 6 x … 4 r o ¢ 7 — 3 ’ 4R



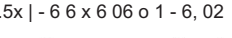
77. b x ` 2 — 3 … x … 3 r o J 2 — 3 ’ 3R



79.bx ` - 11 — 2 6 x 6 1 — 2r o ¢- 11 — 2 ’ 1 — 2 ≤

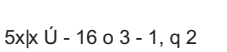


81.5x | - 6 6 x 6 06 o 1 - 6, 02



83. 5x|x 6 - 56 o 1 - q, - 52

85. 5x|x Ú - 16 o 3 - 1, q 2



87.bx`1 _ _ — 2 5 … x6 — 4 r o J 1 — 2 ’ 5 — 4 ≤

89. b x ` x 6 - 1 — 2 r o ¢ - q, - 2 ≤ —

91.bx`3 _ _ — 14 … x6 1 — 4 r o J 3 — 14, ’ 1 — 4 ≤

93. b x ` x 7 10 — 3r o ¢10 — 3 ’ q ≤

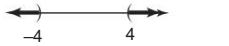
95. 5x|x 7 36 o 13, q 2

97. 5x - 4 6 x 6 46; 1 - 4, 42

99. 5x x 6 - 4 o x 7 46; 1 - q, - 42 14, q 2

101. 5x 0… x … 16; 30, 14

103. 5x x 6 - 1 o x 7 26; 1 - q, - 12 12, q 2



105. 5x - 1... x ... 16; 3 - 1, 14

107. 5x x … - 2 o x Ú 26; 1 - q, - 24 32, q 2

1 109. a = 3, b = 5 111. a = - 12, b = - 8 113. a = 3, b = 11 115. a = 4 —, b = 1 117. a = 4, b = 16 119. 5x|x Ú - 26 121. 21 6 Edad 6 30 123. (a) Hombre Ú
82,2 años (b) Mujer Ú 85,8 años (c) Una mujer podría esperar vivir 3,6 años más.
125. La comisión oscila entre 45.000 y 95.000 dólares, inclusive. Como porcentaje del precio de venta, la comisión oscila entre el 5% y el 8,6%, inclusive.
127. El monto retenido varía de $104,32 a $148,32, inclusive. 129. El consumo varió de 1.150 kWh a 2.050 kWh, ambos inclusive. 131. 5 galletas 133. (a) Necesitas al menos
un 74 en la quinta prueba. (b) Necesitas al menos un 77 en la quinta prueba. b - aa + ba + b 7 0; por lo tanto, un 6 . b -

135. a + b — 2 - un = a + b - 2a — 2 = ——— 2 ——— 2 = 2b - a - b — 2 = b - aa + b 7 0; por lo tanto, b 7 ——— 2.

137. 1 2ab2 2 - a2 = ab - a2 = a1b - a2 7 0; por lo tanto 1 2ab2 2 7 a2 entonces 2ab 7 a.
b2 - 1 2ab2 2 = b2 - ab = b1b - a2 7 0; por lo tanto b2 7 1 2ab2 2 entonces b 7 2ab.

Machine Translated by Google

A.10 Evalúe su comprensión (página A89)

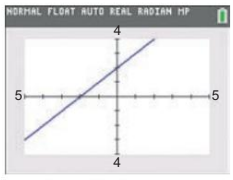
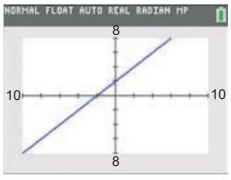
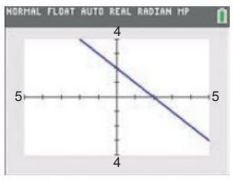
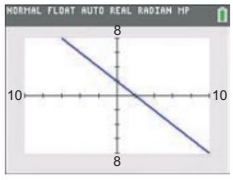
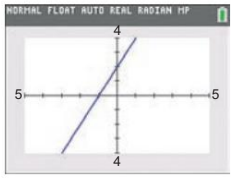
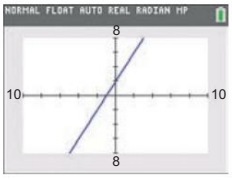
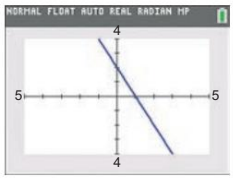
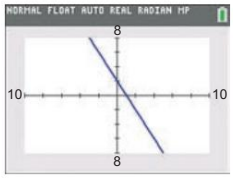
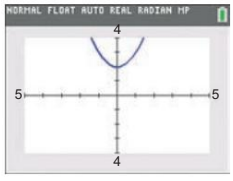
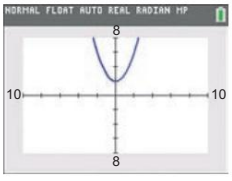
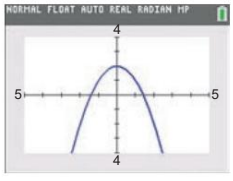
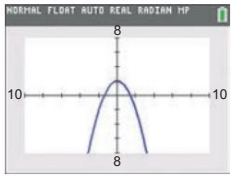
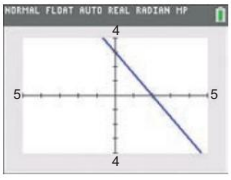
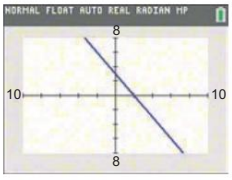
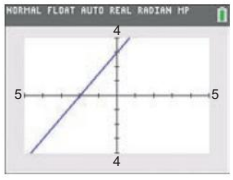
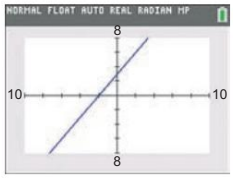
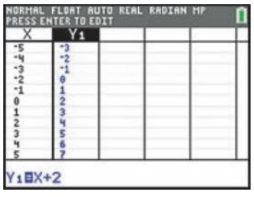
3. índice 4. raíz cúbica 5. b 6. d 7. c 8. c 9. T 10. F 11. 3 13. - 2 15. 222 17. 1027 19. 223 4 21. - 2x23 x 23. 324 3 25. x3 y2
27. x2 y 29. 82x 31. 3x2 y324 2x 33. 5x23x 35. 1523 3 37. 1223 39. 722 41. 623 43. 223 45. - 23 2 47. x - 22x + 1
49. 12x - 12 23 2x 51. 12x - 152 22x 53. - 1x + 5y2 23 2xy 55. $\frac{22}{2}$ 57. - $\frac{215}{5}$ 59. $\frac{15 + 222\ 23}{23}$ 61. $\frac{825\text{-}19}{41}$ 63. 522 + 5 65. $\frac{523\ 4}{2}$
67. $\frac{2x + h - 22x2 + xh}{h}$ 69. $\frac{5}{211 - 1}$ 71. - $\frac{3}{210 + 5}$ 73. $\frac{1}{2x + 2c}$ 75. $\frac{1}{2x - 7 + 1}$ 77. y 2 f 79. 536 81. 4 83. - 4 85. 1000 87. $\frac{1}{8}$
89. $\frac{2722}{32}$ 91. $\frac{2722}{32}$ 93. - $\frac{1}{10}$ 95. $\frac{25}{16}$ 97. x7>12 99. xy2 101. x2>3 y 103. $\frac{8x5>4}{y3>4}$ 105. $\frac{3x + 2}{11 + x2\ 1>2}$ 107. $\frac{x13x2 + 22}{1x2 + 12\ 1>2}$ 109. $\frac{22x + 5}{102x - 5\ 24x + 3}$
111. $\frac{2+ x}{211 + x2\ 3>2}$ 113. $\frac{4- x}{1x + 42\ 3>2}$ 115. $\frac{1}{x2\ 1x2 - 12\ 1>2}$ 117. $\frac{1 - 3x2}{22x11 + x22\ 2}$ 119. $\frac{1}{2}$ 15x + 22 1x + 12 1>2 121. 2x1>2 13x - 42 1x + 12
123. 1x2 + 42 1>3 111x2 + 122 125. 13x + 52 1>3 12x + 32 1>2 117x + 272 127. $\frac{31x + 22}{}$ 129, 1,41 131 , 1,59 133 , 4,89 135 , 2,15
2x1>2 137. (a) 15 660,4 gal (b) 390,7 gal

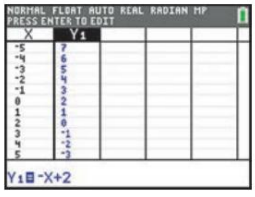
APÉNDICE B Utilidades gráficas

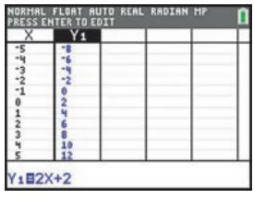
B.1 Ejercicios (página B2)

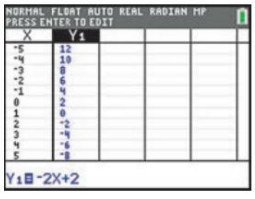
1. (- 1, 4); II 3. (3, 1); I 5. Xmín = - 6, Xmáx = 6, Xscl = 2, Ymín = - 4, Ymáx = 4, Yscl = 2
7. Xmín = - 6, Xmáx = 6, Xscl = 2, Ymín = - 1, Ymáx = 3, Yscl = 1 9. Xmín = 3, Xmáx = 9, Xscl = 1, Ymín = 2, Ymáx = 10, Yscl = 2
11. Xmín = - 11, Xmáx = 5, Xscl = 1, Ymín = - 3, Ymáx = 6, Yscl = 1
13. Xmín = - 30, Xmáx = 50, Xscl = 10, Ymín = - 90, Ymáx = 50, Yscl = 10
15. Xmín = - 10, Xmáx = 110, Xscl = 10, Ymín = - 10, Ymáx = 160, Yscl = 10

B.2 Ejercicios (página B4)

1. (una)

(b)

3. (una)

(b)

5. (a)

(b)

7. (un)

(b)

9. (un)

(b)

11. (un)

(b)

13. (un)

(b)

15. (un)

(b)

17.


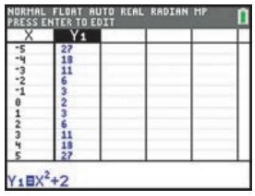
19.


21.


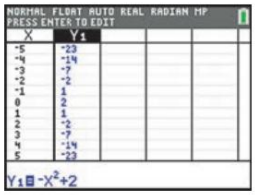
23.


Machine Translated by Google

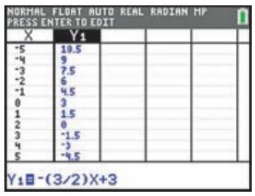
25.



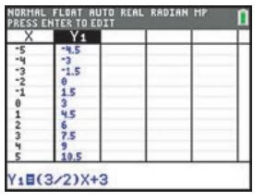
27.



29.



31.



B.3 Ejercicios (página B6)

1. - 3,41 3. - 1,71 5. - 0,28 7. 3,00 9. 4,50 11. 1,00, 23,00

B.5 Ejercicios (página B8)

1. No 3. Sí 5. Las respuestas pueden variar. Una posible respuesta es Ymin = 0, Ymax = 10 e Yscl = 1.

Machine Translated by Google

Créditos fotográficos

Capítulo 1 Página 37, Andrey_Popov/Shutterstock; Página 49, Alex Staroseltsev/Shutterstock; Página 55, stockyimages/Fotolia; Página 55, Departamento de Energía de EE.UU.; Página 70, Dmitry Kalinovsky/123RF; Página 77, Aneese/Shutterstock; Página 77, Pajor Pawel/Shutterstock; Página 80, Andrey_Popov/Shutterstock

Capítulo 2 Página 82, Leigh Prather/Shutterstock; Página 98, NASA; Página 106, Exactostock-1557/Exactostock-1557 80509514/Superstock; Página 158, Leigh Prather/Shutterstock

Capítulo 3 Página 160, Andrey_Popov/Shutterstock; Página 198, Fotografía Geno EJ Sajko/Shutterstock; Página 209, Andrey_Popov/Shutterstock

Capítulo 4 Página 210, FXQuadro/Shutterstock; Página 258, Perry Mastrovito/Getty Images; Página 293, FXQuadro/Shutterstock

Capítulo 5 Página 294, zamollxis/123RF; Página 323, Pearson Education, Inc.; Página 351, Educación Pearson, Inc.; Página 360, Grzegorz Czapski/Shutterstock; Página 365, slacroix/iStock/Getty Images; Página 380, Jupiterimages/Getty Images; Página 396, zamollxis/123RF

Capítulo 6 , página 397, Observatorio Naval de Estados Unidos (USNO); Página 408, Sergey Kohl/Shutterstock; Página 456, Jag_cz/Shutterstock; Página 457, Srdjan Draskovic/123RF; Página 484, Observatorio Naval de EE. UU. (USNO)

Capítulo 7 Página 485, Sebastian Kaulitzki/123RF; Página 556, Sebastián Kaulitzki/123RF

Capítulo 8 Página 557, Jennifer Thermes/Photodisc/Getty Images; Página 569, Foto maestra/Shutterstock; Página 593, sam-whitfield1/Shutterstock; Página 596, dionisvero/Imágenes falsas; Página 609, Jennifer Thermes/Photodisc/Getty Images

Capítulo 9 , página 611, Harvepino/Shutterstock; Página 633, Pearson Education, Inc.; Página 643, SSPL/Getty Images; Página 655, Archivo Hulton/Getty Images; Página 687, Harvepino/Shutterstock

Capítulo 10 Página 688, MarcelClemens/Shutterstock; Página 694, cosma/Shutterstock; Página 706, JB Spector/Museo de Ciencia e Industria, Chicago/Getty Images; Página 753, MarcelClemens/Shutterstock

Capítulo 11 , página 755, Rawpixel.com/Shutterstock; Página 808, División de Impresiones y Fotografías de la Biblioteca del Congreso [LC-USZ62-46864]; Página 850, Rawpixel.com/Shutterstock

Capítulo 12 Página 851, Arthimedes/Shutterstock; Página 861, frankie's/Shutterstock; Página 876, Pearson Education, Inc.; Página 890, Pearson Education, Inc.; Página 895, Arthimedes/Shutterstock

Capítulo 13 Página 896, urbanbuzz/Alamy Foto de archivo; Página 917, GeorgiosArt/Getty Images; Página 924, urbanbuzz/Alamy Foto de stock

Capítulo 14 Página 926, katatonia82/Shutterstock; Página 963, katatonia82/Shutterstock

Apéndice A Página A15, Feraru Nicolae/Shutterstock

Todos los gráficos de la calculadora gráfica TI-84 Plus C de Texas Instruments © copyright de Texas Instruments Education Technology.

Machine Translated by Google

Esta página se ha dejado en blanco intencionalmente

Machine Translated by Google

Índice de materias

Abel, Niels, 278, 890
Abscisa, 38
Máximo y mínimo absolutos de
funciones, 113-115
Valor absoluto, 637, A5–A6
ecuaciones que involucran, A46–A47 Función
de valor absoluto, 123–124, 125–126 Desigualdades de valor
absoluto, A46–A47, A78–A79 Valor acumulado, 362
Ángulos
agudos, 558–560 complementarias,
560 funciones trigonométricas de,
558–560 Suma. Véase también
Suma

de números complejos, A55 de
expresiones racionales, A37–A39 método
del mínimo común múltiplo (MCM) para,
A39–A40 triangular, 889 de
vectores, 650
geométricamente,
646 en el espacio, 670

Principio de suma para contar, 898–899
Propiedad de la suma de desigualdades, A74
Matriz de adyacencia, 811
Fuerzas aerodinámicas, 687
Ahmes (escriba egipcio), 876
Alas de avión, 611
Conceptos básicos de álgebra,
distancia A1-A13 en la recta numérica real,
A5–A6
dominio de variable, A7
evaluación de expresiones algebraicas,
A6–A7
evaluar exponentes, A10 graficar
desigualdades, A5
Leyes de los exponentes, A8–A9
recta numérica real, A4
conjuntos, A1–
A4 simplificación de expresiones trigonométricas,
516–517
para resolver problemas de geometría,
41 raíces cuadradas, A9–A10
Funciones algebraicas, 294
Vector algebraico, 648–649
Algoritmo, 267n
Partículas alfa, 721
Altitud del triángulo, A15
Caso ambiguo, 573
Monto de la anualidad, 875–876
Amplitud del
movimiento armónico simple, 596 de
funciones sinusoidales, 446–448, 466–469
Trigonometría analítica, 485–556
álgebra para simplificar expresiones
trigonométricas, 516–517
Fórmulas de doble ángulo, 536–540 para
establecer identidades, 537–540 para
encontrar valores exactos, 537
Fórmulas de medio ángulo, 540–542
para encontrar valores exactos, 540–
542 para tangentes,
542 funciones inversas. Consulte
Fórmulas
de producto a suma de funciones
inversas, 547–549.
Fórmulas de suma y diferencia, 523–
536 para
cosenos, 523–524
definidos, 523
para establecer identidades, 525–529
para encontrar valores exactos, 524–
527, 526–
527 que involucran función trigonométrica
inversa, 529–530
para senos, 525–527
para tangentes, 528–529
Fórmulas de suma a producto, 548–549
ecuaciones trigonométricas, 505–515
utilidad gráfica para resolver, 510
identidades para resolver, 509–
510 que involucran un ángulo doble,
507 que involucran trigonometría
simple función, 505–
508 lineal,
507 lineal en seno y coseno, 530–532
cuadrática desde, 509
soluciones de, definidas, 505
identidades trigonométricas, 515–523
básicas, 516
estableciendo, 517–520, 525–529, 537–
540 Par-
Impar, 516
pitagórico, 516
cociente, 516
recíproco, 516
ángulo(s), 398–406. Véase también
Funciones trigonométricas
agudas, 558–560
centrales, 400–401
complementarias, 560
conversión entre decimal y
grados, minutos, segundos medidas para,
400–401
definido, 398
de depresión, 562–563
dirección, 652 de
vector, 673–675 dibujo,
399 de elevación,
562–563 alargamiento, 580

Letras griegas para denotar, 398
de incidencia, 514 de
inclinación, 427
lado inicial de, 398
medida de longitud
de arco, 401–402
grados, 399–404
encontrar el área de un sector de un
círculo, 404–405
para encontrar la velocidad lineal de un objeto
que viaja en movimiento circular,
405–406
radianes, 400–401, 402–404
negativo, 398
óptico (escaneo), 545
positivo, 398
cuadrantal, 399 de
refracción, 514 de
reposo, 504
derecho, 399, A14
en posición estándar, 398 recto,
399 lado
terminal de, 398 entre
vectores, 661 en el espacio,
672 viendo, 426–
427, 497
Caso ángulo-ángulo de triángulo semejante, A18
Caso ángulo-ángulo lateral de triángulo
congruente, A17
Tamaño angular (percibido), 426
Velocidad angular, 405–406
Anualidad(es), 875–876
cantidad de, 875–876
definida, 875
fórmula para, 875
ordinaria, 875
Afelio, 708, 753
Apolonio de Perga, 688
Apotema, 535
Problemas aplicados (de palabras), problemas de
trabajo de velocidad constante A62-A72,
A67-A69
problemas de interés, A63–A64
problemas de mezcla, A65
pasos para resolver, A63
traducción de descripciones verbales en
expresiones matemáticas, A63 problemas
de movimiento uniforme, A66–A67
Decimales aproximados, A3
Área aproximada, 954–957
Araybhata el Viejo, 422
Longitud del arco, 401–402
Área
definición de, 957
fórmulas para, A15
bajo gráfica de función, 954–957 de
paralelogramo, 680–681 de
sector de círculo, 404–405 de
triángulo, 589–595, A15
Triángulos SAS, 589–590
Triángulos SSS, 590–591
Argumento
de número complejo, 637, 640 de
función, 88
Calculadora aritmética, A10
Media aritmética, A82

Machine Translated by Google

Secuencias aritméticas, 862–868
diferencia común en, 862
definida, 862
determinante, 862–863
fórmula para, 863–864
enésimo término
de, 864 fórmula recursiva para,
864 suma de, 865–866
Ars Conjectandi (Bernoulli), 918
Ars Magna (Cardano), 278
Triángulos ASA, 572–573
Propiedad asociativa de
la suma de matrices, 798
de la multiplicación de matrices,
802 de la suma de vectores, 646
Asíntota(s), 236–238, 714–716
horizontal, 237, 239–241
oblicua, 237, 239–241, 248
vertical, 237–239
multiplicidad y, 238–239
Sistemas atómicos, 808.
Matriz aumentada, 771–780
operaciones de fila en, 772–773
sistema de ecuaciones escrito a
partir de, 772
Tasa de cambio promedio, 57 de
función, 115–116
funciones exponenciales, 317–319
hallazgo, 115–116
funciones lineales, 161–164, 317–319
línea secante y, 115–116
límite de, 937
Eje/ejes de
plano complejo, 636 de
cono, 689 de
coordenadas, 38
de elipse, 699, 731 de
hipérbola
conjugada, 710
transversal, 710, 731
polar, 612
de función cuadrática, 182–185
rotación de, 723–727
análisis de ecuaciones usando , 726–727
fórmulas para, 724
identificación de cónica sin, 728 de
simetría de
parábola, 181, 690 de
función cuadrática, 182–187
Azimut, 565

Babilonios, antiguo, 876
Sustitución hacia atrás, 759
Barry, Rick, 105
Base del exponente, A8
Identidades trigonométricas básicas, 516
Rumbo (dirección), 565
Golpe, 604
Bernoulli, Jakob, 633, 918
Bernoulli, Juan, 746
Bessel, Federico, 568
Función
cúbica de mejor ajuste de, 230–
231 línea de, 174–175
Beta de una acción, 160
Bézout, Etienne, 826
Binomial(s), A23
cubos, A25
cuadrados de (cuadrados perfectos), A25
Coeficiente binomial, 887, 888
Teorema del binomio, 885–891
evaluar 1 n 2, 885–889
expandiendo un binomio, 887–888
característica histórica en, 890
prueba de, 889
usando, 887–889
Método de bisección, 277, 280
Concentración de alcohol en sangre (BAC), 339
Presión arterial, 456
Bode, Juan, 861
Ley de Bode, 861
Bonos, cupón cero, 369
Valor contable, 165
Boole, George, 918
Gráficos acotados, 834
Curvas delimitadoras, 599
Límites de ceros, 275–276
Caja, volumen y superficie de, A16
Braquistocrona, 745–746
Brancazio, Pedro, 105
Ramas de hipérbola, 710
Punto de equilibrio, 169
Fórmula de Bretschneider, 593
Ley de Brewster, 514
Briggs, Enrique, 351
Bürgi, Joost, 351

Calculadora(es), A10. Véase también
Utilidad(es)
gráfica(s) para aproximar raíces,
A84 conversión entre decimales y
grados, minutos, segundos en adelante,
400 conversión de coordenadas polares a
coordenadas rectangulares, 615
para evaluar potencias de 38, 316
funciones en, 89
seno inverso en, 489
tipos de, A10
logaritmos en, 349, 350
ecuaciones trigonométricas resueltas
usando, 508
Cálculo de
ángulos medidos en, 400
aproximaciones ex 861
funciones complicadas en, 95
funciones compuestas en, 299
derivadas, 244
cocientes de diferencia en, 90, 331
fórmulas de doble ángulo en, 538 e
en, 322, 861
comportamiento final de gráficas,
220 ecuaciones exponenciales en,
357 funciones y
exponencial, 315, 861
creciente, decreciente o constante, 111,
377–378
máximos locales y mínimos locales en,
112
gráfica de funciones polinómicas en, 212 variable
independiente en, 443 punto de inflexión
en, 376 integral, 957–958 área
bajo la gráfica, 953–957
utilidad gráfica para aproximar, 957–
958 Teorema del valor intermedio, 276 límites,
221, 235
logaritmos y, 347, 357 descomposición de fracciones
parciales y, 813
ecuaciones polares y, 633 movimiento
de proyectiles, 740–742 ecuaciones cuadráticas en, A68
funciones cuadráticas en, 181
radianes en, 425 exponentes racionales
en, A88 numeradores racionalizadores
en, A85 recta secante y, 116, 121 Regla
de Simpson, 200 Ley
de Snell y, 514 línea tangente y, 594
funciones y ecuaciones trigonométricas en, 502,
510, 538 identidades trigonométricas
útiles en, 539 puntos de
inflexión y, 219 de variaciones,
746 Propiedad de cancelación,
A36 Datación por carbono, 373 Cardano , Girolamo, 278,
643, 918
Cardioide, 626–627, 632 Carlson, Tor, 385 Capacidad
de carga, 376 Coordenadas
cartesianas (rectangulares),
38 en el espacio, 668 Forma cartesiana
(rectangular) de número
complejo, 637–639 Catenaria, 195n , 698 Cayley,
Arthur, 755, 808 Ceilómetro, 563
División celular, 371, 376
Centro del círculo, 72 de
hipérbolas, 710 de esfera, 676 Ángulo central, 400–401
Cambio, tasa de.
Consulte Fórmula de cambio de base de tasa de cambio,
350–351 Chebyshëv, PL,
538n Chu Shih-chieh, 890
Círculo(s), 71–78, 689 longitud de
arco de, 401–402 área
de, A16 área de sector de , 404–
405 centro
de, 72 ángulo
central de, 400–401
circunferencia de,
A16 definido, 72 forma general de
ecuación de, 74–75 gráfica, 73, 631 inscrito, 594
intersecciones de, 73 ecuación polar de, 622, 624 –
625 radio de, 72

Machine Translated by Google

forma estándar de ecuación de, 72
unidad, 72, 411–414
Funciones circulares, 413
Movimiento circular, 405–406
movimiento armónico simple y, 596
Circunferencia, A16
Clark, Guillermo, 557, 609
Reloj, Huygens, 746
Señal de reloj, 604
Intervalo cerrado, A73
Coeficiente, binomial A22-
A23, 887, 888
correlación, 175
amortiguación,
598 de fricción,
658 principal, 211, 282,
A23 de polinomio, 211
Matriz de coeficientes, 772
Cofactores, 788
Cofunciones, 560
nombres de, 423
Líneas coincidentes, 758
Índice de columnas, 771, 795
Vector de columna, 799
Combinaciones, 905–907
definidas, 906
listados, 906–907
de n objetos distintos tomados r a la vez, 906
Combinatoria, 897
Diferencia común, 862
Logaritmos comunes (log), 336, 349, 351
Proporción común, 869
Propiedad conmutativa
de productos escalares, 660,
672 de suma de matrices, 797–798, 802
de suma de vectores, 646
Ángulos complementarios, 560
Teorema del ángulo complementario, 560
Complemento de evento, 916
Complemento del juego, A2
Regla del complemento, 916–917
Gráfico completo, 47
Completar el cuadrado, A29, A48–A49
identificando cónicas sin, 723
Número(s) complejo(s), 655, 665, A54–A62 suma,
resta y multiplicación de, A55–
A59 argumento de, 637, 640
conjugados de, 637, A56–
A57 definición de, A54–A55

Teorema de De Moivre y, 640–641 igualdad,
suma, resta y multiplicación de, A55–A58
igualdad de, A55 en forma
exponencial, 638
interpretación geométrica de,
636 parte imaginaria de, A55 magnitud
(módulo) de, 637 matrices
y, 808 partes de A55 en forma polar
convirtiéndola de
forma rectangular
a 637–639
conversión a forma rectangular, 637–639
productos y cocientes de, 639–640 potencias
de i, A58–A59 producto de,
639–640 ecuaciones
cuadráticas en, A59–A61 cociente de,
639–640 parte real de,
A55 en forma
estándar , A55, A57–A59 potencia de,
A58–A59 recíproco de,
A57
Sistema numérico complejo, A55
ecuaciones cuadráticas en, A59 – A61
Plano complejo, 636–640
definido, 636
eje imaginario de, 636
puntos de trazado en, 636–637
eje real de, 636
Función polinómica compleja, 282
Expresiones racionales complejas, A40-A42
Raíces complejas, 641–642
variable compleja, 282
Ceros complejos de polinomios, 281–284, 285–286
Teorema de pares conjugados, 283–284
definido, 282
hallazgo, 285–286
función polinómica con ceros dados, 284–285

Componentes de vectores, 648, 649 en
el espacio, 669
Funciones compuestas, 295–302
aplicación de cálculo de, 299
componentes de, 299
definidas, 295
dominio de, 296–299
iguales, 298–299
evaluación, 296
valores exactos de, uso inverso funciones, 492–494, 501–502
encontrar, 296–299
formar, 295–296
Interés compuesto, 361–367 cálculo,
361–363 continuo, 365
definido, 361
duplicar o
triplicar el tiempo para obtener dinero, 366–367 tasas
de rendimiento efectivas, 364–365
fórmula, 362
valor futuro de una suma global de dinero, 361–364
presente valor de la suma global de dinero, 365–366
Probabilidades compuestas, 914
Compresiones, 138–140, 141
Comps, bienes raíces, 37
Gráfico cóncavo arriba/abajo, 181
Ecuación condicional, 515–516
Eje
cónico de,
689 generadores de,
689 circular recta, 689
vértice de, 689
Triángulos congruentes, A16–A19
Cónicas
definidas, 731
degeneradas, 689
directriz de, 731
excentricidad de, 708, 731
elipse, 689, 699–709 con
centro en (h, k), 703–705 con centro
en el origen, 699–703 con centro no en el
origen , 704–705 centro de, 699 definido,
699, 731
excentricidad de,
709, 733 focos de, 699
gráficas de,
701–703 longitud del eje
mayor, 699 eje mayor de, 699,
731 eje menor de, 699
resolución de
problemas aplicados involucrando, 705–706 vértices
de, 699 foco de,
731 ecuación
general de, 728 forma general
de, 722–723 hipérbolas, 688,
689, 709–722 asíntotas de, 714–716
ramas de, 710 con centro en
(h, k), 716–717 con
centro en el origen, 710–714 con
centro no en el origen, 716–717 centro de,
710 conjugado, 721 eje conjugado de, 710
definido, 709,
731 excentricidad
de, 721, 733 equilátero,
721 focos de, 709–
710 ecuación gráfica de, 711–
712 resolución de
problemas aplicados
que involucran, 717–718 eje transversal
de, 710, 731 vértices de, 710 identificación, 722–723
sin rotación de ejes, 728 nombres
de, 689– 690
parábola, 180–187, 689,
690–699 eje de simetría de, 181, 690
definido, 690, 731
directriz de, 690 foco de, 690 ecuación
gráfica de, 691 resolución de
problemas aplicados
que involucran, 695–
696

con vértice en (h, k), 693–694 con
vértice en el origen, 690–693 vértice de,
181, 690
paraboloides de revolución, 688, 695
ecuaciones paramétricas, 737–749
aplicaciones a la mecánica, 745–746 para
curvas definidas por ecuaciones rectangulares, 743–746
cicloide, 745
definida, 737

Machine Translated by Google

Cónicas (continuación)
que describen, 740
gráficas usando la utilidad de gráficas, 737–738
ecuación rectangular para curva definida paramétricamente, 738–740
tiempo como parámetro en, 740–743
ecuaciones polares de, 730–737
análisis y gráficas, 730–734 conversión a
ecuación rectangular, 734 enfoque en el polo;
excentricidad e, 732–733 rotación de ejes para
transformar ecuaciones de, 723–725 análisis de ecuaciones
usando, 726–727 fórmulas para, 724

Conjugado(s), A56–A57 de
número complejo, A56–A58 de conjugado
de número complejo, A58 de producto de dos
números complejos, A58 de número real, A58 de suma
de dos números complejos, A58
Eje conjugado, 710
Proporción áurea conjugada, 860
Hipérbola conjugada, 721
Conjugado de números complejos, 637
Teorema de pares conjugados, 283-284
Modo conectado, 126
Sistemas consistentes de ecuaciones, 757, 758, 762.
Constante(s), A6, límite A22 de, 932
Funciones constantes, 111–112, 113, 124
Funciones lineales constantes, 164
Problemas laborales de tasa constante, A67–A69
Término constante del polinomio, 211
Restricciones, 838
Índice de Precios al Consumidor (IPC), 370
Fracciones continuas, A43
Composición continua, 364
Función continua, 126, 276, 941–943

Gráfico continuo, 212 Serie geométrica convergente, 872–874 Enfriamiento, Ley de Newton, 374–375 Coordenadas, 38. Véase también Coordenadas rectangulares (cartesianas) de triple ordenado, 668 de punto en la recta numérica, A4 Puntos de esquina, 834–835 Correlación coeficiente, 175 Correspondencia entre dos conjuntos, 83 Cosecante, 412 continuo, 942, 943 definido, 558 dominio de, 429, 430 gráfico de, 461–463 inverso, 499–501 valor aproximado de, 500–501 calculadora para evaluar, 500– 501 definición de, 499 valor exacto de, 500
propiedades periódicas de, 431
rango de, 430
Coseno(s), 412
continuo, 943
definido, 558
dirección, 673–675
dominio de, 429, 430, 446 valor exacto de, 524–525 gráficas de, 443–457 amplitud y período, 446–448 ecuación para, 452 clave puntos para, 448–451 hiperbólico, 331
inverso, 489–490
definido, 489 valor exacto de, 490
forma implícita de, 489
propiedades de, 493

Ley de, 582–589 en problemas aplicados, 584–585 definido, 582 característica histórica, 585 prueba de, 582
Teorema de Pitágoras como caso especial de, 582
Triángulos SAS resueltos usando, 583
Triángulos SSS resueltos usando, 583–584
propiedades de, 446
periódico, 431
rango de, 430, 446
Fórmula de suma y diferencia para 523–524 ecuaciones
trigonométricas lineales en, 530–532

Costo(s)
fijo(s), 69
marginal, 191
variable, 69
Cotangente, 412
continua, 942, 943 definida, 558 dominio de, 429, 430 gráfica de, 460–461 inversa, 499–501
aproximando el valor de, 500–501 calculadora para evaluar, 500–501 definición de, 499 valor exacto de , 500 propiedades periódicas de, 431 rango de, 430

Contando, 897–902
principio de suma de, 898–899
combinaciones, 905–907
definido, 906
listado, 906–907 de
n objetos distintos tomados r a la vez, 906 fórmula, 898 principio de multiplicación de, 899–900 número de comidas posibles , 899–900 permutaciones, 902–905
computación, 905 definido, 903
objetos distintos sin repetición, 903–905 objetos
distintos con repetición, 903 que involucran n objetos no distintos, 908
Contar números (números naturales), 881n, 883, A3
Cramer, Gabriel, 755
Regla de Cramer, 755, 784
sistemas inconsistentes o dependientes, 791 para
tres ecuaciones que contienen tres variables, 789–791 para dos
ecuaciones que contienen dos variables, 785–787
Producto cruzado (vectorial), 655, 677–683
definido, 677
determinantes para encontrar, 678 para encontrar el área de un paralelogramo, 680–681
para encontrar un vector ortogonal a dos vectores dados, 680
propiedades de, 678–680
algebraico, 679
geométrico , 679–680 de
dos vectores en el espacio, 677–678
Cubo(s)
de binomios (cubos perfectos), A25 diferencia de dos, A25, A28 suma de dos, A25
Función cúbica, 88, 125 Raíz cúbica, 122–123, 125, complejo A83, 641, 642 Función cúbica de mejor ajuste, 230–231 Modelos cúbicos a partir de datos, 230–231 Curva(s). Véase también
Delimitación de curvas planas, 599 definidas paramétricamente, 738–743 utilidad gráfica para representar
gráficas definidas paramétricamente, B12
de descenso más rápido, 745–746
diente de sierra, 603
Ajuste de curvas, 765–766
sinusoidal, 469–473 horas de luz diurna, 472–473 función seno de mejor ajuste, 473 datos de temperatura, 469–471
Movimiento curvilíneo, 740
Ciclo de gráfico sinusoidal, 444, 448
Cicloide, 745

Movimiento amortiguado, 598–600
Factor de amortiguación (coeficiente de amortiguación), 598
Datos
disposición en matriz, 796 modelos cúbicos de, 230–231 modelo
exponencial de, 382–383 modelos lineales de, 171–178 modelos cuadráticos de, 196–197 modelo sinusoidal de, 469–473
Duración del día, 210, 397 Decaimiento, Ley de , 373–374. Véase también Crecimiento y decrecimiento exponencial Decimales, A3 aproximado, A3

Machine Translated by Google

conversión entre grados, minutos, segundos y, 400 repeticiones, 873–874, A3
Declinación del Sol, 497
Descomposición, 662–664
Funciones decrecientes, 111–112, 113, 115
Funciones lineales decrecientes, 164
Deflexión, fuerza de, 611
Cónicas degeneradas, 689
Grado de monomio, A22
Grado de polinomio, 211–216, A23, A27
impar, 274–275, 283
Función de grado de potencia, 212
Grados, 399–404
conversión entre decimales y 400–401 conversión
entre radianes y, 402–404 nota histórica sobre, 399

Ecuación de demanda, 193
De Moivre, Abraham, 640
Teorema de De Moivre, 640–641
Denominador, A36
racionalizando el, A85–A86
Sistemas de ecuaciones dependientes, 758 que contienen tres variables, 764–766 que contienen dos variables, 761–762
Regla de Cramer con 791
matrices para resolver, 777–778
Variable dependiente, 88
Depreciación, 294
Ecuación deprimida, 272
Depresión, ángulo de, 562–563
Derivado, 947–948
Descartes, René, 37, 82
Regla de los signos de Descartes, 270-271
Determinantes, 677–678, 755, 784–795
cofactores, 788
Regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones que contienen tres variables, 789–791
Regla de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones que contienen dos variables, 785–787 expandiéndose a lo largo de una fila o columna, 788–789 menores
de, 788 propiedades de, 791–792 3 por 3 , 787–789 2 por 2, 784–785, 791 Entradas
diagonales, 803 Presión
diastólica, 456 Diferencia(s). Véase también Resta común, 862 de números complejos, A55
primero, 465 límites de, 933 de logaritmos, 347–348
de dos cubos, A25, A28 de dos funciones, 93 de dos matrices, 796–798 de dos cuadrados, A24, A28 de vectores, 646
Función de diferencia, 93 Cociente de diferencia, 90–91, 331 definición, 90
Diofanto, 876
Segmento de línea dirigido, 645 Ángulo de dirección, 652
Ángulos de dirección del vector, 673–675 Dirección (rumbo), 565 Cosenos de dirección, 673–675 Dirección de vectores , 645, 651–653 Directriz, 731 de parábola, 690 Dirichlet, Lejeune, 82
Discontinuidad, 126
Función discontinua, 941 Discriminante, A50, A60 negativo, A59 Conjuntos disjuntos, A2–A3 Distancia media, 708, 753 alcance del avión, A71 Fórmula
de distancia, 38–41
prueba de, 39–40 en el espacio, 668–669
usando, 39–41
Propiedad distributiva de productos escalares, 660, 672 de
multiplicación de matrices, 802 de números reales, A3–A4
Serie geométrica divergente, 872– 874 Dividendos, 267, 268,
División A25. Véase también Cociente(s) de números complejos, A57 de números complejos en forma estándar, A57 de polinomios, 267–268, A25–A27
sintético, A31–A35 de expresiones racionales, A36–A37 de dos números enteros, A25 Algoritmo de división para polinomios , 267–268 Divisor, 267, 268, Dominio A25, 83, 85, 91–95 de función de valor absoluto, 125 de función compuesta, 296–299 de función constante, 124
de función cosecante, 429, 430 de función coseno, 429 , 430, 446 de función cotangente, 429, 430 de función cúbica, 125
de función de raíz cúbica, 125
definidos por una ecuación, 91–93 de función de diferencia, 93 de función de mayor entero, 126 desplazamientos horizontales y 137 de función de identidad, 124 de función inversa, 307 de función logarítmica, 333–334 de modelos logísticos, 376 de función uno a uno, 303–304 de función producto, 93 de función cociente, 94 de función racional, 234–237 de función recíproca, 125
de función secante, 429, 430 de función seno, 429, 430, 444 de función cuadrada, 124 de función raíz cuadrada, 125 de función suma, 93 de función tangente, 429, 430, 459 de funciones trigonométricas, 429–430
no especificado, 95
de variable, A7
Función de dominio restringido, 310
Doppler, cristiano, 258
efecto Doppler, 258
Modo punto, 126
Producto escalar, 655, 660–667
ángulo entre vectores usando, 661 para calcular el trabajo, 664–665
definido, 660
hallazgo, 660–661
característica histórica en, 665
vectores ortogonales y, 662–664
propiedades de, 660, 672 de
dos vectores , 660–661 en el espacio, 671–672
Fórmulas de doble ángulo, 536–540 para establecer identidades, 537–540 para encontrar valores exactos, 537
Raíz doble (raíz de multiplicidad 2), A47
Arrastre, 611
Efecto Droste, 861
Tasa de caída adiabática seca, 868
e, 322–324, 330
definida, 322

Terremotos de magnitud 344
Excentricidad, 708, 731 de elipse, 709, 733 de hipérbola, 721, 733
Eddin, Nasir, 585
Cálculo de calificaciones educativas, A82
Pruebas de inteligencia, A82
Tasas de rendimiento efectivas, 364–365
Egipcios, antiguos, 876.
Elementos (Euclides), 585, 876
Elementos de conjuntos, 897–899, A1
Elevación, ángulo de, 562–563
Eliminación, Gauss-Jordan, 777
Método de eliminación, 755, 759–761, 762
sistemas de ecuaciones no lineales resueltos usando, 822–825
Elipse, 689, 699–709 con centro en (h, k), 703–705 con centro en el origen, 699–703 eje principal a lo largo del eje x, 700–701 eje principal a lo largo del eje y, 702 con centro no en origen, 704–705 centro de, 699 definido, 699, 731
excentricidad de, 709, 733 focos de, 699 gráfica de, 701–703
intersecciones de, 701

Machine Translated by Google

Elipse, (Continuación) eje
mayor de, 699, 731 longitud
de, 699 eje menor
de, 699 resolución de
problemas aplicados que involucran, 705–706 vértices
de, 699
Elipsis, A3
Órbitas elípticas, 688
Ángulo de elongación, 580
Conjuntos vacíos (nulos), 897, A1
Comportamiento final, 213, 220–222, 237, 238
de la función racional, 237
Puntos finales del intervalo, A73
Entradas de matriz, 771, 795
diagonal, 803
Igualdad
de números complejos, A55 de
conjuntos, 897, A2
de vectores, 646, 649
en el espacio, 670
Resultados igualmente probables, 914–915
Raíces iguales, método de Descartes, 828
Ecuación(es)
condicional, 515–516
demanda, 193
deprimida, 272
dominio de una función definida por, 91–93
equivalente, A44–A45, B3
funciones pares e impares identificadas desde, 110–111
exponencial, 324–326, 338, 356–358 en forma cuadrática, 357 como
función, 87 utilidad
gráfica para graficar, B3–B5 intercepta
desde, 48–49 función inversa
definida por, 308–310 que involucra valor
absoluto , A46–A47 lineal. Consulte
Ecuación(es) lineal(es) polar(es).
Consulte Ecuaciones polares que
satisfacen los, 46, A44
segundo grado, A47 lados
de, 46, A44 conjunto
solución de, A44
resolviendo, A44–A54
mediante factorización, A46, A47–
A48 con calculadora gráfica, B6–B8 que
involucran valor absoluto, A46 –A47 sistemas
de. Consulte Sistemas de ecuaciones en dos
variables, gráficas de, 45–56 intersecciones
desde, 48 trazando
puntos, 46–47 prueba de
simetría usando, 49–51 x = y2 , 52

$y = \frac{1}{x}$, 53

Hipérbola equilátera, 721
Triángulo equilátero, 44
Equilibrio, estático, 654–655
Punto de equilibrio, 166
Precio de equilibrio, 166-167
Cantidad de equilibrio, 166-167
Posición de equilibrio (reposo), 596
Ecuaciones equivalentes, A44–A45, B3
Desigualdades equivalentes, A74, A76
Sistemas equivalentes de ecuaciones, 760
Triángulo de error, 44
Euclides, 585, 876, 890
Euler, Leonhard, 82, 323, 331, 638, 918
Fórmula de Euler, 638
La identidad de Euler, 644
Funciones pares
que se determinan a partir de la gráfica, 109–
110 y se identifican a partir de la ecuación, 110–111
Relación de uniformidad, 342
Identidad par-impar, 516
Propiedades pares-impares, 438–439
Eventos, 913
complemento de, 916–917
mutuamente excluyentes, 916
probabilidades de unión de dos, 915–916
Valor esperado, 896, 924
Forma explícita de función, 90
Exponente(s), A8–A9
Leyes de, 316, 324–325, logaritmos
A8–A9 relacionados con, 332
Ecuaciones exponenciales, 324–326
definidas, 324
resolviendo, 324–325, 338, 356–357
ecuaciones en forma cuadrática, 357
usando la utilidad gráfica, 357–358
Expresiones exponenciales, cambio entre expresiones logarítmicas y, 332–333

Funciones exponenciales, 315–331, 943
continuas, 943
definidas, 316
e, 322–324, 330
evaluando, 315–319
ajustando datos, 382–383
gráfica de, 319–322
usando transformaciones, 322, 323–324
identificando, 317–319
función de potencia vs., 317
propiedades de, 320, 322, 326
relación de resultados consecutivos de, 317–319
Crecimiento y decadencia exponencial, 316–319, 371–373
ley de decaimiento, 373–
374 modelos logísticos, 376–
378 definido,
376 dominio y rango de, 376
gráfico de, 376
propiedades de, 376
crecimiento desinhibido, 371–373
Ley exponencial, 371
Principio extendido de inducción matemática, 884 Soluciones
extrañas, A86 Extremo valores de
funciones, 114-115 Teorema del valor extremo, 114-115

Factorizado completamente, A27
Símbolo factorial, 854–855
Factorización
definida,
ecuaciones A27 resueltas por, A46, A47 – A48
de expresión que contiene exponentes racionales, A88
sobre números enteros, A27
polinomios, A27–A28 por
agrupación, A28
ecuaciones cuadráticas, A47–A48
Factores, A27
lineal, 814–817 no
repetido, 814–815 repetido,
815–817 cuadrático,
274, 814 , 817–819 división sintética
para verificar, A34 Teorema del factor,
267–270 Familia de rectas, 70
de
parábolas,
146 Punto factible,
838 Fermat, Pierre de,
37, 331, 917 Ferrari, Lodovico, 278
Ferris, George W., 77, 513
Tasa de fertilidad, 851 Fibonacci,
876 Números de
Fibonacci, 856
Secuencias de Fibonacci, 856,
860 Modelos financieros, 361–370

interés compuesto, 361–367 tiempo
de duplicación de la inversión, 366–367 tasas de rendimiento efectivas, 364–365 valor
futuro de una suma global de dinero, 361–364

valor presente de una suma global de dinero, 362, 365–366
triplicar el tiempo de inversión, 367 Finck,
Thomas, 422 Conjuntos
finitos, 897
Primeras diferencias, 465
Costos fijos, 69
Enfoque/focos,
731 de elipse,
699 de hipérbola, 709 –710
de parábola, 690
método FOIL, A24 Libras-
pie, 664 Fuerza(s),
596 aerodinámica,
611, 687 de deflexión, 611
resultante, 653
Diagrama de
fuerza, 654 Vector de
fuerza, 652 Fórmulas,
geometría, A15–A16 Fracciones

(continuación) , A43
parcial, 813
Frecuencia, 456 en
movimiento armónico simple, 597
Fricción, coeficiente de, 658
Frobenius, Georg, 808
Función(es), 82–159. Ver también Funciones compuestas; Funciones exponenciales; Funciones inversas; Funciones lineales; Funciones polinómicas; Funciones trigonométricas
valor absoluto, 123–124, 125–126 área
bajo la gráfica de, 954–957

Machine Translated by Google

argumento de, 88
tasa de cambio promedio de, 115–116
encontrar, 115–116
línea secante y, 117
construir y analizar, 147–152 en
calculadoras, 89
circular, 413
constante, 111–112, 113, 124
continuo, 126, 276, 941–943 cubo,
88, 125 raíz
cúbica, 122–123, 125
decreciente, 111–112, 113, 115
definido, 85
derivado de, 947–948
diferencia de dos, 93
cociente de diferencia de, 90–91
discontinuo, 126, 941 dominio
de, 83, 85, 91–95 no
especificado, 95
dominio restringido, 310
ecuación como, 87
determinación
par e impar a partir del gráfico, 109–110
identificación a partir de la ecuación, 110–
111 forma explícita de,
90 gráfico de, 99–108, 134–147
combinando procedimientos, 137–138
determinando funciones pares e impares de,
109–110
determinando propiedades de, 111–112
identificando, 100
información de o sobre, 100–103 usando
compresiones y estiramientos, 138–140,
141 usando
reflexiones sobre el eje x o el eje y, 140–141
usando
desplazamientos verticales y horizontales,
134–138, 141
mayor entero, 126
idénticamente igual, 515
identidad, 124
forma implícita de, 90
datos importantes sobre, 90
creciente, 111–112, 113, 115 entrada
y salida de, 87 biblioteca de,
122–126 máximos
locales y mínimos locales de, 112–113 sin
límite en
0, 930 no lineal, 161
objetivo, 838 uno
a uno, 303– 305
como pares ordenados,
86 periódico, 431–432
definido por partes,
127–129, 942–943 potencia, 212–215 gráfico
de, 213–215 de
grado impar, 214–215
propiedades de, 214–215
producto de dos, 93 cociente
de dos, 94 rango de,
83, 85 recíproco, 125,
461–462 relación
como, 85–87
cuadrado, 124
raíz cuadrada, 122, 125
paso, 126
suma de dos, 93
gráfica de, 600–601
valor (imagen) de, 85, 87–89 ceros
de, método de bisección para
aproximar, 280
Teclas de función, A10
Notación de funciones, 87, 95
Identidades fundamentales de funciones
trigonométricas, 433–
435 cociente,
433 recíproco, 433
Período fundamental, 431
Teorema fundamental del álgebra, 282–283

Teorema de pares conjugados y, 283–284 prueba
de, 282
Valor futuro, 361–364

Galois, Evariste, 278
Gauss, Karl Friedrich, 282, 643, 755
Método de Gauss-Jordan, 777
Principio general de suma para
contar, 899.
Ecuación general de una cónica, 728
Forma general
de cónicas, 722–723
de ecuación de círculo, 74–75
ecuación lineal en, 63–64
Término general, 853
Generadores de cono, 689
Media geométrica, A82
Secuencias geométricas, 869–872
proporción común de, 869
definida, 869
determinante, 869–870
fórmula para, 870–871
enésimo término de,
870 suma de, 871–872
Serie geométrica, 872–876
infinita, 872–873
Vectores geométricos, 645–646
Conceptos básicos de geometría, A14–A22
triángulos congruentes y semejantes,
Fórmulas
A16–A19, A15–A16
Teorema de Pitágoras y su inverso,
A14-A15
Problemas de geometría, álgebra para resolver, 41
Gibbs, Josías, 655
Proporción áurea, 860
conjugado, 860
Grado (inclinado), 71
Gráfico(s)/área de
representación gráfica
inferior, 954–957
acotada, 834 curvas
delimitadoras, 599 de
círculos, 73,
631 completa, 47 cóncava
arriba/abajo, 181 de función
cosecante, 461–463 usando
transformaciones, 463 de función cotangente, 460 –461
de elipse, 701–703 de
ecuaciones en dos variables, 45–56
intersecciones desde,
48 trazando puntos, 46–47
prueba de simetría usando, 49–51
x = y2 , 52 1
y = 53
x ,
y = x3 , 52
de funciones exponenciales, 319–322
usando transformaciones, 322, 323–324 de
función, 99–108, 134–147
combinar procedimientos, 137–138
determinar funciones pares e impares de, 109–
110 determinar
propiedades de, 111–112 identificar, 100
información de o
sobre, 100–103 en la biblioteca de funciones,
122–126 usar compresiones y
estiramientos, 138–140 , 141 usando
reflexiones
sobre el eje x o el eje y, 140–141 usando
desplazamientos
verticales y horizontales, 134–138, 141 de
H1x2 =, 235 de
desigualdades,
830–835, desigualdades lineales
A5, 831–832, 839 pasos para, 831 de
funciones
inversas, 306 de funciones
lineales, 161 de rectas dado
un punto
y la pendiente, 59 usando intersecciones,
63–64 para localizar el
máximo absoluto y
mínimo absoluto de función, 113–115
de
funciones logarítmicas, 334–337 base no
10 o e, 351 inversa, 335–
337 de modelos
logísticos, 376–378 de parábola,
691 de ecuaciones
paramétricas, 737–738,
B11–B12
de ecuaciones polares, 621–636
cardioide, 626–627, 632
círculos, 631
de cónicas, 732–734
mediante conversión a coordenadas
rectangulares, 622–625
definido, 622
lemniscata, 630, 632
limaçon con bucle interior, 628– 629, 632
limaçon sin bucle interior, 627–628,
632 trazando
puntos, 626–633 cuadrículas
polares para, 622 rosa,
629–630, 632 dibujando,
632–633 espiral, 630–
631 usando utilidad
gráfica, 623, B11 de funciones
polinómicas, 212–222, 226–229

comportamiento final de, 220–222, 237, 238

Machine Translated by Google

Graficar(es)/graficar (Continuación) suave
y continuo, 212 pasos para, 226–227
puntos de inflexión de,
219–220 usando una utilidad
gráfica, 228–229 usando límites de ceros,
276 usando transformaciones, 215–
216 usando x- intersecciones, 217–218
de desigualdades polinómicas, 260–
261 de funciones cuadráticas

propiedades de, 183–185
pasos para, 188
usando su vértice, eje e intersecciones, 182–187

usando transformaciones, 180–182
de funciones racionales, 245–255
construcción de funciones racionales a partir de, 254–255
comportamiento final de,
237 usando transformaciones, 236
de desigualdades racionales, 262 de
función secante, 461–463
usando transformaciones, 463 de
secuencias, 852 de
funciones seno y coseno, 443–457, 469, 601
amplitud
y período, 446–448 ecuaciones para,
452 puntos clave
para, 448–451 para resolver
sistemas de ecuaciones, 758 de sistemas
de no lineales desigualdades, 833–834

de vectores, 647–648
Calculadora(es) gráfica(s), A10
funciones compuestas activadas, 296
pantallas cuadradas, 67
Utilidad(es) de gráficas, B1–B12
círculos usando, 75
modo conectado, 126
coordenadas del punto mostrado en, B2
derivada de función usando, 947–948 modo de
punto, 126
ecuaciones con, B3–B5
función eVALUEate, 268, B5 para
encontrar suma de secuencia aritmética, 864 para
ajustar la función exponencial a los datos, 382–383
para ajustar la función logarítmica a los datos, 384
para ajustar la función logística a los datos,
385 funciones en, 115
secuencias geométricas usando, 871, 872
identidad establecida con, 517
desigualdades usando, B9
Función INTERSECT, B7 para
investigar el límite, 930 línea
de mejor ajuste desde, 174–175 para
localizar intersecciones y verificar la simetría, B5–B6 ecuaciones
logarítmicas y exponenciales resueltas usando, 357–358 función logBASE, 350
operaciones matriciales en, 797

MÁXIMO y MÍNIMO
características, 115
ecuaciones paramétricas usando, B11 – B12
Modo PARAmétrico, 742
ecuaciones polares usando, 623, B47
funciones polinomiales usando, 228–229 forma
escalonada reducida en filas, 780
Opciones de regresión, 382 filas
escalonadas, 780 funciones seno
de mejor ajuste, 473 para resolver
ecuaciones, ecuaciones lineales B6–B8, pantallas cuadradas B9–B10, B8–B9
Característica TABLA, 277, 853
tablas en, B4
Función TRACE, 853
ecuaciones trigonométricas resueltas usando, 510
puntos de inflexión, rectángulo
de visualización 219n, configuración B1-B3, B1
Función CERO (o ROOT), B5–B7
Grassmann, Hermann, 655, 665
Función entera mayor, 126
Letras griegas, para indicar ángulos, 398.
Agrupar, factorizar por, A28
Crecimiento, desinhibido, 371–373
Factor de crecimiento, 316

Cometa Hale-Bopp, órbita de, 688, 753–754
Fórmulas de medio ángulo, 540–542
para encontrar valores exactos, 540–542 para tangente, 542
Vida media, 373
Media línea (rayo), 398
Intervalos medio abiertos/medio cerrados, A73
Semiplanos, 831
Hamilton, William Rowan, 655
Garza de Alejandría, 590, 591, 876
Fórmula de Heron, 590–591 artículo
histórico, 591 prueba de, 591

asíntota horizontal, 237
Componente horizontal del vector, 649
Compresiones o estiramientos horizontales, 139
Líneas horizontales, 60–61, 623, 631
Prueba de línea horizontal, 304–305
Desplazamientos horizontales, 134–138, 141
Huygens, Christiaan, 746, 917
Reloj de Huygens, 746
Hipérbolas, 688, 689, 709–722 asíntotas
de, 714–716 ramas de, 710
con centro en (h, k),
716–717 con centro en el origen, 710–714 eje transversal a lo largo del eje x, 711, 715 –716 eje transversal a lo largo del eje y, 712–713, 715 con centro no en el origen, 716–717 centro
de, 710 conjugado, 721 eje conjugado de, 710
definido, 709, 731
excentricidad de,
721, 733 equilátero, 721
focos de, 709–710
graficar ecuaciones de, 711–712
resolver problemas aplicados que involucran, 717–718
eje transversal de, 710, 731
vértices de, 710
Función coseno hiperbólica, 331
Función seno hiperbólica, 331
Hiperboloide, 720
hipocicloide, 749
Hipotenusa, 558, A14

i, A54–A55
potencias de, A58–A59
Funciones idénticamente iguales, 515
Identidad(es), A44
definición de, 515 Euler,
644 polarización,
667 pitagórico, 435, 516
trigonométrico, 515–523 básico,
516 establecimiento, 517–520 , 525–529, 537–540 Par-Impar, 516 Pitágoras, 516 Cociente, 516
Recíproco, 433, 516
ecuaciones trigonométricas
resueltas usando,
509–510 Función de identidad,
124 Matriz de identidad, 803 Propiedades de identidad, 803 Imagen
(valor) de la función , 85 Eje
imaginario de plano complejo,
636 Parte imaginaria de número
complejo, A55 Unidad imaginaria. Véase i
Forma implícita de función, 90 Expresión racional
impropia, 813 identificación, 813–814 Función racional
impropia, 239 Incidencia,
ángulo de, 514 Inclinación, 427 Sistemas
de ecuaciones inconsistentes, 757, 758, 762 que contienen tres variables, 764
que contienen dos variables , 761 Regla de
Cramer con, 791 matrices para
encontrar, 778–779
Funciones crecientes, 111–112, 113, 115 Funciones lineales
crecientes, 164 Sistemas independientes de
ecuaciones, 758 Variable independiente,
88 en cálculo, 443 Índice/índices de
radicales, A83 de refracción, 514 fila
y columna, 771, 795 de suma, 856 Inducción, matemática,
881–885 Principio extendido de, 884 principio
de, 881, 884 demostración de enunciados usando, 881–883 Desigualdad(es), A72–A82

Machine Translated by Google

combinado, equivalente
A77–A78, A74, A76
gráficas, 830–835
desigualdades lineales, 831–832
pasos para, 831
utilidad gráfica para graficar, B9
notación de intervalos para, A72–A74
que involucra valor absoluto, A78–A79 que
involucra funciones cuadráticas, 201 –204 no
estricto, A5 en
una variable, A76
polinomio, 260–261
resolución algebraica y gráfica, 260–261, 264
papel de la
multiplicidad en la resolución, 261 pasos
para resolver, 261
propiedades de, A74–A76
racional, 262–264
papel de la multiplicidad en la resolución,
263 pasos para resolver,
263 satisfactorios,
830 lados de,
A5 soluciones de,
A76 resolución, A76–
A77 estricto,
A5 símbolos para,
A4 sistemas de, 830–837
gráficas, 830–835 en
dos variables, 830
Símbolos de desigualdad, A4
Momento
de inercia de, 550
producto de, 545
Serie geométrica infinita, 872–873
Límite infinito, 221
Conjuntos infinitos, 897
Infinito, 213
límites en, 221
inflación, 369
Punto de inflexión, 106, 376
Punto inicial del segmento de línea dirigido, 645
Lado inicial del ángulo, 398
Valor inicial de la función exponencial, 316
Entrada a la relación, 83, 87
Círculo inscrito, 594
Tasa de cambio instantánea, 948–949
Enteros, A3
dividiendo, A25
factorizando sobre, A27
Integrales, 957–958
área bajo gráfica, 954–957 utilidad
gráfica para aproximar, 957–958

Intersección(es)
de círculo, 73
de elipse, 701 de
una ecuación, 48–49 de una
gráfica, 48 graficar
una ecuación en forma general usando, 63–64
graficar la
utilidad para encontrar, B5–B6 de la
gráfica de una ecuación lineal, 52 gráfica
de líneas usando, 63–64 de
función cuadrática, 183–185

Interés
compuesto, 361–367
informática, 361–363
continua, 365
definida, 361
duplicar o triplicar el tiempo para obtener
dinero,
366–367 tasas de rendimiento efectivas,
364–365
fórmula, 362 valor futuro de la suma global
de dinero,
361–364 valor presente de la suma global de
dinero , 365–366
problemas que involucran, A63–A64
tasa de, 361, A63
efectivo, 364–365
simple, 361, A63–A64
Teorema del valor intermedio, 276–277 Intersección
de conjuntos, A2 Notación de
intervalos, A72–A74 Escritura de
intervalos,
usando notación de desigualdad, A74 Invariancia,
730 Inversa de
matriz,
803–807 encontrar, 803–
806 multiplicar matriz
por, 804–805 resolver sistema de
ecuaciones lineales usando, 807 Funciones
inversas,
305–310, 486–504.
Consulte también Funciones logarítmicas
valores de funciones compuestas que
utilizan, 492–494, 501–
502 coseno, 489–
490 definido,
489 valor exacto de,
490 forma implícita de,
489 propiedades de,
493 definido,
305 dominio de,
307 de dominio restringido función, 310
hallazgo, 494–495
definida por una ecuación, 308–310
gráfica de, 306
rango de, 307
secante, cosecante y cotangente, 499–
501
aproximando el valor de, 500–501 calculadora
para evaluar, 500–501 definición de,
499 seno, 486–489
valor aproximado
de, 488–489 definido, 486–487 valor
exacto de, 487–488
valor exacto de expresiones
que involucran,
529
forma implícita de, 487
propiedades de, 492
resolución de ecuaciones que involucran, 495
Fórmulas de suma y diferencia que
involucran, 529–530
tangente, 490–492
definido, 490–491
valor exacto de, 492
forma implícita de, 491
propiedades de, 494
verificando, 307–308
escrito algebraicamente, 502
Ecuaciones trigonométricas inversas, 495
Números irracionales, A3, A54
representación decimal de, A3
Factor cuadrático irreducible, 274, 817–819
Triángulo isósceles, 44

Jiba, 422
Jiva, 422
Jordania, Camille, 755
Julios (newton-metros), 664

Khayyám, Omar, 890
Reglas de Kirchhoff, 769, 783
Copo de nieve de Koch, 879
Kowa, Takakazu Seki, 755

Latitud, 210
Lato recto, 691, 692
Ley de los cosenos, 582–589
en problemas aplicados, 584–585
definidos, 582
rasgo histórico, 585 prueba de,
582
Teorema de Pitágoras como caso especial de,
582
Triángulos SAS resueltos usando, 583
Triángulos SSS resueltos usando, 583–584
Ley de decadencia, 373–374. Véase
también Ley de crecimiento y
decaimiento exponencial
de los senos, 571–581 en problemas
aplicados, 410–
412 definidos, 572 características
históricas, 585
prueba de, 577 triángulos SAA o ASA
resueltos
usando, 572–573 triángulos SSA resueltos
usando, 573–575 Ley de las
tangentes, 581, 585 Leyes de los exponentes, 316,
324–325, A8–A9 Coeficiente principal,
211, 282, A23 Término principal del
polinomio, 211 Mínimo común múltiplo (MCM)
para sumar expresiones racionales,
A39–A40 Punto final izquierdo del
intervalo, A73 Límite izquierdo,
939, 940 Matriz de transición estocástica
izquierda, 811 Catetos del
triángulo, 558, A14 Leibniz, Gottfried Wilhelm,
82, 755 Lemniscata, 55, 630,
632 Longitud del arco de un círculo, 401–
402 Ecuación de Lensmaker, A43
Lewis, Meriwether, 557, 609 Lift,
611, 687
Detector de luz, 563
Proyector de luz, 563
Radicales similares,
A84 Términos
similares, A23
Limaçon, 55 con bucle interior, 628–
629, 632 sin bucle interior, 627– 628, 632

Machine Translated by Google

Límites, 221, 235, 927–945
técnicas de álgebra para encontrar, 932–938
de tasa de cambio promedio, 937 de
constante, 932 de
diferencia, 933 de
función identidad, 932 infinito,
221 en infinito,
221 investigando,
927–931
graficando, 929–930 usando
una tabla, 927–930 de
monomio, 934
unilateral, 939–940 de
polinomio, 934–935, 941 de potencia
o raíz, 935 de producto,
933–934 de cociente,
936–937 , 941 de suma, 933
Línea(s), 56–
71 de mejor ajuste,
174–175 coincidentes,
758 ecuaciones de
secante, 115–
116 familia de, 70
gráficas dado
un punto y
la pendiente, 59 usando intersecciones,
63–64 horizontal, 60–61, 623,
631 normal, 820 perpendicular,
65–67 forma
punto-pendiente de, 60–61
ecuación polar de, 623–624, 631
pendiente de, 56–59, 62 que contiene
dos puntos, 57 tangente,
77 vertical, 56–57, 623, 631
intersección y
de, 62 Álgebra lineal, 795
Ecuaciones lineales.
Véase también Línea(s);
Sistemas de ecuaciones lineales definidos, 64,
757 en forma general, 63–64 dados
dos puntos, 63 para
línea horizontal, 60–61 en
una variable, A44 para
línea paralela, 64–65 para línea
perpendicular, 65–67 en
pendiente- forma de
intersección, 61–62 para línea vertical,
60 Factores lineales, 814–817 no
repetidos, 814–815
repetidos, 815–817 Funciones
lineales, 161–171 tasa de
cambio promedio de,
161–164 construcción a partir de
datos, 171–178 definidos , 87, 161 graficar la
utilidad para encontrar la línea de
mejor ajuste, 174–
175 gráfica de, 161 identificar, 317–319 creciente,
decreciente o
constante, 164
relaciones no lineales vs.,
172–174 diagramas de dispersión, 171–172
Modelos lineales a
partir de datos, 171–178
a partir de descripciones verbales, 165–167
Problemas de programación lineal, 755, 837–842
máximo, 841–842 mínimo,
840–841 configuración,
838 solución a,
839–840 ubicación de,
840 resolución, 838–
842 en dos variables,
838
Velocidad lineal, 405–406
Ecuación trigonométrica lineal, 507
Segmento de línea, 645
punto medio de, 41–42
Máximos locales y mínimos locales de
funciones, 112-113
Ecuaciones logarítmicas, 354–360
definidas, 337
resolviendo, 338–339, 354–356
Funciones logarítmicas, 332–345
cambiando entre logarítmicas
expresiones y expresiones
exponenciales, 332–333
continuas, 943
definidas, 332
dominio de, 333–334
evaluación, 333
ajuste a datos, 384
gráfica de, 334–337
base no 10 o e, 351
propiedades de, 334, 340
rango de, 333
Espiral logarítmica, 631
Logaritmos, 345–353 en
calculadoras, 349, 350 común
(log), 336, 349, 351 evaluando, con
bases distintas de 10 o e, 349–351 característica
histórica, 351
expresión logarítmica como
única, 348–349 expresión logarítmica
como
suma o diferencia de, 347–348 natural (ln),
335, 349, 351 propiedades
de, 345–351 estableciendo, 345–
346 pruebas de, 346–347
resumen de, 351 usando,
con exponentes pares,
356 relacionado con
exponentes, 332

Funciones logísticas, a partir de datos,
384–385
Modelos logísticos, 376–378
definidos, 364
dominio y rango de, 376 gráfico
de, 363
propiedades de, 376
Loterías, 896
Volumen, 343
Términos más
bajos expresiones racionales en, A35-A36
función racional en, 235, 237
Magnitud del
terremoto, 344 vectores
en términos de cosenos directores y, 674–675
de vectores, 645,
648, 650–651, 652–653 en el espacio,
670
Magnitud
(módulo), 637 Eje mayor, 731
Malthus, Thomas
Robert, 926 , 963 Conjuntos de Mandelbrot,
644 Mapeo, 83–84, 85–86
Costo marginal, 191
Propensión marginal a
consumir, 879 Cadenas de Markov, 850 Inducción
matemática, 881–885
Principio extendido de, 884 principio de,
881, 884 demostraciones usando,
881–883 Modelado
matemático, A62. Ver también Modelo(s)

Matriz/matrices, 755, 770–784, 795–812 adyacencia,
811 organización
de datos, 796 aumentado,
771–780 operaciones de
fila, 772–773 sistemas de ecuaciones
escritos a partir de, 772 coeficiente,
772 números
complejos y, 808
definidos, 771, 795 entradas de,
771, 795, 803 iguales,
796 ejemplos de, 796 utilidades
gráficas para,
797 características
históricas, 808 identidad, 803
inversa de, 803–807 encontrar,
803–806
multiplicar matriz por,
804–805 resolver
sistema de ecuaciones lineales usando,
807 transición estocástica izquierda, 811 m
por n, 796
no singular, 804, 805 producto de
dos, 799–803,
808 en forma escalonada
de filas reducida, 776–780 índices de
filas y columnas de, 771, 795 en forma
escalonada
por renglones, 773–780 operaciones con
renglones, 772–773 múltiplos escalares
de, 798–799 singular, 804 para
resolver sistemas de ecuaciones
lineales, 773–
780

cuadrado, 796
suma y diferencia de dos, 796–798 transición,
850 cero, 798

Máximos de funciones
absolutas, 113–115
locales, 112–113
Valor máximo de una función cuadrática, 186–187

Machine Translated by Google

Media, 924
aritmética, A82
geométrica, A82
Distancia media, 708, 753
Mecánica, ecuaciones paramétricas aplicadas, 745–746

Medianas del triángulo, 44
Megamillones, 896
Métrica (Garza), 591
Triángulo métrico, 587
Fórmula del punto medio, 41–42
Mente, mapeo de, 485
Mindomo (software), 556
Mínimos de funciones
absolutas, 113–115
locales, 112–113
Valor mínimo de una función cuadrática, 186–187

Menores, 788
Minutos, 400
Problemas de mezcla, A65
Modelo(s), A62
lineal
a partir de datos, 171–
178 a partir de descripciones verbales,
165–167 sinusoidal,
469–473 de
mejor ajuste, 473 horas de
luz, 472–473 datos de temperatura, 469–471
Módulo (magnitud), 637 Mollweide,
Karl, 581 Fórmula de
Mollweide, 581 Momento de
inercia, 550 Monomio(s),
A22–A23 factores comunes,
A28 grado de, A22 ejemplos
de, A22 límite de,
934 reconocimiento,
A22–A23
Monter , 71 Movimiento
circular, 405–
406, 596
curvilíneo, 740 amortiguado,
598–600 Segunda
ley de Newton, 647
proyectil, 740–742 armónico simple,
595–598 uniforme, A66–
A67 Multiplicación. Véase
también Producto(s) de
números complejos, A56–A57 de
expresiones racionales, A36–A37
escalar, 798–799 de vectores, por números
geométricamente,
647
Principio de multiplicación del conteo, 899–900

Propiedades de multiplicación
para desigualdades, A75
Papel de la
multiplicidad en la resolución de
desigualdades
polinómicas, 261 papel en la resolución de
desigualdades racionales, 263 asíntotas verticales y, 238–239
Multiplicador, 879
Eventos mutuamente excluyentes, 916

Napier, Juan, 351
Siestas, 689
Logaritmos naturales (ln), 335, 349, 351
Números naturales (contar números), 881n, 883,
A3
Millas náuticas, 409
Ángulo negativo, 398
Números negativos
reales, A4
raíz cuadrada de, A9, A59–A60
Newton-metros (julios), 664
Ley de enfriamiento de Newton, 374–375, 379
Ley de calentamiento de Newton, 379
Ley Universal de Newton
Gravitación, 266
Método de Newton, 244
Segunda ley del movimiento de Newton, 596,
647
Nicolás de Brescia (Tartaglia), 278, 643
Ecuaciones no lineales, sistemas de, 821–829 método
de eliminación para resolver, 822–825

característica histórica, 826
método de sustitución para resolver, 821–
822
Funciones no lineales, 161
Desigualdades no lineales, sistemas de,
833–834
Relaciones no lineales, 172-174
Propiedad no negativa de
desigualdades, A74
Matriz no singular, 804, 805
Desigualdades no estrictas, A5
Línea normal, 820
raíces enésimas, complejo
A83-A84, 641
racionalizando el denominador,
A85–A86
simplificando, A83
simplificando radicales, A84
Conjuntos nulos (vacíos), 897, A1
Números
Fibonacci, 856
irracional, A3
natural (contando), 881n, 883, A3 racional,
A3 triangular,
861
Numerador, A36
racionalización, A85–A86

Función objetivo, 838
Asíntota oblicua, 237, 239–241, 248
Triángulo oblicuo, 571–572
Funciones impares
que se determinan a partir de la gráfica, 109–
110 y se identifican a partir de la ecuación, 110–111
Límites unilaterales, 939–940
Funciones uno a uno, 303–305 definidas,
303 prueba de
línea horizontal para, 304–305
Intervalo abierto, A73
Ángulo óptico (escaneo), 545
Optimización, funciones cuadráticas y, 192.

Órbitas
elípticas, 688
planetarias, 708
Par(es) ordenado(s), 38
funcionan como,
86 como relaciones, 83
Anualidad ordinaria, 875
Millas ordinarias (estatutarias), 409
Ordenada (coordenada y), 38
Orientación, 737–738
Origen, 38, 668
distancia del punto a, 147–148 de la recta
numérica real, simetría A4 con
respecto a, 50, 625
Vectores ortogonales, 662–664
Resultado de probabilidad, 912
igualmente probables, 914–915
Salida de la relación, 83, 87

Parábola, 180–187, 689, 690–699 eje de
simetría de, 181, 690 definido, 690,
731 directriz de, 690
familia de, 146 foco
de, 690 ecuación
gráfica de, 691
resolución de problemas aplicados
que involucran, 695–696 con vértice en (h, k),
693–694
con vértice en el origen, 690–693
encontrar la ecuación de, 692–693 foco en
1a, 02, a 7 0, 691–692 vértice de, 181,
690

Paraboloides de revolución, 688, 695.
Paralaje, 567–568
Líneas paralelas, 64–65
Paralelogramo, área de, 680–681
Vectores paralelos, 662
Parámetro, 737
tiempo como, 740–743
Ecuaciones paramétricas, 737–749
para curvas definidas por ecuaciones
rectangulares, 743–746
aplicaciones a la mecánica, 745–746 cicloide,
745 definidas,
737 que
describen, 740
gráficas, 737–738
usando la utilidad gráfica, B11–B12
ecuación rectangular para curvas definidas
paramétricamente, 738–740
tiempo como parámetro en, 740–743
Descomposición en fracciones parciales, 755, 812–820
definida, 813
donde el denominador tiene un factor cuadrático
irreducible no repetido, 817–818
donde el
denominador solo tiene factores
lineales no repetidos, 814–815
donde el denominador tiene factores
cuadráticos irreducibles repetidos, 818–
819 donde
el denominador tiene factores lineales
repetidos, 815–817

Machine Translated by Google

Fracciones parciales, 813
Tasa de participación, 98
Partición, 954–957
Pascal, Blaise, 746, 887, 917
Cifras de Pascal, 891
Triángulo de Pascal, 887, 890, 891
Periodo de pago, 361
Peano, Giuseppe, 918
Tamaño percibido (angular), 426
Cubos perfectos, A25
Raíces perfectas, A83
Cuadrados perfectos, A25, A28
Triángulo perfecto, 594
Perihelio, 708, 736, 753
Perímetro, fórmulas para, A15
Período
fundamental, 431 de
movimiento armónico simple, 596 de
funciones sinusoidales, 446–448, 466–469 de
funciones trigonométricas, 431–432
Funciones periódicas, 431–432
Permutaciones, 902–905
computación, 905
definidos, 903
objetos distintos sin repetición, 903–905 objetos
distintos con repetición, 903 que involucran
n objetos no distintos, 908
Rectas perpendiculares, ecuaciones de, 65–67
Desplazamiento de fase, 465–
469 para representar gráficamente y = A sen1vx - w2 + B, 465–469
Física, vectores en, 645.
Funciones definidas por partes, 127–129
continuas, 942–943
Tono, 71
Píxeles, B1
Plano(s)
complejo, 636–640
definido, 636
eje imaginario de, 636
puntos de trazado en, 636–637
eje real de, 636
Curva(s) plana(s), 737–740
ecuaciones paramétricas para, 743–746
Planetas, órbita de, 708.
Trazar puntos, 38, 46–47, 612–614 graficar
ecuaciones por, 46–47
Punto(s)
coordenada de
la utilidad gráfica, B2 en la
recta numérica, esquina
A4, 834–835
distancia entre dos, 39 distancia
desde el origen hasta, 147–148 factible, 838, 839–840 inflexión, 106, 376
inicial, 645 trazar, 38,
46–47, 612–
614 graficar ecuaciones por, 46–47
coordenadas polares de, 613–
614 de tangencia, 77
terminal, 645
giros, 219–220
Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, 60–61
Eje polar, 612
Coordenadas polares, 612–621
conversión de coordenadas rectangulares, 616–618
conversión a coordenadas rectangulares, 614–615
definidas, 612
puntos de trazado usando, 612–614
de un punto, 613–614
eje polar de, 612 polo
de, 612
coordenadas rectangulares vs., 612
ecuaciones polares
cálculo y, 633
clasificación de, 631–632 de
cónicas, 730–737
análisis y gráficas, 732–734 conversión a
ecuación rectangular, 734
enfoque en el
polo; excentricidad e, 732–733 definida, 622
gráfica de, 621–
636 cardioide, 626–
627, 632 círculos, 631
mediante
conversión a coordenadas rectangulares, 622–625
definida, 622
lemniscata, 630, 632
limaçon con bucle interno, 628–629 , 632
limaçon sin bucle interior, 627–628, 632 trazando
puntos, 626–633 cuadrículas
polares para, 622 rosa,
629–630, 632 dibujando,
632–633 espiral, 630–
631 usando utilidad
gráfica, 623, característica histórica B11
en, 633 identificando, 622–625
probando simetría, 625–
626 transformando forma rectangular
a, 618–619 transformando a forma rectangular,
618–619 Forma polar de número complejo, 637–639
Cuadrículas polares, 622 Identidad de polarización,
667 Polo, 612, 625
Polinomios, 210–233, A22–A31
Chebyshëv, complejo
538n , 282 ceros
complejos de, 282, 285–286
Teorema de pares conjugados, 283–284
definido, 282
hallazgo, 285–286
función polinómica con ceros dados, 284–285 modelos
cúbicos a partir de datos, 230–231
definidos, 211, A23
grado de, 211–216, A23, A27 impar, 274–275, 283
dividiendo, 267–268, A25–A27
algoritmo para, 267–268
división sintética, A31–A35
comportamiento final de, 213, 220–222, 237, 238
ejemplos de, A23
factorización, A27–A28
por agrupación, A28
gráfico de, 212–222, 226–229
comportamiento final de, 220–222, 237, 238
suave y continuo, 212 procedimiento
paso a paso para, 226– 227 puntos de inflexión de, 219–220 usando límites en
ceros, 276 usando utilidad gráfica, 228–229 usando transformaciones, 215–216 usando intersecciones x, 217–218
característica histórica en, 278
identificación, 211–215
límite de, 934–935, 941
multiplicidad de, 216–218
primo, A27
ceros reales (raíces) de, 216–218, 267–281
Regla de los signos de Descartes, 270–271
hallazgo, 272–274
Teorema del valor intermedio, 276–277
número de, 270–271
Teorema de los ceros racionales, 271–272, 285
Teorema y factor del resto
Teorema, 267–270
repetido, 217
teorema para límites, 275–276 reconocer,
A23–A24 resolver, 272–275
fórmulas de productos
especiales, A24–A25 en forma estándar, 211, A23 términos de, 211, A23 cero, 211, A23
Funciones polinomiales, 941
continuas, 941
Desigualdades polinómicas, 260–261
resolución algebraica y gráfica, 260–261, 264
papel de la
multiplicidad en la resolución, 261 pasos para resolver, 261
Aumentos de
población en, 926, 963
mundo, 851
Vector de posición, 648–649
en el espacio, 669–
670 Ángulo positivo,
398 Real positivo números, A4
Potencia(s), 456. Véase también Exponente(s)
de i, A58–A59
límite de, 935
log de, 346
Powerball, 896
Funciones de potencia, 212–215
función exponencial vs., 317 gráfica
de, 213–215 de grado
impar, 214–215 propiedades
de, 214–215

Machine Translated by Google

Valor presente, 362, 365–366
Precio, equilibrio, 166–167
Polinomios primos, A27
Principal, 361, A63
Principal raíz enésima de un número real, A83
Raíz cuadrada principal, A9, A59
Probabilidad(es), 850, 911–921
Complemento Regla para encontrar, 916–
917 compuesto,
914 construcción de modelos, 911–
913 definido,
912 de resultados igualmente probables, 914–
915 de evento,
913 mutuamente excluyentes,
916 característica histórica, 917–918
resultado de, 912
espacio muestral, 911 –912
de unión de dos eventos, 915–916
Producto(s). Véase también Producto
escalar;
Multiplicación de números complejos,
A56–A57 en forma polar,
639–640 de
inercia, 545 límites de,
933–934 log
de, 346 especiales,
A24–A25 de dos
funciones, 93 de dos matrices, 799–
803, 808 vector (cruz),
655 Función del producto,
93 Fórmulas de producto a suma, 547–549
Movimiento de proyectil, 740–742
Proyección, vector, 663
Proyección de P en el eje x, 596 Proyección
de P en el eje y, 596 Prolado esferoide,
708 Expresiones racionales
propias, 813 Función racional propia, 239
Subconjuntos propios, 897 Ptolomeo,
514, 585 Número
imaginario puro, A55
Triángulo de Purkait, 587 Identidades
pitagóricas, 435, 516
Teorema de Pitágoras, 558, A14-A15
aplicando, A15 inverso de , A14-A15 como caso
especial de la ley
de los cosenos, 582 ternas
pitagóricas, A21

Cuadrante, ángulo que se encuentra dentro, 399
Ángulos cuadrantales, 399
funciones trigonométricas de, 414–416
Cuadrantes, 38
Carácter de ecuación(s)
cuadrática(s) de las soluciones de, A60 en
sistema de números complejos,
A59–A61
definido, A47
discriminante de, A50
negativo, A59
factorización, A47–A48
resolución
de completar el cuadrado, A48–A49
procedimiento para, A51
fórmula cuadrática, A49–A51, A60
Método de raíz cuadrada, A48 en
forma estándar, A47
Factores cuadráticos, irreducibles, 274, 814, 817–
819
Fórmula cuadrática, A49–A51, A60
Funciones cuadráticas, 179–192
definidas, 179
gráfica de
propiedades de, 183–185
pasos para, 188
usando su vértice, eje e intersecciones, 182–
187
usando transformaciones, 180–182
desigualdades que involucran, 201–
204 valor máximo o mínimo de, 186–187,
193–194 optimizaciones
y, 192 vértice y eje de
simetría de, 182–187

Modelos cuadráticos, 192–200 a
partir de datos, 196–197
a partir de descripciones verbales, 192–196
Cantidad, equilibrio, 166–167 Cantidad
demandada, 166–167 Cantidad
ofrecida, 166–167 Cuaterniones,
655 Cociente(s), 267,
268, A25. Véase también División de números
complejos
en forma polar, 639–640
en forma estándar, A57

diferencia, 90–91, 331 límite
de, 936–937, 941 log de,
346 división
sintética para encontrar,
A33–A34 de
dos funciones, 94
Identidad(es) de cocientes, 516
de funciones trigonométricas, 433

Radianes, 400–401
conversión entre grados y, 402–404

Ecuaciones radicales, A86–A88
definidas, A86
utilidad gráfica para resolver, B8
resolución, A86–A88
Radicales, A83
exponentes fraccionarios como, A87
índice de, A83
similar, A84
propiedades de, A84
exponentes racionales definidos usando,
A86–A87
simplificando, A84
Signo radical, A9
Radicante, A83
Desintegración radiactiva, 373–374
Radio, 72 de
esfera, 676
Rango, 83, 85
de función de valor absoluto, 125 de
función constante, 124
de función cosecante, 430 de
función coseno, 430, 446 de
función cotangente, 430 de
función cúbica, 125 de
función raíz cúbica, 125 de
función de mayor entero, 126 de función
identidad, 124 de función
inversa, 307 de función
logarítmica, 333 de modelos
logísticos, 376 de función
uno a uno, 303–304 de proyectil, 540 de
función recíproca,
125 de función secante, 430 de
función seno, 430, 444 de
función cuadrada, 124 de
función raíz cuadrada, 125
de función tangente , 430, 459 de
las funciones trigonométricas, 430

Tasa de cambio
promedio, 57, 115–116, 161–164
límite de, 937
de funciones lineales y exponenciales, 317–
319
instantáneas, 948–949
Tasa de interés, 361, A63
Tasas de rendimiento, efectivas, 364–365

Proporción común,
869 áurea,
860 conjugada, 860
Exponentes racionales, A86–A88
Expresiones racionales, A35–A43 suma
y resta,
A37–A39
método de mínimo común múltiplo
(MCM) para el complejo
A39-A40, descomposición
A40-A42. Consulte Definición de
descomposición
en fracciones
parciales, A35 impropia,
813–814 multiplicación y división, A36–A37
propia, 813–814
reducción a sus términos más bajos, A35–
A36 Funciones racionales, 234–259
problemas aplicados que involucran, 255
asíntotas de, 236–238
horizontal, 237, 239–241
oblicuo, 239–241
vertical, 237–239
continuo, 941–942
definido, 234
dominio de, 234–237
gráfico de, 245–255
construcción de función racional a
partir de, 254–255
comportamiento final de,
237 usando transformaciones,
236 con un agujero, 252–
254 impropia, 239
en términos más bajos, 235,
237 propia,
239 forma estándar de, 244

Machine Translated by Google

Desigualdades racionales, 262–264
papel de la multiplicidad en la resolución, 263 pasos para resolver, 263
Racionalizando el denominador, A85–A86
Números racionales, 234, A3, A54
Teorema de los ceros racionales, 271–272, 285
Rayos (medias líneas), 398
del ángulo central, 400–401
vértice de, 398
Eje real del plano complejo, 636
Número(s) real(es), A3–A4, A54
decimales aproximados, A3
conjugado de, A58
definido, A3
raíz enésima principal de, A83
cuadrado de, A54
Recta de números reales, A4
Parte real del número complejo, A55
Ceros reales (raíces) de funciones polinómicas, 267–281
hallazgo, 272–274
Teorema del valor intermedio, 276–277 número
de, 270–271
Teorema de los ceros racionales, 271–272, 285
Teorema y factor del resto Teorema, 267–270
repetido, 217
teorema de límites, 275–276 Función recíproca, 125, 461–462. Véase también cosecante; Secante Identidades recíprocas, 433, 516 Recíproco de número complejo en forma estándar, A57 Propiedad recíproca para desigualdades, A76, A78 Rectángulo, área y perímetro de, A15, A16 Coordenadas rectangulares (cartesianas), 38 convertidas a coordenadas polares, 616–618
polares coordenadas convertidas a, 614–615
coordenadas polares vs., 612 ecuaciones
polares graficadas mediante conversión a, 622–625 en el espacio, 668 Forma rectangular
(cartesiana) de número complejo, 637–639 Ecuaciones rectangulares para curva definida paramétricamente, 738–740
polar ecuaciones convertidas a, 618–619, 734
transformación a ecuación polar, 618–619 Cuadrícula
rectangular, 622 Fórmula recursiva, 855–856
para secuencias aritméticas, 864
términos de secuencias definidas por, 855–856
Forma escalonada de filas reducida, 776–780
Comando de referencia, B10
Reflexiones sobre el eje x o el eje y, 140–141
Refracción, 514
Regiomontanus, 585
Relación(es), 83–87. Véase también Función(es)
definida(s), 83
que describe, 84
expresiones de, 83–84
como función, 85–87
entrada a, 83
no lineal, 172–174 pares ordenados como, 83
Máximos y mínimos relativos de funciones, 112–113 Resto, 268, A25 división sintética para encontrar, A33–A34
Teorema del resto, 268-270
Ceros repetidos (soluciones), 217, A47
Decimales periódicos, A3
Reposo, ángulo de, 504
Resonancia, 600
Posición de reposo (equilibrio), 596
Fuerza resultante, 653
Repaso, A1–A91 de
álgebra, A1–A13 distancia en la recta numérica real, A5–A6 dominio de
variable, A7 evaluación de expresiones algebraicas, A6–A7
evaluar exponentes, A10 graficar desigualdades, A5
Leyes de los exponentes, A8–A9
recta numérica real, A4
conjuntos, A1–A4 simplificación de expresiones trigonométricas, 516–517
resolución de problemas de geometría, 41 raíces cuadradas, A9–A10 números complejos, A54–A62 de geometría, A14–A22
congruentes y similares triangulos, Fórmulas A16–A19, A15–A16
Teorema de Pitágoras y su inverso, A14–A15 de raíces
enésimas, A83–A84
racionalizando el denominador, A85–A86
simplificando, A83
simplificando radicales, A84 de polinomios, A22–A31 dividiendo, A25–A27 factorizando, A27–A28 monomios, A22–A23 reconociendo, A23–A24
fórmulas de productos especiales, A24–A25 división sintética de, A31–A35 de exponentes racionales, A86–A88
de expresiones racionales, A35–A43
suma y resta, A37–A39 complejo, A40–A42
multiplicación y división, A36–A37 reducción a sus términos más bajos, A35–A36
Revoluciones por unidad de tiempo, 406
Papiro Rhind, 876
Escala de Richter, 344
Ángulo recto, 399, A14
Cono circular recto, 689
Cilindro circular recto, volumen y área de superficie de, A16
Punto final derecho del intervalo, A73
Límite derecho, 939
Regla de la mano derecha, 668
Triángulos rectángulos, 558, 560–565, A14
aplicaciones de, 561–565
resolución, 560–565
Trigonometría de triángulo rectángulo, 558–570
Teorema del ángulo complementario, 560
identidades fundamentales, 433–435
valores de funciones trigonométricas de ángulos agudos, 558–560 Elevación, 56 Raíces, A44. Ver también Solución(es); Complejo de ceros, 641–643 límite de, 935
de multiplicidad 2 (doble raíz), A47 perfecto, A83 Raíz de multiplicidad m, 217n, A47 Rose, 629–630, 632 Método de lista, A1 Rotación de ejes, 723–727 análisis de ecuaciones usando, 726–727
fórmulas para, 724 identificar cónica sin, 728
Redondeo, A10 Errores de redondeo, 561 Forma escalonada de filas, 773–780
reducida, 776–780 Índice de filas, 771, 795 Operaciones de fila, 772–773 Vector de fila, 799 Comando Rref, B10
Ruffini, P., 278 Regla de los signos, Descartes, 270–271 Ejecutar, 56
Rutherford, Ernest, 721
Triángulos SAA, 572–573 Espacio muestral, 911–912 Triángulos SAS, 572, 583, 589–590 Ecuaciones satisfactorias, 46, A44 Desigualdades satisfactorias, 830 Curva de diente de sierra, 603 Escalar, 647, 798
Múltiplos escalares de matriz, 798–799 Escala de recta numérica, A4
Ángulo de escaneo (óptico), 545
Diagramas de dispersión, 171–172, 469–470 Schroeder, E., 918 Calculadoras científicas, A10 Secante, 412 continuo, 942, 943 definido, 558
dominio de, 429, 430 gráfico de, 461–463
inversa, 499–501
aproximando el valor de, 500–501 calculadora para evaluar, 500–501

Machine Translated by Google

definición de, 499
valor exacto de, 500
propiedades periódicas de, 431
rango de, 430
Recta secante, 115-116
Segundos, 400
Semilla, 644
Secuencias, 852–880
problemas de anualidades, 875–
876 aritmética, 862–868
diferencia común en, 862 definida,
862 determinante,
862–863 fórmula para, 863–
864 enésimo término de,
864 fórmula recursiva
para, 864 suma de, 865– 866
definido, 852 símbolo
factorial, 854–
855
Fibonacci, 856, 860
geométrico, 869–872
proporción común de, 869
definido, 869
determinante, 869–870
fórmula para, 870–871
enésimo término de,
870 suma de, 871–
872 gráfico de,
852 característica histórica en
adelante, 876 de un
patrón, 854 propiedades
de, 857 notación de suma, 856–857
suma de, 857–858
términos de, 852–854
alternancia, 854
definido por una fórmula recursiva, 855–856
general, 853
Conjunto(s), A1–
A4 complemento de, A2
correspondencia entre dos, 83 disjuntos,
A2–A3 elementos
de, 897–899, A1 vacío (nulo),
897, A1 igual, 897, A2 finito,
897 infinito, 897
intersección
de, A2

Mandelbrot, 644 de
números, solución A1-A4,
subconjuntos de
A44, 897 propio,
897 universal,
898, A2
Notación de constructor de conjuntos, A1
Índice de diversidad de Shannon, 342
Desplazamientos, funciones gráficas usando vertical y horizontal, 134–138, 141
Caso lado-ángulo-lado de triángulo congruente, A17
Caso de lado-ángulo-lado de triángulo similar, A17, A18
Lados
de la ecuación, 46, A44 de
la desigualdad, A5
Caso lado lado lado lado de triángulo similar, A18
Triángulos semejantes, A16–A19
Movimiento armónico simple, 595–598
amplitud de, 596
análisis, 597–598
movimiento circular y, 596
definido, 596
posición de equilibrio (reposo), 596
frecuencia del objeto en, 597
modelo para, 595–597
período de, 596
Interés simple, 361, A63–A64
Método simplex, 837n
Simplificando
expresiones racionales complejas, Expresiones
A40-A42 con exponentes racionales, A86–A88
raíces enésimas,
radicales A83, A84
regla de Simpson, 200
Seno, 412
de mejor ajuste,
473 continuo, 943
definido, 558
dominio de, 429, 430, 444
gráficos de, 443–457
amplitud y período, 446–448 ecuación
para, 452 puntos clave
para, 448–451 característica
histórica en, 422–423 hiperbólico, 331
inverso, 486–489
valor aproximado de,
488–489 definido, 486–487 valor exacto
de, 487–488 forma
implícita de, 487 propiedades
de, 492

Ley de
problemas aplicados, 410–412
definido, 572
rasgo histórico, 585 prueba de,
577
Triángulos SAA o ASA resueltos usando, 572–573
Triángulos SSA resueltos usando, 573–575
propiedades de, 444
periódico, 431
rango de, 430, 444
Fórmula de suma y diferencia para 525–527
ecuaciones trigonométricas lineales en, 530–532
Matriz singular, 804
Gráficos sinusoidales, 443–457, 601
amplitud y período, 446–448 ciclo de,
444, 448 ecuación
para, 452 puntos clave
para, 448–451 pasos para, 469

Modelos sinusoidales, 469–473
mejor ajuste,
473 horas de luz, 472–473
datos de temperatura, 469–471
Seis funciones trigonométricas
valores exactos de, 422
de ángulos cuadrantales, 414–416 de
t, 412–413
Pendiente, 56–59,
62 que contienen dos puntos,
57 líneas gráficas dadas, 59
de ecuación lineal, 62 de línea
secante, 117 Pendiente-
forma de intersección de la ecuación de la línea, 61–62
Gráfico suave, 212
Snell, Willebrord, 514 Ley
de refracción de Snell, 514 Solución(es),
A44. Véase también Ceros extraños, A86
de desigualdades,
A76 de problemas de
programación lineal, 839–840 ubicación de, 840
repetidos, 217, A47
de sistemas de
ecuaciones, 757, 762–764 de ecuaciones
trigonométricas, 505
Conjunto de soluciones de la ecuación, A44
Productos especiales, A24–A25

Velocidad angular, 405–
406 instantánea, 949–951
lineal, 405–406
Esfera, 676
volumen y superficie de, A16
Trigonometría esférica, 609
Esferoide, alargado, 708
Espiral, 630–631
Cuadrado(s)
de binomios (cuadrados perfectos), A25, A28
diferencia de dos, A24, A28 perfecto,
A25, A28
Función cuadrada, 124
Matriz cuadrada, 796
Raíz cuadrada(s), A9–A10, complejo
A83, 641 de
número negativo, A9, A59–A60 principal, A9,
A59
Función de raíz cuadrada, 122, 125
Método de raíz cuadrada, A48
Onda cuadrada, 604
Triángulos SSA, 573–575
Triángulos SSS, 572, 583–584, 590–591
Desviación estándar, A82
Números
complejos en forma estándar en, A55, A57–A59 potencia de, A58–
A59 cociente de dos, A57
recíproco de, A57 de
ecuación de círculo, 72
polinomios en, 211, A23
ecuaciones cuadráticas en, A47 de
función racional, 244
Posición estándar, ángulo hacia adentro, 398
Equilibrio estático, 654–655
Millas reglamentarias (ordinarias), 409
Función de paso, 126

Machine Translated by Google

Fórmula de Stirling, 891
Valoración de acciones, 160
Ángulo recto, 399
Estiramientos, graficar funciones usando, 138–140, 141
Desigualdades estrictas, A5
Cartas subíndices, 852
Subconjuntos, 897, A2
propiamente dicho, 897
Método de sustitución, 755, 758–759
sistemas de ecuaciones no lineales resueltos usando, 821–822
Resta. Véase también Diferencia(s) de
números complejos, A55 de
expresiones racionales, A37–A39 método
del mínimo común múltiplo (MCM) para, A39–A40 de vectores, 650 en el espacio, 670 Suma. Ver también Adición
de secuencias aritméticas, 865–866 de números complejos, A55 de
secuencias geométricas, 871–872 índice de, 856 de series
geométricas infinitas, 873 límites de, 933 de logaritmos,
347–348 de secuencias, 857–858 de dos cubos, A25 de
dos funciones, 93
gráfica de, 600–601 de
dos matrices, 796–798

Fórmulas de suma y diferencia, 523–536
para cosenos, 523–524
definidos, 523
para establecer identidades, 525–529 para
encontrar valores exactos, 524–527, 526–527 que involucran función trigonométrica inversa, 529–530 para senos, 525–527
para tangentes, 528–529
Función de suma , 93 Notación de suma, 856–857
Fórmulas de suma a producto, 548–549 Sol, declinación de, 497 Área de superficie, fórmulas para, A16 Sylvester, James J., 808
Simetría, 49–51 eje de parábola, 181 de función cuadrática, 182–187 eje de, de parábola, 690 utilidad
gráfica
para verificar, B5–B6
de ecuaciones polares, 625–626 con respecto al origen, 50 con respecto a la recta è = (eje y), 625
con respecto al eje polar (eje x), 625
con respecto al polo (origen), 625 con respecto
al eje x, 49, 50 con respecto al eje y, 50
División sintética, A31 – A35
Sistemas de ecuaciones, 756
consistentes, 757, 762
dependientes, 758
que contienen tres variables, 764–766 que contienen dos variables, 761–762
Regla de Cramer con, 791
equivalente, 760
graficando, 758
inconsistente, 757, 762 que
contiene tres variables, 764 que contiene dos variables, 761
Regla de Cramer con, 791
independientes, 758
soluciones de, 757, 762–764
Sistemas de desigualdades, 830–837
gráficas, 830–835
acotados y ilimitados
gráficas, 834
vértices o puntos de esquina, 834–835
Sistemas de ecuaciones lineales, 756–795
consistente, 758, 762
definido, 758
dependiente, 758
que contiene tres variables, 764–766 que contiene dos variables, 761–762 matrices para resolver, 777–778
determinantes, 784–795
cofactores, 788
Regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones que contienen tres variables, 789–791
Regla de Cramer para resolver un sistema. de dos ecuaciones que contienen dos variables, 785–787
menores de, 788
propiedades de, 791–792 3
por 3, 787–789 2
por 2, 784–785, 791
método de resolución de eliminación, 759–761, 762
equivalente, 760
ejemplos de, 756–758
gráficas, 758
utilidad gráfica para resolver, B9–B10
inconsistente, 758, 762
que contienen tres variables, 764 que contienen dos variables, 761 matrices para encontrar, 778–779
independientes, 758
matrices. Consulte Descomposición en fracciones parciales de matrices/matrices, 812–820
definido, 813 donde el denominador tiene un factor cuadrático irreducible no repetido, 817 donde el
denominador solo tiene factores lineales no repetidos, 814–815
donde el denominador tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos, 818–819
donde el denominador tiene factores lineales repetidos, 815–817
solución de, 757, 762–764
resolución, 757
método de sustitución de, 758–759
tres ecuaciones que contienen tres variables, 762–764
Sistemas de desigualdades lineales, gráfica de, 831–832, 839
Sistemas de ecuaciones no lineales, 821–829 método de eliminación para resolver, 822–825
característica histórica, 826
método de sustitución para resolver, 821–822
Sistemas de desigualdades no lineales, gráficas, 833–834
Presión sistólica, 456

Tablas, sobre utilidad gráfica, B4
Tangencia, punto de, 77
Función tangente, 412
continua, 942, 943 dominio de, 429, 430, 459 gráfica de, 458–461
Fórmulas de medio ángulo para, 542
característica histórica en adelante, 422–423 inversa, 490–492
definido, 490–491
valor exacto de, 492
forma implícita de, 491
propiedades de, 494
propiedades de, 459
periódico, 431
rango de, 430, 459
Fórmulas de suma y diferencia para, 528–529

Línea tangente
definida, 77, 947
ecuación de, 947 a
la gráfica de una función, 946–947
Método griego para encontrar, 77
Problema tangente, 946
Tangentes, Ley de, 581, 585
Tartaglia (Nicolás de Brescia), 278, 643
Tautocrona, 746
Punto terminal del segmento de línea dirigido, 645
Lado terminal del ángulo, 398
Terminación de decimales, A3
Términos
como, A23
de polinomio, 211, A23 de
secuencias, 852–854
alternantes, 854
definidos por una fórmula recursiva, 855–856
generales, 853
3 por 3 determinantes, 677, 787–789
Empuje, 611, 687
TI-84 Plus C, B3
Función ZCuadrado, B8
Tiempo, como parámetro, 740–743
Funciones trascendentales, 294
Transformaciones, 134–147, 693, 704, 716
combinando, 137-138

Machine Translated by Google

compresiones y estiramientos, 138–141 definidos, 134 gráficos
usando funciones
cosecantes y secantes, 462–463 de función coseno,
446 de función cotangente,
461 de funciones exponenciales,
322,
323–324
de funciones polinómicas, 215–216 de
funciones cuadráticas, 180–182 de
funciones racionales, 236
reflexiones sobre el eje x o el eje y, 140–141 de función
seno, 444–445 desplazamientos
verticales y horizontales, 134–138, 141
Matriz de
transición, 850 Eje transversal,
710, 731 Diagrama de árbol, 900
Triángulo(s). Véase
también Ley del área de los senos de, 589–595, A15 ASA, 572–573
congruente, A16–
A19 equilátero, 44 error, 44
isósceles, 44
catetos de,
558, A14
medianas de, 44
métrico, 587 oblicuo,
571–572
Pascal, 887, 890
perfecto, 594 correcto,
558, 560–565,
A14 problemas aplicados que
involucran, 561–565 resolución, 560–565 SAA, 572–573 SAS, 572,
583, 589–590
similar, A16–A19 SSA, 573–
575 SSS, 572, 583–584,
590–591

Suma triangular, 889
Número triangular, 861
Ecuaciones trigonométricas, 505–515
calculadora para resolver, 508
utilidad gráfica para resolver, 510
identidades para resolver, 509–510
que involucran un ángulo doble, 507
que involucra una función trigonométrica simple, 505–508 lineal,
507 lineal en
seno y coseno, 530–532 cuadrático en desde,
509 soluciones de, definido,
505
Expresiones trigonométricas, escritas algebraicamente, 502, 529–530
Funciones trigonométricas
de ángulos agudos, 558–560
aplicaciones de, 557–610
movimiento amortiguado, 598–600
graficar la suma de dos funciones, 600–601 que
involucran triángulos rectángulos, 561–565
Ley de los cosenos, 584–585
Ley de los senos, 582
Ley de tangentes, 581, 585
movimiento armónico simple, 595–598
calculadora para aproximar valores de, 421 círculo de radio r para evaluar, 422 gráficas cosecantes
y secantes, 461–463 dominio y rango de, 429–430 valor exacto de

de $\frac{\pi}{4}$ = 45°, 416–417, 419–420

de $\frac{\pi}{6}$ = 30° y $\frac{\pi}{3}$ = 60°, 417–421

dada una función y el cuadrante del ángulo, 435–438 usando propiedades
pares-impares, 438–439
identidades fundamentales de, 433–435
cociente, 433
recíproco, 433
característica histórica en, 422–423
período de, 431–432
cambio de fase, 465–469
para representar gráficamente y = A sen1vx - w2 + B,
465–469 propiedades de, 428 –442
Par-Impar, 438–439 de
ángulos cuadrantales, 414–416
trigonometría de triángulo rectángulo, 558–570
Teorema del ángulo complementario, 560
identidades fundamentales, 433–435 signos
de, en un cuadrante determinado, 432–433 gráficas
de senos y cosenos, 443–457
amplitud y período, 446–448, 466–469 ecuación
para, 452 puntos clave
para, 448–451 ajuste de curva
sinusoidal, 469–473 de t, 412–413 gráficas
tangentes y
cotangentes, 458–462 aproximación al círculo
unitario, 411– 428
Identidades trigonométricas, 515–523 básicas, 516
estableciendo, 517–520
Fórmulas de doble ángulo para 537–540
Fórmulas de suma y diferencia para, 525–529

Par-Impar, 516
Pitágoras, 516
Cociente, 516
Recíproco, 516
Trinomios, A23
Truncamiento, A10
Puntos de inflexión, 219–220
Determinantes 2 por 2, 677, 784–785 prueba a favor, 791

Umbra inversa, 423
Gráficos ilimitados, 834
Movimiento uniforme, A66–A67
Crecimiento desinhibido, 371–373
Unión de dos eventos, probabilidades de, 915–916

Círculo unitario, 72, 411–414
Vector unitario, 648, 651–652 en el espacio, 671
Juegos universales, 898, A2

Valor (imagen) de la función, 85, 87–89
Variable(s), A6, A23 compleja,
282 dependiente,
88 dominio de, A7
independiente, 88
en cálculo, 443

Costos variables, 69
Vector(es), 645–659
suma, 646, 650
algebraico, 648–649
ángulo entre, 661 columna,
799 componentes
de, 648, 649 horizontal y vertical,
649 descomposición, 662–664
definido, 645 diferencia de,
646 dirección
de , 645, 651–653
producto escalar de dos, 660–661
igualdad de, 646, 649 hallazgo, 652–653 fuerza, 652 geométrico,
645–646 gráficas,
647–648
característica histórica,
655 magnitudes de, 645,
648, 650–651, 652–653 modelando
con, 653–655 multiplicando por números

geométricamente, 647 objetos
en equilibrio estático, 654–655
ortogonal, 662–664
paralelo, 662 en física, 645 posición, 648–649
fila, 799 múltiplos escalares
de , 647, 650–
651, 660 en el
espacio, 667–676
ángulo
entre dos vectores, 672 producto cruzado de dos, 677–678 ángulos de
dirección, 673–675 fórmula de distancia, 668–669 producto escalar, 671–672
operaciones en, 670 –671
ortogonal a dos vectores dados, 680 vectores de posición, 669–670 coordenadas
rectangulares, 668 restando, 650 unidad, 648, 651–652 velocidad, 652–653 cero, 646

Proyección vectorial, 663
Velocidad, instantánea, 949–951
Vector de velocidad, 652–653
Diagramas de Venn, A2
Descripciones verbales
modelos lineales de, 165–167 modelos
cuadráticos de, 192–196

Machine Translated by Google

Vértice/vértices, 834–835 de
cono, 689 de
elipse, 699 de
hipérbola, 710 de
parábola, 181, 690 de
función cuadrática, 182–187 de rayo,
398
Asíntota vertical, 237–239 multiplicidad
y, 238–239
Componente vertical del vector, 649
Línea vertical, 56–57, 623, 631
Prueba de línea vertical, 100
Gráficos comprimidos o estirados verticalmente,
138–141
Desplazamientos verticales, 134–138, 141
Viète, François, 585
Ángulo de visión, 426–427, 497
Rectángulo de visualización, 39,
configuración B1–B3, B1
Volumen, fórmulas para, A16

Wallis, John, 643 Olas.
Véase también Cuadrado de movimiento armónico
simple, 604
velocidades de desplazamiento,
514 Peso, 611, 687
Galerías susurrantes, 705–706
Alas, avión, 611, 687.
Trabajo, 676
producto escalar para calcular, 664–665
Población mundial, 851, 926, 963

eje x, 38
proyección de P en, 596 reflexiones
sobre, 140–141 simetría con
respecto a, 49, 50, 625 coordenada x, 38
intersección x, 48
polinomio graficado
usando, 217–218 de función cuadrática, 183
plano xy, 38, 668 plano xz, 668

Yang Hui, 890 eje
y, 38
proyección de P en el, 596
reflexiones sobre, 140–141
simetría con respecto a, 50, 625 coordenada
y (ordenada), 38 intercepción y, 48,
62 plano yz, 668

Bonos cupón cero, 369
Terremoto de nivel cero, 344
Matriz cero, 798
Polinomio cero, 211, A23
Propiedad de producto cero, A4, A47
Límites
de ceros en, complejo
275–276, de polinomios, 281–284, 285–286

Teorema de pares conjugados,
283–284
definido, 282
hallazgo, 285–286
función polinómica con ceros dados,
284–285 real, de
polinomios, 216–218, 267–281

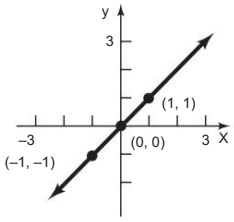
Regla de los signos de Descartes, 270–271
hallazgo, 272–274
Teorema del valor intermedio, 276–277
número
de, 270–271
Teorema de los ceros racionales,
271–272, 285
Teorema y factor del resto
Teorema, 267–270
repetido, 217
teorema de límites, 275–276
Vector cero, 646

Machine Translated by Google

BIBLIOTECA DE FUNCIONES

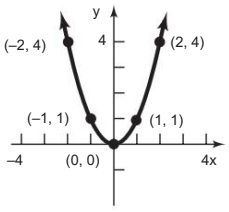
Función de identidad

f1x2 = x



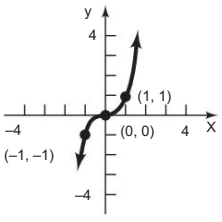
Función cuadrada

f1x2 = x2



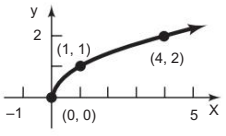
Función de cubo

f1x2 = x3



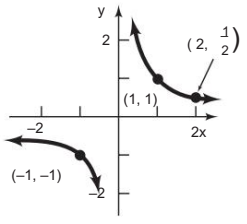
Función de raíz cuadrada

f1x2 = 1x



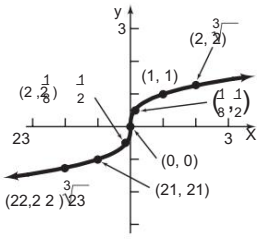
Función recíproca 1 f1x2 =

1
x



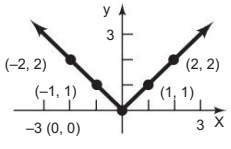
Función de raíz cúbica

f1x2 = 23x

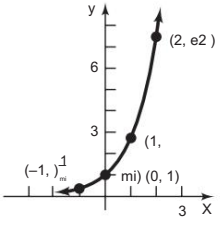


Función de valor absoluto

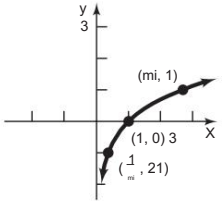
f1x2 = 0x0



Función exponencial f1x2 = ex

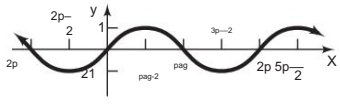


Función Logaritmo Natural f1x2 = lnx



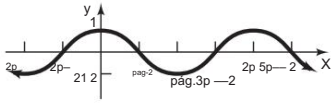
Función seno

f1x2 = senx

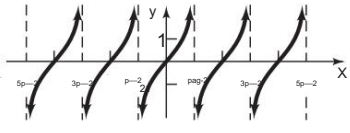


Función coseno

f1x2 = porque x

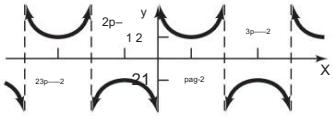


Función tangente f1x2 = tan x



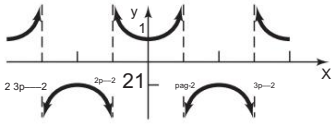
Función cosecante

f1x2 = cscx

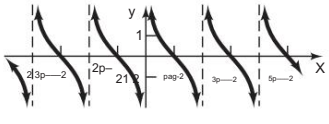


Función secante

f1x2 = segundo x



Función cotangente f1x2 = cot x



Machine Translated by Google

FÓRMULAS/ECUACIONES

Fórmula de distancia

Si P1 = 1x1, y12 y P2 = 1x2, y22, la distancia de P1 a P2 es

$$d1P1, P22 = 31x2 - x12^2 + 1y2 - y12^2$$

Ecuación estándar de un círculo

La ecuación estándar de un círculo de radio r con centro 1h, k2 es

$$1x - h2^2 + 1 \text{ año} - k2^2 = r^2$$

Fórmula de pendiente

La pendiente m de la recta que contiene los puntos P1 = 1x1, y12 y P2 = 1x2, y22 es

$$\text{metro} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} \quad \text{si } x1 \neq x2$$

m no está definido si x1 = x2

Punto-pendiente Ecuación de una recta

La ecuación de una recta con pendiente m que contiene el punto 1x1, y12 es

$$y - y1 = m1x - x12$$

Intersección de la pendiente Ecuación de una recta

La ecuación de una recta con pendiente m e intersección con el eje b es

$$y = mx + b$$

Fórmula cuadrática

Las soluciones de la ecuación ax2 + bx + c = 0, a ≠ 0, son

$$x = \frac{- b \{ \sqrt{2b2 - 4ac}}{2a}$$

Si b2 - 4ac 7 0, hay dos soluciones reales desiguales.
Si b2 - 4ac = 0, existe una solución real repetida.
Si b2 - 4ac 6 0, hay dos soluciones complejas que no son reales.

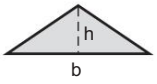
FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

Círculo

r = Radio, A = Área, C = Circunferencia

$$A = pr^2 \qquad C = 2pr$$

Triángulo



b = Base, h = Altitud (Altura), A = área

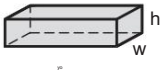
$$\text{Una} = \frac{1}{2} bh$$

Rectángulo

l = Largo, w = Ancho, A = área, P = perímetro

$$A = lw \quad P = 2l + 2w$$

Caja rectangular (cerrada)



l = Largo, w = Ancho, h = Alto, V = Volumen, S = Área de superficie

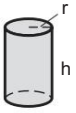
$$V = lwh \qquad S = 2lw + 2lh + 2wh$$

Esfera

r = Radio, V = Volumen, S = Área de superficie

$$V = pr^3 \frac{4}{3} \qquad S = 4pr^2$$

Cilindro circular derecho (cerrado)



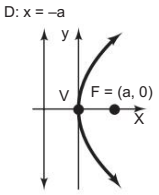
r = Radio, h = Altura, V = Volumen, S = Área de superficie

$$V = prh^2 \qquad S = 2pr + 2prh^2$$

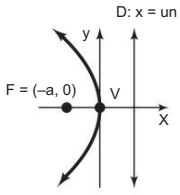
Machine Translated by Google

CÓNICAS

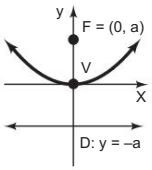
Parábola



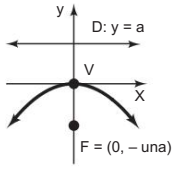
y2 = 4ax



y2 = - 4ax

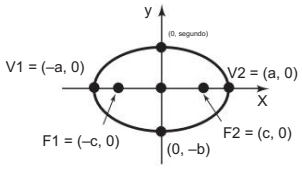


x2 = 4ay

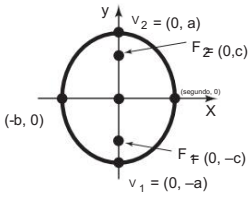


x2 = - 4ay

Elipse

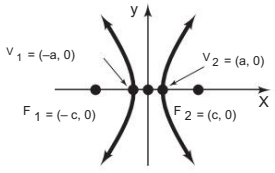


$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{} = 1$, a 7 b, c2 = a2 - b2 b2



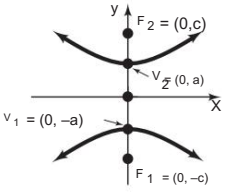
$\frac{x2}{b2} + \frac{y2}{a2} = 1$, a 7 b, c2 = a2 - b2

Hipérbola



$\frac{x2}{a2} - \frac{y2}{b2} = 1$, c2 = a2 + b2

Asíntotas: y = x, y = - x $\frac{b}{a}$ $\frac{b}{a}$



$\frac{y2}{a2} - \frac{x2}{b2} = 1$, c2 = a2 + b2

Asíntotas: y = $\frac{a}{}$ x, y = - x $\frac{a}{}$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

loga 1MN2 = logaM + logaN

log a $\frac{M}{N}$ b = logaM - logaN

logaMr = r logaM

logaM = iniciar $\frac{\text{registroM}}{\text{sesión}} = \frac{\text{lnM}}{\text{lna}}$

ar = er en un

PERMUTACIONES/COMBINACIONES

0! = 1 1! = 1

¡norte! = n1n - 12 # c# 3 # 2 # 1

$P1n, r2 = \frac{¡norte!}{1n - r2!}$

$C1n, r2 = un\ norte\ eb = \frac{¡norte!}{1n - r2!r!}$

TEOREMA DEL BINOMIO

1a + b2 norte = un + un norte 4 bban-1 + una 2 n bb2 an-2

+ g+ una norte-1 bbn-1 a + bn

SECUENCIA ARITMÉTICA

a1 + 1a1 + d2 + 1a1 + 2d2 + g+ 3a1 + 1n - 12d4

$= \frac{\text{norte}}{} 32a1 + 1n - 12d4 = 2 \frac{\text{norte}}{2} 1a1 + an2$

SECUENCIA GEOMÉTRICA

a1 + a1r + a1r 2 + g+ a1r n-1 $a1 \# \frac{1- r = \text{norte}}{1- r}$

SERIES GEOMÉTRICAS

Si 0r0 6 1, a1 + a1r + a1r 2 + gramo = $\sum_{=1}^{q}$ un a1rk k-1

$= \frac{a1}{1- r}$

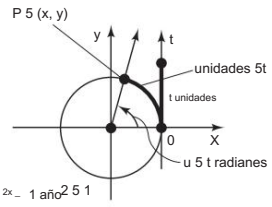
Machine Translated by Google

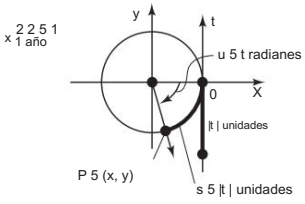
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

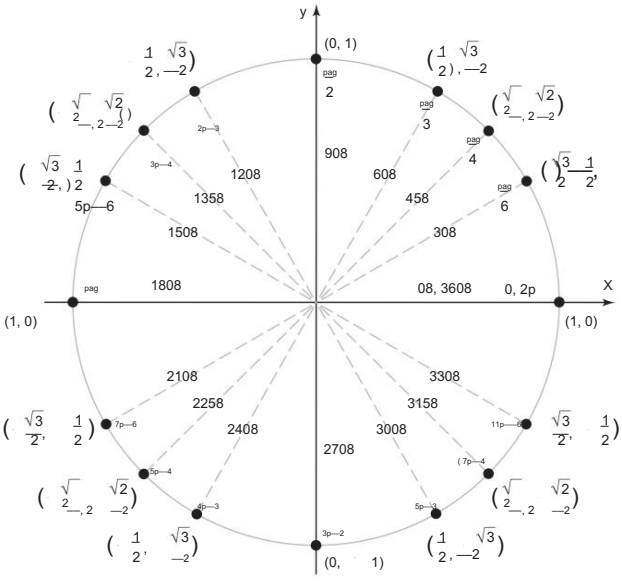
Sea t un número real y sea P = 1x, y2 el punto del círculo unitario que corresponde a t.

sint = y costo = x tan t = $\frac{y}{x}$, x ≠ 0

csc t = $\frac{1}{}$, y ≠ 0 seg t = y $\frac{1}{x}$, x ≠ 0 cot = $\frac{x}{y}$, y ≠ 0







IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades fundamentales

tanú = $\frac{\text{sinú}}{\text{porque tú}}$ cuna u = $\frac{\text{porque tú}}{\text{sinú}}$

csc tu = $\frac{1}{\text{sinú}}$ segundo u = $\frac{1}{\text{porque tú}}$ cuna u = $\frac{1}{\text{tanú}}$

sen2 u + cos2 u = 1

tan2 u + 1 = seg2 u

cot2 u + 1 = csc2 u

Fórmulas de medio ángulo

pecado $\frac{tu}{2}$ = { A 1 - porque u

porque $\frac{tu}{2}$ = { A 1 + porque u

broncearse $\frac{tu}{2}$ = $\frac{1 - \text{porque tú}}{\text{sinú}}$

Fórmulas de doble ángulo

seno 12u2 = 2 seno cos u

cos 12u2 = cos2 u - sen2 u

cos 12u2 = 2 cos2 u - 1

porque 12u2 = 1 - 2 sen2 u

tan 12u2 = 1 $\frac{2 \text{ tanu}}{\text{- tan2 u}}$

Identidades pares-impares

sen1 - u2 = - senú csc1 - u2 = - csc u

cos1 - u2 = cos u seg1 - u2 = seg u

tan1 - u2 = - tanu cuna1 - u2 = - cuna u

Fórmulas de producto a suma

sina sinb = $\frac{1}{2}$ [cos1a - b2 - cos1a + b2]

cosa cosb = $\frac{1}{2}$ [cos1a - b2 + cos1a + b2]

sina cosb = $\frac{1}{2}$ [sen1a + b2 + sen1a - b2]

Fórmulas de suma y diferencia

sen1a + b2 = sina cosb + cosa sinb

sin1a - b2 = sina cosb - cosa sinb

cos1a + b2 = cosa cosb - sina sinb

cos1a - b2 = cosa cosb + sina sinb

tan1a + b2 = 1 - $\frac{\text{tana + tanb}}{\text{tana tanb}}$

tan1a - b2 = 1 + $\frac{\text{tana - tanb}}{\text{tana tanb}}$

Fórmulas de suma a producto

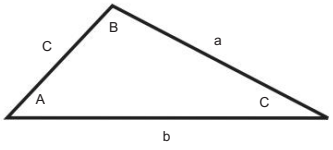
sina + sinb = 2 pecado $\frac{a+b}{2}$ porque $\frac{a-b}{2}$

sina - sinb = 2 pecado $\frac{a-b}{2}$ porque $\frac{a+b}{2}$

cosa + cosb = 2 cos $\frac{a+b}{2}$ porque $\frac{a-b}{2}$

cosa - cosb = - 2 pecado pecado $\frac{a+b}{2}$ $\frac{a-b}{2}$

RESOLVER TRIÁNGULOS



Ley de los senos

$\frac{\text{pecadoA}}{a} = \frac{\text{pecadoB}}{b} = \frac{\text{pecadoC}}{C}$

Ley de los cosenos

a2 = b2 + c2 - 2bc cosA

b2 = a2 + c2 - 2ac cosB

c2 = a2 + b2 - 2ab cosC